1

Capitolo I15
prime caratterizzazioni delle funzioni-RtR

Contenuti delle sezioni

25 pagine

I150.01 In questo capitolo inizia lo studio sistemaico delle funzioni-RtR, cioè delle funzioni di una variabile reale a valori reali, le entità fondamentali per la costruzione dell'analisi infinitesimale.

Nelle pagine che seguono si trattano prevalentemente funzioni-RtR generiche, caratterizzate solo dal loro genere $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ e si esaminano solo le proprietà che riguardano le loro notazioni, il loro dominio, gli ordinamenti dei valori che assume la variabile indipendente in relazione con i valori che assume la variabile dipendente e i cambiamenti delle funzioni stesse che vengono indotti dalle trasformazioni basilari (traslazioni, omotetie e riflessioni) cui si può sottoporre il piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'ambiente nel quale le funzioni si collocano.

Va segnalato che tuttavia in alcuni punti si assume il punto di vista più generale delle funzioni-RdtRd, cioè si trattano le funzioni del genere $\lceil \mathbb{R}^{\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times d} \rceil$, con n e d generici interi positivi.

In queste pagine avremo modo di introdurre anche alcune particolari funzioni reali di variabile reale, sia per fornire esempi, sia per introdurre strumenti che aiutano ad avviare una classificazione dell'ampio insieme delle importanti entità matematiche che sono le funzioni-RtR.

I15 a. notazioni per le funzioni-RtR

I15a.01 In questo capitolo e in molti successivi i protagonisti sono le funzioni del genere $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$, i sottoinsiemi funzionali del piano-RR. Il loro insieme viene denotato significaativamente con **FunRtR**.

Spesso faremo riferimento a entità collegate a una generica funzione-RtR; per queste entità ci serviremo di più notazioni tipiche.

Per una funzione-RtR generica di solito sarà usato un semplice identificatore, tipicamente f, F o ϕ; talora saranno adottati identificatori differenziati come f_α dove α può denotare un intero o in una lettera, come F_i con $i = 0, 1, 2, ..., n$ o come ϕ_+.

Più spesso invece delle notazioni come la precedente f_α ci serviremo delle scritture "suggestive" della forma $f_\alpha(x)$. Qui si intende che x rappresenti, genericamente, la variabile indipendente il cui campo di variabilità spesso si lascia imprecisato.
Questa scrittura più estesa, sottacendo i rischi di ambiguità, va considerata equivalente a quella ridotta al solo identificatore; come nella tradizione, si ritiene che nell'*esposizione* essa risulti quasi sempre più intuitiva.

La notazione della forma $f_\alpha(x)$ spesso vuole essere rappresentativa di una scrittura nella quale la funzione è individuata da una specifica espressione esplicita nella quale possono comparire, oltre alla variabile, costanti come π, operatori algebrici, funzioni speciali di qualche tipo noto (esponenziali, logaritmiche, trigonometriche, ...) e altre costruzioni come derivazione, integrazione definita e antiderivazione.
Queste espressioni (la cui forma dovrà essere meglio precisata) sono dette **espressioni analitiche**.

La notazione $f_\alpha(x)$ può far parte di una definizione della forma $f_\alpha(x) := \mathcal{E}(x)$, dove $\mathcal{E}(x)$ rappresenta una espressione ben definita; questa definizione può considerarsi una abbreviazione della $f_\alpha(x) := \lceil x \in D_\alpha \nVdash \mathcal{E}_\alpha(x) \rceil$.

Esempi di queste espressioni: $f_a(x) := \dfrac{x^2+2}{a+\sqrt{x^3+\pi}}$, $f(x) := \dfrac{1}{2\,\pi}\sin(2\,\omega x) + \mathsf{e}^{-x^2}$.

I15a.02 Nel presente capitolo per l'entità dominio della f_α useremo, l'abbreviazione $D_{f_\alpha(x)} := \mathsf{dom}(f_\alpha)$ o, dove possibile, la più sbrigativa D_{f_α}.

Per il codominio della f_α useremo invece la scrittura $C_\alpha := \mathsf{cod}(f_\alpha(x)$ o la più sbrigativa C_{f_α}.

Per l'insieme dei punti di accumulazione del dominio D_α useremo l'abbreviazione $\mathsf{A}_\alpha := \boldsymbol{Adrn}(f_\alpha)$.

I15a.03 In molte circostanze risulta vantaggioso fare riferimento a diversi ben definiti tipi di coppie, terne, quaterne, ..., in generale tipi di liste, che accanto a una entità primaria presentano altre entità loro collegate che rispetto nei confronti della primaria svolgono ruoli ancillari.
Queste liste consentono di definire quelle che chiamiamo **entità accessoriate**, Esse possono essere notevolmente utili nelle presentazioni di considerazioni generali e in particolare nelle definizioni delle situazioni piuttosto elaborate che si intendono analizzare accuratamente.

Anche per identificare questi tipi di entità conviene servirsi di specificazioni sincopate.

Osserviamo che queste liste di notazioni, per la dipendenza dalla prima dalle rimanenti sono presentate con informazioni ridondanti.

Nelle pagine che seguono compaiono liste di entità accessoriate che presentano inizialmente una funzione-RtR e la corredano con entità derivabili in qualche modo da essa.

Cominciamo a introdurre i primi tipi di queste liste.

Diciamo **coppia-fD** una coppia costituita da un identificatore di funzione $f_\alpha(x)$, tipicamente costituito da un'espressione analitica, e da un insieme $D_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ che si richiede o si propone essere il dominio della funzione che la coppia individua.

Diciamo **terna-fDA** una sequenza della forma $\langle f_\alpha, D_\alpha(x), \mathsf{A}_\alpha \rangle$ costituita da una funzione-RtR f_α, dal suo dominio D_α e dall'aderenza di tale dominio $\mathsf{A}_\alpha := \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(f_\alpha))$.

Diciamo **terna-fDx** una sequenza della forma $\langle f_\alpha, D_\alpha, \overline{x} \rangle$ costituita da una funzione-RtR f_α, dal suo dominio D_α, e da un reale $\overline{x}$ appartenente al suo dominio.

Diciamo **quaterna-fDAx** una sequenza della forma $\langle f_\alpha, D_\alpha, \mathsf{A}_\alpha, x_0 \rangle$ costituita da una funzione-RtR f_α, dal suo dominio D_α, dall'aderenza del precedente insieme A_α e da un particolare punto x_0 appartenente allo stesso A_α.

Altre liste accessoriate le incontreremo tra breve.

I15a.04 Similmente a quanto si è fatto per le successioni e le serie di reali, anche per le funzioni-RtR introdurremo varie costruzioni che portano a entità che è lecito considerare dei "limiti" [I16]; anche per queste risulta opportuno prendere in considerazione il cosiddetto **insieme dei reali ampliato**

(1) $$\mathbb{R}_{\pm]iEf} := \mathbb{R} \dot\cup \{-\infty, +\infty\} .$$

A tale insieme si assegna la struttura di campo parziale aggiungendo alle regole sulle operazioni aritmetiche sui numeri reali le regole di composizione che seguono.

(2) $$\begin{array}{c|ccc} + & -\infty & r & +\infty \\ \hline -\infty & -\infty & -\infty & ? \\ r' & -\infty & r+r' & +\infty \\ +\infty & ? & +\infty & +\infty \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|ccccc} \cdot & -\infty & -r_1 & 0 & r_2 & +\infty \\ \hline -\infty & +\infty & +\infty & ? & -\infty & -\infty \\ -r_3 & +\infty & r_1 \cdot r_3 & 0 & -r_2 \cdot r_3 & +\infty \\ 0 & ? & 0 & 0 & 0 & ? \\ r_4 & -\infty & -r_1 \cdot r_4 & 0 & r_2 \cdot r_4 & +\infty \\ +\infty & -\infty & -\infty & ? & +\infty & +\infty \end{array} \quad ,$$

(3) $$\begin{array}{c|ccc} -_u & -\infty & r & +\infty \\ \hline & +\infty & -r & -\infty \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|ccccc} \cdot & -\infty & -r_1 & 0 & r_2 & +\infty \\ \hline & 0 & -1/r_1 & ? & 1/r_2 & 0 \end{array} \quad .$$

I15a.05 Per talune considerazioni conviene servirsi anche dell'entità che denotiamo con ∞ per ottenere il cosiddetto **insieme dei reali compattificato**

(1) $$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \dot\cup \{\infty\} \quad .$$

L'entità ∞ si può pensare come la fusione di $-\infty$ e $+\infty$. Per aiutare l'immaginazione può essere utile pensare che l'insieme $\overline{\mathbb{R}}$ si ottenga flettendo l'asse reale e fondendo le sue "estremità" $-\infty$ e $+\infty$ nel "punto" ∞.

Una trattazione più corretta fa riferimento a una ben definita biiezione tra i punti della retta $\mathbb{R}$ e i punti della circonferenza K_{ster} tangente alla retta nell'origine alla quale conviene assegnare il diametro di valore 1; *ster* intende abbreviare "stereografica".

Chiamiamo N il punto di K_{ster} diametralmente opposto all'origine (ricorda il polo Nord), consideriamo il punto P variabile sulla retta e chiamiamo P' l'intersezione con K_{ster} del segmento $\overline{NP}$;

la biiezione annunciata, che chiameremo **proiezione stereografica bidimensionale dal polo N** è individuata dall'espressione

(2) $$\lceil P \in \mathbb{R} \mapsto P' \rceil$$

Si osserva che quando il punto P si avvicina all'origine lo stesso accade a P', quando P tende a $-\infty$ P' si avvicina a N secondo il verso orario, quando P tende a $+\infty$ P' si avvicina a N secondo il verso antiorario.

I15a.06 Esaminiamo la corrispondenza tra intervalli sulla retta reale, limitandoci agli intervalli aperti, e gli archi (sicuramente privi di punti ripetuti) loro associati su K_{ster}.

Innanzi tutto conviene osservare che la riflessione della retta reale rispetto all'origine è un sottoinsieme della riflessione della K_{ster} rispetto alla retta verticale pder ml'origine $\overline{ON}$; come ogni riflessione, anzi come ogni biiezione sul piano-RR, la suddetta riflessione sul va intesa come insieme di coppie di punti dello stesso piano-RR.

A questa coppia di involuzioni, una contenuta nell'altra, è utile associare una biiezioni tra costruzioni sulla retta reale e tra costruzioni su K_{ster} che chiamiamo **biiezione-ster** e denotiamo con β_{ster}.

Ad ogni intervallo finito I sulla retta reale corrisponde un arco su K_{ster} che ha le estremità in due due punti diversi da N; quando P si muove su I da sinistra a destra, il punto corrispondente punto P' si muove sull'arco secondo il verso positivo, ossia antiorario.

Vi sono poi gli archi che hanno una estremità in N e contengono punti di K_{ster} non lontani da N e raggiungibili con movimenti orari: essi sono associati agli intervalli illimitati della forma $(-\infty, a)$.
Gli archi ottenuti applicando β_{ster} dai precedenti sono associati agli intervalli illimitati della forma $(b, +\infty)$.
Infine gli archi che contengono N sono associati agli insiemi della forma $(-\infty, a) \dot\cup (b, +\infty)$ con $a < b$.
Questa corrispondenza suggerisce di chiamare gli intervalli degli ultimi tre tipi **intervalli illimitati** di $\mathbb{R}_{\mathfrak{i}}$.

Segnaliamo che la biiezione β_{ster} si può considerare la riduzione di una biiezione in $\mathbb{R}^{\times 3}$ ottenuta estendendo la circonferenza K_{ster} alla sfera più piccola che la contiene e che essa divide in due parti congruenti.

I15a.07 Come vedremo per lo studio delle funzioni-RtR dovremo servirci di coppie costituite da un intervallo aperto della forma (a,b) e da un punto che può appartenere all'intervallo o coincidere con una sua estremità. Una tale coppia la chiameremo **intervallo puntato**.

Vedremo inoltre che risulta conveniente assimilare gli intervalli della forma $(-\infty, a)$ a quelli della forma (c, a).
Vedremo anche che gli intervalli limitati e illimitati della retta reale conducono ad attribuire alla retta reale quella che chiameremo "topologia compattala" della circonferenza.
Sarà evidente che questo modo di esprimersi presenta interessanti vantaggi.

I15 b. classificazione delle funzioni-RtR derivante dal dominio

I15b.01 Nella matematica e nelle sue applicazioni si incontra una grande varietà di funzioni dei diversi generi e in particolare di funzioni-RtR.
Un primo elemento per classificare queste entità è costituito dal rispettivo dominio.

Per cominciare ad attribuire un utile ordine al complesso delle funzioni osserviamo che molti di questi insiemi di coppie vengono introdotti attraverso espressioni per le quali è facile individuare un sovradominio, mentre le espressioni che ne definiscono altre non rendono facile individuare un tale insieme.
Nel primo caso parleremo di "sovradominio che si impone naturalmente", intendendo che un tale sovradominio contiene sicuramente l'effettivo dominio della funzione anche nei casi nei quali quest'ultimo insieme non è (ancora) noto.

Le funzioni con i domini più semplici sono le funzioni finite: il dominio di ciascuna di esse è un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$; le abbiamo già incontrate in B13.

Vengono poi le funzioni con dominio numerabile; tra queste rivestono importanza basilare le successioni, cioè le funzioni aventi come dominio $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ o un insieme in una semplice biiezione con questi, in particolare $\mathbb{Z}$.
Le successioni di interi le abbiamo già incontrate, un po' episodicamente, nel tomo B e le approfondiremo in D20 e in molte altre pagine del tomo D.

Le successioni del genere $\lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$, già incontrate in B35 e in B36 nella accezione più particolare di successioni di razionali, sono state riprese in I12 e I13.

Queste successioni si possono descrivere colloqualmente come allineamenti discreti e illimitati di numeri reali (o razionali, o algebrici, o reali costruibili).

Conviene tuttavia sottolineare l'opportunità di considerare le suddette funzioni come casi particolari di funzioni-RtR, in quanto numerose costruzioni e proprietà che le riguardano possono essere presentate in modo più organico e le loro proprietà possono essere trattate in modo più unitario considerandole casi particolari appartenenti a **FunRtR**.

Per esempio le successioni di numeri reali possono essere convenientemente considerate funzioni-RtR a dominio numerabile.

I15b.02 Altre funzioni-RtR con domini semplici sono quelle definite in un intervallo. Spesso occorre distinguere i casi di intervallo limitato e quelli di intervallo illimitato.

Esempio di funzione il cui dominio è un intervallo finito è la $y = \sqrt{(1-x^2)}$; a essa è naturale assegnare come dominio l'intervallo $[-1,1]$.

Esempio di funzione avente come dominio un intervallo illimitato in una direzione è $\sqrt{(x)}$: per il suo dominio si impone naturalmente la scelta $\mathbb{R}_{0+}$.

Sono molti gli esempi di funzioni aventi come dominio l'intero $\mathbb{R}$: tutti i polinomi, le funzioni esponenziali e^x o B^x per ogni $B \in \mathbb{R}_+$, le funzioni seno e coseno, le funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico.

A livello intuitivo possiamo dire che ciascuna delle funzioni precedenti ha un grafico che può essere disegnato su carta da un dispositivo che lascia una traccia (penna, matita, ...) muovendosi muove in modo continuo.
Tra queste funzioni-RtR sono particolarmente interressanti le cosiddette **funzioni lisce**, la cui definizione sarà precisata più avanti.

Altre funzioni di elevato interesse hanno grafico discontinuo: esempi di tali funzioni definite per ogni x reale sono $\text{sign}x$, $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$, la **funzione mantissa** $x - \lfloor x \rfloor$, la $\lceil x \rceil - x$ e la **funzione intero approssimante** $\lceil x + 1/2 \rceil$.

I15b.03 Vi sono inteessanti funzioni il cui dominio è costituito da due o più intervalli privi di punti comuni.

La funzione $\sqrt{x^2 - 1}$ è definita per $x \leq -1$ e per $1 \leq x$; tale dominio è costituito da due intervalli illimitati separati da un intervalo di ampiezza 2 che può essere significtivamente chiamato "gap"; questo dominio si può presentare anche come intervallo comprendente ∞.

La funzione $\dfrac{1}{x}$ ha un dominio costituito dai due intervalli illimitati $\mathbb{R}_-$ e $\mathbb{R}_+$ separati solo dall'origine della retta reale, cioè ha come dominio $\mathbb{R}_{nz}$.

Altre funzioni hanno il dominio costituito da più intervalli mutuamente disgiunti. La funzione $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-5)}$ ha il dominio costituito dagli intervalli $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,5)$ e $(5, +\infty)$.

Segnaliamo inoltre le funzioni il cui dominio è costituito da un'infinità numerabile di intervalli mutuamente disgiunti. La funzione $\sqrt{\sin x}$ ha come dominio $\dot{\bigcup}_{j \in \mathbb{Z}} [2\,j\,\pi\ ,\ (2\,j+1)\pi]$.

I15b.04 Gli esempi dati finora riguardano funzioni fornite da espressioni abbastanza semplici, espressioni contenenti operatori razionali, algebrici, trigonometrici o comunque dotati di chiari significati numerico-geometrici che possono essere valutate concretamente mediante programmi si servono di distinzioni esprimibili mediante clausole condizionali e disuguaglianze.

Per queste funzioni risulta del tutto agevole la attribuzione di un dominio "naturale" che sia il più esteso insieme di numeri reali in grado di rendere calcolabili le espressioni de loro valori.

Un altra categoria di funzioni-RtR da distinguere con chiarezza è costituito da quelle definite nei molti altri modi che consentono di calcolarne i valori; si tratta di funzioni-RtR associabili ad algoritmi in grado di fornire loro valori precisi o illimitatamente approssimabili.
Questa categoria è poco definita, come poco definito è l'insieme degli algoritmi sopra accennati.

Più generali e generiche sono le funzioni definite come insiemi funzionali di coppie appartenenti ad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ individuate da proprietà (come carattere crescente, continuità o derivabilità di un qualche livello) che rinunciano a fornire indicazioni sul come effettuare il calcolo dei loro valori e che conducono ad altre proprietà di portata generale/generica.

I domini di queste funzioni si possono individuare specificamente in tutti i modi consentiti dalle conoscenze acquisite; spesso invece i loro domini possono essere lasciati impliciti supponendo che il lettore li possa individuare senza incorrere in ambiguità o all'opposto rinunciando del tutto alla identificazione del dominio.

In generale quindi per funzione-RtR si può intendere un insieme della forma $\{x \in D :| \langle x, f(x) \rangle\}$ nella quale D può essere considerato un arbitrario $D \subseteq \mathbb{R}$ ed $f(x)$ la rappresentazione di un procedimento non specificato al quale di caso in caso si possono attribuire specifiche proprietà.

Molte funzioni-RtR vengono definite facendo riferimento ad una funzione $\ulcorner x \in D \mapsto p(x) \urcorner$ con $D \subseteq \mathbb{R}$ e applicando a essa una qualche restrizione del dominio. Questo modo di fare si può rappresentare con espressioni della forma $\ulcorner x \in E \mapsto p(x) \urcorner$ con $E \subset D$ che si vuole espresso con sufficiente chiarezza.

I15 c. permutazioni del piano-RR e simmetrie delle funzioni reali

I15c.01 Ogni funzione-RtR f_α può vedersi come sottoinsieme del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ individuabile da un'espressione della forma $\{x \in D_\alpha :| \langle x, f_\alpha(x)\rangle\}$.

Spesso risulta utile riuscire a controllare le modifiche di comportamento di tali funzioni provocate da trasformazioni che agiscono sull'intero $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Le azioni di controllo più efficaci sono quelle associate alle simmetrie dell'insieme f_α e queste a loro volta sono esprimibili come proprietà di invarianza o di varianza specifica rispetto a particolari permutazioni di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Alle permutazioni di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ più semplici sono associate le simmetrie di molte funzioni-RtR di elevato interesse.

Le prime permutazioni di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ da considerare sono quelle che si possono ricondurre a trasformazioni biunivoche del solo asse delle x e/o a trasformazioni biunivoche del solo asse delle y. In particolare esamineremo le riflessioni, le traslazioni e le omotetie.

Altre simmetrie rilevanti sono associate a permutazioni ottenute componendo le precedenti.

Dobbiamo anche segnalare che gli effetti delle trasformazioni più elaborate del piano cartesiano possono essere considerati di pertinenza della geometria; questa considerazione non toglie che risultino molto utili allo studio delle funzioni-RtR e anche alle loro caratterizzazioni numeriche.

I15c.02 La consapevolezza delle simmetrie di una funzione, come vedremo, consente di effettuare esami più circoscritti e mirati ed apre la possibilità di rendere più compatta e organica la determinazione e la presentazione sia delle proprietà di singole funzioni che delle proprietà di intere collezion di funzioni.

Risulta quindi opportuno prestare primaria attenzione alle permutazioni più fondamentali di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e alle corrispondenti simmetrie e in questa sezione vedremo rapidamente alcune di queste trasformazioni e delle simmetrie loro associate.

Come vedremo le accennate considerazioni sulle simmetrie hanno validità molto generale: oltre che alle funzioni-RtR si possono rivolgere alle funzioni di ciascuno dei molti genere $\lceil \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{F} \rceil$ e ai corrispondenti ambienti $\mathsf{E} \times \mathsf{F}$ nel quali conviene collocarle.

I15c.03 Le prime permutazioni di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che prendiamo in considerazione sono le riflessioni rispetto agli assi di riferimento

(1)
$$\begin{array}{rcl} \mathsf{Mirr}_{[y=0]} = \mathsf{Mirr}_{\mathsf{Ox}} & := & \lceil \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\not\mapsto\; \langle x,-y\rangle \rceil \\ \mathsf{Mirr}_{[x=0]} = \mathsf{Mirr}_{\mathsf{Oy}} & := & \lceil \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\not\mapsto\; \langle -x,y\rangle \rceil \end{array} .$$

La composizione delle due riflessioni precedenti costituisce la simmetria centrale del piano con centro nell'origine:

(2)
$$\mathsf{Zntsmy}_{\mathsf{0}_2} := \left\lceil \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\not\mapsto\; \langle -x,-y\rangle \right\rceil = \mathsf{Mirr}_{[y=0]} \circ \mathsf{Mirr}_{[x=0]} .$$

I15c.04 Le traslazioni del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ costituiscono un gruppo [B41b] di permutazioni con proprietà semplici e ben definite; ciascuna di esse presenta la forma

$$\boldsymbol{Trsl}_{\langle a,b\rangle} := \left\lceil \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} :| \langle x+a, y+b\rangle \right\rceil ,$$

e il loro insieme è individuato da per qualsiasi $\langle a,b\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{Trsl}_{[\mathbb{R}\times\mathbb{R}]} := \left\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} :| \boldsymbol{Trsl}_{\langle a,b\rangle}\right\} .$$

Può essere utile stabilire se una funzione f_α sottoposta a determinate traslazioni è invariante oppure viene trasformata in modo ben controllabile.

Evidentemente componendo due traslazioni si tiene un'altra facilmente individuabile traslazione:

$$\boldsymbol{Trsl}_{\langle a,b\rangle} \circ \boldsymbol{Trsl}_{\langle c,d\rangle} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{\langle a+c,b+d\rangle} \;.$$

Quindi le traslazioni commutano e costituiscono un gruppo abeliano.

Le funzioni-RtR invarianti per le traslazioni orizzontali della forma $\boldsymbol{Trsl}_{a,0}$ sono le importanti funzioni periodiche di periodo a [:f].

I15c.05 Riflessioni rispetto a rette orizzontali o verticali che non siano assi si possono ottenere componendo riflessioni rispetto ad Ox o ad Oy e traslazioni.

(1) $$\mathsf{Mirr}_{[y=\overline{y}]} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{\langle 0,-\overline{y}\rangle} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[y=0]} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{\langle 0,\overline{y}\rangle} \;.$$

(2) $$\mathsf{Mirr}_{[x=\overline{x}]} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{\langle -\overline{x},0\rangle} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{[x=0]} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{\langle 0,\overline{x}\rangle} \;.$$

Similmente la simmetria centrale con centro generico $\left\langle x_c, y_c\right\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ si può ottenere componendo con traslazioni la simmetria centrale con centro nell'origine.

(3) $$\mathsf{Zntsmy}_{\left\langle x_c,y_c\right\rangle} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{\left\langle -x_c,-y_c\right\rangle} \circ_{lr} \mathsf{Zntsmy}_{\mathbf{0}_2} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{\left\langle x_c,y_c\right\rangle} \;.$$

I15c.06 Sono semplici permutazioni di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ anche le **omotetie centrali** e le **omotetie unidirezionali**.

Le prime sono caratterizzate da un punto-RR che diciamo **centro dell'omotetia** che la trasformazione lascia invariato e da un numero reale nonnullo che chiamiamo **fattore dell'omotetia**. L'omotetia di centro C e fattore ω si può definire come la trasformazione di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ che lascia invariato C e trasforma ogni vettore applicato $\overrightarrow{CP}$ nel suo proporzionale $\omega\,\overrightarrow{CP}$.

Le omotetie con centro nell'origine di fattore $\omega \in \mathbb{R}_{nz}$ sono espresse dalla seguente formula:

(1) $$\boldsymbol{Hmtt}_{\mathbf{0}_2,\omega} \;:=\; \ulcorner \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\not\mapsto\; \langle \lambda\, x, \lambda\, y\rangle \urcorner \;.$$

Le più semplici omotetie unidirezionali riguardano le direzioni Ox e Oy:

(2)
$$\boldsymbol{Hmtt}_{\mathsf{Ox},d_x} \;:=\; \ulcorner \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\not\mapsto\; \langle d_x\, x, y\rangle \urcorner \quad , \quad \boldsymbol{Hmtt}_{\mathsf{Oy},d_y} \;:=\; \ulcorner \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\not\mapsto\; \langle x, d_y\, y\rangle \urcorner \;.$$

Le omotetie con centro in un punto $P = \langle a,b\rangle$ di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ diverso dall'origine $\mathbf{0}_2$ si ottengono componendo le precedenti trasformazioni con traslazioni.

(3) $$\boldsymbol{Hmtt}_{\langle a,b\rangle,\omega} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{\langle -a,-b\rangle} \circ_{lr} \boldsymbol{Hmtt}_{\mathbf{0}_2,\omega} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{\langle a,b\rangle\rangle} \;.$$

I15c.07 Consideriamo in generale una trasformazione biiettiva $\boldsymbol{T} \in \left\lceil \mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{R} \right\rceil$ e definiamo la sua estensione funzionale $\boldsymbol{T}^{fun}$, trasformazione agente sopra funzioni del genere $f(x) \in \left\lceil D \twoheadleftarrow\!\!\longrightarrow \mathbb{R} \right\rceil$, dove $D \subseteq \mathbb{R}$.

La $\boldsymbol{T}^{fun}$ si definisce significativamente come trasformazione di un insieme di coppie della forma $\{x \in D :\mid \langle x, f(x)\rangle\}$ con l'espressione seguente

(1) $$\boldsymbol{T}^{fun}\left(\{x \in D :\mid \langle x, f(x)\rangle\}\right) \;:=\; \{x \in D :\mid \langle \boldsymbol{T}(x), f(x)\rangle\} \;.$$

La funzione trasformata dalla $\boldsymbol{T}^{fun}$ a ogni $x' \in \boldsymbol{T}(D)$ fa corrispondere il valore che la f associa all'ascissa $x = (\boldsymbol{T}^{-1})(x')$; quindi

(2) $$\boldsymbol{T}^{fun}(f) \;=\; \left\ulcorner\, x \in \boldsymbol{T}(D) \;\not\mapsto\; f\left(\boldsymbol{T}^{-1}(x)(x)\right) \,\right\urcorner \;.$$

Va osservato che le precedenti considerazioni si prestano a essere ampiamente generalizzate: esse non sono condizionate dalle caratteristiche dell'ambiente $\mathbb{R}$ in cui si colloca l'insieme di variabilità della variabile indipendente x e dalle caratteristiche delle funzioni di $\lceil \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$, ma si possono ripetere per funzioni f di qualsiasi genere $\lceil D \triangleleft\!\!\longrightarrow E \rceil$ e per qualsiasi corrispondenza biunivoca $\boldsymbol{T} \in \lceil D \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright \boldsymbol{T}(D) \rceil$.
Esse comunque risultano utili se si conoscono bene le proprietà di simmetria degli insieme denotati con D ed E.

I15c.08 Le argomentazioni precedenti possono essere chiamate discorsi bidimensionali, in quanto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ può essere considerato un insieme bidimensionale.

Vedremo che essi possono essere utilmente ampliati a discorsi "tridimensionali" riguardanti $\mathbb{R}^{\times 3}$, ambiente nel quale si collocano le funzioni del genere $\lceil \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ (superfici) e quelle del genere $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rceil$ (curve nel piano).

Vedremo inoltre discorsi ampliati a sviluppi "tetradimensionali" riguardanti $\mathbb{R}^{\times 4}$ ambiente nel quale si collocano le funzioni del genere $\lceil \mathbb{R}^{\times 3} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ (molti campi scalari utili alla fisica), quelle del genere $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 3} \rceil$ (traiettorie nello spazio della fisica classica) e quelle del genere $\lceil \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rceil$ (superfici in quattro dimensioni utili per lo studio delle funzioni analitiche).

All'opposto può essere utile riprendere le argomentazioni bidimensionali precedenti per le trasformazioni che si limitano ad agire dell'ambito monodimensionale e che sono utili per inquadrare funzioni del genere $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rceil$ (curve nel piano in forma esplicita).
Più circostanziatamente riprendiamo alcuni argomenti riguardanti traslazioni, omotetie e riflessioni agenti sulla retta reale $\mathbb{R}$ e loro effetti su funzioni-RtR.

I15c.09 Per ogni $a \in \mathbb{R}$ la traslazione sull'asse reale $\boldsymbol{Trsl}_a = \lceil x \in \mathbb{R} \mapsto x + a \rceil$ corrisponde alla traslazione su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ della forma $\boldsymbol{Trsl}_{\langle a,0 \rangle}$.

Per ogni fattore $\omega \in \mathbb{R}_{nz}$ l'omotetia sull'asse reale con centro nell'origine $\boldsymbol{Hmtt}_\omega = \lceil x \in \mathbb{R} \mapsto \omega\, x \rceil$ si può considerare ottenuta componendo l'omotetia su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con centro nell'origine e fattore ω come la proiezione su'asse Ox, cioè data da $\boldsymbol{Hmtt}_{\mathbf{0}_2,\omega} \circ_{lr} \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{Ox}}$.

Vediamo come si possono specificare le considerazioni precedenti per le riflessioni di $\mathbb{R}$. Abbiamo visto gli effetti della parità $\mathcal{P}$. In generale per ogni $\overline{x} \in \mathbb{R}$ si definisce riflessione di $\mathbb{R}$ rispetto a $[x = \overline{x}]$ la biiezione $\mathsf{Mirr}_{\overline{x}} = \lceil x \in \mathbb{R} \mapsto 2\,\overline{x} - x \rceil$. Chiaramente si tratta di una involuzione con $\overline{x}$ punto fisso.

Anch'essa si può considerare ottenuta componendo una riflessione di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ rispetto alla retta verticale $x = \overline{x}$ con la proiezione su Ox, ossia $\mathsf{Mirr}_{\overline{x}} = \mathsf{Mirr}_{[x=\overline{x}]} \circ_{lr} \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{Ox}}$.

I15 d. funzioni-RtR monotone e limitate

I15d.01 La funzione-RtR $f(x)$ avente dominio D e codominio C si dice:

funzione crescente	sse	$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
funzione decrescente	sse	$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
funzione nondecrescente	sse	$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
funzione noncrescente	sse	$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;
funzione monotona [in senso lato]	sse	è nondecrescente oppure noncrescente;
funzione monotona in senso stretto	sse	è crescente oppure decrescente.

Dalle definizioni seguono subito le affermazioni che seguono.

L'insieme delle funzioni crescenti su un dato dominio è sottoinsieme proprio dell'insieme delle funzioni nondecrescenti sullo stesso dominio.

L'insieme delle funzioni decrescenti su un dato dominio è sottoinsieme proprio dell'insieme delle funzioni noncrescenti sullo stesso dominio.

Le funzioni nondecrescenti e noncrescenti su uno stesso dominio sono precisamente le funzioni costanti su tale dominio.

Il quadro che segue segnala come cambiano alcune proprietà delle funzioni reali dovute al passaggio da una $f(x)$ alla funzione opposta $-f(x)$ e alla funzione $f(-x)$. quindi chiarisce alcuni aspetti della dualità-UD.

crescente	decrescente	decrescente
nondecrescente	noncrescente	noncrescente
decrescente	crescente	crescente
noncrescente	nondecrescente	nondecrescente
monotona in senso stretto	monotona in senso stretto	monotona in senso stretto
monotona in senso lato	monotona in senso lato	monotona in senso lato

Il quadro precedente chiarisce alcuni aspetti della dualità-UD e della dualità-LR sulle funzioni-RtR.

I15d.02 **Esempi** La funzione $y = 2x - 3$, definita sull'intero $\mathbb{R}$, è crescente in tutto il suo dominio $\mathbb{R}$; la $y = \sqrt{x}$ è crescente in tutto il suo dominio $\mathbb{R}_{0+}$.

La funzione $y = -3y^3 + 4$, anch'essa definita per ogni x reale, è decrescente su tutto l'asse delle ascisse.
Altre due funzioni definite per ogni x reale, $y = \lfloor x \rfloor$ e $y = -2\lceil x \rceil$ sono, risp., non decrescente e noncrescente.

I15d.03 Le proprietà delle funzioni-RtR viste in precedenza, le diciamo **proprietà di monotonia**.

Le proprietà di certe funzioni-RtR che sono valide per gli interi domini attribuibili a tali funzioni e sono dette **proprietà globali** delle funzioni stesse.

Per varie funzioni-RtR risulta utile individuare anche proprietà che si limitano a valere in sottoinsiemi propri dei rispettivi domini.
Ciascuna di queste proprietà $\mathcal{P}$ attribuita a una funzione $y = f(x)$ e valida per un insieme $I \subset \mathsf{dom}(f)$ si può dichiarare proprietà $\mathcal{P}$ globale attribuita alla funzione $f\rceil_I(x)$ ottenuta per restrizione della $f(x)$ all'intervallo I.

Per esempio la funzione $\sin x$ è crescente nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, mentre la funzione $\cos x$ è decrescente nell'intervallo $[0, \pi]$.

Si dice **intervallo di invariabilità** di una funzione-RtR $f(x)$ ogni intervallo non ridotto a un solo punto contenuto nel dominio nel quale la funzione assume un solo valore.

Per esempio per la funzione $\lfloor x \rfloor$ ogni intervallo di estremi x' e x'' tali che $n \leq x' < x'' < n+1$ per un qualsiasi n intero è intervallo di invariabilità, in quanto dalla definizione della funzione segue subito che $\lfloor x' \rfloor = \lfloor x'' \rfloor$.

I15d.04 Spesso servono le varianti di proprietà delle funzioni-RtR, per esempio delle proprietà di monotonia, dette **proprietà locali** da associare a un punto di accumulazione $\overline{x}$ del dominio D; ricordiamo che un tale $\overline{x}$ può essere un punto interno a D o un suo punto di frontiera.

Si dice che $f(x)$ è **funzione crescente in un intorno di un punto** $\overline{x}$ sse esiste un tale intorno I per il quale sia $\forall x_1, x_2 \in I \cap D \;:\; x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

In modo simile si definiscono le proprietà dell'essere decrescente, nondecrescente, noncrescente, monotona in senso lato o monotona in senso stretto limitatamente ad un intorno di un punto di accumulazione.

Spesso servono anche le corrispondenti cosiddette **proprietà puntuali** riguardanti un punto x_0 del dominio D che sia anche suo punto di accumulazione (interno o di frontiera).
Si dice che $f(x)$ è **funzione crescente in un tale punto** x_0 sse esiste un suo intorno V per il quale accade che

$$\forall x', x'' \in V \cap D \;:\; x' < x_0 < x'' \Longrightarrow f(x') < f(x_0) < f(x'') \; .$$

In modo simile si definiscono le proprietà dell'essere decrescente, nondecrescente, noncrescente, monotona in senso lato o monotona in senso stretto in un punto del dominio che sia anche punto di accumulazione del dominio.

I15d.05 La funzione $f(x)$ si dice **funzione limitata superiormente** sse il suo codominio $f(D)$ è un insieme limitato superiormente, cioè sse esiste un numero reale M tale che $\forall x \in D \,:\, f(x) \leq M$.

La funzione $f(x)$ si dice **funzione limitata inferiormente** sse l'insieme $f(D)$ è limitato inferiormente $f(D)$, cioè sse esiste un reale numero m tale che $\forall x \in D \,:\, m \leq f(x)$.

Evidentemente le due proprietà precedenti sono duali-UD.

La funzione $f(x)$ si dice **funzione limitata** sse l'insieme $f(D)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato, cioè sse è funzione limitata inferiormente e superiormente, ossia sse esistono due reali m ed M tali che $\forall x \in D \,:\, m \leq f(x) \leq M$.

Evidentemente questa è una proprietà autoduale-UD.

Sono evidenti i seguenti enunciati.

La somma di due funzioni superiormente // inferiormente limitate è una funzione superiormente // inferiormente limitate.

La somma di una funzione superiormente // inferiormente limitate e di una funzione limitata è una funzione superiormente // inferiormente limitata.

La differenza tra una funzione superiormente // inferiormente limitate e di una funzione limitata è una funzione superiormente // inferiormente limitata.

L'opposta di una funzione superiormente limitata è una funzione inferiormente limitata e (in conseguenza della dualità-UD) l'opposta di una funzione inferiormente limitata è una funzione superiormente limitata.

L'opposta di una funzione limitata è una funzione limitata (proprietà autoduale-UD).

Eserc. Trovare coppie di funzioni-RtR , la prima superiormente limitata e la seconda inferiormente limitata, tali che la loro differenza sia:
(a) una funzione limitata;
(b) una funzione limitata solo superiormente;
(c) una funzione limitata solo inferiorrmente;
(d) una funzione illimitata inferiormente e superiormente.

Il prodotto di due funzioni limitate è una funzione limitata.

Il prodotto di una funzione superiormente // inferiormente limitate e di una funzione limitata è una funzione superiormente // inferiormente limitata.

I15d.06 Si dice **estremo superiore della funzione** $f(x)$ l'estremo superiore del suo codominio $f(D)$.

Ogni funzione reale ammette un estremo superiore reale finito o $+\infty$. Tale entità si denota con $\sup_{x\in D} f(x)$; questa notazione talora, se il contesto consente di lasciare implicito il dominio, si può semplificare scrivendo solo $\sup f(x)$.
Evidentemente $\sup_{x\in D} f(x)$ è finito, cioè appartiene a $\mathbb{R}$, sse la funzione è limitata superiormente.

Per dualità-UD si dice **estremo inferiore della funzione** $f(x)$ l'estremo inferiore di $f(D)$.
Ogni funzione reale ammette un estremo inferiore reale finito o $-\infty$. Tale entità si denota con $\inf_{x\in D} f(x)$ o, o, *icsue*, con $\inf f(x)$.
Qui con la sigla *icsue* abbreviamo l'espressione "if context suggests unexpressed element". Evidentemente $\inf_{x\in D} f(x)$ è finito sse la funzione è limitata inferiormente.

Talora servono gli estremi inferiore e/o superiore dei valori assunti da una funzione $f(x)$ in un determinato sottoinsieme S del suo dominio. Per tali entità si usano notazioni della forma $\inf_{x\in S} f(x)$ e $\sup_{x\in S} f(x)$

I15d.07 Se la funzione-RtR $f(x)$ è limitata inferiormente e il suo estremo inferiore m appartiene ad $f(D)$, lo si chiama **minimo assoluto della funzione**.
Queste entità si denota con $\min_{x\in D} f(x) =: m$.

I punti di D per i quali la funzione assume il suo valore minimo assoluto, cioè i punti costituenti il sottoinsieme $f^{-1}(m)$, si dicono **punti di minimo assoluto** della funzione.

Per dualità-UD, se $f(x)$ è limitata superiormente e il suo estremo superiore M appartiene ad $f(D)$, lo si dice **massimo assoluto della funzione**.
Questa entità si denota con $\max_{x\in D} f(x) =: M$.

I punti di D per i quali la funzione $f(x)$ assume il suo valore massimo assoluto, cioè i punti costituenti il sottoinsieme $f^{-1}(M)$, si dicono **punti di massimo assoluto della funzione**.

Si usa il termine **estremi assoluti di una funzione** per intendere l'insieme dei suoi due valori minimo assoluto e massimo assoluto; questi coincidono solo nei casi di funzioni costanti sull'intero dominio.

Si dicono invece **punti estremanti assoluti di una funzione** i suoi punti di minimo assoluto e i suoi punti di massimo assoluto.

Per esempio $\langle 0,0\rangle$ è punto di minimo assoluto per la funzione $y = \sqrt{|x|}$, mentre $\langle 0,1\rangle$ è punto di massimo assoluto della funzione $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

I15d.08 Si dice **oscillazione di una funzione** $f(x) \in \lceil D \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ la differenza definibile come

$$\boldsymbol{oscl}_{x\in D} f(x) \ := \ \sup_{x\in D} f(x) - \inf_{x\in D} f(x) \ .$$

Per tale valutazione si possono dare tre casi mutuamente esclusivi.

L'oscillazione è uguale a 0 sse la funzione è una costante;

l'oscillazione è fornita da un reale positivo sse la funzione è limitata;

l'oscillazione è data da $+\infty$ sse la funzione non è limitata.

L'insieme delle funzioni-RtR con oscillazione reale positiva o nulla presenta notevole interesse e viene detto insieme delle **funzioni-RtR a variazione limitata**.

Le funzioni $\sin x$e $\cos x$ sono funzioni aventi oscillazione uguale a 2.

Le funzioni espresse da polinomi diversi dalle costanti sono funzioni caratterizzate dalla oscillazione $+\infty$.

Lo stesso si può dire delle funzioni espresse da un quoziente non riducibile di polinomi.

Talora ha interesse l'oscillazione di una funzione limitatamente a un determinato sottoinsieme S del suo dominio: per tale entità si usa una notazione della forma $\boldsymbol{oscl}_{x\in S} f(x)$.

Consideriamo una funzione-RtR a variazione limitata $f(x)$ non costante e denotiamo con m ed M, risp., il uo estremo inferiore e il suo estremo superiore.
Presi due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in D$ di D, si ha $m \le f(x_1), f(x_2) \le M$ e di conseguenza

$$\forall x_1, x_2 \in D \ \vdots \ |f(x_1) - f(x_2)| \le M - m \ .$$

Se si sceglie un qualsiasi numero positivo ϵ (idap), esistono in D due punti x' e x'' per i quali valgono le disuguaglianze

$$f(x') < m + \epsilon \le M - \epsilon < f(x'') \ .$$

Di conseguenza $f(x'') - f(x') > M - \epsilon - (m + \epsilon) = (M - m) + 2\epsilon$ e quindi

$$(M - m) - 2\epsilon \ < \ |f(x'') - f(x')| \ \le \ M - m \ .$$

Questa relazione dice che l'oscillazione della $f(x)$ $M - m$ è l'estremo superiore delle differenze $|f(x'') - f(x')|$ al variare delle due ascisse nel dominio della funzione.

Si osserva che le precedenti argomentazioni valgono anche per le funzioni aventi il codominio ridotto a $\{m, M\}$.

I15d.09 Evidentemente una funzione $f(x)$ crescente nel suo intero dominio D è crescente in ogni intorno di ogni punto di accumulazione di D ed è crescente in ogni punto di D.
Inoltre se è crescente in un intorno di un punto x_0 di accumulazione di D appartenente a D, essa è crescente anche nel punto x_0.
Non sono invece garantite le implicazioni inverse. Tuttavia vale l'enunciato che segue.

Prop. Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo non puntiforme $J := [a,b\,]$, con $a < b$.

Se essa è crescente in ogni punto di J essa è crescente nell'intero J.

Dim.: Bisogna dimostrare che, presi due reali $x', x'' \in J$, accade che

(*) $\quad a \le x' < x'' \le b \implies f(x') < f(x'')$.

Procediamo per assurdo dimostrando che non si può sostenere la negazione della (*), ossia che non possono esistere due reali x_0 e x_1 tali che $a \le x_0 < x_1 \le b$ per i quali $f(x_0) \ge f(x_1)$.

Fissato x_0, diciamo X_1 l'insieme dei punti x_1 che verificano la (*) e $x_2 := \inf X_1$. Evidentemente $x_0 \le x_2 \le b$; tuttavia non può essere $x_0 = x_2$ perché per ipotesi esiste un intorno destro J di x_0 per i cui punti x si ha $f(x_0) < f(x)$ e quindi deve essere $x_0 < x_2$.
Non può essere $x_0 < x_2 < b$ e $f(x_0) < f(x_2)$: infatti $x_2 := \inf X_1$ implica che in ogni intorno destro di x_2 si trovano punti x_3 con $f(x_2) > f(x_0) \ge f(x_3)$, in conflitto con il fatto che la funzione $f(x)$ sia crescente in x_2.
Non può essere $x_0 < x_2 < b$ e $f(x_0) \ge f(x_2)$: infatti in un opportuno intorno sinistro di x_2 per ogni punto x_4 si avrebbe $f(x_4) < f(x_2)$, in conflitto con la $x_2 := \inf X_1$.
Resta la possibilità $x_2 = b$; in tal caso $X_1 = \{b\}$ e dovrebbe essere $f(b) \le f(x_2)$; di conseguenza esisterebbero punti $x_5 < b$ per i quali $f(x_5) > f(x_2) \ge f(b)$, in conflitto con l'ipotesi che la $f(x)$ sia crescente in b.
Non possono quindi esistere x_2 e l'insieme X_1, cioè l'enunciato (*) è insostenibile ▮

Le affermazioni corrispondenti alle precedenti, chiaramente, valgono anche per i caratteri di funzione decrescente, nondecrescente e noncrescente.

I15d.10 Le proprietà di monotonia in un punto di una funzione-RtR $f(x)$ possono essere limitate alle loro cosiddette **proprietà unilaterali** riguardanti solo intorni sinistri o solo intorni destri del numero reale del quale si tratta.

Consideriamo dunque una funzione $f(x)$ di dominio D e sia $\overline{x}$ un punto di D che sia anche punto di accumulazione del dominio.
Si dice che $f(x)$ è **funzione crescente da destra** in $\overline{x}$ sse esiste un suo intorno a destra V tale che per ogni duetto di punti $\{x', x''\}$ di $V \cap D$ sia $\overline{x} \le x' < x''$ e $f(x') < f(x'')$.

Per dualità-LR si dice che $f(x)$ è **funzione crescente da sinistra** in $\overline{x}$ sse esiste un suo intorno a sinistra U tale che per ogni duetto di punti x' e x'' di $U \cap D$ sia $x' < x'' \le \overline{x}$ e $f(x') < f(x'')$.
Definizioni simili riguardano funzioni decrescenti, nondecrescenti e noncrescenti da sinistra e da destra in $\overline{x}$.

I15 e. funzioni pari e funzioni dispari

I15e.01 In seguito incontreremo spesso la trasformazione dei numeri reali nei rispettivi opposti che denotiamo scrivendo

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}} := \lceil x \in \mathbb{R} \;\vdash\!\!\!\!\rightarrow\; -x \,\rceil \in \lceil \mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{R} \rceil \ .$$

Chiaramente la $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ è la riflessione della retta reale rispetto all'origine ed è un'involuzione entro tale retta, cioè entro $\mathbb{R}$.

Questa trasformazione in molti contesti può essere denotata con la abbreviazione $\mathcal{P}$ e può essere chiamata semplicemente **parità**.
Queste semplificazioni in particolare le adottiamo nelle pagine che seguono.

Della trasformazione parità interessano anche varie estensioni.
La sua estensione cartesiana agisce su sequenze e su successioni di numeri reali trasformando ciascuna di esse nella sequenza dei numeri opposti; essa quindi per ogni $d \in \mathbb{P}$ è una trasformazione per i vettori dello spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ nei corrispondenti opposti.
Anche la trasformazione di un numero complesso nel suo opposto può considerarsi estensione cartesiana della parità relativa a $d = 2$.

La estensione booleana della parità $\mathcal{P}^{boo}$ è la trasformazione che porta un insieme di reali nell'insieme dei suoi opposti.
Interessa anche la estensione booleana dell'estensione cartesiana della $\mathcal{P}$, trasformazione che agisce sulle configurazioni geometriche multidimensionali, in particolare sulle figure piane e sulle figure solide.

Risulta utile prendere in considerazione anche la estensione funzionale della parità che denotiamo con $\mathcal{P}^{fun}$: essa agisce su ogni funzione-RtR $\Phi(\xi)$ portandola nella $-\Phi(\xi)$.

Si osserva anche che una estensione cartesiana si può considerare caso particolare di estensione funzionale: la cartesiana riguarda le funzioni a valori reali aventi come dominio $\{1, 2, 3, ..., n\}$ per qualche $n \in \mathbb{P}$, oppure $\mathbb{P}$, oppure qualche altro sottoinsieme finito o numerabile di $\mathbb{R}$.

Inoltre si osserva che l'estensione funzionale $\mathcal{P}^{fun}$ coincide con la riflessione $\mathsf{Mirr}_{[y=0]}$ del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Della $\mathcal{P}$ si possono considerare altre estensioni composite, ad esempio la la $(\mathcal{P}^{boo})^{boo}$, trasformazione che agisce sulle collezioni di insiemi di numeri reali.

In molti contesti definiti esplicitamente con chiarezza, fortunatamente, risulta possibile utilizzare il solo identificatore $\mathcal{P}$ sia per la parità elementare $\lceil r \in \mathbb{R} \;\vdash\!\!\!\!\rightarrow\; -r \,\rceil$ che per una di queste estensioni senza rischiare ambiguità non risolvibili con il contesto.
Quindi in genere nei prossimi paragrafi useremo $\mathcal{P}$ per la parità applicata ai punti e agli insiemi della retta reale.

I15e.02 Un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto si dice **insieme pari di numeri reali** sse rimane invariato in seguito all'applicazione della $\mathcal{P}$.

Si possono distinguere sottoinsiemi pari connessi e non connessi.
La collezione dei sottoinsiemi pari connessi è costituita dall'intero $\mathbb{R}$, illimitato, e dagli intervalli limitati della forma $(-L, L)$ (aperti) o della forma $[-L, L]$ (chiusi), ove L denota un arbitrario reale positivo.

I sottoinsiemi pari non connessi costituiscono invece una collezione non descrivibile brevemente. Tra i più evidenti vi sono $\mathbb{Z}$, l'insieme degli interi pari $2 \cdot \mathbb{Z}$ e l'insieme degli interi dispari $2 \cdot \mathbb{Z} + 1$.
Altri insiemi pari non connessi utili sono $\mathbb{R}_{nz} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e le unioni finite o numerabili di varie famiglie di intervalli disgiunti.

Tra queste segnaliamo le collezioni numerabili di intervalli disgiunti

$$\{k \in \mathbb{Z} :| \; (k\,T, (k+1)T)\} \quad , \quad \{k \in \mathbb{Z} :| \; [(3k+1)T, (3k+2)T]\} \; ,$$
$$\{k \in \mathbb{Z} :| \; ((2k-1)T, (2k+1)T)\} \quad , \quad \{k \in \mathbb{Z} :| \; [(4k-1)T, (4k+1)T]\} \; ,$$

ove T denota un reale positivo arbitrario.

(1) Prop.: La collezione degli insiemi pari di reali si bipartisce nella collezione degli insiemi che includono lo 0 e nella collezione di quelli che non lo includono, cioè nella collezione dei sottoinsiemi pari di $\mathbb{R}_{nz}$. Le due suddette collezioni sono poste in corrispondenza biunivoca dalla aggiunta dello zero e dalla corrispondenza inversa costituita dalla eliminazione dello zero.
Ogni insieme pari escludente lo 0 si ottiene da un sottoinsieme di $\mathbb{R}_+$ unendolo all'insieme dei suoi opposti ∎

(2) Eserc. Precisare le biiezioni che si possono stabilire tra le tre collezioni degli insiemi pari di reali che escludono 0, degli insiemi pari di reali che includono 0 e degli insiemi di reali positivi.

I15e.03 Un sottoinsieme non vuoto $S \subseteq \mathbb{R}$ si dice **insieme dispari di numeri reali** sse è disgiunto dall'insieme dei suoi opposti, cioè sse $S \cap \mathcal{P}(S) = \emptyset$.

Sono evidenti i seguenti enunciati:

Nessun insieme dispari contiene lo zero.

Sono insiemi dispari l'insieme dei reali positivi e ciascuno dei suoi sottoinsiemi.

Sono insiemi dispari l'insieme dei reali negativi e ciascuno dei suoi sottoinsiemi (proprietà duale-LR della precedente).

La parità applicata a $\mathbb{R}$ trasforma un insieme dispari in un insieme dispari.

Se $\boldsymbol{O}$ è un insieme dispari, sono dispari anche i suoi sottoinsiemi non vuoti, l'insieme degli opposti dei suoi elementi e e i sottoinsiemi non vuoti di questo.

Altri sottoinsiemi dispari interessanti sono le unioni di intervalli ciascuno dei quali disgiunto dall'insieme degli elementi opposti.

Tra questi si collocano gli insiemi di reali della forma

$$\overset{:}{\bigcup} \{k \in N :| \; ((-1)^{k+1}\,(k-1)\,L \; , \; (-1)^{k+1}\,k\,L)\} \quad \text{per ogni} \quad N \subseteq \mathbb{P} \;\; \text{e} \;\; L \in \mathbb{R}_+ \; .$$

I15e.04 La trasformazione $\mathcal{P}$ applicata ai sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, come ogni altra estensione booleana, gode della cosiddetta **proprietà distributiva-set**, è rispettosa dell'unione, cioè trasforma l'unione di due (o più) insiemi nella unione dei trasformati:

$$\begin{aligned} E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R} \implies \mathcal{P}(E_1 \cup E_2) \;&=\; \{r \in (E_1 \cup E_2) :| \; -r\} \\ &=\; \{r \in E_1 :| \; -r\} \cup \{r \in E_2 :| \; -r\} \;=\; \mathcal{P}(E_1) \cup \mathcal{P}(E_2) \end{aligned} .$$

(1) Prop.: Ogni sottoinsieme proprio e non vuoto di $\mathbb{R}$ si esprime in un unico modo come unione di due insiemi disgiunti, uno pari e l'altro dispari.

Dim.: Consideriamo un qualsiasi $S \subset \mathbb{R}$ non vuoto e definiamo $S_e := S \cap \mathcal{P}(S)$. Il carattere involutorio della trasformazione $\mathcal{P}$ implica che S_e sia un insieme di reali pari.
Definiamo poi $S_o := S \setminus S_e$ e constatiamo che ogni suo elemento essendo trasformato in un reale estraneo ad S viene trasformato in un reale estraneo allo stesso S_o.
Evidente inoltre che $S_e \cap S_o = \emptyset$ ∎

La decomposizione precedente fa parte di un genere molto diffuso che incontreremo in vari contesti.

Per una tale decomposizione usiamo il termine **decomposizione-S/AS**, dove la specificazione sincopata intende ignificare "parte simmetrica separata dalla parte antisimmetrica". ,,,A.e04 -S/AS

Una decomposizione più generale che conduce ad una unione di insiemi disgiunti si riscontra quando si è in presenza di una qualsiasi coppia $\langle U, \mathcal{I}\rangle$, con U insieme che potrebbe avere il ruolo di ambiente e $\mathcal{I}$ una sua involuzione; questa coppia nel caso precedente si concretizza nella $\langle \mathbb{R}, \mathcal{P}\rangle$.

(2) Prop.: Ogni sottoinsieme proprio e non vuoto M dell'insieme ambiente U si esprime in un unico modo come unione di due insiemi disgiunti, uno, M_S, invariante per l'involuzione $\mathcal{I}$ con il ruolo di parte simmetrica e l'altro, M_{AS} disgiunto dal suo trasformato con il ruolo di parte antisimmetrica.

Dim.: La dimostrazione si conduce con stretto parallelismo con la precedente in conseguenza delle definizioni $M_S := M \cap \mathcal{I}(M)$ e $M_{AS} := M \setminus M_S$ ▮

I15e.05 Una funzione reale $p(x)$ si dice **funzione pari** sse come insieme di coppie appartenenti ad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è invariante rispetto alla riflessione del piano sui reali rispetto all'asse Oy delle ordinate. Questo implica che il dominio di una funzione pari deve essere un sottoinsieme pari di $\mathbb{R}$.
Si ha quindi che una $p(x) \in \lceil D \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ è funzione pari sse $\mathcal{P}(D) = D$ e $\forall x \in D \,\because\, p(-x) = p(x)$.

Esempi di funzioni pari aventi come dominio l'intero $\mathbb{R}$ sono la funzione $\cos x$, tutte le funzioni costanti, le parabole $y = x^2$ e $y = \alpha x^2 + \beta$ per qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e più in generale tutte le funzioni date da polinomi $P(x)$ nei quali intervengono solo le potenze pari della variabile x.

Vediamo ora una caratterizzazione di un certo interesse delle funzioni-RtR pari.

(1) Prop.: Una funzione-RtR è pari sse è esprimibile come funzione di x^2.

Dim.: Una funzione di x^2 è ovviamente una funzione pari.

Consideriamo dunque una funzione-RtR pari $p(x)$ e limitiamoci alla sua restrizione alla parte positiva del suo dominio $\mathsf{dom}(p) \cap \mathbb{R}_+$ che denotiamo con $p_{(+)}(x)$.

Introdotta la variabile $t := x^2$ per $x \in \mathbb{R}_{0+}$, si osserva che essa è in corrispondenza biunivoca con la x limitatamente al dominio $\mathbb{R}_{0+}$ e che è ben definita la funzione $q(t) := p_{(+)}(\sqrt{t})$. di conseguenza la funzione $p(x)$ si può scrivere

$$p(x) = \lceil\, x \in \mathbb{R}_{0+} \;\mid\!\!\!\rangle\; q(x^2) \,\rceil \,\dot\cup\, \lceil\, x \in \mathbb{R}_{-} \;\mid\!\!\!\rangle\; p(-x) \,\rceil$$

e questo, dto che $p(-x) = p(x) = q(x^2)$, equivale all'asserto ▮

I15e.06 Una funzione reale $p(x)$ si dice **funzione dispari** sse come insieme di coppie di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è invariante rispetto alla simmetria centrale con centro nell'origine, ovvero rispetto alla composizione della riflessione rispetto Ox con la riflessione rispetto Oy.

Questo implica che il dominio di una funzione dispari deve essere un sottoinsieme pari di $\mathbb{R}$.

Si ha quindi che una $d(x) \in \lceil D \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ è funzione dispari sse $\mathcal{P}(D) = D$ e $\forall x \in D \,\because\, d(-x) = -d(x)$.

Esempi di funzioni dispari aventi come dominio l'intero $\mathbb{R}$ sono la funzione $\sin x$, la funzione segno sign [B20d04], le rette passanti per l'origine $y = m\,x$ per ogni $m \in \mathbb{R}$ le cubiche $y = \alpha\,x^3$ e $y = \alpha\,x^3 + \beta x$ per qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e più in generale tutte le funzioni espresse da polinomi $P(x)$ nei quali intervengono solo le potenze dispari della variabile x.

Ogni funzione $f(x)$ definita in un dominio $D \subseteq \mathbb{R}_+$ si estende ad una funzione pari $e(x)$ e a una dispari $o(x)$ definite sul dominio pari $E := D \,\dot\cup\, \mathcal{P}(D) \;=\; D \,\dot\cup\, \{x \in D :|\; -x\}$: basta porre

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \;\because\; \begin{array}{l} e(x) := \lceil\, x \in \mathbb{R}_- \;\mid\!\!\!\rangle\; f(-x) \,\rceil \;\dot\cup\; \lceil\, x \in \mathbb{R}_+ \;\mid\!\!\!\rangle\; f(x) \,\rceil \\ o(x) := \lceil\, x \in \mathbb{R}_- \;\mid\!\!\!\rangle\; f(-x) \,\rceil \;\dot\cup\; \lceil\, x \in \mathbb{R}_+ \;\mid\!\!\!\rangle\; -f(x) \,\rceil \end{array} .$$

I15e.07 **(1) Prop.**: Ogni funzione reale definita in un dominio E che è un sottoinsieme pari di $\mathbb{R}$ si può scomporre come somma di una funzione pari e di una funzione dispari facenti parte di $\lceil E \longmapsto \mathbb{R} \rceil$; questa scomposizione è unica.

Dim.: Introduciamo le funzioni $f_{even}(x) := \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ ed $f_{odd}(x) := \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Si constata subito che per ogni $x \in E$ si ha $f_{even}(-x) = f_{even}(x)$, $f_{odd}(-x) = -f_{odd}(x)$ e $f(x) = f_{even}(x) + f_{odd}(x)$. Queste uguaglianze esprimono la scomposizione richiesta.

Se vi fosse un'altra scomposizione $f(x) = F_e(x) + F_o(x)$ con F_e pari ed F_o dispari per ogni $\overline{x} \in E$ si potrebbe scrivere $F_e(\overline{x}) = f_{even} + d$ e quindi $F_o(\overline{x}) = f_{odd}(\overline{x}) - d$; da questa il carattere dispari implica $F_o(-\overline{x}) = -f_odd(\overline{x}) + d$, mentre $F_e(-\overline{x}) = f_{even}(\overline{x}) + d$ e quindi $F_e(-\overline{x}) + F_o(-\overline{x}) = f(\overline{x}) + 2d$, conclusione assurda se $d \neq 0$ ▮

Le funzioni $f_{even}(x)$ e $f_{odd}(x)$ sono chiamate, risp., funzione addenda pari e funzione addenda dispari della funzione $f(x)$.

Per esempio la addenda pari della funzione esponenziale e^x è la funzione coseno iperbolico $\dfrac{\mathsf{e}^x + \mathsf{e}^{-x}}{2}$, mentre la sua addenda dispari è la funzione seno iperbolico $\dfrac{\mathsf{e}^x - \mathsf{e}^{-x}}{2}$.

I15e.08 **(1) Prop.**: Ogni combinazione lineare di funzioni pari su un dato dominio pari E è funzione pari su E.

Dim.: Se $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni pari su E, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e si definisce $r(x) := \alpha p(x) + \beta q(x)$ si trova $r(-x) = \alpha p(-x) + \beta q(-x) = \alpha p(x) + \beta q(x) = r(x)$ ▮

(2) Prop.: Ogni combinazione lineare di funzioni dispari su un dato dominio pari E è funzione dispari su E.

Dim.: Simile alla precedente ▮

Questi risultati si possono riesprimere in termini algebrici. Infatti si osserva che l'insieme delle funzioni $\lceil E \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ è il terreno di uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali che qui denotiamo con $\boldsymbol{V}$.
La proposizione (1) equivale ad affermare che l'insieme delle funzioni pari definite su E costituisce un sottospazio di $\boldsymbol{V}$, mentre la (2) equivale ad affermare che l'insieme delle funzioni dispari definite su E costituisce un sottospazio di $\boldsymbol{V}$.
A questo punto si osserva che la e07(1) afferma che la chiusura per combinazione lineare dei due sottospazi precedenti esaurisce l'intero $\boldsymbol{V}$.

Altre utili considerazioni riguardano i prodotti, le potenze e i quozienti delle funzioni di determinata parità.

A questo proposito diciamo che le funzioni pari e le funzioni dispari sono **autofunzioni dell'operatore parità** $\mathcal{P}^{fun}$ e più precisamente che le funzioni pari sono le autofunzioni di $\mathcal{P}^{fun}$ relative all'**autovalore** $+1$, mentre le dispari sono le autofunzioni di $\mathcal{P}^{fun}$ relative all'autovalore -1.

Questi modi di dire derivano dal fatto che per ogni autofunzione $a(x)$ si può scrivere:

$$\mathcal{P}^{fun}(a(x)) = pa(x) \quad \text{con } p = +1 \text{ sse } a(x) \text{ è pari e } p = -1 \text{ sse } a(x) \text{ è dispari .}$$

conviene segnalare che le uguaglianze precedenti trovano giusta collocazione in un ambito molto generale, quello della teoria degli autovalori e degli autovettori degli operatori lineari su spazi funzionali.

I15e.09 **(1) Prop.**: Consideriamo per $i = 1, 2, \not{\mu}$ funzioni-RtR $a_i(x)$ aventi come dominio un insieme pari di numeri reali E le quali siano autofunzioni di $\mathcal{P}^{fun}$; più precisamente assumiamo che per i loro autovalori valgano le uguaglianze $\mathcal{P}^{fun}(a_i(x)) = p_i a_i(x)$, con $p_i \in \{1, -1\}$.

Anche il loro prodotto è autofunzione di $\mathcal{P}^{fun}$ e si ha

$$\mathcal{P}^{fun}\left(a_1(x)\cdot a_2(x)\right) \;=\; p_1\,p_2\cdot a_1(x)\cdot a_2(x)\ .$$

Inoltre se in E la funzione $a_2(x)$ non si annulla, anche il quoziente $\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$ è autofunzione della parità e si ha

$$\mathcal{P}^{fun}\left(\frac{a_1(x)}{a_2(x)}\right) \;=\; \frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{a_1(x)}{a_2(x)}\ .$$

Dim.: Basta osservare che l'applicazione di $\mathcal{P}^{fun}$ rispetta il prodotto e il quoziente tra funzioni-RtR ▮

Il risultato precedente nella pratica si presenta con i seguenti evidenti enunciati.

Ogni prodotto di due funzioni pari e ogni prodotto di due funzioni dispari sopra un dominio E è funzione pari su tale E.

Ogni prodotto di una funzione pari per una dispari (e ovviamente di una dispari per una pari) sopra un dominio E è funzione dispari su tale E.

Ogni quoziente di due funzioni pari e ogni quoziente di due funzioni dispari sopra un dominio E è funzione pari su tale E.

Ogni quoziente di una funzione pari sopra una dispari e ogni quoziente di una funzione dispari sopra una pari entro un dominio E pari è funzione dispari su tale E.

I15e.10 Si ottengono inoltre facilmente i corollari che seguono.

(1) Coroll.: Ogni potenza pari (positiva, negativa o nulla,) di una funzione-RtR pari o di una funzione-RtR dispari e ogni potenza dispari (positiva, negativa o nulla) di una funzione pari costituisce una funzione-RtR pari ▮

(2) Coroll.: Ogni potenza dispari (positiva o negativa) di una funzione dispari è una funzione dispari ▮

In particolare le funzioni reciproche delle pari sono pari e le reciproche delle funzioni dispari sono dispari.

Queste considerazioni consentono di individuare un'ampia gamma di funzioni reali a parità definita.

I15 f. funzioni periodiche

I15f.01 Sia T un numero reale positivo; si dice **funzione-RtR periodica** di periodo T una funzione-RtR $f(x)$ noncostante il cui grafico è invariante per la traslazione $\boldsymbol{Trsl}(T)$.

La definizione equivale a richiedere che il dominio D di una tale funzione sia invariante per la suddetta traslazione e che per ogni $x \in D$ sia $f(x+T) = f(x)$, ossia equivale a chiedere

(1) $$\forall x \in D, k \in \mathbb{N} \ \colon\ f(x + k\,T) = f(x) \ .$$

Si possono studiare funzioni-RtR periodiche con dominio discreto o continuo, ossia costituito da intervalli di reali. Qui ci occupiamo soltanto di queste seconde.

In particolare si hanno funzioni periodiche per le quali (1) viene rafforzata dalla

(2) $$\forall x \in D, k \in \mathbb{Z} \ \colon\ f(x + k\,T) = f(x) \ .$$

Queste funzioni più particolari sono chiamate **funzioni-RtR periodiche bilatere**, mentre le rimanenti sono dette funzioni-RtR periodiche unilatere.

Interessa anche una seconda distinzione tra le funzioni-RtR periodiche.

Si dicono **funzioni-RtR periodiche connesse** le funzioni-RtR periodiche che hanno il dominio connesso, mentre le rimanenti si dicono **funzioni-RtR periodiche nonconnesse**
Chiaramente le bilatere connesse hanno come dominio l'intero $\mathbb{R}$, mentre le unilatere hanno come dominio un insieme della forma $\mathbb{R}_+ + r$ con r numero reale arbitrario.

A loro volta le nonconnesse hanno un dominio costituito da intervalli mutuamente disgiunti; se a tali intervalli attribuiamo l'ampiezza $W \in \mathbb{R}_+$ si danno due possibilità: gli intervalli successivi sono adiacenti, ossia $W = T$, e gli intervalli sono aperti, della forma $(a, a+T)$ oppure due intervalli successivi hanno i punti iniziali a distanza $T > W$; in questo caso si possono avere intervalli aperti, chiusi o semiaperti.

Sono piuttosto comuni le funzioni-RtR periodiche bilatere su intervalli aperti adiacenti, ossia aventi il dominio fornito da una espressione della forma

(3) $$\mathop{\overset{\circ\circ}{\bigcup}}_{k\in\mathbb{Z}} (x_0 + k\,T \ ,\ x_0 + (k+1)\,T) \ .$$

Evidentemente un tale dominio non è connesso, ha come chiusura l'intero $\mathbb{R}$ e si può caratterizzare come complementare in $\mathbb{R}$ della progressione aritmetica bilatera di numeri reali $\langle k \in \mathbb{Z} :| \ x_0 + k\,T \rangle$.

Possono interessare anche funzioni-RtR periodiche su intervalli nonadiacenti non necessariamente aperti i quali sono individuabili, per esempio, con espressioni della forma

(4) $$\mathop{\overset{\circ\circ}{\bigcup}}_{k\in\mathbb{Z}} [x_0 + k\,T \ ,\ x_0 + A + k\,T] \ .$$

È evidente che i domini (3) e (4) non vengono modificati dalle traslazioni $\boldsymbol{Trsl}_{k\,T}$ per $k \in \mathbb{Z}$.

I15f.02 Esempi di funzioni periodiche definite sull'intero $\mathbb{R}$ sono:

la funzione mantissa $\operatorname{mant}(x) := x - \lfloor x \rfloor$;

funzioni trigonometriche come $\sin x$, $\cos nx$ per ogni $n \in \mathbb{P}$, $\cos(\omega x + \phi)$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}_+$.

Per quanto riguarda i periodi la funzione $\operatorname{mant}(x)$ ha periodo 1, la $\sin x$periodo $2\,\pi$, la $\cos nx$ periodo $\dfrac{2\,\pi}{n}$, la $\cos(\omega x + \phi)$ periodo $\dfrac{2\,\pi}{\omega}$.

Le funzioni costanti sull'intero $\mathbb{R}$ si possono considerare funzioni periodiche su $\mathbb{R}$ degeneri per le quali ogni reale positivo potrebbe assumere il ruolo di periodo.

Alcune funzioni-RtR periodiche nonconnesse, ossia aventi come dominio l'unione di intervalli aperti separati da un solo reale sono la $\dfrac{1}{\mathrm{mant}(x)}$ e le funzioni trigonometriche $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ e $\csc x$.

Per una funzione periodica nonconnessa f con il dominio (3) diciamo **intervallo esemplare** ogni intervallo della forma

$$\mathsf{I}_{x_1,T,k} \;:=\; (x_1 + k\,T \;,\; x_1 + (k+1)T) \text{ , per ogni } k \in \mathbb{Z},$$

mentre chiamiamo **fascia esemplare** ogni fascia verticale di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ della forma

$$\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;]\!\!\!\!\: \; x \in (x_1 + k\,T \;,\; x_1 + (k+1)T)\} \;=\; \mathsf{I}_{x_1,T,k} \times \mathbb{R} \text{ , per ogni } k \in \mathbb{Z}.$$

Per una funzione periodica connessa di periodo T come intervallo esemplare si può scegliere un qualsiasi intervallo $(x_1 \;,\; x_1 + T)$; in casi specifici in genere accade che risultano più significative e utili scelte più particolari dell'estremità x_1. Analoghe considerazioni seguono per la scelta delle fasce esemplari.

I15f.03 Evidentemente una funzione $f(x)$ periodica di periodo T si può considerare anche periodica di periodo $m\,T$ per ogni $m = 2, 3, 4, ...$, cioè si può affermare che sia periodica avendo come periodo ogni multiplo di T: infatti

$$f(x + T) = f(x) \implies \forall m = 2, 3, ... \;\vdots\; f(x + m\,T) = f(x + (m-1)T) = ... = f(x) \;.$$

Possiamo anche affermare che per ogni $m = 2, 3, 4, ...$ l'insieme delle funzioni periodiche di periodo T è sottoinsieme proprio dell'insieme delle funzioni periodiche di periodo $m\,T$.

Si osserva anche che conoscendo il grafico di una funzione periodica in un intervallo $[x_1, x_1 + T]$, si ottiene il grafico in un intervallo esemplare $[x_1, x_1 + m\,T]$ unendo banalmente m repliche del grafico suddetto opportunamente traslato.
Quindi di una funzione periodica interessano solo i grafici nelle fasce esemplari più ridotte.

(1) Prop.: Si abbia una funzione $f(x)$ noncostante che si trova essere periodica di periodo T ed essere periodica di periodo U.

(a) I due periodi sono commensurabili.

(b) Se si trova che $U = \dfrac{h}{k} T$ con h e k interi positivi coprimi, allora la funzione risulta periodica con periodo dato dal massimo comune divisore di T e U.

Dim.: (a) Se T e U fossero incommensurabili si troverebbero sottointervalli di periodicità della $f(x)$ piccoli a piacere, situazione sostenibile solo da una funzione costante.

(b) Se x_1 è estremità iniziale di un intervallo di periodicità di periodo T lo è anche per un intervallo di periodicità di periodo U. La $f(x)$ risulta periodica su ogni intervallo delimitato dagli estremi iniziali di intervalli dei due periodi. Con procedimento euclideo si trova l'ampiezza minima di questi intervalli e questa fornisce il periodo ridotto richiesto ▮

Possiamo quindi affermare che per conoscere l'andamento di una funzione periodica essenzialmente interessano solo intervalli esemplari e fasce esemplari di ampiezza minima. A questo proposito si potrebbe parlare di "intervalli esemplari minimali" che corrispondono al "periodo minimale" e di "fasce esemplari minimali". Tuttavia è conveniente trascurare gli intervalli e le fasce nonminimali e sottinendere che tutti gli intervalli e tutte la fasce che si coinvolgono nelle argomentazioni siano minimali.

I15f.04 Consideriamo una funzione periodica $f(x)$ e un suo intervallo esemplare della forma $(x_1, x_1 + T)$.
Non vogliamo tuttavia escludere che talora possa essere preferibile esaminare o una delle sue tre varianti $(x_1, x_1 + T]$, $[x_1, x_1 + T)$ e $[x_1, x_1 + T]$.

In genere risulta vantaggioso scegliere qualche x_1 specifico.
Per esempio può risultare conveniente studiare la funzione sin x nell'intervallo $[-\pi, \pi)$, la funzione cos nx in $\left[0, \frac{2\pi}{n}\right)$ e la più generica $\cos(\omega x + \phi)$ in $\left[-\frac{\phi}{\omega}, -\frac{\phi}{\omega} + \frac{2\pi}{\omega}\right)$.
Inoltre può essere opportuno esaminare la funzione $\frac{1}{\mathrm{mant}(x)}$ in $(0, 1)$, la tan x in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, la cot x in $(0, \pi)$ e la $\sec x$ in $(0, 2\pi)$, csc x in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$.

Talora serve distinguere le funzioni periodiche pari e le dispari. Tra le prime cos x e csc x; tra le periodiche dispari sin x, tan x, cot x e $\sec x$.

La considerazione precedente può riformularsi come chiarimento riguardante il comportamento delle funzioni periodiche di fronte alle riflessioni rispetto alla retta verticale della forma $x = x_1 + \frac{T}{2}$, cioè della retta verticale che divide in due parti della stessa larghezza la fascia esemplare scelta per la funzione.

Può anche servire chiedersi il comportamento di una fascia esemplare di una funzione periodica di fronte a una omotetia.
Principalmente interessano le omotetie con centro nel cosiddetto punto centrale della fascia esemplare $C := \left\langle x_1 + \frac{T}{2}, 0\right\rangle$ e che applicando una tale $\boldsymbol{Hmtt}_{C,d}$ con fattore di omotetia $\omega > 0$ si ottiene la funzione periodica di periodo $\omega \cdot T$ che presenta come intervallo esemplare
$$\left\langle x_1 + \frac{T - \omega T}{2}, \ x_1 + \frac{T + \omega T}{2}\right\rangle .$$

I15f.05 Consideriamo due funzioni periodiche aventi lo stesso dominio, $f(x)$ con periodo minimo T e $g(x)$ con periodo minimo U supponendo che T e U siano lunghezze commensurabili e più precisamente che sia $T = \frac{h}{k}U$.
Sono periodiche anche tutte le combinazioni polinomiali delle due funzioni e come loro periodo si può assumere il minimo dei multipli comuni di T e U, cioè $k\,T = h\,U$ ▮

Considerazioni nella stessa direzione del reperimento di una periodicità si possono fare per le divisioni tra funzioni periodiche e quindi per le combinazioni razionali delle funzioni periodiche.

Per queste funzioni si deve tuttavia tenere conto della eliminazione dal dominio dei valori della variabile che annullano i denominatori.

Un esempio significativo di restrizione del dominio è dato dal passaggio dalle funzioni sin xe cos x aventi come dominio l'intero $\mathbb{R}$ alle funzioni
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ avente come dominio } \mathbb{R} \setminus \left\{k \in \mathbb{Z} :| \ (2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \text{ e}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ avente come dominio } \mathbb{R} \setminus \{k \in \mathbb{Z} :| \ k\,\pi\} .$$

I15f.06 Molte composizioni di funzioni periodiche di un dato periodo T conducono a funzioni periodiche che non solo presentano uguale periodo, ma anche hanno periodo minimo un sottomultiplo di questo.

(1) Prop.: La combinazione lineare di due funzioni periodiche dello stesso periodo è funzione periodica dello stesso periodo ▮

Dunque anche le funzioni periodiche con dato periodo costituiscono uno spazio vettoriale sui reali.

(2) Prop.: Il prodotto di due funzioni periodiche dello stesso periodo è funzione periodica dello stesso periodo ▮

Dunque le funzioni periodiche con dato periodo costituiscono anche un'algebra sul campo dei reali.

Si osserva anche che l'algebra costituita dalle funzioni periodiche di periodo T per ogni $m = 2, 3, 4, ...$ è sottoalgebra dell'algebra costituita dalle funzioni periodiche di periodo mT.

I15 g. massimo e minimo di funzioni-RtR

I15g.01 Introduciamo ora due composizioni di funzioni-RtR assai semplici ma di frequente uso e alcune valutazioni.
Cominciamo con il caso particolare di due operandi costituiti da due funzioni-RtR $f(x)$ e $g(x)$ tali da avere i domini con intersezione non vuota. Per questo insieme scriviamo $D := \mathsf{dom}(f) \cap \mathsf{dom}(g)$.
Si dice **funzione massimo di due funzioni** la funzione-RtR

$$\max(f,g) \;:=\; \lceil\, x \in D \;\mapsto\; \max(f(x), g(x)) \,\rceil \;.$$

Si dice **funzione minimo di due funzioni** la funzione-RtR

$$\min(f,g) \;:=\; \lceil\, x \in D \;\mapsto\; \min(f(x), g(x)) \,\rceil \;.$$

Evidentemente le due composizioni sono collegate dalla trasformazione del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Ox}}$.
Si osserva anche che

$$\max[-f(x), -g(x)] = -\left(\min[f(x), g(x)]\right) \qquad \text{e} \qquad \min[-f(x), -g(x)] = -\left(\max[f(x), g(x)]\right) \;.$$

I15g.02 Le funzioni della forma $\max[f(x), 0]$ e $\min[f(x), 0]$ danno quelle che sono chiamate, risp., la parte positiva e la parte negativa della funzione $f(x)$.

Si osservino in particolare le funzioni $\max[\sin x, 0]$ e $\min[\sin x), 0]$ e si constati che $\sin x = \max[\sin x, 0] + \min[\sin x, 0]$.

Più in generale si constata che per ogni $x \in \mathsf{dom}(f)$

(1) $$f(x) \;=\; \max[f(x), 0] + \min[f(x), 0] \;.$$

Più in generale per ogni $k \in \mathbb{R}$ possono essere utili le funzioni $\max[f(x), k]$ e $\min[f(x), k]$.
Per queste funzioni si trova la formula che generalizza la (1)

(2) $$f(x) \;=\; \max[f(x), k] + \min[f(x), k] - k \;.$$

I15g.03 Consideriamo l'insieme delle funzioni che hanno un comune dominio D non vuoto, cioè l'insieme $\mathbf{F} = \lceil D \longmapsto \mathbb{R} \rceil$; le composizioni massimo e minimo di due funzioni di questo D si possono considerare operazioni binarie su $\mathbf{F}$.
Evidentemente queste operazioni sono simmetriche, cioè

$$\forall f, g \in \mathbf{F} \;\;\vdots\;\; \max[f, g] = \max[g, f] \quad \text{e} \quad \min[f, g] = \min[g, f] \;.$$

Esse inoltre sono associative, cioè

$$\forall f, g, h \in \mathbf{F} \;\;\vdots\;\; \max[\max[f, g], h] = \max[f, \max[g, h]] \quad \text{e} \quad \min[\min[f, g], h] = \min[f, \min[g, h]] \;.$$

Si conviene quindi di definire

$$\max[f, g, h] \;:=\; \max[\max[f, g], h] = \max[f, \max[g, h]] \qquad \text{e}$$

$$\min[f, g, h] \;:=\; \min[\min[f, g], h] = \min[f, \min[g, h]] \;.$$

Questo rende lecito estendere l'applicazione delle due composizioni a arbitrari insiemi finiti di funzioni-RtR con dominio in comune.

I15g.04 **(1) Prop.**: Il massimo tra funzioni pari è pari; il minimo tra funzioni pari è pari ▮

Si trovano invece duetti di funzioni dispari il cui massimo e in cui minimo non hanno parità definita.

(2) Prop.: La funzione massimo e la funzione minimo di funzioni periodiche con uno stesso periodo T sono due funzioni periodiche che presentano periodo T ▮

(3) Prop.: La funzione massimo e la funzione minimo di funzioni crescenti // decrescenti // noncrescenti // nondecrescenti // monotone in senso stretto e monotone in senso lato sono due funzioni con la stessa caratteristica di monotonia ▮

I15g.05 Segnaliamo che le definizioni di max e min si possono estendere alle funzioni appartenenti a insiemi della forma $\lceil D \longmapsto \mathbf{T} \rceil$, con $\mathbf{T}$ insieme totalmente ordinato arbitrario.

`L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php`