1

Capitolo I13
serie numeriche

Contenuti delle sezioni

33 pagine

I130.01 Questo capitolo, stretta prosecuzione del precedente I12, è dedicato alle serie di numeri reali, considerandole all'inizio come casi particolari di serie di elementi di uno spazio $\mathbb{R}^{\times d}$.

Sono riprese, per ampliarle e approfondirle, le nozioni introdotte in B35 per le serie di numeri razionali.

Si inizia con le definizioni basilari delle serie e con le distinzioni fondamentali derivate dalle proprietà di convergenza, facendo riferimento soprattutto al criterio di Cauchy.

Vengono poi considerate le serie di addendi positivi e le serie a segni alternati.

Successivamente vengono esaminati vari criteri di convergenza.

Per ultime sono trattate le questioni riguardanti le composizioni algebriche delle serie e la possibilità di dedurre proprietà di convergenza delle serie risultanti dalle proprietà delle serie operande.

I13 a. serie numeriche e loro somma

I13a.01 La nozione di serie si può trattare a diversi livelli di generalità; qui iniziamo a un livello intermedio, successivamente ci focalizziamo sulle serie di numeri reali, mentre dedicheremo solo pochi cenni alle situazioni più generali.

Consideriamo un intero positivo d e lo spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ che, in vista di considerazioni più generali, individuiamo anche con la lettera E. Qui osserviamo che E munito della somma di vettori è un gruppo abeliano e quindi in esso sono definite l'operazioni di somma, l'elemento neutro rispetto a essa, il passaggio all'opposto espresso da un segno $-$ unario e l'operazione binaria differenza.

Inoltre E munito della distanza euclidea

$$\operatorname{dist}(\langle a_1, ..., a_d\rangle, \langle b_1, ..., b_d\rangle) \ := \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}$$

costituisce uno spazio metrico [B46a01].

Consideriamo una successione di elementi di E

$$\mathsf{a} = \langle a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\rangle \ = \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n\rangle \in \lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathsf{E} \rceil \ = \ \mathsf{E}^{\mathbb{N}} \ .$$

Definiamo come **successione delle somme parziali di una successione** a denotiamo con $\mathsf{sps}(\mathsf{a})$ la successione

$$\langle a_0 \ , \ a_0 + a_1 \ , \ a_0 + a_1 + a_2 \ , \ ... \ , \ a_0 + a_1 + \cdots + a_n \ , \ ...\rangle \ = \ \left\langle n \in \mathbb{N} :\Big| \ \sum_{i=0}^{n} a_i \right\rangle \ .$$

Qui sps sta per *sequence of partial sums.*

Per esempio per la successione di numeri reali (più in particolare razionali)

$$\left\langle n \in \mathbb{N} :\Big| \ \frac{1}{n+1} \right\rangle \ = \ \left\langle p \in \mathbb{P} :\Big| \ \frac{1}{p} \right\rangle = \frac{1}{\mathbb{P}} \ ,$$

cioè per la successione dei reciproci degli interi positivi, la successione delle somme parziali è la successione dei cosiddetti **numeri armonici** [B35d01]:

$$\langle p \in \mathbb{P} :| \ H_p\rangle \ := \ \mathsf{sps}\left(\frac{1}{\mathbb{P}}\right) \ = \ \left\langle n \in \mathbb{N} :\Big| \ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1} \right\rangle \ = \ \left\langle 1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{49}{20}, \frac{363}{140}, \frac{761}{280} ... \right\rangle \ .$$

Si osserva che la corrispondenza tra successioni di elementi di E e successioni delle loro somme parziali è biunivoca; l'applicazione inversa della sps associa a una generica $\ \mathsf{s} \ = \langle n \in \mathbb{N} :| \ s_n\rangle \ \in \ \mathsf{E}^{\mathbb{N}}$ la successione

$$\mathsf{sps}^{-1}(\mathsf{A}) \ = \langle s_0 \ , \ s_1 - s_0 \ , \ s_2 - S_1 \ , \ ... \ , \ s_n - s_{n-1} \ , \ ...\rangle \ .$$

I13a.02 Diciamo **serie** di elementi di E una coppia costituita da una successione di $\mathsf{E}^{\mathbb{N}}$, chiamata **successione degli addendi della serie** e dalla associata successione delle somme parziali.

A una serie di elementi di E quindi diamo la forma $\ \mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{sps}(\mathsf{a})\rangle \ $ con $\mathsf{a} \in \mathsf{E}^{\mathbb{N}}$.

A una tale serie di addendi in E si può dare anche la forma $\mathbf{a} = \langle \mathsf{sps}^{-1}(\mathsf{s}), \mathsf{s}\rangle$ con $\mathsf{s} \in \mathsf{E}^{\mathbb{N}}$.

La componente di indice n, a_n, della successione degli addendi $a_{\mathbb{N}}$ della serie viene detta **addendo della serie** di indice n.

Occorre osservare che in molti sviluppi si è portati a utilizzare per le serie varie notazioni semplificate confidando che il contesto consenta di evitare ambiguità.

SIn genere per le serie si usano come equivalenti notazioni come le seguenti.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad , \quad \sum_{n}^{+\infty} a_n \quad , \quad \sum_{n} a_n \quad , \quad \sum^{\infty} a_n \quad .$$

Per esempio si può dire che $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ è la serie avente come addendi gli inversi degli interi positivi.

Tra le serie dei molti generi esaminabili rivestono ruoli computazionali basilari sono quelle relative a $d = 1$, cioè le serie di addendi reali, serie $\langle \mathsf{a}, \mathsf{sps}(\mathsf{a}) \rangle$ con $\mathsf{a} \in$ **FunNtR**.
Denoteremo con SerNR l'insieme di tali serie; il presente capitolo si occupa soprattutto di queste serie.

Per $d = 2$ si hanno le serie dei vettori del piano cartesiano; queste sono essenzialmente equivalenti alle serie di addendi nel campo complesso, le serie associate agli elementi di **FunNtC**.
L'insieme di queste serie lo denotiamo con SerNC .

Per $d = 3$ si hanno le serie costituite da vettori dello spazio tridimensionale sui reali.
Per $d = 2m$ si hanno le serie nello spazio a $2m$ dimensioni sui reali; queste sono essenzialmente equivalenti alle serie di addendi appartenenti allo spazio m-dimensionale sui complessi.

I13a.03 Abbiamo dato per le serie una definizione formale che si serve di una coppia di entità da ciascuna delle quali si può ricavare l'altra.
I generi di entità che come le serie vengono definite a partire da oggetti (come le coppie di sequenze-N) alcuni dei quali deducibili dagli altri vengono ragionevolmente chiamate **generi di entità a presentazione ridondante**.

L'operazione consistente nel servirsi formalmente di entità ridondanti alle quali si può attribuire la forma $\mathcal{E} = \langle E_1, E_2, ..., E_k \rangle$ costituisce un caso di quella che chiamiamo **entificazione mediante ridondanza**.

Questa operazione consiste nell'introdurre nomi e notazioni (serie, sps, ...) riguardanti un'entità composita in modo da darle la possibilità di essere oggetto e soggetto di azioni sue peculiari, di essere dotata di attributi e di essere membro di relazioni (cioè di godere di proprietà) altrettanto peculiari.

Scopo di una tale operazione è la possibilità di formulare argomentazioni e asserzioni sopra le entità ridondanti che complessivamente possono risultare talora più semplici, talora più attrezzate e più pertinenti, talora più versatili.

Sostenzialmente i vantaggi che possono presentare le entità ridondanti riguardano la formulazione delle considerazioni per scopi generali.

Si osserva che tutti gli sviluppi sopra le serie si potrebbero presentare servendosi solo della nozione di successione, ma con il corrispondente lessico, più essenziale ma più ridotto, per esporre molti risultati si renderebbero necessari giri di frase e costrutti espositivi sensibilmente più elaborati e meno leggibili.

La definizione delle serie come coppie consente di avere disponibili sin dall'inizio sia la successione degli addendi, sia la successione delle somme parziali e questo in molti contesti risulta vantaggioso.

In generale nel trattare una entità ridondante $\mathcal{E} = \langle E_1, E_2, ..., E_k \rangle$ si ha la possibilità di servirsi direttamente di ciascuna delle sue componenti E_h per $h = 1, 2, ..., k$.

I13a.04 Le serie sono entità largamente usate nell'analisi matematica, in particolare per studiare le funzioni-RtR a partire da equazioni differenziali che esse soddisfano.
Per molte questioni vengono trattate serie specifiche che conviene presentare con espressioni imperniate sopra una lettera, molto spesso la n, alla quale si attribuisce, spesso implicitamente, il ruolo della

variabile in $\mathbb{N}$: in particolare si usano scritture della forma a_n per esprimere fornisce l'addendo nella posizione n di una serie complessivamente identificata da $\langle \mathsf{a}\ ,\ \mathsf{sps}(\mathsf{a})\rangle$.

Molte serie di addendi reali si individuano con scritture delle forme

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \cdots + \mathcal{E}_n + \cdots \qquad \text{o} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n \quad ,$$

forme equivalenti nelle quali per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{E}_n$ denota un'espressione nella n.

I13a.05 Per individuare alcune serie può essere più conveniente usare successioni degli addendi della forma $\mathsf{a} = \langle a_1, a_2, a_3, ..., a_p, ...\rangle$ e successioni di somme parziali della forma

$$\left\langle a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, ..., \sum_{j=1}^{p} a_j, ... \right\rangle \ .$$

In effetti risulta comodo considerare serie esprimibili con scritture da considerare equivalenti come

$$\sum_{p=1}^{+\infty} a_p \qquad , \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p + \cdots \qquad , \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \qquad .$$

Per esempio la serie degli inversi degli interi positivi si individua concisamente come $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p}$.

In molte considerazioni le differenze tra questi due tipi di serie sono inessenziali; solo in pochi sviluppi specifici si rendono necessarie attente distinzioni.

Per l'insieme delle serie i cui addendi appartengono a $\mathbb{R}^{\times d}$ prive dell'addendo di indice 0 useremo la notazione $\mathsf{SerPR}^{\times d}$; in particolare per $d = 1$

$$\mathsf{SerPR} \ := \ \left\{ a_{\mathbb{P}} \in \mathsf{FunPtR} \ \middle| \ \left\langle \langle a_1, a_2, a_3, ..., a_p, ...\rangle, \left\langle a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, ..., \sum_{i=1}^{p} a_i, ... \right\rangle \right\rangle \right\} \ .$$

Per una serie come la entità a_n viene ancora detto addendo di indice n; va osservato che esso nella successione degli addendi della serie occupa la posizione n-esima, mentre in una serie di SerNR l'addendo di indice n a_n nella successione degli addendi occupa la posizione $n + 1$-esima.

Tra SerNR e SerPR non vi sono differenze sostanziali. Per chiarire il collegamento tra SerNR e SerPR due considerazioni.

Ogni serie di SerPR si può identificare con una serie di SerNR avente il primo addendo a_0 nullo e, grazie a tale identificazione, SerPR si può considerare sottoinsieme di SerNR. Ogni serie $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ di SerNR si può identificare con la serie di SerPR avente come addendo di indice 1 $a_0 + a_1$ e, in seguito a tale identificazione, SerNR si può considerare sottoinsieme di SerPR.

Nel seguito la maggior parte delle considerazioni generali riguarderanno SerNR, mentre si ricorrerà a SerPR solo per poche argomentazioni specifiche.

Talora, confidando nella capacità di risoluzione delle ambiguità del contesto, più sbrigativamente si utilizzano espressioni più semplificate come $\displaystyle\sum^{\infty} a_n$, $\sum_n a_n$ e $\sum a_n$.

Inoltre le notazioni della genere $\langle \mathsf{a}, \mathsf{sps}(\mathsf{a})\rangle$ spesso, più rigidamente (si rinuncia alla versatalità) si individuano con notazioni della forma $\langle \mathsf{a}, \mathsf{A}\rangle$, cioè servendosi per la successione degli addendi di una letters minuscola e per la successione delle e somme parziali della corrispondente lettera maiuscola.

I13a.06 La definizione data per le serie si è basata su successioni di oggetti che dal punto di vista dell'algebra fanno parte di una struttura di anello, successioni che inoltre si possono considerare elementi di uno spazio metrico.

In effetti la definizione si può estendere a casi nei quali gli addendi sono entità come le matrici di un dato profilo $m \times n$ con entrate nell'insieme dei reali o nell'insieme dei complessi.
In questi casi la qualificazione algebrica dei componenti è quella di semianello.

Aggiungiamo anche che si possono urtilizzare serie ancora più articolate, ad esempi serie i cui addendi sono matrici di vettori.

Proseguendo nelle generalizzazioni risulta abbastanza evidente la possibilità di introdurre serie di funzioni in una o più variabili aventi valori reali, complessi, vettoriali, matriciali e altro ancora.
In particolare risulta utile trattare serie di operatori e di trasformazioni entro spazi di vari generi.

Distinzioni importanti si possono fare in relazione alle proprietà della somma. Le serie più basilari riguardano somme numeriche per le quali valgono le proprietà di associatività, di invertibilità e di commutatività del prodotto e di distributività del prodotto rispetto alla somma.
Tuttavia si considerano anche serie basate su operazioni binarie con qualche tratto in comune con le operazioni tradizionalmente chiamate "somma" ma distanti dalle somme numeriche; in particolare nella teoria dei linguaggi sono studiate le serie di variabili noncommutative le quali non si possono collocare nella specie degli anelli, ma solo nella specie dei semianelli [*Berstel, Reutenauer*].

I13a.07 Un problema rilevante è quello della classificazione delle serie di addendi realia causa della varietà di questi oggetti e della molteplicità dei loro utilizzi.

La classificazione più importante riguarda le caratteristiche di convergenza della successione delle somme parziali.

Consideriamo una $\mathsf{A} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle \in \mathsf{SerNR}$; essa si dice **successione convergente** al numero reale S sse la successione delle somme parziali converge a tale numero, cioè sse $\lim_{n \to +\infty} A_n = S$. Questa situazione si rappresenta con notazioni equivalenti come le seguenti:

(1) $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S \qquad , \qquad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \;=\; S \ ,$$

oppure con loro varianti ben riconoscibili come la $a_0 + a_1 + a_2 + \sum_{n=3}^{+\infty} a_n = S$.

S viene detto **somma della serie convergente** $\langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle$; si dice anche di avere una serie che converge ad S.

Per affermare che una serie **a** è convergente senza fornire la sua somma, che potrebbe essere conosciuta solo approssimativamente o anche essere riconosciuta esistente ma non nota, si usano scritture da considerare equivalenti come

(2) $$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| < +\infty \quad \text{o} \quad -\infty < \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \quad .$$

Se la successione delle somme parziali A è divergente a $+\infty$, oppure divergente a $-\infty$, oppure divergente a ∞ si parla, risp., di **serie divergente** a $+\infty$, di serie divergente a $-\infty$ e di serie divergente a ∞.
Per enunciare tali situazioni si usano, risp., scritture come

(3) $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \qquad , \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = -\infty \qquad , \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \infty \quad .$$

Chiaramente l'insieme delle serie divergenti a $-\infty$ e l'insieme delle serie divergenti a $+\infty$ sono disgiunti e sono sottoinsiemi propri dell'insieme delle serie divergenti a ∞.

Per esempio la serie $1-3+5-7+9-11+\cdots+(-1)^n(2n+1)+\cdots$ diverge a ∞ e non è divergente a $-\infty$ e neppure divergente a $+\infty$.

Evidentemente le nozioni di serie divergente a $+\infty$ e di serie divergente a $-\infty$ sono duali-UD; inoltre

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \iff \sum_{n=0}^{+\infty}(-a_n) = -\infty \quad .$$

I13a.08 Nelle formule del paragrafo precedente, accanto alle serie di addendi reali ed a numeri reali come S, compaiono i simboli $+\infty$, $-\infty$ ed ∞. Come vedremo le serie possono essere sottoposte alle operazioni somma, differenza, prodotto e moltiplicazione per costanti reali; inoltre, se sono soddisfatte opportune condizioni di convergenza, le serie possono essere sottoposte alle dette operazioni insieme ai numeri reali.

I suddetti accostamenti suggeriscono di adottare un campo dei reali ampliato con l'inclusione delle due entità individuate, risp., da $+\infty$ e $-\infty$ in modo da poter estendere il calcolo concernente le dette operazioni al campo reale esteso e alle serie numeriche. Come vedremo questa estensione si può effettuare solo in parte: solo una parte delle operazioni sui reali e sulle serie numeriche e delle relative regole si possono applicare ai simboli infinito; si parla quindi di **aritmetizzazione parziale** di tali simboli.

Comunque questa estensione, che ci ripromettiamo di chiarire, consente di operare su formule di natura algebrica che, pur dovendo essere manipolate con cautele, presentano notevole utilità, in particolare sul piano della leggibilità dei risultati.

A livello intuitivo anticipiamo le seguenti uguaglianze.

$$(+\infty)+(+\infty) = +\infty) \quad , \quad (-\infty)+(-\infty) = -\infty) \quad , \quad -(+\infty) = -\infty \quad , \quad -(-\infty) = +\infty \quad ,$$

$$\forall k \in \mathbb{R}_+ : \ k(\pm\infty) = \pm\infty \quad , \quad \forall k \in \mathbb{R}_+ : \ -k(\pm\infty) = \mp\infty \quad ,$$

$$(+\infty)\cdot(\pm\infty) = \pm\infty \quad , \quad (-\infty)\cdot(\pm\infty) = \mp\infty \quad , \quad |(\pm\infty)| = (+\infty) \quad .$$

Segnaliamo inoltre che, in accordo con le considerazioni sulle forme indeterminare [I12e07] non sono definite composizioni come

$$(+\infty)+(-\infty) \quad , \quad (+\infty)-(+\infty) \quad , \quad 0\cdot(\pm\infty) \quad .$$

I13a.09 Una serie di addendi reali convergente o divergente si dice **serie regolare**; ogni altra serie di addendi reali si dice **serie oscillante** o anche serie irregolare o serie indeterminata.

Chiameremo **caratterizzazione di convergenza di una serie** di addendi reali l'informazione che distingue se la serie è convergente, se essa è divergente a $-\infty$, oppure a $-\infty$, oppure a ∞ o se invece essa è irregolare.

In complesso, dunque, a ogni serie di addendi reali si attribuisce la caratterizzazione di convergenza derivata dalla rispettiva successione delle somme parziali.

La terminologia delle serie in effetti è motivata dalla opportunità di presentare mediante frasi più scorrevoli risultati sopra i limiti delle successioni i cui componenti sono significativamente esprimibili come somme parziali, cioè sopra i limiti di successioni di un tipo un po' particolare, ma diffuso e di grande utilità (in particolare quando si affrontano problemi di approssimazione).

I13a.10 Come primi esempi di serie di cui esaminare le proprietà di convergenza riprendiamo quelli riguardanti serie di razionali visti in B35d.
Consideriamo la progressione geometrica di ragione q, $\langle n \in \mathbb{N} :| q^n \rangle$ e le somme parziali associate $A_n = \sum_{i=0}^{n} q^{i-1} = 1 + q + \cdots + q^n$.
Se $q = 1$, $A_n = n + 1$ e la corrispondente serie diverge a $+\infty$.
Se $q \neq 1$, $A_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{1}{1-q} - \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$;
se $|q| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$ e si ha la serie convergente $1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \dfrac{1}{1-q}$;
se $q > 1$, la serie, per il criterio del confronto applicato al caso $q = 1$ è divergente a $+\infty$;
se $q < -1$, la serie è divergente a ∞, ovvero la successione delle somme parziali ha **Limv** $\langle A_{\mathbb{P}} \rangle = \{-\infty, +\infty\}$;
se $q = -1$, si ha la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ oscillante e indeterminata, in quanto $A_0 = A_2 = A_4 = \cdots = 1$, mentre $A_1 = A_3 = A_5 = \cdots = 0$ e **Limv** $\langle A_{\mathbb{P}} \rangle = \{0, 1\}$.

I13a.11 Un numero decimale periodico dato da una scrittura della forma

$$r = a.c_1c_2c_3c_1c_2c_3c_1c_2c_3... = a.\overline{c_1c_2c_3}$$

va considerato come la somma di una serie:

$$r \ = \ a + \frac{c_1\,c_2\,c_3}{10^3} + \frac{c_1\,c_2\,c_3}{10^6} + \cdots \ = \ a + \frac{c_1\,c_2\,c_3}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \cdots\right) \ ;$$

si ha quindi una serie geometrica di ragione $\dfrac{1}{10^3}$ che converge a $1 - \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1000}{999}$ e di conseguenza

$$a.c_1\,c_2\,c_3\,c_1\,c_2\,c_3\,c_1\,c_2\,c_3... \ := \ a + \frac{c_1\,c_2\,c_3}{999} \ .$$

I13a.12 La serie armonica $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \cdots$ ha come somme parziali i numeri armonici

$$H_1 = 1,\ H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\ H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \cdots, H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}, \ldots ,$$

numeri razionali positivi la cui successione diverge a $+\infty$; quindi la serie armonica diverge a $+\infty$.

Consideriamo la **serie di Mengoli** [Pietro Mengoli] come elemento di SerPR:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \ = \ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots \ ;$$

per il suo addendo n-esimo, cioè di indice n, si ha $\dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, e quindi per la sua somma parziale n-esima

$$A_n = a_1 + \cdots + a_n \ = \ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \ ;$$

quindi $\lim_{n\to+\infty} A_n = 1$ e la serie è convergente e ha come somma 1.

I13a.13 Le serie $\langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle$, sia quelle con addendi reali, sia quelle con addendi appartenenti a uno spazio $\mathbb{R}^{\times d}$, sia quelle più generali con addendi in opportuni spazi metrici, sono utilizzate per questioni nelle quali occorre tenere sotto controllo una entità esprimibile mediante un valore S (reale, complesso, vettoriale, ...) individuabile con una successione di elaborazioni che si possono fare con manovre via

via più accurate (sul piano vuoi delle osservazioni, vuoi dei modelli, vuoi delle catene deduttive) che portano, risp., alle valutazioni A_0, A_1, ..., A_n, ... di S.

In queste circostanze si dice che il valore S viene individuato mediante **approssimazioni successive**.
Il complesso delle elaborazioni che portano agli A_n si può vedere come un procedimento che si sviluppa attraverso una potenziale infinità numerabile di passi discusso in B17.

Occorre aggiungere che le serie servono quando si passa dalla elaborazione per una A_{n-1} a quella per la A_n ottenendo questa con l'aggiunta di una quantità a_n frutto di una ulteriore più accurata precisazione.

I13 b. prime proprietà delle serie di addendi reali

I13b.01 In molte considerazioni sopra una serie $\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle = \langle \mathsf{a}, \mathsf{sps}(\mathsf{a}) \rangle$ conviene servirsi di alcune espressioni numeriche e di alcune altre serie derivabili dalla successione degli addendi a.

Per ogni $k \in \mathbb{P}$ si dice **serie residua** dopo l'indice k della $\mathbf{a}$ la serie

$$\mathsf{rsdSer}_k(\mathbf{a}) := a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+p} + \cdots \qquad \text{dove } \; k = 1, 2, 3, \ldots \quad .$$

(1) Prop.: La caratterizzazione di convergenza di una serie non cambia se si sopprime un insieme finito dei suoi addendi.

Dim.: La serie $\mathsf{b}_k = \langle \mathsf{b}, \mathsf{B} \rangle$ ottenuta dalla $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ trascurando i suoi primi k addendi presenta somme parziali B_n ottenibili dalle corrispondenti somme parziali A_{k+n} della serie data sottraendo loro la somma degli addendi soppressi, $\sum_{i=0}^{k-1} a_i$.

Nel caso in cui si sopprimono k addendi che non occupano le prime k posizioni la suddetta proprietà delle somme parziali vale definitivamente, a partire dall'addendo che segue l'ultimo soppresso; quindi la conclusione sulla caratterizzazione di convergenza è la stessa ▮

(2) Coroll.: Ogni serie residua di una data serie $\mathbf{a}$ ha la stessa caratterizzazione di convergenza ▮

Più esplicitamente si ha il quadro che segue.

$\mathbf{a}$ è convergente $\iff \forall k \in \mathbb{N}$: $\mathsf{rsdSer}_k(\mathsf{A})$ è convergente

$\iff$ per qualche $\overline{k} \in \mathbb{N}$ $\mathsf{rsdSer}_{\overline{k}}(\mathbf{a})$ è convergente.

$\mathbf{a}$ diverge a $\pm\infty \iff \forall k \in \mathbb{P}$: $\mathsf{rsdSer}_k(\mathbf{a})$ diverge a $\pm\infty$

$\iff$ per qualche $\overline{k} \in \mathbb{P}$ $\mathsf{rsdSer}_{\overline{k}}(\mathsf{A})$ diverge a $\pm\infty$.

$\mathbf{a}$ diverge a $\infty \iff \forall k \in \mathbb{P}$: $\mathsf{rsdSer}_k(\mathbf{a})$ diverge a ∞

$\iff$ per qualche $\overline{k} \in \mathbb{P}$ $\mathsf{rsdSer}_{\overline{k}}(\mathbf{a})$ diverge a ∞.

Possiamo quindi affermare che una serie $\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ si può considerare, per ogni $k \in \mathbb{P}$, la somma della sua somma parziale A_k e della somma della corrispondente serie residua $\mathsf{rsdSer}_k(\mathbf{a})$.

I13b.02 Supponiamo ora che la serie $\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ converga alla somma S; per ogni $k \in \mathbb{P}$ si dice **resto di indice k della serie $\mathbf{a}$** la quantità $\mathsf{rmdr}_k(\mathsf{A}) := S - A_k$. Tale resto è la somma della serie residua $\mathsf{rsdSer}_k(\mathbf{a})$ ottenuta sopprimendo dalla $\mathbf{a}$ i suoi addendi con indici inferiori a k.

Il resto $\mathsf{rmdr}_k(\mathbf{a})$ si può considerare l'errore che si commette quando si approssima la somma della serie con A_k con la sua somma parziale di indice k.

Evidentemente $\lim_{k \to +\infty} \mathsf{rmdr}_k(\mathbf{a}) \; = \; S - \lim_{k \to +\infty} A_k \; = \; S - O$.

In altre parole: per ogni serie convergente la successione dei resti è infinitesima.

I13b.03 Si osserva che una serie può essere convergente solo se il suo addendo n-esimo tende a 0 per n tendente a $+\infty$.

Questa situazione costituisce solo una condizione necessaria per la convergenza e che non sia una condizione sufficiente lo si ricava da controesempi come quello della serie armonica [B35d04], serie il cui addendo tende a 0 ma che diverge a $+\infty$.

Per una qualsiasi serie $\langle \mathsf{a}, \mathsf{A}\rangle$ e per $k = -1, 0, 1, 2, ...$ e $p \in \mathbb{P}$, si dice **resto parziale** che segue l'indice k e di lunghezza p la somma dei p addendi che seguono quello di indice k scriviamo:

$$\mathsf{rmdr}_{k,p}(\mathbf{a}) \ := \ a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+p} = A_{k+p} - A_k \ .$$

Occorre aggiungere che per rendere del tutto valida l'ultima espressione si conviene che $A_{-1} := 0$.

Per esempio per la serie di Mengoli [B35d04] si ha

$$\mathsf{rmdr}_{k,p} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \cdots + \frac{1}{(k+p)(k+p+1) =}$$
$$\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \cdots + ... + \left(\frac{1}{k+p} - \frac{1}{k+p+1}\right) =$$
$$\frac{1}{k+1} - 1ok + p + 1 = \frac{p}{(k+1)(k+p+1)} \ .$$

Per la serie armonica [B35d04] si ha invece

$$\mathsf{rmdr}_{k,p} = \sum_{i=k+1}^{k+p} q^i = q^{k+1}(1 + q + \cdots + q^{p-1}) = \frac{q^{k+1}(1-q^p)}{1-q} \ .$$

Osserviamo che per una generica serie e per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathsf{rmdr}_{-1,p} = \mathsf{sps}_{p-1} \qquad , \qquad \mathsf{rmdr}_{k,0} = 0 \qquad , \qquad \mathsf{rmdr}_{k,p} + \mathsf{rmdr}_{k+p,q} = \mathsf{rmdr}_{k,p+q}$$

e che al tendere di p a $+\infty$ $\mathsf{rmdr}_{k,p}(\mathbf{a})$ tende a coincidere con $\mathsf{rmdr}_k(\mathsf{A})$.

I13b.04 Le locuzioni riguardanti proprietà possedute definitivamente dagli addendi delle successioni, cioè possedute a partire da un certo indice in poi, si possono attribuire anche alle serie e ai loro addendi. Quindi si può parlare di serie con gli addendi definitivamente positivi, oppure di serie definitivamente a segni alternati, oppure di serie definitivamente strettamente decrescenti.

Si dice che la serie $\mathbf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è una **serie che converge per difetto** o che converge dal disotto alla somma S sse $\lim_{n\to+\infty} A_n = S-$. Questa situazione si esprime scrivendo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S-$.

Per dualità-UD si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è una **serie che converge per eccesso** o che converge dal disopra alla somma S sse $\lim_{n\to+\infty} A_n = S+$. Per enunciare questo fatto si scrive $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S+$.

Una serie con queste caratteristiche si chiama **serie con definita direzione della convergenza**.

Evidentemente le serie convergenti di addendi definitivamente positivi convergono per difetto e le serie di addendi definitivamente negativi convergono per eccesso, mentre le serie convergenti di addendi definitivamente a segni alternati non convergono per difetto e non convergono per eccesso.

Si constata che l'insieme delle serie che convergono per difetto a un reale S ha in comune con l'insieme delle serie che convergono per eccesso ad S solo le serie che presentano la successione delle somme parziali definitivamente uguali ad S; inoltre è evidente che i due insiemi suddetti sono sottoinsiemi propri dell'insieme delle serie di addendi reali che convergono ad S: le serie definitivamente a segni alternati che convergono ad S sono estranee a entrambi gli insiemi delle serie che presentano definita direzione di convergenza ad S.

I13b.05 Considerando come codominio delle successioni di addendi reali l'insieme dei reali compattificato $\mathbb{R}\dot{\cup}\{\infty\}$, le serie divergenti a $-\infty$ si possono chiamare anche serie divergenti a ∞ per eccesso e le serie divergenti a $+\infty$ si possono chiamare anche serie divergenti a ∞ per difetto.

Queste espressioni, forse a prima vista paradossali, sono chiarite dalla biiezione che si può stabilire tra insieme dei numeri reali compattificato e punti di una circonferenza.
Questa biiezione si può visualizzare come biiezione tra la retta dei reali collocata nel piano-RR e la circonferenza sua tangente nell'origine con centro in $\langle 0, 0.5\rangle$ e raggio 1 stabilita dalla prioezione dal punto diametralmente opposto all'origine.

+//input pI13b05

La convergenza per difetto corrisponde a un avvicinamento nel verso orario o negativo e la convergenza per eccesso a un avvicinamento nel verso antiorario o positivo.

I13b.06 **Prop.** (**criterio di Cauchy di convergenza delle serie**)
Una serie $\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A}\rangle = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ è convergente sse, scelto un qualsiasi ϵ reale positivo (idap), esiste un intero naturale $\overline{n}$ tale che per ogni intero $n > \overline{n}$ e per ogni intero positivo p si ha $|\mathsf{rmdr}_{n,p}(\mathsf{A})| < \epsilon$.

Dim.: Dato che la convergenza della $\mathbf{a}$ equivale alla convergenza della $\mathsf{A} = \langle A_0, A_1, A_2, ...\rangle$, il criterio di Cauchy per la convergenza delle successioni risulta equivalente all'asserto ▮

I13b.07 Analogamente a quanto si è detto sulle successioni convergenti aventi componenti costruibili, si osserva che la somma di una serie convergente i cui addendi sono costruibili è un numero reale costruibile.

In effetti le serie costituiscono uno strumento largamente utilizzato per individuare e utilizzare numeri irrazionali costruibili di grande interesse. Nel seguito di questo capitolo incontreremo tali costanti matematiche, in particolare la cosiddetta costante di Euler-Mascheroni [d03] e $\pi^2/6$ [e05].

Molte funzioni regolari possono avere i valori corrispondenti a valori reali costruibili della variabile indipendente attraverso espressioni nelle quali compaiono serie convergenti: in d04 incontreremo una tale espressione per $\ln 2$.

I13b.08 Consideriamo due serie

$$\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A}\rangle = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b} = \langle \mathsf{b}, \mathsf{B}\rangle = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \quad .$$

Si dice **serie somma di due serie**, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)$; essa si denota con $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Si dice **serie differenza** delle serie $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - b_n)$; essa si denota con $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

(1) Prop.: Se le due serie $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono convergenti, sono convergenti anche la loro serie somma e la loro serie differenza; inoltre la somma della serie ottenuta con l'operazione somma si ottiene addizionando le somme delle serie date e la somma della serie differenza si ottiene sottraendo la somma della seconda serie dalla somma della prima.

Dim.: Si osserva che le successioni delle somme parziali A e B sono convergenti e quindi la successione somma delle due converge alla somma delle loro somme.

Introdotti $S_A := \lim_{n\to+\infty} A_n$ ed $S_B := \lim_{n\to+\infty} B_n$, si ha $\lim_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = S_A \pm S_B$ ▮

(2) Prop.: Se le due serie $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono assolutamente convergenti, sono assolutamente convergenti anche la loro serie somma e la loro serie differenza.

Dim.: Basta osservare che, essendo convergenti $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}|b_n|$, è convergente la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(|a_n|+|b_n|)$ e che questa proprietà, grazie alla disuguaglianza $|a_n \pm b_n| \le |a_n| + |b_n|$, comporta la convergenza delle serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(|a_n \pm b_n|)$ ▮

I13b.09 Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si dice moltiplicazione per α della serie $\mathbf{a}$, e si denota con $\alpha \cdot \mathbf{a}$ la serie avente come addendo n-esimo $\alpha\, a_n$.

(1) Prop.: Se $\alpha \neq 0$ la serie $\mathbf{a}$ e la $\alpha\,\mathbf{a}$ hanno la stessa caratterizzazione di convergenza.

Dim.: Se $\mathbf{a}$ converge a S_A, allora $\alpha\,\mathbf{a}$ converge a $\alpha\, S_A$.
Se $\mathbf{a}$ è una serie di addendi reali e diverge a $+\infty$, allora $\alpha\,\mathbf{a}$ diverge a $+\infty$ sse $\alpha > 0$ e diverge a$-\infty$ sse $\alpha < 0$.
Se invece $\boldsymbol{A}$ diverge a $-\infty$, allora $\alpha\,\boldsymbol{A}$ diverge a $-\infty$ sse $\alpha > 0$ e diverge a $+\infty$ sse $\alpha < 0$.
Infine se $\mathbf{a}$ è oscillante, è tale ogni serie $\alpha\,\mathbf{a}$ con $\alpha \neq 0$ ▮

I13b.10 Spesso si trova utile prendere in considerazione combinazioni lineari di due serie $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si dice **serie combinazione lineare** di $\mathbf{a}$ e bSd con i coefficienti α e β la serie

$$\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha\, a_n + \beta\, b_n \ .$$

Si può quindi osservare che le serie di addendi reali si possono considerare il terreno di uno spazio vettoriale sui reali.

Prendiamo in considerazion le serie di addendi reali convergenti.

(1) Prop.: Se la $\mathbf{a}$ converge alla somma S_A e la $\mathbf{b}$ converge a S_B, allora la $\alpha\,\boldsymbol{A} + \beta\,\boldsymbol{B}$ converge a $\alpha\, S_A + \beta\, S_B$ ▮

(2) Prop.: Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono assolutamente convergenti, lo sono anche le combinazioni lineari $\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}$.

Dim.: Basta osservare che $|\alpha\, a_n + \beta\, b_n| \le |\alpha|\,|a_n| + |\beta|\,|b_n|$ ▮

Di conseguenza si può enunciare quanto segue.

(3) Prop.: L'insieme delle serie di addendi reali convergenti costituisce il terreno di un sottospazio dello spazio sul campo dei reali delle serie di addendi reali e l'insieme delle serie di reali assolutamente convergenti costituiscono il terreno di un sottospazio dello spazio delle serie reali convergenti ▮

I13b.11 Le considerazioni dei paragrafi precedenti si possono riformulare con le dovute modifiche per la serie di addendi complessi.
Con argomentazioni in gran parte riconducibili alle precedenti si ottengono risultati omologhi ai precedenti.
In particolare si giunge facilmente al seguente enunciato:

(1) Prop.: L'insieme delle serie di addendi complessi convergenti costituisce un sottospazio dello spazio sul campo complesso delle serie di addendi complessi ▮

I13 c. serie di addendi positivi

I13c.01 Prop. Consideriamo una serie di addendi positivi convergente $\mathsf{a} = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ e una successione numerica limitata $\mathsf{c} = \langle c_0, c_1, c_2, ..., c_n, ...\rangle$. La serie ottenuta moltiplicando addendo ad addendo gli addendi delle due serie a_n e c_n, cioè la serie $c_0\, a_0 + c_1\, a_1 + c_2\, a_2 + \cdots + c_n\, a_n + \cdots$, è convergente.

Dim.: Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $|c_n| < L$; per il corrispondente resto $R'_{n,p} := \sum_{i=n+1}^{n+p} c_n\, a_n$ si ha

$$|R'_{n,p}| \le |c_{n+1}\, a_{n+1}| + |c_{n+2}\, a_{n+2}| + \cdots + |c_{n+p}\, a_{n+p}| \le L\ (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}) \ = \ L\, R_{n,p} \ .$$

Scelto ϵ positivo (ipap), per la convergenza della serie a si trova un intero positivo $\overline{n}$ tale che per ogni intero $n > \overline{n}$ e ogni positivo p si ha $|R_{n,p}| \le \dfrac{\epsilon}{L}$; quindi per questi n e $p \in \mathbb{P}$ si ha $|R'_{n,p}| \le \epsilon$ e questo garantisce la convergenza della nuova serie ▮

I13c.02 Ricordiamo che si dice **serie assolutamente convergente** una serie tale che sia convergente la serie avente come add i valori assoluti dei suoi addendi.

Per esempio la serie geometrica di ragione $q \in (-1, +1)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, converge assolutamente. Infatti $|q^n| = |q|^n$ e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |q|^n$ converge a $\dfrac{1}{1+|q|}$.

(1) Prop.: Una serie assolutamente convergente è convergente.

Dim.: Sia $\mathbf{b} = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$ una serie tale che $|b_0| + |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n| + \cdots$ è convergente.
Dato che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si può scrivere $b_n = c_n\, |b_n|$ con $c_n \in \{-1, 1\}$, si riscontra un caso particolare di quello di c01 con $a_n = |b_n|$ e c_n come sopra. La tesi di c01 evidentemente si traduce nella tesi attuale ▮

Osserviamo esplicitamente che vi sono serie convergenti che non sono assolutamente convergenti: vari esempi di tali serie sono forniti da serie a segni alterni che vedremo nel paragrafo che segue, come la

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \cdots \ .$$

Questa serie, come vedremo, risulta convergente mentre non è assolutamente convergente a causa della divergenza a $+\infty$ della serie armonica.

(2) Prop.: Ogni serie convergente avente gli addendi definitivamente nonnegativi è assolutamente convergente ▮

Evidentemente vale anche il suo enunciato duale-UD.

(3) Prop.: Ogni serie convergente avente gli addendi definitivamente nonpositivi è assolutamente convergente ▮

I13c.03 Presentiamo una uguaglianza tra espressioni numeriche dalla quale si possono derivare facilmente molte relazioni utili per lo studio delle serie numeriche.

(1) Prop.: (**identità di Brunacci-Abel**) Sia $n \in \{2, 3, ...\}$, consideriamo due n-uple di numeri reali o complessi $\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle$ ed $\langle e_1, e_2, ..., e_n\rangle$ e le smme parziali $A_1 := a_1$, $A_2 := a_1 + a_2$ ..., $A_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, ... ; allora

$$e_1\, a_1 + e_2\, a_2 + \cdots e_n\, a_n \ = \ (e_1 - e_2)A_1 + (e_2 - e_3)A_2 + \cdots + (e_{n-1} - e_n)A_{n-1} + e_n A_n \ .$$

Dim.: Introdotto $A_0 := 0$, sostituiamo nel primo membro dell'identità a_1 con $A_1 = A_1 - A_0$, a_2 con $A_2 - A_1$, ..., a_n con $A_n - A_{n-1}$ e otteniamo

$$\sum_{j=1}^{n} e_j a_j \;=\; \sum_{j=1}^{n} e_j (A_j - A_{j-1}) \;=\; \sum_{j=1}^{n-1} (e_j - e_{j+1}) A_j + e_n\, A_n \;\blacksquare$$

I13c.04 Ricaviamo alcune disuguaglianze come conseguenze della identità di Brunacci-Abel servendoci delle notazioni di c03 .

(1) Prop.: Quando gli e_j sono reali nonnegativi e costituiscono una n-upla noncrescente, cioè se $0 \le e_n \le e_{n-1} \le \cdots \le e_2 \le e_1$, allora

$$\left| \sum_{j=1}^{n} e_j\, a_j \right| \;\le\; e_1 \cdot \max_{j \in [1:n]} |A_j| \;.$$

Dim.: Da c04(1), tenendo presente che tutte le differenze $e_j - e_{j+1}$ sono nonnegative e introducendo $M := \max_{1 \le j \le n} |A_j|$, si ricava

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{n} e_j\, a_j \right| \;&=\; \big|(e_1 - e_2)A_1 + (e_2 - e_3)A_2 + \cdots + (e_{n-1} - e_n)A_{n-1} + e_n\, A_n\big| \\ &\le (e_1 - e_2)|A_1| + \cdots + (e_{n-1} - e_n)|A_{n-1}| + e_n\,|A_n| \\ &\le (e_1 - e_2)\, M + (e_2 - e_3)\, M + \cdots + (e_{n-1} - e_n)\, M + e_n\, M = e_1\, M \;\blacksquare \end{aligned}$$

(2) Prop.: Quando gli e_j sono reali (quali che siano i loro segni) e costituiscono una n-upla noncrescente, cioè se $0 \le e_n \le e_{n-1} \le \cdots \le e_2 \le e_1$, allora

$$\left| \sum_{j=1}^{n} e_j\, a_j \right| \;\le\; e_1 \cdot \max_{j \in [1:n]} |A_j| \;.$$

Dim.: Si ottiene da c03(1) similmente alla precedente ▮

(3) Prop.: Quando sia gli e_j sono reali positivi e costituiscono una n-upla noncrescente, cioè se $0 \le e_n \le e_{n-1} \le \cdots \le e_2 \le e_1$, ed inoltre gli a_j sono reali, allora

$$e_1 \cdot \min_{j \in [1:n]} A_j \;\le\; \sum_{j=1}^{n} e_j\, a_j \;\le\; e_1 \cdot \max_{j \in [1:n]} A_j \;.$$

Dim.: Si ottiene da c03(1) similmente alla precedente, tenendo conto che

$$\forall j = 1, 2, ..., n-1 \;\;\colon\;\; e_j - e_{j+1} \ge 0 \;\blacksquare$$

I13c.05 **(1) Prop.**: Una serie di addendi positivi aut converge a un limite finito (positivo), aut diverge a $+\infty$.

Dim.: La successione delle somme parziali della serie è una successione a componenti positive crescente. Quindi basta distinguere il caso in cui la successione delle somme parziali sia limitata e quindi convergente, dal caso in cui sia illimitata e quindi divergente a $+\infty$ ▮

Valgono inoltre l'enunciato duale-UD del precedente e le intuibili generalizzazioni dotate di duali-UD.

(2) Prop.: Una serie di addendi negativi aut converge a un limite finito (negativo), aut diverge a $-\infty$ ▮

(3) Prop.: Una serie con un numero finito di addendi negativi o nulli, è una serie di addendi definitivamente positivi, aut converge a un limite finito, aut diverge a $+\infty$ ▮

(4) Prop.: Una serie con un numero finito di addendi positivi o nulli, ovvero una serie di addendi definitivamente negativi, aut converge a un limite finito, aut diverge a $-\infty$ ▮

Da questi enunciati segue che

(5) Prop.: Una serie oscillante presenta necessariamente infiniti addendi positivi e infiniti addendi negativi ▮

I13 d. serie a segni alternati

I13d.01 **(1) Prop.**: Consideriamo una serie di addendi reali alternatamente positivi e negativi che scriviamo

$$\mathbf{a} \ = \ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots \ .$$

Se la successione dei valori assoluti degli addendi è decrescente, allora la serie è convergente; inoltre il suo resto di indice n in valore assoluto è inferiore ad a_{n+1}.

Dim.: Consideriamo, per $k = 0, 1, 2, ...$ le somme parziali della $\mathbf{a}$ A_{2k} , $A_{2k+1} = A_{2k} - a_{2k+1}$, $A_{2k+2} = A_{2k} - (a_{2k+1} - a_{2k+2})$ e $A_{2\,k+3} = A_{2\,k+2} - a_{2\,k+3} = A_{2\,/k+1} - (a_{2k+2} - a_{2k+3})$; il carattere decrescente della successione degli a_n implica le disuguaglianze $A_{2k+1} < A_{2k+3} < A_{2k+2} < A_{2k}$.

Consideriamo la successione di intervalli $\sigma = \langle(A_1, A_0), (A_3, A_2), ..., (A_{2k-1}, A_{2k-2}), (A_{2k}, A_{2k-1}), ...\rangle$. La successione delle corrispondenti ampiezze $\langle a_1, a_3, ..., a_{2k-1}, a_{2k+1}, ...\rangle$ è decrescente e quindi la successione degli intervalli σ è una scirna e individua un numero reale S che è il limite sia della successione $\langle A_1, A_3, ..., A_{2k+1}, ...\rangle$ che della $\langle A_0, A_2, ..., A_{2k}, ...\rangle$ e di conseguenza della $\langle A_{0,1}\,, A_2, ..., A_n, ...\rangle$ ∎

(2) Coroll.: La somma parziale di indice n della serie fornisce una approssimazione della somma S: per eccesso se n è pari, per difetto sse n è dispari ∎

I13d.02 Esaminiamo la seguente importante serie a segni alternati

$$(1) \qquad 1 - \ln\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \ln\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \cdots - \ln\frac{n}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{n} + \cdots \ .$$

I valori assoluti dei suoi addendi costituiscono una successione decrescente: infatti valgono le disuguaglianze

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

trovate in I12f03.
Prendendo i logaritmi in base e dei tre membri si ottiene

$$n \ln\frac{n+1}{n} < 1 < (n+1) \ln\frac{n+1}{n}$$

e da queste, dividendo per $\ln\dfrac{n+1}{n}$ e passando ai numeri reciproci, si ricavano le disuguaglianze

$$\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} \ .$$

Da queste e dai limiti $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n}\right) = \ln 1 = 0$ segue il carattere decrescente della successione degli addendi della serie (1). Questa serie è dunque convergente.

I13d.03 La somma della precedente serie d02(1) si chiama **costante di Euler-Mascheroni** e la denoteremo con γ_{em} .
Si tratta di una costante matematica molto importante che si incontra in numerose formule che riguardano funzioni speciali come `funzione Gamma (wi)` [W69:j.01], `funzione digamma (wi)` ed `esponenziale integrale (wi)` [Fn0d05].

Per essa si trova

$$\gamma_{em} \ = \ H_n - \ln(n+1) + \frac{\theta_{2n}}{n+1} \qquad \text{dove} \qquad H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \qquad \text{e} \qquad 0 < \theta_{2n} < 1 \ .$$

Una sua valutazione con 100 decimali fornisce

$$\gamma_{em} \approx 0.\quad \begin{array}{lllll} 57721\,56649 & 01532\,86060 & 65120\,90082 & 40243\,10421 & 59335\,93992 \\ 35988\,05767 & 23488\,48677 & 26777\,66467 & 09369\,47063 & 29174\,67495 \end{array} .$$

I13d.04 Consideriamo ora la serie a segni alternati come elemento di SerPR

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots \ .$$

I suoi addendi in valore assoluto tendono a 0 e quindi essa converge: determiniamo la sua somma.

Per la sua somma parziale di indice $2\,n$ si trova

$$A_{2\,n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - H_n \ .$$

Per la relazione $H_n = \gamma_{em} + \ln(n+1) + \theta_n$ con $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$ e per la espressione ricavata per i numeri armonici mediante logaritmi di interi e costante γ_{em} segue

$$A_{2\,n} \ = \ \ln 2\,n + \theta_{2\,n} - \ln n - \theta_n \ = \ \ln 2 + \theta_{2\,n} - \theta_n \ ,$$

da cui $\lim_{n\to+\infty} A_{2\,n} = \ln 2$.

Inoltre $\lim_{n\to+\infty} A_{2n+1} \ = \ \lim_{n\to+\infty} A_{2n} + \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\theta_{2n}}{2n+1} \ = \ \ln 2$.

Come già osservato, questa serie non è assolutamente convergente, in quanto la serie dei valori assoluti dei suoi addendi è la serie armonica, serie che diverge a $+\infty$.

I13 e. criteri di convergenza delle serie

I13e.01 Consideriamo due successioni

$$\mathsf{a} = \langle a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\rangle \qquad \text{e} \qquad \mathsf{b} = \langle b_0, b_1, b_2, ..., b_n, ...\rangle$$

e le corrispondenti serie $\mathbf{a} := \langle \mathsf{a}, \mathsf{A}\rangle$ e $\mathbf{b} := \langle \mathsf{b}, \mathsf{B}\rangle$.

Ricordiamo che si dice che $\mathbf{a}$ è **serie minorante** della serie $\mathbf{b}$ ed equivalentemente si dice che $\mathbf{b}$ è **serie maggiorante** della serie $\mathbf{a}$, sse la successione a è minorante della b, ossia sse $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$.

Per esempio la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è maggiorante della serie di Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Relazioni tra serie più estese e più utilizzabili riguardano proprietà godute definitivamente.

Si dice che delle due serie $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ la prima è **serie definitivamente minorante** della seconda, ovvero che la seconda è **serie definitivamente maggiorante** della prima sse esistono due interi naturali m_a ed m_b tali che $\forall n \in \mathbb{N} : a_{m_a+n} \leq b_{m_b+n}$.

I13e.02 (1) Prop.: (**criterio del confronto**)
Ogni serie di addendi positivi minorante di una serie di addendi positivi convergente è convergente.
Ogni serie di addendi positivi maggiorante di una serie di addendi positivi divergente a $+\infty$ è divergente a $+\infty$.

Dim.: Denotiamo con $\mathbf{a}$ e con $\mathbf{b}$ le due serie confrontabili, con la prima minorante della seconda. Se la $\mathbf{b}$ è convergente, la $\mathbf{a}$ si può ottenere da essa moltiplicando il suo addendo di indice n per $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$; per la c01 la convergenza della $\mathbf{b}$ implica la convergenza della $\mathbf{a}$.
Se invece la $\mathbf{a}$ diverge, la $\mathbf{b}$ deve essere regolare in quanto serie di addendi positivi e non può essere convergente a un reale, perché questo renderebbe convergente anche la a; quindi deve divergere a $+\infty$ ▮

Se $\mathbf{a}$ è minorante della $\mathbf{b}$ che ha come somma B, posto $A := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si ha $A \leq B$ e $A = B$ sse le due serie coincidono ▮

Il criterio del confronto può ampliare la sua applicabilità considerando due serie tali che la prima sia definitivamente maggiorante della seconda.

I13e.03 La serie $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$ è minorante della serie di Mengoli [a12] $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$ e quindi converge a un reale minore di 1.

Conseguentemente la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge a un reale minore di 2.

In I60e03 si trova che essa converge a $\frac{\pi^2}{6} (\approx 1.643)$.

Più in generale interessa la serie dipendente dal parametro s $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, serie molto importante che si denota con $\zeta(s)$.
Questa per $s = 1$ è la serie armonica divergente e possiamo concludere che è divergente anche per $0 \leq s < 1$.

È convergente anche la serie $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ in quanto, tolti i primi due addendi la cui somma è 2, è minorante della serie di Mengoli; inoltre sappiamo che la sua somma è compresa tra 2 e 3; in effetti troveremo che coincide con la costante $e \approx 2.7172$.

I13e.04 Nella pratica delle indagini sopra la caratterizzazione di convergenza delle serie risulta utile un enunciato come il seguente.

(1) Prop.: Se le serie $\mathbf{a} := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\mathbf{b} := \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ presentano definitivamente addendi positivi e se esistono due reali positivi k e K tali che sia definitivamente $k\, b_n \leq a_n \leq K\, b_n$, allora le due serie sono entrambe convergenti o divergenti a $+\infty$.

Dim.: Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, per il criterio del confronto deve convergere anche la $\sum_{n=0}^{+\infty} k\, b_n$ e quindi, ovviamente, la $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, deve convergere anche la $\sum_{n=0}^{+\infty} K\, b_n$ e quindi la $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$, deve divergere a $+\infty$ anche la $\sum_{n=0}^{+\infty} K\, b_n$ e quindi anche la $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge, deve divergere anche la $\sum_{n=0}^{+\infty} k\, b_n$ e quindi la $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ∎

I13e.05 **(1) Prop.**: (**criterio del rapporto**) Consideriamo una serie di addendi positivi $\mathbf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Se il rapporto tra un addendo e il precedente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ è definitivamente minore o uguale a un reale $q < 1$ la serie è convergente. Se tale rapporto è definitivamente maggiore o uguale ad 1 la serie è divergente a $+\infty$.

Dim.: Supponiamo che si abbia $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$ per $n = 1, 2, ...$ (se la disuguaglianza valesse solo per valori di n sufficientemente grandi la caratterizzazione di convergenza della serie non cambierebbe). Moltiplicando membro a membro le prime n delle suddette disuguaglianze si avrebbe $a_{n+1} \leq q^n$ e quindi la serie data sarebbe minorante della

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n + \cdots \ ;$$

essendo $0 < q < 1$, questa serie converge a $a_1 \frac{1}{1-q}$ e quindi anche la serie data è convergente .

Se invece si ha $1 < q < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ per $n = 1, 2, ...$, moltiplicando membro a membro le prime n di queste disuguaglianze si ha avrebbe $a_{n+1} \geq q^n$ e quindi la serie data sarebbe maggiorante della

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n + \cdots \ ;$$

essendo $1 < q$, questa serie è divergente e quindi e diverge anche la serie data ∎

(2) Coroll.: Consideriamo la serie di addendi positivi $\mathbf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ per la quale esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: r \ .$$

Se $r < 1$ la serie è convergente; se $1 < r$ essa è divergente.

Dim.: Le due situazioni prospettate sono casi pparticolari, risp., delle due situazioni incontrat nella (1)

▮

(3) Eserc. Precisare gli enunciati per le serie di addendi definitivamente positivi rilevando le stesse conclusioni.

I13e.06 Il criterio del rapporto può essere applicato alla serie esponenziale definita per ogni valore reale del parametro x come

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \;;$$

dato che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n+1} = 0$, la serie è convergente per ogni valore $x \in \mathbb{R}$. Vedremo che la sua somma è e^x .

Consideriamo per ogni valore reale del parametro x la **serie logaritmica**

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \;.$$

Per il rapporto tra i due valori assoluti dei suoi addendi successivi si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\,|x| = |x| \;;$$

quindi per $|x| < 1$ la serie converge e per $|x| > 1$ diverge.

Abbiamo anche visto [e06] che per $x = 1$ essa converge a $\ln 2$, mentre per $x = -1$ essa è l'opposta della serie armonica e quindi diverge a $-\infty$. Vedremo che per $|x| < 1$ la sua somma è $\ln(1 + x)$.

Per le serie di addendi positivi per le quali il limite del rapporto r è uguale a 1 si può avere sia convergenza che divergenza.

Per esempio per la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ si ha $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2} : \frac{1}{n^2}\right) = 1$ e la serie come sappiamo, è convergente; per la sua somma troveremo il valore $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Per la serie armonica si ha lo stesso limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1} : \frac{1}{n}\right) = 1$ e sappiamo che essa è divergente.

I13e.07 Il criterio che segue riguarda due serie collegate in modo non completamente semplice le quali presentano la stessa caratterizzazione di convergenza: esso quindi permette di ottenere tale caratterizzazione per una delle serie attraverso lo studio dell'altra, nel caso quest'ultimo sia noto o almeno più abbordabile.

(1) Prop.: (**criterio di condensazione di Cauchy**) Sia $\mathsf{a} = \langle a_1, a_2, a_3, ...\rangle$ una successione noncrescente e sia $k \in \{2, 3, 4, ...\}$. Le due serie

$$\mathbf{a} := a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b} := a_1 + k\,a_k + k^2\,a_{k^2} + \cdots + k^m\,a_{k^m} + \cdots$$

sono entrambe convergenti o entrambe divergenti.

Dim.: Consideriamo alcuni particolari resti parziali della **a**:

$$\forall m \in \mathbb{N} :\; A_{k^{m+1}} - A_{k^m} = a_{k^m+1} + a_{k^m+2} + \cdots + a_{k^{m+1}} \qquad (a_1 = k^0\,a_{k^0}) \;.$$

Si tratta della somma di $k^{m+1} - k^m = k^m(k-1)$ addendi disposti in ordine noncrescente, per cui

$$\forall m \in \mathbb{P} \;\;:\;\; \left(1 - \frac{1}{k}\right) k^{m+1}\, a_{k^{m+1}} \;=\; (k-1)k^m a_{k^{m+1}} \;\leq\; A_{k^{m+1}} - A_{k^m} \;\leq\; (k-1)k^m a_{k^m+1}\ .$$

Sommando i membri di queste relazioni per $m = 0, 1, 2, ..., q-1$ si ottiene

$$\forall q \in \mathbb{P} \;\;:\;\; \left(1 - \frac{1}{k}\right)(B_q - a_1) \;\leq\; A_{k^q} - a_1 \;\leq\; (k-1)B_{q-1}\ .$$

Questa duplice limitazione implica che per $q \to +\infty$ $B_q \to +\infty \implies A_{k^q} \to +\infty$ e inoltre, la monotonia della a implica la divergenza a $+\infty$ della $\mathbf{a}$.

Se invece per $q \to +\infty$ B_q converge a un $S_B \in \mathbb{R}_+$, si ha $A_{k^q} \leq (k-1)S_B + a_1$, ovvero A_n è nondecrescente e limitata superiormente e di conseguenza convergente a un $S_A \in \mathbb{R}_+$ ▮

Nella situazione suddetta la serie $\mathbf{b}$ viene chiamata **serie associata per condensazione** con k della $\boldsymbol{A}$.

I13e.08 Consideriamo la famiglia indicizzata dagli $s \in \mathbb{R}$ delle serie

$$\zeta(s) \;:=\; 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots\ .$$

Abbiamo trovato [e03] che essa diverge per $s \leq 1$ e converge per $s \geq 2$.
Dimostriamo che per $s > 1$ essa converge esaminando la sua serie associata per condensazione con $k = 2$

$$1 + \frac{2}{2^s} + \frac{2^2}{2^{2s}} + \frac{2^3}{2^{3s}} + \cdots + \frac{2^m}{2^{m\,s}} + \cdots = 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{(2^{s-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{s-1})^m} + \cdots\ .$$

Questa è la serie geometrica di ragione $\dfrac{1}{2^{s-1}}$ e quindi è convergente se $2^{s-1} > 1$; quindi se $s > 1$ essa converge e con lei è convergente la $\zeta(s)$.

La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,\ln n}$ è divergente (come accade alla serie armonica).
Procediamo a esaminare la sua associata per condensazione con $k = 2$:

$$\frac{2}{2\,\ln 2} + \frac{2^2}{2^2\,\ln 2^2} + \frac{2^3}{2^3\,\ln 2^3} + \cdots \;=\; \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2\,\ln 2} + \frac{1}{3\,\ln 2} + \cdots + \frac{1}{n\,\ln 2} + \cdots\ .$$

Questa è ottenuta moltiplicando per $\dfrac{1}{\ln 2}$ la serie armonica, e quindi diverge e con essa la serie data.

La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^{1+\delta} n}$ è convergente per ogni $\delta \in \mathbb{R}_+$.
Infatti essa ha la stessa caratterizzazione di convergenza della sua associata per condensazione con fattore $k = 2$

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{2^m}{2^m\,\ln^{1+\delta}(2^m)} \;=\; \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^{1+\delta}(2^m)} \;=\; \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m^{1+\delta}\,\ln^{1+\delta} 2}\ ,$$

serie che più sopra abbiamo visto essere convergente.

Possiamo quindi riepilogare con il seguente quadro:

$$(r > 1 \;\wedge\; s \in \mathbb{R}) \;\;\vee\;\; (r = 1 \;\wedge\; s > 1) \quad\implies\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^r\,\ln^s n} \;\text{ convergente }\;,$$

$$(r = 1 \;\wedge\; s \leq 1) \;\;\vee\;\; (r < 1 \;\wedge\; s \in \mathbb{R}) \quad\implies\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^r\,\ln^s n} \;\text{ divergente }\;.$$

I13e.09 Prop. (**criterio della radice di Cauchy**) Sia $\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie di addendi positivi.

(a) Se la radice n-esima del suo addendo n-esimo $\sqrt[n]{a_n}$ è definitivamente minore o uguale ad un reale $q < 1$, allora la serie è convergente.

(b) Se $\sqrt[n]{a_n}$ è definitivamente maggiore o uguale ad 1 o se, più in generale, la successione degli addendi presenta infinite componenti maggiori o uguali ad 1, allora la serie è divergente.

Dim.: (a) Siano $q \in (0,1)$ e $\nu = \nu_q \in \mathbb{N}$ tali che $\forall n \geq \nu :\ \sqrt[n]{a_n} \leq q$; allora $a_\nu \leq q^\nu$, $a_{\nu+1} \leq q^{\nu+1}$, ..., $a_n \leq q^n$, ...

Dunque la serie $\sum_{n=\nu}^{+\infty} a_n$ è minorante della serie $\sum_{n=\nu}^{+\infty} q^n = q^\nu \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \right)$, serie riconducibile alla serie geometrica con ragione inferiore ad 1 e quindi convergente a $\dfrac{q^\nu}{1-q}$.

(b) Se esistono infiniti $a_n \geq 1$ la serie di addendi positivi ha la successione delle somme parziali positive illimitata e quindi diverge a $+\infty$ ▮

Dalla dimostrazione di (a) si ricava la limitazione

$$S_A \ := \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ \leq \ A_{\nu-1} + \frac{q^\nu}{1-q} \ .$$

I13e.10 Il criterio della radice si applica spesso nei casi in cui si sa trovare $L := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

(1) Prop.: Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} =: L < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente.

Dim.: Si applica e09(a) assumendo $q \in (L, 1)$ ▮

(2) Prop.: Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} =: L > 1$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.

Dim.: Se $L > 1$ risulta definitivamente $\sqrt[n]{a_n} > 1$ e quindi si applica e09(b) ▮

Gli enunciati precedenti nulla dicono per il caso in cui $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. In effetti questo caso in parte può essere chiarito.

(3) Prop.: Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ e non è $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1-$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$.

Dim.: Anche con questa ipotesi esistono infiniti addendi della serie per i quali $\sqrt[n]{a_n} > 1$ e si può applicare e08(b) ▮

Rimane invece scoperto il caso in cui $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1-$. Infatti la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente, mentre la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente e per entrambe le serie si trova il limite precedente.

Questo consente di ricorrere al passaggio ai logaritmi:

$$\lceil \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \ = \ -\frac{1}{n} \ln n \ \to_{n\to+\infty} \ 0- \rceil \ \Longrightarrow \ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1- \ .$$

$$\lceil \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \ = \ -\frac{2}{n} \ln n \ \to_{n\to+\infty} \ 0- \rceil \ \Longrightarrow \ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1- \ .$$

I13e.11 Prop. Se $\mathbf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| \, a_n \rangle$ è una successione definitivamente monotona e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora la successione $\langle n \in \mathbb{N} :| \, n\, a_n \rangle$ è infinitesima.

Dim.: La successione a, in forza della convergenza della corrispondente serie, deve essere infinitesima; inoltre si può supporre che sia $\forall n = \nu, \nu+1, ... \; : \; a_n > 0$; in tal caso la $\mathbf{a}$ deve essere monotona decrescente.

Inoltre deve essere $\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots) = 0$ e a fortiori $\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=n+1}^{2\,n} = 0$, nonché

$$\lim_{n\to+\infty} n\, a_{2\,n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} 2\, n\, a_{2\,n} = 0 \; .$$

Anche il limite analogo per gli addendi di indice dispari tende a 0, in quanto

$$(2n+1) a_{2\,n+1} \;\le\; \frac{2\,n+1}{2\,n}\, 2\, n\, a_{2\,n} \; ▮$$

Non va dimenticato che vi sono serie con la successione degli addendi a monotona e con $\lim_{n\to+\infty} n\, a_n = 0$ che sono divergenti. Un esempio è dato dalla serie divergente $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\, \ln n}$. ▮

I13e.12 Prop. (**criterio di Kummer**) Consideriamo la serie di addendi positivi $\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e la successione di reali positivi $\mathbf{c} = \langle n \in \mathbb{N} :| \, c_n \rangle$ che chiameremo successione ausiliaria.

(a) Se la successione $\mathbf{d} := \left\langle n \in \mathbb{N} :| \, c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \right\rangle$ è definitivamente maggiore di un reale positivo R, allora la serie $\mathbf{a}$ è convergente.

(b) Se la successione $\mathbf{d}$ presenta componenti definitivamente minori o uguali a 0 e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c_n}$ è divergente, allora la serie $\mathbf{a}$ è divergente.

Dim.: (a) L'ipotesi implica che definitivamente si ha $c_n\, a_n - c_{n+1}\, a_{n+1} > R\, a_{n+1} > 0$ e quindi che $\langle n \in \mathbb{N} :| \, c_n\, a_n \rangle$ è definitivamente decrescente e ad adeni positivi.
Di conseguenza è convergente la serie

$$(c_0\, a_0 - c_1\, a_1) + (c_1\, a_1 - c_2\, a_2) + \cdots + (c_n\, a_n - c_{n+1}\, a_{n+1}) + \cdots$$

ed essendo definitivamente $a_{n+1} < \frac{c_n\, a_n - c_{n+1}\, a_{n+1}}{R}$, converge anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(b) L'ipotesi equivale al fatto che sia definitivamente $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{1/c_{n+1}}{1/c_n}$.
Quindi il criterio del rapporto [e05(1)] comporta la divergenza della $\mathbf{a}$ ▮

Questo criterio, data l'ampia scelta per la successione ausiliaria $\mathbf{c}$, ha una vasta gamma di applicazioni. In effetti si è trovato opportuno fare riferimento a criteri caratterizzati da successioni ausiliarie di generalità intermedia; presentiamone alcuni.

I13e.13 Prop. (**criterio di Raabe**) Consideriamo una serie di addendi definitivamente nonnulli

$$\mathbf{a} \;=\; \langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \; .$$

(a) Se la successione $\mathsf{d} := \left\langle n \in \mathbb{P} :\middle|\, n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right\rangle$ è definitivamente maggiore di un reale positivo $R > 1$, allora la serie $\mathbf{a}$ è convergente.

(b) Se la successione d è definitivamente minore o uguale ad 1, allora la serie $\mathbf{a}$ diverge.

Dim.: Si ottiene dal criterio di Kummer scegliendo $c_n = n$ ▮

I13e.14 Prop. (**criterio di De Morgan**)

Consideriamo una serie di addendi nonnegativi $\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e la successione $\mathsf{b} := \langle b_0, b_1, b_2, ... \rangle$, dove

$$\forall n \in \mathbb{P} \; : \; b_n := \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \ln n \; .$$

(a) Se definitivamente $b_n > R > 1$, allora la $\mathbf{a}$ converge.

(b) Se definitivamente $b_n \leq 1$, allora la $\mathbf{a}$ diverge.

Dim.: Si applica il criterio di Kummer assumendo $c_n := n \ln n$.
Per il caso (a) il primo membro della disuguaglianza è

$$\left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \ln n - (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln n$$

e per $n \to +\infty$ esso converge a $(n+1)$ ln $\left(1 + \frac{1}{n} \right) \to 1+$ ▮

Al criterio di De morhan talora risulta conveniente dare la seguente forma equivalente.

(a) Se $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \; > \; 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{R}{n \ln n}$ con $R > 1$, allora la $\mathbf{a}$ converge.

(b) Se $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \; \leq \; 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n \ln n}$, allora la $\mathbf{a}$ diverge.

I13e.15 Prop. (**criterio di E. Cahen**) Consideriamo una serie di addendi nonnegativi $\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e la successione $\mathsf{b} := \langle b_0, b_1, b_2, ... \rangle$, dove $\forall n \in \mathbb{P} \; : \; b_n := \left[\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] \ln n$.
Se definitivamente $B_n > R > 1$, allora la $\mathbf{a}$ converge.
Se definitivamente $B_n \leq 1$, allora la $\mathbf{a}$ diverge.

Dim.: Si ottiene dal criterio di De Morgan, tenendo conto che $\dfrac{1}{n^2} \in \mathbf{o}_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n \ln n} \right)$ ▮

I13e.16 Prop. (**criterio di Gauss**) Consideriamo una serie di addendi positivi $\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ tale che si possa scrivere

$$\forall n \in \mathbb{N} \; : \; \frac{a_{n+1}}{a_n} \; = \; \frac{u_0 + \cdots + u_{r-1} \, n^{r-1} + a_r \, n^r}{v_0 + \cdots + v_{r-1} \, n^{s-1} + v_s \, n^s} \quad \text{con} \quad r \geq 0, \; s \geq 0, \; a_r > 0, \; v_s > 0 \quad .$$

Allora per la caratterizzazione della $\mathbf{a}$ si hanno i seguenti casi:

$$\begin{array}{c} s > r \\ s = r \;\wedge\; u_r < v_s \\ s = r \;\wedge\; u_r = v_s \;\wedge\; u_r + u_{r-1} < v_{s-1} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{a} \text{ convergente}$$

$$\begin{array}{c} s = r \;\wedge\; u_r = v_s \;\wedge\; u_r + u_{r-1} \geq v_{s-1} \\ s = r \;\wedge\; u_r > v_s \\ s < r \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{a} \text{ divergente}$$

È notevole il fatto che la possibilità di esprimere il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ come rapporto tra polinomi nella n rende il criterio in grado di decidere per ogni combinazione di polinomi.

Per il criterio del rapporto i due primi casi elencati discendono dal terzo e gli ultimi due dal quarto.

I13 f. associatività e commutatività per le serie

I13f.01 Esaminiamo ora la proprietà associativa e la proprietà dissociativa delle serie numeriche.

Preliminarmente ricordiamo che, per una serie $\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, nota la successione delle somme parziali $\mathsf{A} = \langle A_0, A_1, A_2, ... \rangle$, si può ottenere la relativa successione degli addendi con l'espressione $\mathsf{a} = \langle A_0, A_1 - A_0, 2_2 - A_1, A_3 - A_2, ... \rangle$.

Consideriamo dunque la serie $\mathbf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e la corrispondente successione delle somme parziali $\mathsf{sps}(\mathbf{a}) = \langle A_0, A_1, A_2, ... \rangle$.
Se sostituiamo $k > 1$ addendi consecutivi a_m, a_{m+1}, ..., a_{m+k-1} con la loro somma $a_m + \cdots a_{m+k-1}$ otteniamo una serie la cui successione delle somme parziali si ottiene dalla $\mathsf{sps}(\mathbf{a})$ eliminando le componenti nelle posizioni m, ..., $m + k - 2$.

Data una serie, ogni serie ottenuta da essa eliminando dalla sua successione delle somme parziali un numero finito di componenti la chiamiamo **serie limitatamente ridotta** della data. Possiamo quindi dire che associando addendi consecutivi di una serie si ottiene una sua serie limitatamente ridotta.

Il passaggio ad una serie limitatamente ridotta si può reiterare per un qualsiasi numero finito di volte continuando ad ottenere serie limitatamente ridotte.

Diciamo invece che ogni serie ottenuta da una serie data attraverso una qualsiasi modifica di un insieme finito delle sue somme parziali è ottenuta come sua modifica limitata.
Chiaramente un processo di associazione degli addendi di una serie riguardante una qualsiasi scelta di un numero finito di insiemi finiti di suoi addendi consecutivi porta a una nuova serie limitatamente modificata.
Evidente inoltre che un modifica limitata di una serie non modifica la sua caratterizzazione di convergenza.

I13f.02 Consideriamo una serie $\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ed una permutazione di $\mathbb{N}$, $P = \lceil m \mapsto p_m \rceil$.
Per serie ottenuta da $\mathbf{a}$ applicando la permutazione P agli indici dei suoi addendi, in breve per serie ottenuta da $\mathbf{a}$ con la permutazione P, si intende la serie

$$P(\mathbf{a}) \ := \langle \mathsf{a} \circ_{lr} P, \mathsf{sps}(\mathsf{a} \circ_{lr} P) \rangle \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_{P(n)} \ .$$

Ad esempio

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2m & 2m+1 & \dots \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & \dots & 2m+1 & 2m & \dots \end{vmatrix} \implies$$

$$P(\mathbf{a}) = a_1 + a_0 + a_3 + a_2 + a_5 + a_4 + \cdots + a_{2m+1} + a_{2m} + \cdots \ .$$

I13f.03 Una serie di addendi reali convergente si dice **serie incondizionatamente convergente** sse è convergente ogni serie ottenuta permutando gli indici dei suoi addendi.

Una serie di addendi reali che diverge, risp., a $+\infty$ o a $-\infty$ si dice **serie incondizionatamente divergente**, risp., a $+\infty$ o a $-\infty$ sse è divergente, risp., a $+\infty$ o a $-\infty$, ogni serie ottenuta permutando gli indici dei suoi addendi.

È naturale chiedersi per la somma $S_{A'}$ di una serie $\mathbf{a}'$ ottenuta permutando gli indici degli addendi di una serie $\mathbf{a}$ che converge incondizionatamente a un reale S_A se le due somme possano essere diverse o debbano coincidere; come vedremo deve essere $S_{A'} = S_A$.

I13f.04 Prevedibilmente onviene esaminare per prime le serie con addendi positivi o nulli.

(1) Prop.: Consideriamo una serie $\mathbf{a}$ con addendi nonnegativi, una permutazione P di $\mathbb{N}$ e la serie $\mathbf{b} := P(\mathbf{a})$. La serie ottenuta per permutazione $\mathbf{b}$ ha la stessa caratterizzazione di convergenza della serie di partenza $\mathbf{a}$ e fornisce la stessa somma, sia essa un numero reale nonnegativo oppure sia $+\infty$.

Dim.: Usiamo le solite notazioni $\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A}\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\mathbf{b} = \langle \mathsf{b}, \mathsf{B}\rangle = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m$.
A partire dalla permutazione P si può ottenere, in linea di principio, la funzione $M(m) := \max(p_0, p_1, ..., p_m)$. Di conseguenza tutti gli addendi di ogni somma parziale B_m compaiono, in genere assieme ad altri, nella A_M; la nonnegatività degli addendi delle due serie implica $\forall m \in \mathbb{N} \;\colon\; B_m \leq A_{M(m)}$.

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge a $S_A \in \mathbb{R}_{0+}$, allora ogni $B_m \leq S_A$ e $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m$ deve convergere a una somma $S_B \leq S_A$.

Scambiando i ruoli, cioè partendo da $\mathbf{b} = \langle \mathsf{b}, \mathsf{B}\rangle$ e definendo $\mathbf{a} := \langle P^{-1}(\mathsf{B}), \mathsf{A}\rangle$, si trova che se $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m$ converge a S_B, allora la $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ deve convergere a un $S_A \leq S_B$. Di conseguenza $S_A = S_B$.

Se invece $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$, per la conclusione precedente la $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m$ non può essere convergente e quindi deve divergere a $+\infty$; dunque, in forza della dualità per scambio di una permutazione con la sua inversa, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \iff \sum_{m=0}^{+\infty} b_m = +\infty$ ▮

La proprietà precedente si può leggere come proprietà commutativa per le serie di addendi nonnegativi. Evidentemente si ha la commutatività anche per le serie di addendi definitivamente positivi, per le serie di addendi nonpositivi e per le serie di addendi definitivamente nonpositivi.

I13f.05 Resta da esaminare il caso delle serie che presentano infiniti addendi positivi e infiniti addendi negativi (la presenza di addendi nulli essendo ben poco significativa).
Servono per questo alcune specifiche notazioni.

Sia $\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A}\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una tale serie e denotiamo con $\mathsf{u} = \langle u_0, u_1, u_3, ...\rangle$ la successione degli addendi positivi e con $\mathsf{v} = \langle v_0, v_1, v_3, ...\rangle$ la successione degli addendi positivi, entrambe ottenibili procedendo a scorrere illimitatamente i successivi addendi della $\langle a_0, a_1, a_2, a_3, ...\rangle$.

Si individuano quindi le due serie associate che scriviamo $\mathbf{u} = \langle \mathsf{u}, \mathsf{U}\rangle$ e $\mathbf{v} = \langle \mathsf{v}, \mathsf{V}\rangle$, intendendo che per le rispettive somme parziali

$$\forall r \in \mathbb{N} \;\colon\; U_r := \sum_{i=0}^{r} u_i \qquad \text{e} \qquad \forall s \in \mathbb{N} \;\colon\; V_s := \sum_{j=0}^{s} v_j \ .$$

Con tali notazioni la serie $\mathbf{a}$ nei successivi addendi presenta una opportuna mescolanza di u_i e di $-v_j$, mentre la serie dei suoi valori assoluti che denotiamo con $\mathsf{m} := \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ presenta la corrispondente successione degli addendi u_i e v_j.

Scriviamo anche $R(n)$ per il numero degli addendi u_i presenti nella A_n ed $S(n)$ per il numero degli addendi $v_j i$ presenti nella A_n.
Con tali notazioni la successione degli $R(n)$ e la successione degli $S(n)$ sono funzioni-NtN nondecrescenti e illimitate; inoltre $\forall n \in \mathbb{N}$: $R(n) + S(n)$ costituisce una sottosommatoria della serie mescolamento u $$ v.
Definiamo ora le somme parziali $A_n := R(n) - S(n)$ e $T(n) := R(n) + S(n)$.

I13f.06 Teorema (teorema di Dirichlet)
(a) La serie **a** è assolutamente convergente sse essa è incondizionatamente convergente; in tal caso comunque si permutino i suoi addendi non cambia la sua somma:

$$\forall \pi \in \lceil \mathbb{N} \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\! \triangleright \mathbb{N} \rceil \ : \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\pi(n)} \ .$$

(b) La serie **a** è incondizionatamente divergente a $+\infty$ sse la corrispondente **u** diverge a $+\infty$ e la corrispondente **v** è convergente.

(b') La serie **a** è incondizionatamente divergente a $-\infty$ sse la corrispondente **v** diverge a $+\infty$ e la corrispondente **u** è convergente.

I casi in cui solo un numero finito di addendi della **a** hanno segno negativo ricadono nei casi in cui **v** converge, in accordo con f04(1); per dualità-UD i casi in cui un numero finito di addendi della **a** hanno segno positivo ricadono nei casi in cui **u** converge.

I13f.07 Dim.: (a) **a** converge assolutamente $\Longrightarrow$ **a** converge incondizionatamente.

Per $n \to +\infty$ si abbia $U_n \to S_U \in \mathbb{R}$, $V_n \to S_V \in \mathbb{R}$, $A_n \to U - V$ e $M_n \to U + V$.

Consideriamo la permutazione π di $\mathbb{N}$, la serie permutata $\mathbf{b} := \pi(\mathbf{a})$ e le successioni degli addendi positivi w e degli addendi negativi x della $\boldsymbol{B}$.
Inoltre per le corrispondenti somme parziali contenenti gli addendi della **b** fino a quello di indice $m \in \mathbb{N}$ scriviamo $W_{y(m)} := w_0 + w_1 + \cdots + w_{y(m)}$ e $X_{z(m)} := x_0 + x_1 + \cdots + x_{z(m)}$, con $y(m) + z(m) = m$ e con le successioni degli $y(m)$ e degli $z(m)$ nondecrescenti e illimitate.

Abbiamo dunque $B_m = W_{y(m)} - X_{z(m)}$ e per f04 per $m \to +\infty$ si ha $W_{y(m)} \to S_U$ e $x_{z(m)} \to S_V$ e quindi $B_m \to S_U - S_V$, cioè la convergenza incondizionata richiesta.

(b) **u** diverge e **v** converge $\Longrightarrow$ **a** diverge incondizionatamente.

Per $n \to +\infty$ si ha $U_{r(n)} \to +\infty$ e $V_{s(n)} \to V_\Sigma \subset \mathbb{R}$; di conseguenza $A_n = U_{r(n)} - V_{s(n)} \to +\infty$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$.
Consideriamo come sopra π, **b**, w, x e per ogni $m \in \mathbb{N}$ teniamo in considerazione $y(m)$, $W_{y(m)}$, $y(m)$ e $X_{z(m)}$.
Essendo $B_m = W_{y(m)} - X_{z(m)}$, in conseguenza di f04, per $m \to +\infty$ abbiamo $W_{y(m)} \to +\infty$, $X_{z(m)} \to S_X \in \mathbb{R}$ e quindi $B_m \to +\infty$, ossia la divergenza incondizionata richiesta.

(a) **a** converge incondizionatamente $\Longrightarrow$ **a** converge assolutamente.

(b) **a** diverge incondizionatamente a $+\infty$ $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{U}$ diverge e $\boldsymbol{V}$ converge.
Similmente si dimostra che **a** diverge incondizionatamente a $-\infty$ $\Longrightarrow$ **u** converge e e **v** converge.

(b') Si ottiene da (b) per dualità-UD ▮

I13f.08 Teorema (teorema di Riemann-Dini)

Se entrambe le serie **u** e **v** sono divergenti e sia u che v sono infinitesime, allora, fissato un qualsiasi $S \in \mathbb{R}$, si possono permutare gli addendi della serie A in modo che che essa converga ad S.

Dim.: Riduciamo la generalità dell'ipotesi supponendo che sia $S > 0$ e procediamo a costruire per stadi successivi (che chiameremo 0_u, 0_v, 1_u, 1_v, ...) la serie permutata richiesta che denotiamo con $\mathbf{c} = \langle \mathsf{c}, \mathsf{C} \rangle$.

Nello stadio 0_u nelle prime posizioni della c collochiamo le prime componenti della u, u_0, u_1, ...,u_{r_0} in modo che sia $u_0 + u_1 + \cdots + u_{r_0-1} \le S$ e $u_0 + u_1 + \cdots + u_{r_0-1} + u_{r_0} > S$ (se fosse $u_0 > S$, sarebbe $r_0 = 0$).
Nello stadio 0_v alla c in costruzione accodiamo le prime componenti della v in modo che sia

$$u_0 + \cdots + u_{r_0} - v_0 - \cdots - v_{s_0-1} > S \qquad \text{e} \qquad u_0 + \cdots + u_{r_0} - v_0 - \cdots - v_{s_0-1} - v_{s_0} \le S\ .$$

Nello stadio 1_u della costruzione della c accodiamo u_{r_0+1}, u_{r_0+2}, ... u_{r_1} con r_1 indice minimo tale che la somma parziale $C_{r_0+s_0+r_1}$ supera S.
Nello stadio 1_v per la c accodiamo $-v_{s_0+1}$, $-v_{s_0+2}$, ... $-v_{s_1}$ con s_1 indice minimo tale che la somma parziale $C_{r_0+s_0+r_1+s_1}$ risulta minore o uguale ad S.
Reiterando queste manovre si giunge alla serie richiesta ▮

I13 g. prodotto di due serie

I13g.01 In questa sezione consideriamo due serie di addendi che possiamo considerare sia reali che complessi aventi, risp., le forme $\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle \mathsf{b}, \mathsf{B} \rangle$.
Consideriamo inoltre una serie, anch'essa di addendi reali o complessi, ottenuta mediante una loro composizione alla quale diamo la forma $\mathbf{c} = \langle \mathsf{c}, \mathsf{C} \rangle = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_m + \cdots$.

Si dice **prodotto [secondo Cauchy] di due serie**, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ la serie $\mathbf{c}$ i cui addendi sono ottenuti con il seguente sistema di formule univocamente costruttivo.

$$\begin{gathered}
c_0 := a_0\, b_0 \ , \\
c_1 := a_0\, b_1 + a_1\, b_0 \ , \\
c_2 := a_0\, b_2 + a_1\, b_1 + a_2\, b_0 \ , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
c_n := a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, b_1 + a_n\, b_0 \ , \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}$$

Con una formula equivalente, cioìn grado di sintetizzare tutte le definizioni precedenti si definisce come serie prodotto della $\mathbf{a}$ e della $\mathbf{b}$ la serie

(1) $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\, b_{n-i} \right) .$$

I13g.02 Molte considerazioni sui prodotti di serie si chiariscono guardando il quadro della rappresentazione cartesiana della matrice del genere $\lceil \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{C} \rceil$ le cui entrate sono i prodotti della forma $a_i\, b_j$.

(1) $$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
a_0\, b_5 & a_1\, b_6 & a_2\, b_7 & a_3\, b_8 & a_4\, b_9 & a_5\, b_{10} & \dots \\
a_0\, b_4 & a_1\, b_5 & a_2\, b_6 & a_3\, b_7 & a_4\, b_8 & a_5\, b_9 & \dots \\
a_0\, b_3 & a_1\, b_4 & a_2\, b_5 & a_3\, b_6 & a_4\, b_7 & a_5\, b_8 & \dots \\
a_0\, b_2 & a_1\, b_3 & a_2\, b_4 & a_3\, b_5 & a_4\, b_6 & a_5\, b_7 & \dots \\
a_0\, b_1 & a_1\, b_2 & a_2\, b_3 & a_3\, b_4 & a_4\, b_5 & a_5\, b_6 & \dots \\
a_0\, b_0 & a_1\, b_1 & a_2\, b_2 & a_3\, b_3 & a_4\, b_4 & a_5\, b_5 & \dots
\end{array}$$

Si osserva che le espressioni in g01 sono in accordo con le espressioni per il prodotto di due sommatorie finite: queste ultime si possono considerare come somme di due serie aventi solo un numero finito di addendi, ovvero serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ per le quali esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n = N, N+1, N+2, ... \,\colon\, a_n = 0$.

Si osserva anche che il prodotto di serie è commutativo:

(1) $$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) .$$

Questo discende dalla commutatività del prodotto di reali o di complessi e dalla simmetria della matrice precedente.

I13g.03 Prop. Assumiamo che le due serie $\mathbf{a} = \langle \mathsf{a}, \mathsf{A} \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle \mathsf{b}, \mathsf{B} \rangle$ siano assolutamente convergenti e denotiamo le loro somme, risp., con S_A ed S_B.

Allora la serie prodotto $\mathbf{c} = \langle \mathsf{c}, \mathsf{C} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge assolutamente ed ha come somma $S_A \cdot S_B$.

Dim.: Consideriamo per primo il caso in cui le due serie presentano solo addendi nonnegativi. Facendo riferimento al quadro in g02, è evidente che, posto $m := \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, sia

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; A_m\, B_m \le c_n \le A_n\, B_n \; .$$

Evidentemente $n \to +\infty \iff m \to +\infty$ e passando a questo limite abbiamo

$$S_A\, S_B \;=\; \lim_{n\to+\infty} A_m\, B_m \;\le\; \lim_{n\to+\infty} c_n \;\le\; \lim_{n\to+\infty} A_n\, B_n \;=\; S_A\, S_B \;,$$

e quindi l'asserto ▮

I13g.04 Consideriamo il numero complesso q con $|q| < 1$ e le serie geometriche $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} (-q)^n$; queste sono assolutamente convergenti ed hanno come somme, risp., $\dfrac{1}{1-q}$ ed $\dfrac{1}{1+q}$.

Per la loro serie prodotto si trova

(1) $$\frac{1}{1-q^2} \;=\; \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1+q} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} \;.$$

Con considerazioni analoghe si ottengono le serie

(2) $$\frac{1}{(1-q)^2} \;=\; \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\right)^2 \;=\; 1 + 2\,x + 3\,q^2 + \cdots + (n+1)\,q^n + \cdots \;.$$

(3) $$\frac{1}{(1-q)^3} \;=\; \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\right)^3 \;=\; 1 + \binom{3}{2} q + \binom{4}{2} q^2 + \cdots + \binom{n+2}{2} q^n + \cdots \;.$$

(4) $$\frac{1}{(1-q)^k} \;=\; \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\right)^k \;=\; 1 + \binom{1+k}{k} q + \binom{2+k}{k} q^k + \cdots + \binom{n+k}{n} q^n + \cdots \;.$$

Consideriamo la serie esponenziale in corrispondenza a due valori reali qualsiasi x_1 e x_2; dato che essa converge assolutamente per ogni valore del suo parametro, possiamo considerare le sue somme corrispondenti ai due valori x_1 e x_2, che denotiamo con $E(x_1)$ e $E(x_2)$ e applicare il teorema precedente per ottenere il loro prodotto. Per questo si trova

(5) $$E(x_1) \cdot E(x_2) \;=\; E(x_1 + x_2) \;.$$

I13g.05 Teorema (teorema di Mertens)

Se le due serie $\mathbf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\mathbf{b} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ sono convergenti, risp., alla somma S_A e alla S_B, se una di esse, diciamo la $\mathbf{a}$, converge assolutamente, allora la serie prodotto $\mathbf{c} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge ed ha come somma $S_A \cdot S_B$.

Dim.: L'espressione di C_n si può scrivere, raggruppando gli addendi con lo stesso fattore a_k per $k = 0, 1, 2, ..., n$, ossia sommando secondo le linee verticali del quadro in g02,

(1) $C_n = a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \cdots + a_n\, b_0 \;=\; a_0(b_n - S_B) + a_1(b_{n-1} - S_B) + \cdots + a_n(b_0 - S_B) + A_n\, S_B$.

Dalla precedente si ricava

(2) $$C_n - A_n\, S_B \;=\; A_0(b_n - S_B) + A_1(b_{n-1} - S_B) + \cdots + A_n(b_0 - S_B)\ .$$

Dimostriamo ora che il secondo membro converge a 0 per $n \to +\infty$.

Dato che sia $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$ che $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ convergono, esiste $M \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ \vdots\ \ \sum_{j=0}^{n}|a_j| < M \qquad , \qquad |B_n - S_B| < M\ ;$$

Inoltre per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ esiste $\nu(\epsilon)$ tale che sia

$$\forall n = \nu, \nu+1, \nu+2, \ldots\ \ \vdots\ \ |A_{\nu+1}| + |A_{\nu+2}| + \cdots + c_{\nu+n}| < \epsilon \quad , \quad |b_n - S_B| < \epsilon \qquad .$$

Dunque per ogni $n = 2\nu, 2\nu+1, \nu+2, \ldots$ si ha

$$|C_n - A_n\, S_B| \;\le$$

$$|a_0|\cdot|b_n - S_B| + |a_1|\cdot|b_{n-1} - S_B| + \cdots + |a_\nu|\cdot|b_{n-\nu} - S_B| + |a_{\nu+1}|\cdot|b_{n-\nu-1} - S_B| + \cdots + |a_n|\cdot|b_0 - S_B|$$
$$\le\; (|a_0| + \cdots + |a_n u|)\cdot\epsilon + (|a_{\nu+1}| + \cdots + |a_n|)\ M \le M\,\epsilon + \epsilon\, M = 2\,M\,\epsilon$$ ▮

Conviene osservare esplicitamente che le ipotesi di questo teorema non implicano che la serie prodotto converga assolutamente.

I13g.06 **Teorema** (**teorema di Cesáro** o teorema della media aritmetica)

Se le due serie $\mathbf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ e $\mathbf{b} = \sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ sono convergenti, risp., alla somma S_A e alla somma S_B, allora la serie prodotto $\mathbf{c} = \sum_{n=0}^{+\infty}c_n$ potrebbe non convergere, ma essa converge secondo la media aritmetica, cioè

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{C_0 + C_1 + \cdots + C_n}{n+1} = S_A\cdot S_B\ .$$

Dim.: Riprendiamo da **g05** l'espressione

$$C_n \;=\; a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \cdots + a_n\, b_0$$

e consideriamo i suoi casi particolari ottenuti sostituendo ad n, risp., gli interi $n-1$, $n-2$, ...,1 ,0: otteniamo

$$b_0 + b_1 + \cdots + b_n \;=\; a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \cdots + a_n\, b_0$$

e quindi

$$\frac{b_0 + b_1 + \cdots + b_n}{n} \;=\; \frac{a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \cdots + a_n\, b_0}{n}\ .$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene che il secondo membro converge ad $S_A \cdot S_B$ e questo corrisponde all'asserto ▮

Osserviamo esplicitamente che le ipotesi di questo teorema escludono che la successione dei c_n possa essere divergente a $-\infty$ o a $+\infty$; questa successione può essere oscillante, ma non "eccessivamente", nel senso che le sue oscillazioni possono essere "smorzate" quando si passa alla loro media aritmetica.

I13g.07 **Teorema** (**teorema di Abel**)

Se le suddette serie $\mathbf{a} = \sum a_n$, $\mathbf{b} = \sum b_n$ e $\mathbf{c} = \sum c_n$ sono tutte convergenti, allora si ha $S_C = S_A\cdot S_B$.

Dim.: In conseguenza del teorema sulla media aritmetica [g06] dalla $\lim_{n\to+\infty} C_n = S_C$ segue

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_0 + c_1 + \cdots + c_n}{n+1} = S_C \ ;$$

d'altra parte il teorema in g06 implica $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{c_0 + c_1 + \cdots + c_n}{n+1} = S_A \cdot S_B$; quindi segue l'asserto ▮