1

Capitolo I12
limiti di successioni di reali

Contenuti delle sezioni

a. limiti di successioni su spazi metrici e cartesiani p. 2
b. limiti di successioni di reali [1] p. 7
c. limiti per difetto e per eccesso; riflessioni-UD p. 13
d. successioni di Cauchy p. 15
e. limiti di composizioni di successioni p. 17
f. numero e come limite di successioni p. 21
g. successioni infinitesime, criteri di convergenza p. 26
h. simboli per il confronto dei limiti di successioni p. 28
i. sottosuccessione, limite inferiore e limite superiore p. 32

36 pagine

I12 0.01 Questo capitolo è dedicato ai limiti delle successioni di oggetti che possono essere definiti e studiati a diversi livelli di generalità.

Le considerazioni più generali sono svolte per successioni di elementi di un qualsiasi spazio metrico. Queste valgono in particolare per le successioni di vettori appartenenti ad uno spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ con d generico intero positivo. Ancora più in particolare valgono per successioni di numeri reali e quindi per successioni di numeri razionali.

Dopo le definizioni basilari sui limiti finiti e infiniti, si presentano le successioni che soddisfano la cosiddetta condizione di Cauchy e i limiti delle composizioni (razionali, esponenziali e logaritmiche) di successioni dotate di limite.

Si definisce poi come limite di successioni di razionali il numero e, costante fondamentale per lo sviluppo dell'analisi infinitesimale.

La parte successiva tocca nozioni più tecniche sopra le successioni infinitesime, i criteri di convergenza e i simboli di confronto che permettono una formulazione più agevole di molti risultati sulla convergenza.

Da ultimo si studiano i possibili codomini delle successioni di reali e si introducono i due valori che possono essere attribuiti a ciascuna di queste successioni, il limite inferiore e il limite superiore.

I12 a. limiti di successioni su spazi metrici e cartesiani

I12 a.01 In generale per **successione** di elementi di un insieme E si intende una funzione del genere $\lceil\, \mathbb{N} \longmapsto \mathsf{E} \,\rceil$ o di un genere simile, come $\lceil\, \mathbb{P} \longmapsto \mathsf{E} \,\rceil$ o come $\lceil\, \{k, k+1, k+2, ...\} \longmapsto \mathsf{E} \,\rceil$ per un qualsiasi $k \in \mathbb{Z}$.

Per ogni i appartenente al dominio di una successione chiamiamo **componente della successione** di posizione i il valore che essa assume in corrispondenz di i.
Osserviamo che spesso invece del termine "componente" viene usato il termine "elemento".

La trattazione delle successioni risulta particolarmente agevole e utile quando le componenti fanno parte di uno spazio metrico [B46a].
Consideriamo uno di questi spazi denotandolo con $\boldsymbol{M} = \langle \mathsf{M}, \mathrm{dist} \rangle$, dove $\mathrm{dist} \in \lceil\, \mathsf{M} \times \mathsf{M} \longmapsto \mathbb{R}_{0+} \,\rceil$.
Ricordiamo poi [B46c01] che si dice punto di accumulazione di un sottoinsieme S di M, ogni $L \in \mathsf{M}$ tale che per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ipap) nella bolla aperta della forma $\mathsf{ball}_{\mathrm{dist}}(L, \epsilon)$ si trova almeno un elemento di S diverso da L.
Ricordiamo anche che questo equivale a dire che nella suddetta bolla si trovano infiniti elementi di S diversi tra di loro e da L [B46c].

Consideriamo inoltre una funzione $F \in \lceil\, D \longmapsto \mathsf{M} \,\rceil$, per il cui dominio D chiediamo solo che sia un insieme infinito.
Si dice **punto di accumulazione** per i valori della funzione F ogni $\boldsymbol{a} \in \mathsf{M}$ tale che, per qualsiasi $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ipap) si trova almeno un elemento $x \in D$ per il quale sia $\mathrm{dist}(F(x), \boldsymbol{a}) < \epsilon$.
Questo equivale a dire che per ogni ϵ reale positivo si trovano infiniti elementi $x \in D$ per i quali sia $\mathrm{dist}(F(x), \boldsymbol{a}) < \epsilon$.

Si osserva che la definizione data non consente di attribuire punti di accumulazione a una funzione con dominio finito.

I12 a.02 In questo capitolo prendiamo in considerazione insiemi di successioni che si collocano a vari livelli di generalità; le successioni dei punti di uno spazio metrico $\boldsymbol{M}$, le successioni di punti di uno spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ cioè delle funzioni del genere $\lceil\, \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}^{\times d} \,\rceil$, per qualsiasi $d \in \mathbb{P}$, le successioni di numeri reali e le successioni di numeri razionali.

Tutti questi generi di successioni, che abbiamo elencato secondo generalità decrescente, sono funzioni relativamente semplici ma svolgono ruoli basilari per lo sviluppo del calcolo infinitesimale, a partire dallo studio delle funzioni del genere $\lceil\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,\rceil$ ossia delle funzioni-RtR, fino a quelle del genere $\lceil\, \mathbb{R}^{\times d} \longmapsto \mathbb{R}^{\times e} \,\rceil$ per qualsiasi e intero positivo, che chiamiamo anche funzioni-RdtRe.

I risultati sulle successioni aventi come dominio $\mathbb{N}$ possono essere riportati facilmente a loro varianti relative a domini molto simili aventi la forma $\lceil\, \{k, k+1, k+2, ...\} \longmapsto \mathbb{R}^{\times d} \,\rceil$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e in particolare alle successioni del genere $\lceil\, \mathbb{P} \longmapsto \mathbb{R}^{\times d} \,\rceil$.

Daremo anche qualche risultato sulle successioni di numeri complessi, risultati in parte riconducibili alle successioni con valori in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Le successioni vengono presentate di solito con scritture quali

(1) . $$\mathsf{a} = \langle a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... \rangle = \langle n \in \mathbb{N} :|\ a_n \rangle \ ,$$

Talora risulta più conveniente darle una forma come

(2) $$\mathsf{b} = \langle b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ... \rangle = \langle n \in \mathbb{P} :|\ b_n \rangle \ ,$$

o più in generale una forma

$$\mathsf{c} = \langle c_k, c_{k+1}, c_{k+2}, ..., c_n, ... \rangle = \langle n \in \mathbb{N} :| \ c_{n+k} \rangle \ , \tag{3}$$

Questi tipi di entità sono sostanzialmente equivalenti, in quanto sono riconducibili l'una all'altra ponendo per ogni $n = 1, 2, 3, ...$, risp., $b_n := a_{n-1}$ e $c_n := a_{n-k}$.

Inoltre, come vedremo, per la determinazione della convergenza delle successioni e del loro eventuale limite, sono completamente assimilabili i comportamenti delle successioni $\langle a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... \rangle$, quelli delle $\langle b_1, b_2, a_3, ..., b_n, ... \rangle$ e i comportamenti delle $\langle c_k, c_{k+1}, c_{k+2}, ..., c_n, ... \rangle$.

Talora per le successioni vengono usate notazioni concise che appaiono incomplete ma risultano interpretabili correttamente quando si tenga conto del contesto; in particolare segnaliamo che al posto della $\langle a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... \rangle = \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ vengono usale le notazioni $\langle a_n \rangle_{\mathbb{N}}$ e $a_{\mathbb{N}}$.

I12 a.03 I punti di accumulazione per i valori di una successione si dicono anche **valori limite** della stessa. Denotiamo con $\mathbf{Limv}(\mathsf{a})$ l'insieme dei valori limite della successione a; per questi insiemi possono essere utili anche notazioni della forma $\mathbf{Limv}\langle \mathcal{E}_n \rangle_{\mathbb{N}}$ e della forma $\mathbf{Limv}\langle \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \rangle$, dove il simbolo $\mathcal{E}_n$ denota una espressione nella quale compare una n variabile nell'insieme $\mathbb{N}$, espressione che per ogni n fornisce un valore in $\mathbb{R}^{\times d}$.

Per l'insieme dei punti di accumulazione di una successione a valori in $\mathbb{R}^{\times d}$, si possono riscontrare varie situazioni.

La successione con le componenti tutte coincidenti $\mathsf{c} = \langle c, c, c, ... \rangle$ ha c come unico valore limite: $\mathbf{Limv}\langle \mathsf{c} \rangle_{\mathbb{N}} = \{c\} = \mathsf{cod}(\mathsf{c})$.

La successione $\dfrac{1}{\mathbb{P}} = \left\langle 1, \dfrac{1}{2}, ..., \dfrac{1}{n}, ... \right\rangle$ possiede un unico valore limite, il numero 0, non facente parte del suo codominio, ossia $\mathbf{Limv}\langle 1/\mathbb{P} \rangle = \{0\} \notin \mathsf{cod}\langle 1/\mathbb{P} \rangle$.

La successione $\mathbb{N}\%3 = \langle 0, 1, 2, 0, 1, 2, ..., n\%3, ... \rangle$ possiede un numero finito (3) di valori limite: $\mathbf{Limv}\langle \mathbb{N}\%3 \rangle = \{0, 1, 2\} = \mathsf{cod}\langle \mathbb{N}\%3 \rangle$.

La successione di numeri complessi $\langle n \in \mathbb{N} :| \ i^n \rangle = \langle 1, \mathsf{i}, -1, -\mathsf{i}, 1, \mathsf{i}, -1, -\mathsf{i}, ... \rangle$ possiede 4 valori limite, i numeri 1, i, -1 e $-\mathsf{i}$ i quali costituiscono il suo codominio.

La successione

$$\left\langle n \in \mathbb{N} :\middle| \ i^n + \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle \mathsf{i} + 1, -1 + \frac{1}{2}, -\mathsf{i} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, i + \frac{1}{5}, -1 + \frac{1}{6}, -\mathsf{i} + \frac{1}{7}, 1 + \frac{1}{8} ... \right\rangle$$

presenta come insieme di valori limite $\{\mathsf{i}, -1, -\mathsf{i}, 1\}$, insieme senza alcun elemento in comune con il suo codominio.

I12 a.04 Le successioni di elementi di $\mathbb{R}^{\times d}$ con codominio limitato, grazie al teorema di Bolzano-Weierstrass [B46c07], posseggono almeno un valore limite.

Dunque si trovano, successioni con codominio limitato con un solo punto limite e altre con un numero finito di punti limite.
Incontreremo anche successioni con codominio limitato aventi una infinità numerabile di valori limite e con una infinità continua di valori limite.

Troviamo una successione che ha come insieme di punti limite $\left\{ k \in \mathbb{P} :\middle| \ \dfrac{1}{k} \right\}$. Associamo a ogni coppia $\langle h, k \rangle \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ il numero $s_{h,k} := \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{\pi\, h}$ e identifichiamo con s la successione ottenuta sequenzializzando questi numeri mediante la visita di $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ secondo il procedimento diagonale di Cantor [B30a07].

Esplicitamente si ha

$$\mathsf{s} \;=\; \left\langle 1+\frac{1}{\pi}\;,\;\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\;,\;1+\frac{1}{2\,\pi}\;,\;\frac{1}{3}+\frac{1}{\pi}\;,\;\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\;,\;1+\frac{1}{3\pi}\;,\;...\right\rangle\;.$$

Dall'insieme dei valori nella riga k-esima di $\mathbb{P}\times\mathbb{P}$ si ottiene che $\dfrac{1}{k}$ è punto di accumulazione della s.
Similmente dalla colonna h-esima di $\mathbb{P}\times\mathbb{P}$ si ottiene che $\dfrac{1}{\pi\,h}$ appartiene a $\mathbf{Limv}(\mathsf{s})$.
Denotiamo con $\overline{s}$ la successione ottenuta prendendo in ordine decrescente gli elementi di $\mathbf{Limv}(\mathsf{s})$.
Evidentemente unico punto di accumulazione di $\overline{s}$ è lo 0; questo è anche punto di accumulazione di s.

I12 a.05 L'appartenenza di ogni punto di accumulazione di $\mathbf{Limv}(\mathsf{s})$ allo stesso $\mathbf{Limv}(\mathsf{s})$ vale per ogni successione s di elementi di uno spazio metrico.

(1) Prop.: L'insieme dei punti di accumulazione di una successione s di elementi di uno spazio metrico $\boldsymbol{M}=\langle\mathbb{M},\mathrm{dist}\rangle$ avente codominio limitato contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Dim.: Consideriamo un punto di accumulazione $\overline{a}$ di $\mathbf{Limv}(\mathsf{s})$ e un $\epsilon\in\mathbb{R}_+$ (ipap). Nella bolla $\mathsf{ball}(\overline{a},\epsilon/2)$ si trova almeno un punto limite $\overline{b}$ della s e nella bolla $\mathsf{ball}(\overline{b},\epsilon/2)$ si trova almeno un punto della s.
Quindi nella bolla $\mathsf{ball}(\overline{a},\epsilon)$ si trova almeno un punto della s.
Per l'arbitrarietà di ϵ in tale bolla si trovano infiniti punti di s ∎

Prendiamo in considerazione una successione t il cui codominio è un intervallo chiuso di reali.
Consideriamo anche l'insieme delle forme frazionarie $\dfrac{h}{k}$ con $h,k\in\mathbb{P}$ e $0<h<k$ e la loro sequenzializzazione ottenuta visitando per colonne successive il triangolo delle coppie $\langle h,k\rangle$ secondo l'ordinamento diagonale di Cantor.
Si trova che per ogni $\langle h,k\rangle$ i termini della t appartenenti alla semirette-ZZ $\{m\in\mathbb{P}:|\,\langle mk,mh\rangle\}$ comportano che $\dfrac{h}{k}$ appartenga a $\mathbf{Limv}(\mathsf{t})$; quindi di questo insieme fanno parte tutti i razionali di $\mathbf{(}0:1\mathbf{)}$; quindi grazie alla densità dei numeri razionali e all'l'enunciato (1) l'intero intervallo reale $\mathbf{[}0,1\mathbf{]}$ deve far parte di $\mathbf{Limv}(\mathsf{t})$.
Infine si dimostra facilmente che nessun reale estraneo a $\mathbf{[}0,1\mathbf{]}$ può essere valore limite della successione in esame e quindi deve esser $\mathbf{Limv}(\mathsf{t})\;=\;\mathbf{[}0,1\mathbf{]}$.

I12 a.06 Per le successioni di numeri reali con codominio illimitato risulta spesso opportuno ammettere tra i punti limite anche entità come $-\infty$, $+\infty$ e ∞.

Per vari motivi risulta opportuno associare alla successione $\langle n\in\mathbb{N}:|\,n^2\rangle$ il valore limite $+\infty$; similmente conviene associare a una successione come la $\langle n\in\mathbb{N}:|\,100\,n-3\,n^3\rangle$ il valore limite $-\infty$, mentre conviene associare a una successione come la $\langle n\in\mathbb{N}:|\,(-1)^n\,n^2\rangle$ il più vago valore limite ∞.

Queste opportunità inducono a prendere in considerazione come insiemi che ampliano $\mathbb{R}$ gli insiemi $\mathbb{R}\dot\cup\{\infty\}$, $\mathbb{R}\dot\cup\{-\infty\}$, $\mathbb{R}\dot\cup\{-\infty,+\infty\}$ ed $\mathbb{R}\dot\cup\{-\infty,+\infty,\infty\}$, dato che queste entità consentono di esprimere concisamente risultati più completi e di portata maggiore di quelli che si servono del solo $\mathbb{R}$.

Esigenze analoghe si riscontrano nello studio delle funzioni del genere $\lceil\,\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}\,\rceil$, le quali si possono considerare ampliamenti delle successioni di reali.

In varie circostanze risulta conveniente servirsi delle seguenti notazioni:

$$\mathbb{R}_{+\mathbf{i}}\;:=\;\mathbb{R}\dot\cup\{+\infty\}\quad,\quad\mathbb{R}_{-\mathbf{i}}\;:=\;\mathbb{R}\dot\cup\{-\infty\}\quad,\quad\mathbb{R}_{\pm\mathbf{i}}\;:=\;\mathbb{R}\dot\cup\{-\infty,+\infty\}\quad,$$

$$\mathbb{R}_{\mathbf{i}}\;:=\;\mathbb{R}\dot\cup\{\infty\}\quad,\quad\mathbb{R}_{\pm\mathbf{i},\mathbf{i}}\;:=\;\mathbb{R}\dot\cup\{-\infty,+\infty,\infty\}\quad.$$

In particolare la successione ottenuta sequenzializzando tutte le frazioni di interi positivi

$$\mathsf{r} = \left\langle \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1}\ ,\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1},\ \ldots\ ,\frac{1}{n},\frac{2}{n-1},\ldots,\frac{n-1}{2},\frac{n}{1},\ \ldots\ \right\rangle$$

possiede come insieme di valori limite l'intero $\mathbb{R}_{0+} \dot\cup \{+\infty\}$.

Conviene osservare che $\mathsf{cod}(\mathsf{r}) = \mathbb{Q}_+$ e $\mathbf{Limv}(\mathsf{r}) \supset \mathsf{cod}(\mathsf{r})$.

I12 a.07 Analogo atteggiamento può essere conveniente per i punti limite di successioni di elementi di uno spazio $\mathbb{R}^{\times d}$.

Per esempio una successione m ottenuta sequenzializzando (secondo qualche criterio che conviene esprimere geometricamente e che il lettore può precisare senza molte difficoltà) tutte le d-uple di forme frazionarie $\dfrac{n}{m}$ con $n \in \mathbb{R}$ ed $m \in \mathbb{R}_+$ ha come insieme di valori limite l'intero $\mathbb{R}^{\times d}$ ampliato con le d-uple di elementi di $\mathbb{R} \dot\cup \{-\infty, +\infty\}$, cioè l'insieme $\mathbb{R}_{\pm\mathbf{i}}$.

Come vedremo gli ampliamenti di $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}_{+\mathbf{i}}$, $\mathbb{R}_{-\mathbf{i}}$ e $\mathbb{R}_{\pm\mathbf{i}}$, adottando opportune precauzioni, per molte argomentazioni si possono trattare in modo molto simile a $\mathbb{R}$: essi si possono munire di un ordine totale, dell'operazione di passaggio all'opposto e di operazioni binarie parziali; (che non valgono per tutte le coppie di operandi, per esempio non si può dare una definizione dell'espressione $+\infty - (+\infty)$ incondizionatamente utilizzabile le quali estendono le relazioni e le operazioni aritmetiche.

Osserviamo anche che gli insiemi di valori limite di successioni reali devono essere sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}_{\pm\mathbf{i}}$: in particolare non possono essere insiemi come intervalli aperti o semiaperti, ma solo intervalli chiusi; non è ammesso $\mathbb{R}_+$, ma solo $\mathbb{R}_{0+} \dot\cup \{+\infty\}$; non è ammesso $\mathbb{R}_-$ ma solo $\mathbb{R}_{-0} \dot\cup \{-\infty\}$; non è ammesso $\mathbb{R}$ ma solo $\mathbb{R}_{\pm\mathbf{i}}$.

I12 a.08 Tra le successioni, come per le funzioni di altri generi, sono effettivamente utilizzabili le **successioni costruibili**, cioè le $\langle n \in \mathbb{N} :|\ a_n \rangle$ per le quali si conosce un meccanismo in grado di fornire per ogni $n \in \mathbb{N}$ la componente a_n con una precisione grande quanto possa rendersi necessario.

L'insieme delle successioni a valori in $\boldsymbol{M}$ costruibili si denota con $\lceil\!\lceil\, \mathbb{N} \longmapsto_{\mathsf{C}} \boldsymbol{M} \,\rceil\!\rceil$ e il suo sottoinsieme costituito dalla totalità delle successioni a valori in $\mathbb{R}^{\times d}$ costruibili si denota con $\lceil\!\lceil\, \mathbb{N} \longmapsto_{\mathsf{C}} \mathbb{R}^{\times d} \,\rceil\!\rceil$.

Osserviamo che il codominio delle successioni in $\lceil\!\lceil\, \mathbb{N} \longmapsto_{\mathsf{C}} \mathbb{R}^{\times d} \,\rceil\!\rceil$ è costituito da vettori costruibili, cioè è contenuto in

$$\mathbb{R}^{\times d}{}_{\mathsf{C}} \ :=\ (\mathbb{R}_{\mathsf{C}})^{\times d} \ .$$

Osserviamo anche che queste successioni costituiscono un sottoinsieme proprio dell'insieme delle successioni di reali costruibili $\lceil\!\lceil\, \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}_{\mathsf{C}} \,\rceil\!\rceil$: infatti mentre questo insieme ha il cardinale $\aleph_1$, il suddetto codominio è numerabile.

A questo proposito mostriamo come, a partire dalla conoscenza di una successione delleprocedure algoritmi $\mathcal{P}_k$ in grado di fornire una successione di successioni $\langle k \in \mathbb{N} :|\ \mathsf{a}^{(k)} \rangle$ con $\mathsf{a}^{(k)} = \langle n \in \mathbb{N} :|\ a_n^{(k)} \rangle$ per $k = 0, 1, 2, 3, ...$ si riesca a individuare una procedura $\overline{\mathcal{P}}$ in grado di ottenere approssimazioni di tutti gli elementi di $\mathbf{Limv}\left\{h \in \mathbb{N} :|\ \mathsf{a}^{(k)}\right\}$.

$\overline{\mathcal{P}}$ inizia con una fase F_0 nella quale si simula la emissione iniziale di $a^{(0)}$ da parte di $\mathcal{P}_0$ e quindi 4 organizza una successione illimitata di fasi F_k per $k = 1, 2, 3, ...$.

Nella fase F_k $\overline{\mathcal{P}}$ inizia la simulazione di $\mathcal{P}_k$ che effettua la generazione di $\{a_0^{(k)}$ e quindi con sottofasi $f_{k,h}$ per $h = 0, 1, ..., k-1$ riprende le simulazioni delle $\mathcal{P}_{k-h-1}$ ottenendo le generazioni delle componenti $a^{(k-h-1}{}_{h+1}$.

In tal modo la procedura $\overline{\mathcal{P}}$ riesce ad approssimare quanto si vuole i valori limite di tutte le procedure $\mathcal{P}^{(k)}$.

I12 a.09 Le successioni di elementi in $\mathbb{R}^{\times d}$ che hanno maggiore interesse sono le **successioni unilimite** cioè le successioni con un unico valore limite.
In effetti una tale entità consente di individuare un determinato elemento di $\boldsymbol{M}$ (o di $\mathbb{R}^{\times d}$, o di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{Q}$) che potrebbe costituire una entità innovativa, cioè una entità che non si è incontrata nelle fasi precedenti di una presentazione della matematica e che può risultare utile per risolvere un problema in esame o per sviluppi successivi.

Per ogni successione unilimite $\mathsf{a} = a_0, a_1, a_2, ...$ per il suo limite unico usiamo la notazione $\lim_{n\to+\infty} a_n$ in modo da poter scrivere $\textbf{Limv}(\mathsf{a}) = \{\lim_{n\to+\infty} a_n\}$.

La proposizione che segue garantisce che il valore limite $\mathsf{L} \in \mathbb{R}^{\times d}$ di una successione unilimite, risorse permettendo, può essere individuato con una precisione grande quanto si vuole.

Questo apre la possibilità di utilizzare le successioni unilimite in attività computazionali volte a individuare con la elevata precisione parametri che contribuiscano a progredire nelle attività finalizzate alla soluzione di problemi concreti.

(1) Prop.: Se $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ è una successione di vettori di $\mathbb{R}^{\times d}$ costruibile unilimite e se scriviamo $\mathsf{L} := \lim_{n\to+\infty} a_n$, allora L è un vettore costruibile, cioè $\mathsf{L} \in \mathbb{R}^{\times d}{}_{\mathsf{C}}$.

Dim.: Fissato un arbitrario $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ cerchiamo un $\mathsf{v} \in \mathbb{R}^{\times d}{}_{\mathsf{C}}$ tale che sia $\text{dist}(\mathsf{v}, \mathsf{L}) < \epsilon$. Da $\mathsf{L} = \lim_{n\to+\infty} a_n$ segue che esiste un intero N tale che per ogni intero $n \geq N$ si ha $\text{dist}(a_n, \mathsf{L}) < \frac{\epsilon}{2}$.
Dato che a_N è costruibile, esiste un vettore $\mathsf{r} \in \mathbb{Q}^{\times d}$ tale che $\text{dist}(\mathsf{r}, a_N) < \frac{\epsilon}{2}$.
Accade quindi che $\text{dist}(\mathsf{r}, \mathsf{L}) < \text{dist}(\mathsf{r}, a_N) + \text{dist}(a_N, \mathsf{L}) < \epsilon$ e questo esprime l'illimitata approssimabilità, cioè la costruibilità di L ∎
Dunque quando $d = 1$ questi elementi sono numeri reali costruibili.

I12 a.10 Date due successioni $\mathsf{a} = \langle a_0, a_1, a_2, ... \rangle$ e $\mathsf{b} = \langle b_0, b_1, b_2, ... \rangle$ del genere $\lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathsf{M} \rceil$ con $\mathsf{M} = \langle S, \text{dist} \rangle$ spazio metrico qualsiasi, si dice che a è sottosuccessione della b sse esiste una funzione crescente $C \in \lceil \mathbb{N} \longmapsto_< \mathbb{N} \rceil$ tale che $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ a_n = b_{C(n)}$.

In termini colloquiali possiamo dire che la sottosuccessione a di una successione b si ottiene da questa procedendo a scorrerla per scegliere come componenti della a solo una parte dei componenti della b, ipotizzando la possibilità di proseguire quanto si vuole.

La a si dice **sottosuccessione estratta** dalla b mediante la funzione C ed è lecito denotarla con $\mathsf{b}|_{\mathsf{dom}C}$.

(1) Prop.: Se la b converge a un unico limite L, allo stesso limite converge la a.

Dim.: La convergenza della b viene garantita da un insieme di relazioni della forma ⌈ per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ si trova N tale che per $n = N, N+1, N+2, ...$ vale la relazione di appartenenza $b_n \in \mathsf{ball}(L, \epsilon)$ ⌉ .
Per la convergenza allo stesso L basta che valga una successione (illimitata) estratta dalla successione delle suddette relazioni di appatenenza ∎

I12 b. limiti di successioni di reali [1]

I12 b.01 Le successioni di numeri reali sono chiamate anche funzioni-NtR e il loro insieme viene denotato con **FunNtR**

Una successione di numeri reali $\langle n \in \mathbb{N} :| a_n \rangle \in \lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ si dice:

- **successione limitata inferiormente** sse esiste un reale m tale che per ogni n sia $m \leq a_n$, cioè sse il suo codominio è limitato inferiormente;
- **successione limitata superiormente** sse esiste un reale M tale che per ogni n sia $a_n \leq M$, cioè sse il suo codominio è limitato superiormente;
- **successione limitata**, semplicemente, sse è limitata sia inferiormente che superiormente, cioè sse il suo codominio è limitato.

Più in generale, una successione di elementi di uno spazio metrico si dice successione limitata sse tutte le sue componenti sono contenute in una bolla di raggio finito di questo spazio.

È spesso utile fare riferimento alla tetraripartizione di **FunNtR** che distingue tra:

successioni limitate inferiormente e superiormente;

successioni limitate inferiormente e illimitate superiormente;

successioni illimitate inferiormente e illimitate superiormente;

successioni illimitate inferiormente e illimitate superiormente.

La $\langle n \in \mathbb{N} :| 3n + 2 \rangle$ è limitata inferiormente ma non superiormente.

La $\langle n \in \mathbb{N} :| 200 + 3\,n - n^2 \rangle = \langle 200, 202, 202, 200, 196, 190, 182, 172, 160, ... \rangle$ è limitata superiormente ma non inferiormente.

La $\langle n \in \mathbb{N} :| (-3)^n \rangle$ è illimitata inferiormente e superiormente.

La $\left\langle n \in \mathbb{N} :\middle| 2 + \dfrac{(-1)^n}{n} \right\rangle$ è limitata inferiormente e superiormente.

I12 b.02 Una successione di elementi di uno spazio metrico $\boldsymbol{M} = \langle \mathsf{M}, \mathrm{dist} \rangle$ $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| a_n \rangle$ si dice **successione convergente** sse possiede un solo valore limite appartenente ad M. Questo valore, che denotiamo con L, si dice **limite della successione**; in tal caso si dice che la successione a **tende** o **converge** ad L per n tendente all'infinito; questa situazione si denota scrivendo

$$\lim_{n\to\infty} a_n \;=\; \lim \mathsf{a} \;=\; L \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to L \quad \text{per } n \to +\infty \;.$$

I12 b.03 Prop. Ogni successione convergente è limitata.

Dim.: Fissato un arbitrario $\delta > 0$ (ipap), si trova un intero naturale N tale che per ogni $n > N$ il valore a_n appartiene alla bolla aperta $\mathsf{ball}(L, \delta)$; i rimanenti a_0, a_1, ..., a_N, essendo in numero finito, costituiscono un insieme limitato e devono appartenere a una opportuna bolla aperta.
L'intero codominio della successione deve appartenere all'unione delle due bolle incontrate e quindi è limitato ∎

I12 b.04 Prop. Una successione $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| a_n \rangle$ appartenente a $\lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathsf{M} \rceil$ ove $\boldsymbol{M} = \langle \mathsf{M}, \mathrm{dist} \rangle$ è uno spazio metrico, è convergente sse esiste un $L \in \mathsf{M}$ tale che, scelto un cosiddetto parametro di limitazione $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ipap), si trova un intero naturale N_ϵ tale che $\forall n \geq N_\epsilon \;:\; \mathrm{dist}(L, a_n) < \epsilon$.

Dim.: Se si riscontra la situazione dell'enunciato, L è punto di accumulazione delle successione. Inoltre se vi fosse un altro punto di accumulazione L', si troverebbe un intero N' tale che per $n > N'$ sarebbe $\text{dist}(L - a_n) < \frac{\epsilon}{2}$ e $\text{dist}(L' - a_n) < \frac{\epsilon}{2}$, e quindi $\text{dist}(L, L') \leq \text{dist}(L - a_n) + \text{dist}(L' - a_n) < \epsilon$.
Ma la disuguaglianza $\text{dist}(L, L') < \epsilon$, per l'arbitrarietà di ϵ, può sussistere solo se $L' = L$.
Inoltre se la successione a possiede un unico punto di accumulazione L, per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ i componenti a_m della a tali che $\text{dist}(L, a_m) > \epsilon$ non possono avere altri punti di accumulazione e quindi sono in numero finito ∎

I12 b.05 Consideriamo una successione $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| a_n \rangle$ e una successione di proprietà $\langle n \in \mathbb{N} :| \mathcal{P}_n \rangle$ la n-esima delle quali o viene soddisfatta da a_n, oppure viene soddisfatta dalla sottosuccessione $\langle i \in \mathbb{N} :| a_{n+i} \rangle$.
Questa successione di proprietà si dice **proprietà definitivamente soddisfatta dalla successione** $\langle n \in \mathbb{N} :| a_n \rangle$ sse si trova un intero naturale N tale per cui $\mathcal{P}_n$ è soddisfatta per ogni $n \geq N$, oppure dalla sottosuccessione $\langle i \in \mathbb{N} :| a_{n+i} \rangle$.

Per esempio per la $\mathsf{a} := \langle n \in \mathbb{N} :| -1000 + n^2 \rangle$ è definitivamente soddisfatta la disuguaglianza $a_n > 0$; in tal caso si dice più precisamente che la successione a è definitivamente positiva.

Similmente si afferma che $\langle n \in \mathbb{N} :| 2^{-n} \rangle_{\mathbb{N}}$ è definitivamente minore di 10^{-K}, per un qualsiasi K reale positivo (ippag).

Inoltre è comprensibile l'affermazione che

$$\langle n \in \mathbb{N} :| 100 + (-2)^n \rangle = \langle 101, 98, 104, 92, 116, 68, 164, -28, 356, -412, 1124, -1948, ... \rangle$$

è una successione definitivamente a segni alterni.

Con questi modi di dire si possono formulare più concisamente varie proprietà delle successioni. Per esempio la b04 diventa

Prop. Una successione $\mathsf{s} = \langle n \in \mathbb{N} :| a_n \rangle$ di $\lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathsf{S} \rceil$ è convergente sse esiste un $L \in \mathsf{S}$ tale che, scelto $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, si ha definitivamente $\text{dist}(L, a_n) < \epsilon$.

I12 b.06 È opportuno prendere in considerazione una ampia gamma di esempi di limiti di successioni di numeri reali convergenti.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1 \quad , \quad \lim_{n \to +\infty} 2^{1/n} = 1 \, ,$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3\,n^2 - 2\,n + 10}{5\,n^2 - 4\,n + 1} = \frac{3}{5} \quad , \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1000\,n^3}{0.01\,n^4} = 0 \, .$$

I12 b.07 Introduciamo alcune notazioni che spesso tornano utili.

SeqNR := classe delle successioni a valori reali.

SeqNR$_+$:= classe delle successioni a valori reali positivi.

SeqNR$_{defpos}$:= classe delle successioni a valori reali definitivamente positivi.

SeqNR$_{alts}$:= classe delle successioni a valori reali con segni alternati.

SeqNR$_{conv}$:= classe delle successioni a valori reali convergenti.

SeqNC := classe delle successioni a valori complessi.

SeqNR^d := classe delle successioni a valori in $\mathbb{R}^{\times d}$.

SeqNC$_{conv}$:= classe delle successioni a valori complessi convergenti.

SeqNR$^d_{conv}$:= classe delle successioni a valori in $\mathbb{R}^{\times d}$ convergenti.

In molte considerazioni sui limiti delle successioni numeriche (e delle funzioni numeriche) può essere utile aggiungere alle definizioni delle annotazioni incise che hanno il solo scopo di aiutare la comprensione, come le seguenti:

(ipmag) = (intuitivamente presentato come in modulo arbitrariamente grande);

(ipmap) = (intuitivamente presentato come in modulo arbitrariamente piccolo).

(ipnag) = (intuitivamente presentato come negativo arbitrariamente grande);

(ipnap) = (intuitivamente presentato come negativo arbitrariamente piccolo).

(ippag) = (intuitivamente presentato come positivo arbitrariamente grande);

(ippap) = (intuitivamente presentato come positivo arbitrariamente piccolo).

I12 b.08 Data una successione di numeri reali $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$, si dice **successione che diverge a** $+\infty$ sse, fissato un qualunque reale K, per l'indice della successione si trova un valore $N = N_K$ tale che per ogni $n \in \{N, N+1, N+2, ...\}$ si ha $K < a_n$.

In tal caso si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \ = \ +\infty \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to +\infty \quad \text{per } n \to +\infty \ .$$

Questa definizione si può riscrivere in un modo più colloquiale come segue.

Una successione di numeri reali $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ si dice successione che diverge a $+\infty$ sse supera definitivamente qualunque reale $K > 0$ (ippag).

Una successione di numeri reali $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ si chiama **successione che diverge** a $-\infty$ sse le sue componenti sono definitivamente inferiori a qualunque reale K (ipnag). In tal caso si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to -\infty \quad \text{per } n \to +\infty \ .$$

Si incontra anche un terzo tipo di situazioni per le quali si parla di divergenza, senz'altro.

Una successione di numeri reali $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ si chiama **successione che diverge** a ∞ sse le sue componenti in valore assoluto sono definitivamente superiori a qualunque reale positivo K (ipnagm).

In tal caso si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to \infty \quad \text{per } n \to +\infty \ .$$

Diamo esplicitamente una definizione che evidentemente equivale alla precedente.

Una successione di numeri reali $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ si chiama **siccessione che diverge** a ∞ sse, fissato un qualunque reale positivo K, per l'indice della successione si trova un valore $N = N_K$ tale che per ogni $n \in \{N, N+1, N+2, ...\}$ si ha $a_n < -K$ oppure $K < a_n$.

Possiamo anche scrivere

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \ \text{ sse } \quad \lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty \ .$$

Quindi valgono le seguenti implicazioni:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \ .$$

I12 b.09 Conviene tenere presenti vari esempi di successioni divergenti.

Per ogni k intero positivo $\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty$. Infatti scelto un qualsiasi reale $M > 0$ (ippag) si ha $n^k > M$ per ogni $n > \sqrt[k]{M}$.

$\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. Infatti, scelto un qualsiasi $M > 0$ (ippag), si ha $3^n > M$ per ogni $n > \log_3 M$.
Più in generale per ogni numero reale $b > 1$ si ha $\lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty$.

Per ogni $b > 1$ si ha $\lim_{n\to+\infty} \log_b n = +\infty$. Infatti, scelto un qualsiasi $M > 0$ (ippag), si ha $\log_b n > M$ per ogni $n > b^M$.

Consideriamo la successione di interi

$$\mathsf{s} := \langle n \in \mathbb{N} :| n^3 - 2^n \rangle = \langle -1, -1, 4, 19, 48, 93, 152, 215, 256, 217, -24, -717, -2368, -5995, ... \rangle .$$

Si dimostra facilmente che $\lim_{n\to+\infty} n^3 - 2^n = -\infty$

In modo conciso una successione reale che tende a 0 si dice **successione reale infinitesima**.
È invece deprecabile affermare che una successione reale che tende a $+\infty$ o a $-\infty$ è una *successione infinita* .

I12 b.10 Una successione reale $a_{\mathbb{N}}$ si dice **successione reale monotona crescente** sse $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$. La collezione di tali successioni si denota con $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_< \mathbb{R} \rceil$.

Una successione reale si dice **successione reale monotona decrescente** sse $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$. La collezione di tali successioni si denota con $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_> \mathbb{R} \rceil$.

Una successione reale si dice **successione reale monotona nondecrescente** sse $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$. La collezione di tali successioni si denota con $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_\leq \mathbb{R} \rceil$.

Una successione reale si dice **successione reale monotona noncrescente** sse $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$. La collezione di tali successioni si denota con $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_\geq \mathbb{R} \rceil$.

Evidentemente $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_< \mathbb{R} \rceil \subset \lceil \mathbb{N} \longmapsto_\leq \mathbb{R} \rceil$ e $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_> \mathbb{R} \rceil \subset \lceil \mathbb{N} \longmapsto_\geq \mathbb{R} \rceil$.
Inoltre $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_< \mathbb{R} \rceil$ e $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_> \mathbb{R} \rceil$ sono insiemi disgiunti, mentre $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_\leq \mathbb{R} \rceil \cap \lceil \mathbb{N} \longmapsto_\geq \mathbb{R} \rceil$ è l'insieme delle successioni costanti.

Spesso per le situazioni precedenti si usano termini un po' diversi e in disaccordo con quelli adottati; può servire il seguente quadro di confronto tra gruppi di modi di dire.

Termine adottato	*Variante*	*Variante*
monotona crescente	monotona strettamente crescente	monotona crescente in senso stretto
monotona decrescente	monotona strettamente crescente	monotona decrescente in senso stretto
monotona nondecrescente	monotona [generalmente] crescente	monotona crescente in senso lato
monotona noncrescente	monotona [generalmente] decrescente	monotona decrescente in senso lato

Risultano utili anche le varianti delle caratterizzazioni nelle quali le disuguaglianze valgono solo per indici n superiori a un qualche valore N; in effetti risulta comodo parlare di successioni definitivamente crescenti, definitivamente decrescenti, definitivamente nondecrescenti e definitivamente noncrescenti.

I12 b.11 (1) Prop.: Consideriamo la $a_{\mathbb{N}} \in$ **SeqNR** tale che sia definitivamente $a_n \leq a_{n+1}$.
Se essa è illimitata, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$;
se essa è limitata ed $S := \sup\{n \in \mathbb{N} :| \ :| \ a_n\}$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = S$ ∎

Dalla proprietà precedente segue direttamente il seguente enunciato.

(2) Prop.: Una successione reale definitivamente nondecrescente ammette sempre come limite l'estremo superiore del suo dominio, finito o infinito ∎

Altrettanto facilmente si ottiene la seguente proprietà.

(3) Prop.: Una successione reale definitivamente noncrescente ammette sempre come limite l'estremo inferiore del suo dominio, finito o infinito ∎

In effetti il collegamento tra le due precedenti proposizioni conviene vederlo nell'ambito di uno schema organizzativo più sistematico che vedremo in c04 e che si riferisce alla cosiddetta relazione di dualità-UD.

I12 b.12 Una **successione reale unilimite**, detta anche successione reale regolare, è una successione che converge a un limite finito, oppure che diverge a $-\infty$, oppure che diverge a $+\infty$ o più genericamente che diverge a ∞.
Una successione reale che non è unilimite si dice **successione reale multilimite** o equivalentemente **successione reale oscillante** o anche successione reale irregolare.

Le quattro caratterizzazioni presentate per le successioni in a02 costituiscono alternative incompatibili.

Conviene rilevare che si possono incontrare successioni per le quali è problematica la loro assegnazione ad una delle precedenti classi che ripartiscono **FunNtR**.

I12 b.13 Per caratterizzare alcune collezioni di successioni di reali unilimite possono essere utili notazioni della forma

$$\mathbf{Seq}_{\mathbb{N},\mathbb{R}}(S) \quad \text{dove } S \text{ può denotare un qualsiasi elemento dell'insieme } \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \dot\cup \{-\infty, +\infty, \infty\} \ .$$

Quindi per ogni $S \subseteq \ RMb$ $\mathbf{Seq}_{\mathbb{N},\mathbb{R}}(S)$ individua le successioni che convergono a qualche elemento di S, $\mathbf{Seq}_{\mathbb{N},\mathbb{R}}(-\infty)$ quelle che divergono a $-\infty$, $\mathbf{Seq}_{\mathbb{N},\mathbb{R}}(+\infty)$ quelle che divergono a $+\infty$ e $\mathbf{Seq}_{\mathbb{N},\mathbb{R}}(\infty)$ le successioni che divergono a ∞.

Alla notazione precedente in molti contesti si può dare la forma più semplice $\mathbf{Seq}_{\mathbb{N}}(S)$.

Per caratterizzare alcune collezioni di successioni di elementi di uno spazio metrico $\boldsymbol{M} = \langle \mathsf{M}, \mathrm{dist} \rangle$ possono essere utili notazioni della forma

$$\mathbf{Seq}_{\mathbb{N},\boldsymbol{M}}(E) \quad \text{dove } E \text{ può denotare un qualsiasi elemento dell'insieme } \mathfrak{P}(\mathsf{M}) \ .$$

Le collezioni di tutte le successioni unilimite di reali si può denotare anche con $\lceil\!\lceil \mathbb{N} \longmapsto_{unilim} \mathbb{R} \rceil\!\rceil$. Chiari anche i significati di $\lceil\!\lceil \mathbb{N} \longmapsto_{unilim} \mathbb{R}^{\times d} \rceil\!\rceil$ e di $\lceil\!\lceil \mathbb{N} \longmapsto_{unilim} \mathsf{M} \rceil\!\rceil$.

I12 b.14 Riesaminiamo l'enunciato in b04 che chiaramente si può utilizzare come definizione di limite di successione convergente.

Data l'arbitrarietà del numero ϵ invocato, per qualsiasi fattore $\alpha \in \mathbb{R}_{nz}$ potremmo riscriverla nella seguente forma.

Una successione $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ appartenente a $\lceil\!\lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathsf{M} \rceil\!\rceil$, con $\mathsf{M} = \langle \mathsf{M}, \mathrm{dist} \rangle$ spazio metrico, è convergente sse esiste un $L \in \mathsf{M}$ tale che, scelto $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, si trova un intero naturale N_ϵ tale che $\forall n \geq N_\epsilon \ : \ \mathrm{dist}(L, a_n) < \alpha\, \epsilon$.

L'equivalenza segnalata si può anche far risalire alla libertà di scegliere per il parametro di limitazione, invece della notazione ϵ la notazione $\epsilon' := \alpha\, \epsilon$.

Considerazione analoga per l'enunciato in b08, anch'esso presentabile come proprietà o come definizione.

Data l'arbitrarietà del numero reale ositivo K invocato, per qualsiasi fattore $\alpha \in \mathbb{R}_+$ potremmo riscriverla nella seguente forma.

Una successione di numeri reali $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ si dice **successione che diverge** a $+\infty$ sse, fissato un qualunque reale positivo K, per l'indice della successione si trova un valore $N = N_K$ tale che per qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e per ogni $n \in \{N, N+1, N+2, ...\}$ si ha $\alpha\, K < a_n$.

Analoghe varianti equivalenti si possono enunciare per i casi $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$.

I12 c. limiti per difetto e per eccesso, riflessioni-UD

I12 c.01 Consideriamo la successione di reali $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ convergente al valore limite $L \in \mathbb{R}$.

La $a_{\mathbb{N}}$ si chiama **successione che converge per difetto** (o da sotto) ad L sse fissato $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, esiste $N = N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n = N, N+1, N+2, ... \ : \ L - \epsilon < a_n \leq L$.
Per rappresentare questa situazione si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L- \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to L- \quad \text{per} \quad n \to +\infty \ . \tag{1}$$

La $a_{\mathbb{N}}$ si chiama **successione che converge per eccesso** (o da sopra) ad L sse fissato $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n = N, N+1, N+2, ... \ : \ L \leq a_n < L + \epsilon$.
Per rappresentare questa situazione si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L+ \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to L+ \quad \text{per} \quad n \to +\infty \ . \tag{2}$$

Evidentemente possiamo affermare che $a_{\mathbb{N}}$ converge per difetto ad $L \in \mathbb{R}$ sse converge ad L e le sue componenti sono definitivamente minori o uguali al detto limite.

Inoltre possiamo affermare che $a_{\mathbb{N}}$ converge per eccesso ad $L \in \mathbb{R}$ sse converge ad L e le sue componenti sono definitivamente maggiori o uguali al detto limite.

Conviene prendere in considerazione vari esempi di convergenza per difetto e per eccesso.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0+ \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos[(2\,n+1)\pi]}{n} = 0- \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(2n\pi)}{n^2} = 0+ \quad .$$

I12 c.02 Per presentare in modo più compatto le proprietà delle successioni di numeri reali e, più in generale, le proprietà delle funzioni-RtR (quale che sia il loro dominio) conviene fare riferimento a due relazioni di dualità, già incontrate, che riguardano nozioni e proprietà delle suddette funzioni.

Per relazione di **dualità-UD** intendiamo la relazione tra coppie di nozioni che si scambiano in conseguenza della trasformazione nel suo opposto di un valore reale assunto da una funzione-RtR, ovvero in conseguenza del cambiamento dell'orientazione dell'asse delle ordinate Oy, e dalle trasformazioni conseguenti.

Tra i duetti di nozioni da scambiare vi sono le relazioni $<$ e $>$ tra i valori delle componenti delle funzioni (successioni) e i conseguenti scambi di svariate nozioni:

- le relazioni $\leq$ e $\geq$,
- le nozioni di funzione crescente e di funzione decrescente,
- le nozioni di minimo e massimo,
- le relazioni di minorante e maggiorante,
- le relazioni di infimo e supremo,
- le nozioni di limitatezza (o illimitatezza) inferiore e superiore;
- la convergenza per difetto e la convergenza per eccesso a un dato limite.

I12 c.03 Data una nozione (cioè una definizione o un enunciato) $\mathcal{N}$ riguardante funzioni-RtR, si dice **funzione-RtR duale-UD** della $\mathcal{N}$ la nozione ottenibile da questa effettuando sui i valori assunti dalle funzioni leseguenti trasformazioni:

- lo scambio dei valori reali con i corrispondenti opposti,
- lo scambio delle relazioni $<$ e $>$ e delle relazioni $\leq$ e $\geq$,
- lo scambio di tutte le coppie di nozioni duali derivabili dalle precedenti.

Anche di una dimostrazione si può considerare la duale-UD e quindi ottenere la dimostrazione della proprietà duale-UD di una proprietà che in precedenza si era dimostrata vera.

I12 c.04 La relazione di dualità-UD si può estendere servendosi delle traslazioni verticali del piano-RR, ossia delle trasformazioni della forma $\ulcorner y \mapsto y + h \urcorner$ con h reale qualsiasi e delle proprietà che queste trasformazioni rispettano, ovvero lasciano invariate.

Questa dualità-UD estesa riguarda l'invarianza di fronte allo scambio tra le relazioni $<$ e $>$, di fronte alla riflessione del piano delle coppie $\langle x, y\rangle$ rispetto a una opportuna retta orizzontale, retta della forma $y = h$ con $h \in \mathbb{R}_{nz}$n, e di fronte agli scambi tra i membri dei duetti di nozioni conseguenti.

Si osserva che le trasformazioni relative alla dualità-UD estesa si possono ottenere con la riflessione dei valori assunti dalle funzioni rispetto a una opportuna retta orizzontale del piano-RR, o equivalentemente con il cambiamento del segno e con una opportuna traslazione (verticale) dei valori assunti dalle funzioni.

Si osserva anche che con la dualità-UD estesa non si mantengono i valori assoluti assunti dalle funzioni. Evidentemente quindi deve essere invocata la dualità-UD non estesa quando si deve mantenere la vicinanza allo zero (o la infinitesimalità) dei valori in esame.

I12 c.05 Vediamo alcuni esempi di dualità-UD per le successioni.

Se si trova che $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n\rangle$ è crescente, la dualità-UD garantisce che $\langle n \in \mathbb{N} :| \ -a_n\rangle$ è decrescente.

Se sappiamo che $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n\rangle$ è illimitata superiormente, per dualità-UD si ottiene che $\langle n \in \mathbb{N} :| \ -a_n\rangle$ è illimitata inferiormente.

Dalla dimostrazione che il prodotto componente per componente di due successioni definitivamente positive e crescenti è definitivamente positiva e crescente, si ottiene per dualità-UD che anche il prodotto componente per componente di due successioni definitivamente negative e decrescenti è definitivamente positiva e crescente.

Segnaliamo che queste considerazioni di simmetria in seguito verranno ampliate al fine di rendere più sistematica e compatta l'analisi delle funzioni-RtR.

I12 d. successioni di Cauchy

I12 d.01 Ci ripromettiamo qui di enunciare un interessante criterio per la convergenza delle successioni le cui componenti appartengono ad uno spazio metrico $\mathbb{R}^{\times d}$ introdotto da Cauchy , lo studioso che all'inizio del 1800 ha portato avanti con notevole successo un suo programma di razionalizzazione dell'analisi infinitesimale.

Consideriamo uno spazio metrico $\boldsymbol{M} = \langle \mathsf{M}, dist \rangle$ e sia $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ una successione di $\lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathsf{M} \rceil$.

Questa a si dice **successione di Cauchy** sse, scelto un qualsiasi $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ipap), si trova un $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che per due qualsiasi interi $p, q > \overline{n}$ si ha $\mathrm{dist}(a_p, a_q) < \epsilon$.

Si osserva che questa definizione non richiede di fare riferimento a un limite L della successione, ma riguarda soltanto proprietà del complesso delle componenti della successione.

La utilità di questa definizione con meno pretese deriva dalla proprietà che segue, la quale apre la strada alla possibilità di giungere al limite della successione stesa.

I12 d.02 Teorema (**teorema di Cauchy**)
La $\mathsf{a}_{\mathbb{N}} \in \lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathsf{M} \rceil$ è una successione convergente $\iff$ a è una successione di Cauchy.

Dim.: "$\Longrightarrow$": Sia $\lim_{n\to\infty} a_n =: A$. Scelto un qualsiasi reale positivo ϵ (ipap), possiamo determinare l'intero naturale $\overline{n}$ tale che $p, q > \overline{n}$ implichi

$$\mathrm{dist}(A, a_p) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{dist}(A, a_q) < \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Di conseguenza $\mathrm{dist}(a_p, a_q) \leq \mathrm{dist}(A, a_p) + \mathrm{dist}(A, a_q) \leq \epsilon$, e quindi la a è una successione di Cauchy.

"$\Longleftarrow$": Scelto un reale positivo ϵ, si trova un intero naturale $\overline{n}$ tale che per ogni intero $p > \overline{n} + 1$ si abbia $\mathrm{dist}(a_{\overline{n}+1}, a_p) < \epsilon$; dunque tutti i componenti della a che vengono dopo $a_{\overline{n}}$ appartengono alla bolla $\mathsf{ball}(a_{\overline{n}+1}, \epsilon)$.
La successione a quindi è limitata e tutti i suoi punti di accumulazione, la cui esistenza è assicurata dal teorema di Bolzano-Weierstrass, appartengono alla suddetta bolla. Per l'arbitrarietà del raggio ϵ della bolla la successione può avere un solo punto di accumulazione ∎

I12 d.03 Come abbiamo osservato il teorema di Cauchy apre la possibilità di stabilire che una serie è convergente senza richiedere la conoscenza del suo limite.

Esso quindi consente di affrontare l'esame della convergenza di una successione di componenti reali con un procedimento graduale. Inizialmente si stabilisce che la successione è convergente; successivamente, avvalendosi se necessario della constatata convergenza, si cerca di individuare il limite o almeno di ottenere una buona valutazione della bolla nella quale il limite deve trovarsi; migliori valutazioni approssimate potrebbero ottenersi con ulteriori indagini.

I12 d.04 Uno spazio metrico si dice **spazio metrico completo** sse ogni sua successione di Cauchy possiede un punto di accumulazione facente parte dello stesso spazio.

Abbiamo trovato che l'insieme dei reali $\mathbb{R}$ e più in generale che gli spazi $\mathbb{R}^{\times d}$ sono spazi completi.

Si incontrano invece ambienti, in particolare insiemi di funzioni e insiemi di trasformazioni, dei quali risulta utile esaminare caratteristiche geometriche (come ortogonalità e parallelismo) e che quindi si è idotti a qualificare come "spazi", ambienti nei quali è problematico stabilire se siano spazi completi.

Quindi un enunciato equivalente a quello in d02 è il seguente

Prop. Uno spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ è uno spazio metrico completo.

I12 d.05 Un semplice esempio di spazio metrico non completo è fornito da $\mathbb{Q}$ munito della distanza $\left\lceil \langle q, r\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \mapsto |q-r| \right\rceil$. Infatti si conoscono numerose successioni di razionali che in $\left\lceil \mathbb{N}\longmapsto\mathbb{R} \right\rceil$ convergono a un reale non razionale: in particolare questo si riscontra con le successioni che convergono a $\sqrt{2}$ o in generale a un numero della forma $\sqrt{k}$ con $k \in \left(\mathbb{P}\setminus\{n\in\mathbb{P} :| n^2\}\right)$, con le successioni che convergono ad e e quelle che convergono a π.

Altri spazi metrici non completi sono gli spazi $\mathbb{Q}^{\times d}$, spazi delle d-uple di razionali muniti, ad esempio, della distanza pitagorica:

$$\left\lceil \left\langle \langle q_1, ..., q_d\rangle, \langle r_1, ..., r_d\rangle \right\rangle \in \mathbb{Q}^{\times d}\times\mathbb{Q}^{\times d} \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(q_i - r_1)^2} \right\rceil \ .$$

Uno spazio metrico $\boldsymbol{M} = \langle \mathsf{M}, \mathrm{dist}\rangle$ si dice **spazio metrico separabile** sse contiene una successione che viene detta **successione base dello spazio metrico** tale che ad ogni punto $\mathsf{r} \in \mathsf{M}$ si può associare una successione estratta dalla base la quale converge ad r.

$\mathbb{R}$ è uno spazio separabile: come sua base si può assumere qualsiasi sequenzializzazione di $\mathbb{Q}$: in effetti i numeri reali possono essere definiti anche come limiti di opportune successioni di razionali.

Anche gli spazi $\mathbb{Q}^{\times d}$ sono separabili e come loro base si può assumere una qualsiasi sequenzializzazione delle d-uple di razionali. Va segnalato che esistono anche spazi metrici nonseparabili.

I12 e. limiti di composizioni di successioni

I12 e.01 Entità matematiche di rilevante importanza sono le cosiddette **costanti matematiche**. Questo termine si usa per individuare numeri reali costruibili i cui valori non sono facilmente individuabili e che hanno ruoli di rilievo in vari tipi di argomentazioni [W10].

Classiche costanti matematiche sono π, il numero e che introduciamo in :f e la costante di Euler-Mascheroni.

Di molte costanti matematiche si possono dare diverse definizioni che si dimostrano equivalenti; questo genere di ridondanza in genere è molto vantaggiosa per molti problemi.
Infatti due diverse definizioni di una costante matematica possono essere utilizzate in alternativa o congiuntamente per ottenere più agevolmente le proprietà di tale numero.
Questo genere di ridondanza risulta vantaggioso in particolare per lo studio delle curve speciali [G70] e delle funzioni speciali [W60d].

Molte costanti matematiche si possono definire come limiti di successioni le cui componenti sono dati da espressioni razionali di numeri interi, di numeri razionali e di altre costanti matematiche precedentemente definite.

Una successione che si sappia convergere a un numero razionale non viene considerata una costante matematica, in quanto è esprimibile con una semplice frazione.

Per le costanti individuabili come limiti di successioni non facilmente analizzabili si pone il problema della determinazione di suoi valori approssimati.

In effetti molte costanti matematiche sono state e spesso tuttora sono oggetto di indagini che oltre al loro valore numerico, possono concernere loro caratterizzazioni generali come la razionalità, la algebricità o la trascendenza.

I12 e.02 Nel seguito considereremo due successioni di reali $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ e $\mathsf{b} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ convergenti; spesso decideremo che si abbia $\lim_{n\to+\infty} a_n =: A$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n =: B$.

Si dice **somma componente per componente di due successioni** a e b la successione $\mathsf{a}+\mathsf{b} := \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n + b_n \rangle$.

(1) Prop.: Se $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ è convergente ad A e $\langle n \in \mathbb{N} :| \ b_n \rangle$ è convergente a B, allora è convergente anche la loro somma componente per componente e si ha $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = A + B$ ∎

(2) Prop.: Se $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ è convergente ad A, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{n\to+\infty} (\alpha\, a_n) = \alpha\, A$ ∎

(3) Prop.: Se $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ è convergente ad A e $\langle n \in \mathbb{N} :| \ b_n \rangle$ è convergente a B, allora $\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = A - B$ ∎

(4) Prop.: Se $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ è convergente ad A e $\langle n \in \mathbb{N} :| \ b_n \rangle$ è convergente a B, allora per qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{n\to+\infty} (\alpha\, a_n + \beta\, b_n) = \alpha\, A + \beta\, B$ ∎

A questo punto possiamo affermare che l'insieme delle successioni di numeri reali convergenti costituisce uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali e che il passaggio al limite per gli elementi (vettori) di questo spazio è un operatore lineare avente come codominio lo spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ avente come terreno lo stesso $\mathbb{R}$.

I12 e.03 Si dice prodotto componente per componente (o prodotto di Hurwitz) di due successioni di reali $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ e $\langle n \in \mathbb{N} :| \ ba_n \rangle$ la successione $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \cdot b_n \rangle$.

(5) Prop.: Se $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ è convergente ad A e $\langle n \in \mathbb{N} :| \ b_n \rangle$ è convergente a B, allora $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ ∎

(6) Prop.: Se $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ è convergente ad A e $\langle n \in \mathbb{N} :| \ b_n \rangle$ è convergente a B e se inoltre tutti i b_n e B sono diversi da 0, allora $\left\langle n \in \mathbb{N} :\middle| \ \frac{a_n}{b_n} \right\rangle$ è convergente e $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ ∎

I12 e.04 (7) Prop.: Se $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ è convergente ad A e $\langle n \in \mathbb{N} :| \ b_n \rangle$ è convergente a B e se inoltre tutti gli a_n e A sono maggiori di 0, allora $\langle n \in \mathbb{N} :| \ {a_n}^{b_n} \rangle$ è convergente e $\lim_{n\to+\infty} {a_n}^{b_n} = A^B$ ∎

(8) Prop.: Se $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ è convergente ad A e $\langle n \in \mathbb{N} :| \ b_n \rangle$ è convergente a B e se inoltre A è un reale positivo diverso da 1 e tutti i b_n sono maggiori di 0, allora $\langle n \in \mathbb{N} :| \ \log_{a_n} b_n \rangle$ è convergente e $\lim_{n\to+\infty} \log_{a_n} b_n = \log_A B$ ∎

I12 e.05 Prop. L'operazione di passaggio al limite mantiene l'ordinamento dei numeri reali, cioè se esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N} + \overline{n} \ : \ a_n \le b_n$, se $\lim_{n\to+\infty} a_n =: A$ e se $\lim_{n\to+\infty} b_n =: B$, allora $A \le B$.

Dim.: Se fosse $B < A$, preso $\epsilon := \frac{A-B}{2}$, si troverebbe un $\overline{n}$ tale che per ogni $n \in [\overline{n} : +\infty)$ si avrebbe $b_n < B + \epsilon = A - \epsilon < a_n$, contro l'ipotesi $a_n \le b_n$ ∎

Va osservato che vi sono duetti di successioni $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ e $\mathsf{b} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ b_n \rangle$ tali che si ha definitivamente $a_n < b_n$ le quali convergono allo stesso limite. Vediamo alcuni semplici esempi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad , \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{10}{n}\right) = 2 \qquad ,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(A + \frac{1}{n^2+\pi}\right) = A + \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} n^2+\pi} = A = \lim_{n\to+\infty} \left(A + \frac{1}{n+3}\right) = A + \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} n+3} \ .$$

I12 e.06 Consideriamo le due successioni di reali $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ e $\mathsf{b} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$; siano inoltre m ed M numeri reali positivi.

Prop. (a) Se a è limitata inferiormente e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, allora $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.

(b) Se a è limitata superiormente e $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, allora $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = -\infty$.

(c) Se definitivamente $0 < m < a_n$ per qualche $m \in \mathbb{R}_+$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$,
allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$.

(d) Se definitivamente $0 < m < a_n$ per qualche $m \in \mathbb{R}_+$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$,
allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = -\infty$.

(e) Se definitivamente $0 < m < a_n$ per qualche $m \in \mathbb{R}_+$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \infty$,
allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = \infty$.

(f) Se definitivamente $|a_n| < M$ per qualche $M \in \mathbb{R}_+$, se definitivamente $b_n > 0$ e se $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$,
allora $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = 0$.

(g) Se definitivamente $1 < m \le a_n$ per qualche $m \in \mathbb{R}_+$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$,
allora $\lim_{n\to+\infty} {a_n}^{b_n} = +\infty$.

(h) Se si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, se si ha definitivamente $a_n > 0$ e se si ha definitivamente $0 < m \le b_n$ per qualche $m \in \mathbb{R}_+$, allora $\lim_{n\to+\infty} {a_n}^{b_n} = 0$.

(i) Se si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, se si ha definitivamente $a_n > 0$ e se si ha definitivamente $0 < b_n \leq M$ per qualche $M \in \mathbb{R}_+$, allora $\lim_{n\to+\infty} {a_n}^{b_n} = +\infty$.

I12 e.07 Vi sono coppie di successioni con determinate proprietà di convergenza che non consentono di trarre conclusioni sul comportamento di alcune loro composizioni.

Per tenere sotto controllo queste composizioni di successioni di numeri reali si introducono alcune cosiddette **classi di forme indeterminate di funzioni-NtR**.

Sulla sola base degli enunciati $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, si dice che la successione $\langle n \in \mathbb{N} :| a_n - b_n \rangle$ ha la forma indeterminata " $[\infty - \infty]$ ".

Sulla sola base degli enunciati $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$, $\forall n \in \mathbb{N} \vdots b_n \neq 0$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \infty$, si dice che la successione $\left\langle n \in \mathbb{N} :\middle| \frac{a_n}{b_n} \right\rangle$ ha la forma indeterminata " $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ".

Sulla sola base degli enunciati $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \infty$, si dice che $\langle n \in \mathbb{N} :| a_n \cdot b_n \rangle$ ha la forma indeterminata " $[0 \cdot \infty]$ ".

Sulla sola base degli enunciati $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, si dice che la successione $\langle n \in \mathbb{N} :| {a_n}^{b_n} \rangle$ ha la forma indeterminata " $[0^0]$ ".

Sulla sola base degli enunciati $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, si dice che la successione $\langle n \in \mathbb{N} :| {a_n}^{b_n} \rangle$ ha la forma indeterminata " ∞^0 ".

Sulla sola base degli enunciati $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \infty$, si dice che la successione $\langle n \in \mathbb{N} :| {a_n}^{b_n} \rangle$ ha la forma indeterminata " $[1^\infty]$ ".

I12 e.08 Bisogna osservare che attribuire una composizione di due successioni reali C(a,b) a una forma indeterminata non vuole enunciare una indeterminatezza intrinseca della caratterizzazione di convergenza di tale composizione, ma solo l'impossibilità di decidere tale caratterizzazione sulla sola base delle caratterizzazioni di convergenza della a e della b.

Per queste composizioni si rende necessario un esame specifico; ad un certo punto di una di queste analisi potrà essere raggiunto un sufficiente livello di chiarimento, oppure potrà accadere che gli esami svolti risultino insufficienti.

Nei casi in cui si riesca a stabilire che la composizione converge ad un certo limite L si possono dare quattro tipi di situazioni.

(1) Opportune analisi conducono a una valutazione numerica per L ben controllabile, cioè a un numero ottenibile a partire da numeri noti e ben controllabili con meccanismi dominabili (espressioni chiuse o algoritmi il cui comportamento è sufficientemente prevedibile).

(2) Le analisi che si sono sviluppate hanno condotto solo a un algoritmo che consente di procedere a valutazioni di L precise quanto si vuole (le quali richiedono di impiegare risorse computazionali più o meno valutabili e più o meno elevate) sui collegamenti con altri numeri noti. Queste valutazioni richiederanno di impiegare risorse computazionali il cui costo in certe circostanze dovrà essere giudicato in relazione al valore attribuito ai risultati ottenibili.

(3) Nel caso non si siano trovate valutazioni accurate si può dire che la successione individua attraverso il suo limite (sicuramente esistente e unico) una nuova costante matematica e per essa rimane aperto il problema di ottenere valutazioni approssimate il più possibile accurate.

(4) Le analisi che si sono sapute sviluppare hanno condotto solo a valutazioni del valore di L di precisione limitata, valutazioni che in genere consistono nella determinazione di un intervallo al quale L deve appartenere, ovvero una coppia di disuguaglianze della forma $L_1 < L < L_2$. In questo caso non si sanno stabilire collegamenti con numeri noti e può accadere che studi più approfonditi portino a limitazioni migliori, cioè a disuguaglianze $L'_1 < L < L'_2$ con $L_1 < L'_1$ e $L'_2 < L_2$; un tale miglioramento potrebbe risultare significativo per la conoscenza generale e utile per ulteriori calcoli approssimati.

(5) Si danno poi casi nei quali non si è riusciti a decidere se la composizione C(a,b) fornisce una successione convergente o meno. In questi casi talora si riescono a escludere talune possibilità, ma non altre: a es. si potrebbe escludere l'esistenza dipiù valori limite, ma non si saprebbe decidere tra convergenza e divergenza.

I12 e.09 Consideriamo il passaggio da una successione b a una sua sottosuccessione illimitata a. Oltre a quanto dimostrato in a07(1) si possono mostrare facilmente alcuni risultati più precisi.

(1) Prop.: $\lim_{n\to+\infty} b_n = L\pm \quad \text{con} \quad L\in\mathbb{R} \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = L\pm$ ∎

(2) Prop.: $\lim_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$ ∎

(3) Prop.: $\lim_{n\to+\infty} b_n = \infty \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$ ∎

I12 f. numero e come limite di successioni

I12 f.01 Consideriamo la successione numerica

$$\mathbf{e} := \langle n \in \mathbb{P} :| \ e_n \rangle \quad \text{dove} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \ e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ . \tag{1}$$

Si tratta di una successione che si può attribuire alla forma indeterminata $\{1^\infty\}$ e che dimostreremo essere convergente.
Il suo limite riveste grandissima importanza per l'analisi infinitesimale; in particolare esso costituisce la base dei cosiddetti logaritmi naturali o neperiani e viene chiamato **costante di Napier** o anche costante di Eulero.

Per stabilire la sua caratterizzazione di convergenza e per determinare il suo eventuale limite sono state sviluppate considerazioni specifiche che rivestono importanza storica.
Inoltre si dimostra che esso è un numero irrazionale trascendente.

I12 f.02 Accanto alla **e** conviene esaminare la successione

$$\mathbf{f} := \langle n \in \mathbb{P} :| \ f_n \rangle \quad \text{dove} \quad f_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \ . \tag{1}$$

Evidentemente $\forall n \in \mathbb{P} : \ e_n < f_n$.
Per i primi valori delle due successione si trova
$e_1 = 2$, $e_2 = 9/4 = 2.25 > 2$, $e_3 = 64/27 = 2.\overline{370} > e_2$, $e_4 = \dfrac{625}{256} = 2.441... > e_3$;
$f_1 = 2^2 = 4$, $f_2 = \dfrac{27}{8} = 3.375 < 4$, $f_3 = \dfrac{256}{81} = 3.\overline{160493827} < f_2$, $f_4 = \dfrac{3125}{1024} = 3.0518... < f_3$.
In effetti possiamo dimostrare che la prima successione è crescente e la seconda decrescente.

(1) Prop.: La successione **f** è decrescente.

Dim.: Per $n = 2, 3, ...$ consideriamo il rapporto

$$\begin{aligned} \frac{f_n}{f_{n-1}} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) : \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n ; \end{aligned}$$

dato che $\alpha > 0 \Longrightarrow (1+\alpha)n > 1 + n\alpha$, si ha $\left(1 + \dfrac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \dfrac{n}{n^2-1} > 1 + \dfrac{n}{n^2} = 1 + \dfrac{1}{n}$;
Se ne conclude che $\dfrac{f_n}{f_{n-1}} < 1$, cioè l'asserto ∎

(2) Prop.: La successione **e** è crescente.

Dim.: Per $n = 2, 3, ...$ consideriamo il rapporto

$$\frac{e_n}{e_{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n : \left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n : \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ .$$

Dimostriamo ora per induzione che per $n = 2, 3, ...$ e $-1 < \beta < 0$ vale la disuguaglianza $1 + n\beta < (1+\beta)^n$: infatti $(1+\beta)^2 = 1 + 2\beta + \beta^2 > 1 + 2\beta$ e, assunta la disuguaglianza vera per un generico $n \geq 2$, dato che $1 + \beta > 1$, si trova $(1+\beta)^{n+1} > (1+n\beta)(1+\beta) = 1 + (n+1)\beta + \beta^2 > 1 + (n+1)\beta$ e la disuguaglianza risulta dimostrata.

Ne consegue in particolare $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-\frac{n}{n^2} = 1-\frac{1}{n}$ e in conclusione

$$\frac{e_n}{e_{n-1}} > \left(1-\frac{1}{n}\right) : \left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ , cioè l'asserto } \blacksquare$$

(3) Prop.: Il rapporto $\frac{e_n}{f_n}$ tende a 1 dal basso, o equivalentemente $\lim_{n\to+\infty} f_n - e_n = 0+$.

Dim.: Dalle definizioni segue $0 < f_n - e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{f_n}{n+1}$.

Dato che $f_1 > f_2 > f_3 > ...$, abbiamo che la $\langle n \in \mathbb{P} :| \ f_n - e_n \rangle$ è una successione a termini positivi minorante della $\left\langle n \in \mathbb{P} :\middle| \ \frac{f_1}{n+1} \right\rangle$ e quindi, come questa, tende a zero da sopra $\blacksquare$

I12 f.03 Le conclusioni precedenti consentono di affermare che la successione $\langle n \in \mathbb{P} :| \ (e_n, f_n) \rangle$ costituisce una successione di intervalli annidati aperti convergente [B37b02].

Quindi le due successioni **e** ed **f** costituiscono una coppia di successioni monotone in senso stretto che convergono ad uno stesso numero reale che denotiamo con `e` per il quale

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{P} \ : \ e_n < \mathtt{e} < f_n \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} e_n = \mathtt{e}- \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} f_n = \mathtt{e}+ \ .$$

Esso viene detto **costante di Napier** o anche costante di Euler [v.a. `e (costante matematica) (wi)`].

Dalla $e_n < \mathtt{e} < f_n$ e dalle valutazioni numeriche in f02 abbiamo ricavato $2.441... < e < 3.0517578....$

La convergenza delle successioni **e** ed **f** garantisce la possibilità di ottenere approssimazioni di `e` con scarti piccoli quanto si vuole e per i loro termini finora abbiamo le seguenti maggiorazioni degli errori:

$$(2) \qquad \mathtt{e} - e_n, f_n - \mathtt{e} \ < \ f_n - e_n \ = \ \frac{f_n}{n+1} \ < \ \frac{4}{n+1} \ .$$

Si tratta però di disuguaglianze ben poco stringenti e le due successioni utilizzate per la definizione risultano assai poco efficienti per il calcolo effettivo di buone approssimazioni di e.

Per queste sono necessarie considerazioni più elaborate, ossia rimaneggiamenti sofisticati delle successioni della definizione che conducano a procedimenti implementabili in qualche linguaggio di programmazione procedurale.

In effetti i procedimenti accennati forniscono approssimazioni spinte come la seguente:

$$(3) \qquad \mathtt{e} = 2.71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\,66249\,77572\,47093\,69995\,95749\ .....$$

I12 f.04 Le considerazioni precedenti consentono di affermare che la costante `e` è un numero reale costruibile; in effetti la valutazione numerica precedente è stata ottenuta con procedimenti algoritmici che hanno richiesto un onere computazionale non trascurabile.

Più in generale per ogni successione convergente i cui componenti sono numeri reali costruibili si può individuare un procedimento in grado di fornire il valore del suo limite con tutta la precisione che viene richiesta.

In generale le successioni convergenti aventi componenti costruibili costituiscono un importante tipo di strumento per la determinazione di numeri reali costruibili "nuovi", cioè non ancora incontrati in precedenza, o apparentemente nuovi, cioè già emersi in precedenti sviluppi matematici ma non riconosciuti coincidenti.

Le successioni convergenti costruibili possono anche fornire nuovi strumenti di calcolo e di indagine su numeri costruibili già individuati con altri mezzi, strumenti che possono presentare caratteristiche vantaggiose. Come vedremo questo è il caso del numero π [B42d02].

I12 f.05 Il numero e si può ottenere come limite di molte successioni che si possono considerare varianti aperte delle due della definizione. Consideriamo per questo una successione alla quale in generale chiediamo che abbia componenti diverse da 0 e che sia divergente

$$(1) \qquad \mathbf{d} := \langle n \in \mathbb{N} :| \ d_n \rangle \quad \text{con} \quad d_n \in \mathbb{R}_{nz} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} d_n = \infty \quad \text{ossia} \quad \lim_{n\to+\infty} |d_n| = +\infty \ .$$

(1) Prop.: Per ogni $\mathbf{d}_{\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty$ si ha $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{d_n}\right)^{d_n} = \mathsf{e}$.

Dim.: La successione $\mathbf{d}$ deve avere componenti definitivamente positive e quindi per un opportuno $\overline{n} \in \mathbb{N}$ si ha

$$\forall n = \overline{n}, \overline{n}+1, \overline{n}+2, ... \ : \ d_n > 1 \ .$$

Proseguiamo considerando solo questi n.
Se scriviamo $m_n := \lfloor d_n \rfloor$, è lecito considerare le frazioni $\frac{1}{m_n}$ e, dato che $m_n \le d_n < m_n + 1$, si ha

$$1+\frac{1}{m_n+1} < 1+\frac{1}{d_n} \qquad , \qquad \left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n} < \left(1+\frac{1}{d_n}\right)^{m_n} < \left(1+\frac{1}{d_n}\right)^{d_n} \ .$$

Dato che $\left(1+\frac{1}{d_n}\right)^{d_n} < \left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{d_n} < \left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n+1}$, abbiamo la doppia limitazione

$$(*) \qquad \left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n} < \left(1+\frac{1}{d_n}\right)^{d_n} < \left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n+1} \ .$$

Dato che la $\left\langle n \in [N,+\infty) :\middle|\ \left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n+1} \right\rangle$ è una sottosuccessione della $\mathbf{f}$ di f02, abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n+1} = \mathsf{e}+ \ .$$

Valutiamo ora il limite della successione delle limitazioni a sinistra nella $(*)$ osservando una sottosuccessione della e di f01 e ricordando il limite di quest'ultima.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n+1} : \left(1+\frac{1}{m_n+1}\right) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n+1} : \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{m_n+1}\right) = \mathsf{e}\cdot 1 = \mathsf{e} \ .$$

La proprietà di spremitura conduce infine all'asserto ∎

I12 f.06 Consideriamo ora i casi della successione D decrescente e decrescente in modulo.

(1) Prop.: $\lim_{n\to+\infty} d_n = -\infty \implies \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{d_n}\right)^{d_n} = \mathsf{e}$.

Dim.: Per semplicità consideriamo che tutte le componenti d_n siano inferiori a -1 e riferiamo la $\mathbf{d}$ alla sua opposta $\langle -d_0, -d_1, -d_2, ..., -d_n, ... \rangle$. Abbiamo allora

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{d_n}\right)^{d_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{c_n}\right)^{-c_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{c_n}{c_n-1}\right)^{c_n} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{c_n-1}\right)^{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{c_n-1}\right)^{c_n-1} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{c_n-1}\right) = \mathsf{e}\cdot 1 = \mathsf{e} \ ∎$$

(3) Prop.: $\lim_{n\to+\infty} d_n = \infty \implies \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{d_n}\right)^{d_n} = e$.

Dim.: Dalla **d** estraiamo le due sottosuccessioni ottenute, risp., trascurando le componenti positive e trascurando le componenti negative. Se una delle due sottosuccessioni è costituita solo da un numero finito di componenti è sufficiente considerare l'altra, sicuramente con infinite componenti e che il suo limite sia **e** è stato dimostrato sopra.
Nel caso entrambe le sottosuccessioni siano illimitte abbiamo che entrambe hanno un unico valore limite, il numero **e** , e quindi la successione data è unilimite ∎

I12 f.07 Altre varianti della successione $\left\langle n\in\mathbb{P} : \left| 1+\frac{1}{n} \right.\right\rangle$ presentano limiti molto importanti per l'analisi infinitesimale.

(1) Prop.: Se ξ è un numero reale qualunque, $d_{\mathbb{P}}$ è una successione a termini diversi da 0 divergente, e per ogni $n\in\mathbb{N}$ si ha $1+\frac{\xi}{d_n} > 0$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\xi}{d_n}\right)^{d_n} = \mathsf{e}^{\xi} .$$

Dim.: L'enunciato è evidentemente vero per $\xi = 0$. Se invece $\xi \neq 0$ abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\xi}{d_n}\right)^{d_n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{d_n/\xi}\right)^{d_n/\xi}\right]^{\xi} .$$

Dato che la successione $\left\langle n\in\mathbb{N} : \left| \frac{d_n}{\xi} \right.\right\rangle$ è divergente, in forza di f05 e f06, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{\xi}{d_n}\right)^{d_n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{d_n/\xi}\right)^{d_n/\xi}\right]^{\xi} = \mathsf{e}^{\xi} ∎$$

I12 f.08 (1) Prop.: Se $\eta_{\mathbb{P}}$ è una successione di reali diversi da 0 infinitesima, allora si ha il seguente limite di successione

$$\lim_{n\to+\infty} (1+\eta_n)^{1/\eta_n} = \mathsf{e} .$$

Dim.: Introduciamo la successione le cui componenti sono i reali positivi $\sigma_n := \frac{1}{n}$: evidentemente la successione è infinitesima, cioè $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = 0+$. Sostituendo gli n nella relazione $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ del paragrafo precedente si ottiene $\lim_{\sigma_n\to 0} (1+\sigma_n)^{1/\sigma_n} = e$.
Questa dice che per qualunque $\epsilon\in\mathbb{R}_+$ si trova $\overline{n}$ tale che $n\geq\overline{n} \implies \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \epsilon$.
La convergenza a 0+ della $\eta_{\mathbb{N}}$ garantisce l'esistenza di un intero positivo K tale che $k\geq K \Longrightarrow \eta_k < \sigma_N$.
Per tali k abbiamo $\left|\left(1+\frac{1}{\eta_k}\right)^k - e\right| < \epsilon$ e questo conduce all'asserto ∎

(2) Prop.: Se $\eta_{\mathbb{P}}$ è una successione di reali diversi da 0 infinitesima e B un numero reale positivo diverso da 1, allora si hanno i seguenti limiti di successioni

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\eta_n)}{\eta_n} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_B(1+\eta_n)}{\eta_n} = \frac{1}{\ln B} = \log_B e .$$

Dim.: Trasformando i due membri della (1) nei rispettivi logaritmi naturali si ottiene la prima uguaglianza.
Passando più in generale ai logaritmi in una qualsiasi base B si giunge alla seconda ∎

I12 f.09 (1) Prop.: Se $\eta_{\mathbb{P}}$ è una successione di reali diversi da 0 infinitesima e B un numero reale positivo, allora la successione converge e si ha il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{B^{\eta_n}-1}{\eta_n} \;=\; \ln B \;.$$

Dim.: Riprendiamo la f08(1) e introduciamo la successione i cui componenti sono dati da $\rho_n := \dfrac{\ln(1+\eta_n}{\eta_n} - 1$. Anch'essa è infinitesima e si ha $\ln(1+\eta_n) \;=\; \eta_n(1+\rho_n)$; di conseguenza $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+\eta_n) = 0$.

Introduciamo ora un qualsiasi $B \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ ed una successione $\theta_{\mathbb{N}}$ con $\theta_n := \dfrac{\ln(1+\eta_n)}{\ln B}$.
Si osserva che $1+\eta_n = B^{\eta_n}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = 0$. La prima uguaglianza di f08(2) diventa quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\theta_n \ln B}{B^{\theta_n}-1} = 1 \qquad \text{e implica} \qquad \ln B \lim_{n\to+\infty} \frac{\theta_n}{B^{\theta_n}-1} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\theta_n}{B^{\theta_n}-1} = \frac{1}{\ln B}$$

e di conseguenza l'asserto ∎

(2) Prop.: Se $\delta_{\mathbb{P}}$ è una successione di reali diversi da 0 infinitesima e ξ un numero reale qualunque, allora si ha il seguente limite di successione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\delta_n)^{\xi}-1}{\delta_n} = \xi \;.$$

Dim.: Riprendiamo la f08(1) e introduciamo i valori $\alpha_n := (1+\delta_n)^{1/\xi} - 1$.
Per essi abbiamo $1+\alpha_n \;=\; (1+\delta_n)^{1/\xi}$ e $1+\eta_n \;=\; (1+\alpha_n)^{\xi}$.
Anche la $\alpha_{\mathbb{N}}$ è una successione infinitesima, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, e dalla f08(1) si ricavano le uguaglianze

$$\lim_{n\to+\infty} \xi \frac{\ln(1+\alpha_n)}{(1+\alpha_n)\xi - 1} \;=\; 1 \qquad \text{e la conseguente} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\alpha_n)^{\xi}-1}{\ln(1+\alpha_n)} = \xi \;.$$

Osservando che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\alpha_n)^{\xi}-1}{\alpha_n} \;=\; \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\alpha_n)^{\xi}-1}{\ln(1+\alpha_n)} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n} \;=\; \xi \;,$$

si ottiene l'asserto ∎

I12 g. successioni infinitesime, criteri di convergenza

I12 g.01 Le successioni di valori reali (o complessi) che convergono a 0, cioè le successioni infinitesime, rivestono grande importanza, soprattutto in quanto vengono usate spesso nell'analisi delle serie numeriche, entità assai importanti che vengono introdotte nel capitolo I13.
Le successioni infinitesime talora vengono chiamate semplicemente "gli infinitesimi".

È importante stabilire se una data successione è infinitesima; per questo sono stati precisati vari criteri, cioè alcune condizioni sufficienti che in molte circostanze possono essere verificate piuttosto agevolmente.

I12 g.02 Prop. (**criterio del confronto**) Consideriamo due successioni reali (o complesse) $\mathsf{a} = a_{\mathbb{N}}$ e $\mathsf{b} = b_{\mathbb{N}}$. Se definitivamente $|a_n| \le |b_n|$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, allora anche $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dim.: Segue subito dalle definizioni ∎

I12 g.03 (1) Prop.: (**criterio della radice**) Se esiste $\rho \in (0,1)$ tale che la successione $\left\langle n \in \mathbb{N} : \left| \sqrt[n]{|a_n|} \right\rangle \right.$ è definitivamente minore di ρ, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dim.: Per ogni n sufficientemente elevato si ha $|a_n| \le \rho^n$; la successione $\langle niNppp\rho^n \rangle$, essendo $\rho < 1$, è infinitesima e per il criterio del confronto g02, segue l'asserto ∎

(2) Prop.: Se in particolare esiste $L \in (0,1)$ tale che $\lim_{n\to+\infty} \left\langle n \in \mathbb{N} : \left| \sqrt[n]{|a_n|} \right\rangle \right. = L$,
allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dim.: Scelto un qualunque reale $\rho \in (L,1)$, l'ipotesi implica che la successione $\left\langle n \in \mathbb{N} : \left| \sqrt[n]{|a_n|} \right\rangle_{\mathbb{N}} \right.$ è definitivamente minore di ρ e quindi che è applicabile il criterio della (1) ∎

I12 g.04 (1) Prop.: (**criterio del rapporto**) Se esiste $\rho \in (0,1)$ tale che la successione dei moduli di rapporti tra valori successivi $\left\langle n \in \mathbb{N} : \left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right\rangle \right.$ è definitivamente minore di ρ, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dim.: Consideriamo la successione $\langle n \in \mathbb{N} : |a_n| \rangle$; esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che valgono le seguenti disuguaglianze:

$|a_{\overline{n}+1}| < \rho\,|a_{\overline{n}}|$,
$|a_{\overline{n}+2}| < \rho\,|a_{\overline{n}+1}| < \rho^2\,|a_{\overline{n}}|$,
. . . . . .
$|a_{\overline{n}+k}| < \rho\,|a_{\overline{n}+k-1}| < \rho^k\,|a_{\overline{n}}|$,
. . . . . .

Quindi la $\lfloor \forall k \in \mathbb{P} : |a_{\overline{n}+k}| < \rho^k\,|a_{\overline{n}}| \rfloor$ implica $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ e di conseguenza $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ ∎

(2) Prop.: Se in particolare esiste $L \in (0,1)$ tale che $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dim.: Scelto un qualunque reale $\rho \in (L,1)$, l'ipotesi implica che la successione $\left\langle n \in \mathbb{N} : \left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right\rangle \right.$ è definitivamente minore di ρ, ovvero che è applicabile il criterio della proposizione (1) ∎

I12 g.05 I criteri precedenti possono essere trasformati in criteri analoghi validi per le successioni di numeri reali divergenti: infatti la condizione $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ implica $a_{\mathbb{N}} \in \mathsf{SeqNR}_{defpos}$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

I12 g.06 Ricaviamo alcune conseguenze dei precedenti criteri.

(1) Prop.: Per qualsiasi $\gamma \in \mathbb{R}$ si ha: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^\gamma}{\mathsf{e}^n} = 0$.

Dim.: Basta applicare il criterio del rapporto:

$$\frac{(n+1)^\gamma}{\mathsf{e}^{n+1}} : \frac{n^\gamma}{\mathsf{e}^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\gamma \cdot \frac{1}{\mathsf{e}} \quad \text{che per } n \text{ tendente a } +\infty \text{ tende a } \frac{1}{\mathsf{e}} < 1 \quad \blacksquare$$

(2) Coroll.: Per qualsiasi $\gamma \in \mathbb{R}$ si ha: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\gamma}{n} = 0$.

Dim.: Posto $\lambda := \ln n$, da cui $n = \mathsf{e}^\lambda$, la successione si riduce a quella di (1) e l'asserto segue dalla constatazione che $\lambda \to +\infty \iff n \to +\infty$ ∎

I12 g.07 Consideriamo una successione $\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle$ divergente a $+\infty$ e ricaviamo due generalizzazioni delle relazioni precedenti.

(1) Prop.: Per un qualsiasi $\gamma \in \mathbb{R}$ si ha: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{{a_n}^\gamma}{\mathsf{e}^{a_n} n} = 0$.

Dim.: Accanto agli a_n consideriamo le rispettive parti intere $\lfloor a_n \rfloor$ e osserviamo che $a_n \to +\infty \Longrightarrow \lfloor a_n \rfloor \to +\infty$; inoltre ci limitiamo a considerare n tanto elevati da garantire che sia $a_n > 0$.
Valgono quindi le seguenti relazioni:

$$\frac{{a_n}^\gamma}{\mathsf{e}^{a_n}} < \frac{(\lfloor a_n \rfloor + 1)^\gamma}{\mathsf{e}^{\lfloor a_n \rfloor}} = \left(\frac{\lfloor a_n \rfloor + 1}{\lfloor a_n \rfloor}\right)^\gamma \cdot \ldots . .$$

I12 h. simboli per il confronto dei limiti di successioni

I12 h.01 Per la presentazione dei limiti delle successioni di reali si rivelano utili quattro notazioni che consentono di esprimere concisamente dei confronti tra i comportamenti per $n \to +\infty$ di due di tali successioni.

Come vedremo, le argomentazioni che seguono e le relative notazioni potranno essere riprese in modi molto simili per la presentazione dei limiti delle funzioni-RtR, cosa abbastanza prevedibile in quanto le successioni di reali, ossia le funzioni-NtR, sono casi particolari delle funzioni-RtR.

Consideriamo quindi le due successioni $\mathsf{a} := a_{\mathbb{N}}$ e $\mathsf{b} := b_{\mathbb{N}}$.

Si dice che b è **successione asintotica** con a sse questa ha valori definitivamente diversi da 0 e il limite del loro rapporto è 1; per questo si scrive

$$\mathsf{b} \sim \mathsf{a} \quad \text{per} \quad n \to +\infty \quad \text{sse} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1 \ .$$

La condizione $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ equivale alla esistenza di una successione infinitesima $\delta_{\mathbb{N}}$ tale che sia $b_n = a_n(1+\delta_n)$.

Se $\mathsf{b} \sim \mathsf{a}$ anche b ha valori definitivamente diversi da 0. È inoltre evidente che la relazione $\sim$ è simmetrica.

Il simbolo $\sim$ viene detto **simbolo di equivalenza asintotica** ed esprime una relazione tra successioni a valori reali definitivamente diversi da 0.
Chiaramente questa relazione, oltre che simmetrica, è riflessiva e transitiva, cioè è una relazione di equivalenza; essa determina una ripartizione dell'insieme delle successioni di valori reali definitivamente diversi da 0 in classi caratterizzate da uno stesso comportamento asintotico.

Due successioni a e b tali che $\mathsf{a} \sim \mathsf{b}$ si dicono **successioni equiasintotiche**.
Per ogni numero reale a diverso da 0 l'enunciato $\langle n \in \mathbb{N} :| \ b_n \rangle \sim a$ equivale a $\lim_{n\to+\infty} b_n = a$.

Va osservato che la scrittura $\lim_{n\to+\infty} b_n \sim 0$ non ha significato per tutte le successioni di reali, in quanto una successione come la $\langle 0,0,0,... \rangle$ non è definitivamente a valori diversi da 0.

I12 h.02 Presentiamo alcuni esempi di equivalenza asintotica spesso utili.

(1) Prop.: $\forall \alpha, \epsilon \in \mathbb{R}_{nz} \ : \ n^{\alpha+\epsilon} + n^{\alpha} \sim n^{\alpha+\epsilon}$; in particolare $n + \sqrt{n} \sim n$.

(2) Prop.: $\forall \alpha \in \mathbb{R}_{nz} \ : \ n^{\epsilon} + 10^{10} \sin n\alpha \sim n^{\epsilon}$.

(3) Prop.: $\mathsf{e}^n + 10!\, \mathsf{e}^{\sqrt{n}} \sim \mathsf{e}^n$.

(4) Prop.: $\mathsf{e}^{\sqrt{n}} + 10!\, \mathsf{e}^{\sqrt{n}/2} \sim \mathsf{e}^{\sqrt{n}}$.

(5) Prop.: $\frac{n}{\ln^{1+\epsilon} n} + \frac{n}{\ln n} \sim \frac{n}{\ln n}$.

(6) Prop.: $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{nz} \ : \ \frac{n - 10\sqrt{n}}{\ln n + 10000} \sim \frac{n}{\ln n}$.

(7) Prop.: $\lfloor \ln n \rfloor \sim \mathsf{e}^n \ln n$.

(8) Prop.: $\forall K \in \mathbb{R}_{+} : \ \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{K}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Sono invece false le seguenti relazioni

$$\mathsf{e}^n \sim n^n \quad , \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+ \ : \ n^\alpha \sim n^{\alpha+\epsilon} \quad , \quad \frac{n}{7} - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor \sim 1 \ .$$

Una relazione della forma $\langle p_{\mathbb{N}} \rangle + \langle q_{\mathbb{N}} \rangle + \cdots + \langle s_{\mathbb{N}} \rangle \sim \langle p_{\mathbb{N}} \rangle$ dice che al tendere di n a $+\infty$ la successione $\langle p_{\mathbb{N}} \rangle$ è l'unica che influisce sulla caratterizzazione di convergenza della $\langle p_{\mathbb{N}} + q_{\mathbb{N}} + \cdots + s_{\mathbb{N}} \rangle$ e sul suo eventuale limite; una tale $\langle p_{\mathbb{N}} \rangle$ e si dice essere **successione prevalente** sulle restanti $\langle q_{\mathbb{N}} \rangle$, ..., $\langle s_{\mathbb{N}} \rangle$.

Le relazioni della forma precedente consentono di semplificare molti calcoli di limiti di successioni.

I12 h.03 Consideriamo la successione $\mathsf{a} = \langle a_n \rangle \in \mathbf{SeqNR}_{defpos}$ il cui comportamento sia sufficientemente noto e assegnamole un "ruolo di successione di riferimento".

Denotiamo con $\mathbf{o}(\mathsf{a})$ l'insieme delle successioni $\mathsf{b} \in \mathbf{SeqNR}$ che per $n \to \infty$ hanno componenti b_n definitivamente trascurabili in modulo rispetto agli a_n.

Più precisamente poniamo

$$\mathbf{o}(\mathsf{a}) \ := \ \left\{ \langle b_{\mathbb{N}} \rangle \ \vdots \Big| \ \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0 \right\} \ .$$

Di una b appartenente a $\mathbf{o}(\mathsf{a})$ si dice **successione o piccolo di una seconda** a.

Tradizionalmente invece di $\mathsf{b} \in \mathbf{o}(\mathsf{a})$ si scrive $\mathsf{b} = o(\mathsf{a})$ o anche più semplicemente $b_n = o(a_n)$, relazione che si legge "la successione a_n è o piccolo della b_n".
Qui rinunciamo alla scrittura tradizionale che potrebbe indurre a interpretare il segno "=" come segno di uguaglianza. Va segnalato che questo rischio formale si riscontra in tanti altri contesti.
La notazione qui proposta evidenzia che ci si trova di fronte a una relazione tra le successioni b_n ed a_n.

Un altro modo di procedere equivalente consiste nel partire dalla definizione della **relazione di rapporto infinitesimo**, da leggere "essere o piccolo di":

$$\mathbf{o}_{rel} \ := \ \left\{ \langle \mathsf{b}, \mathsf{a} \rangle \in \mathbf{SeqNR} \times \mathbf{SeqNR}_{defpos} \ \mathbb{I} \ \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0 \right\} \ .$$

Vediamo alcuni esempi; qui assumiamo $\alpha, k \in (1, +\infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$ ed $\epsilon \in (0, 1)$.

$$\sqrt{n} \in \mathbf{o}(n) \quad , \quad n^{1-\epsilon} \in \mathbf{o}(n) \quad , \quad \frac{1}{n} \in \mathbf{o}(1) \quad , \quad \frac{1}{n} \in \mathbf{o}\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right) \quad ,$$

$$\mathrm{mant}(\beta\, n) \in \mathbf{o}(\ln n) \quad , \quad n^k \in \mathbf{o}\,(\alpha^n) \quad , \quad n^k \in \mathbf{o}(n!) \quad , \quad \mathsf{e}^{n-\sqrt{n}} \in \mathbf{o}(\mathsf{e}^n) \quad ,$$

$$\frac{n^2 + 3\,n - 1}{n^3 - 4\,n^2 - 1} \in \mathbf{o}\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right) \quad .$$

Conviene presentare anche le seguenti relazioni non vere.

$$\binom{n}{2} \notin \mathbf{o}(n^2) \quad , \quad n^3 \notin \mathbf{o}(10^{10} n^3) \quad , \quad n^\alpha \notin \mathbf{o}(1000!\, n^\alpha) \quad , \quad n^\gamma \sin n \notin \mathbf{o}(n^\gamma) \quad ,$$

I12 h.04 Sulla relazione di rapporto infinitesimo si dimostrano facilmente le proprietà che seguono.

(1) Prop.: $b_n \in \mathbf{o}(1)$ equivale ad affermare che $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ ∎

In altre parole $\mathbf{o}(1)$ esprime l'insieme delle successioni di reali infinitesime.

(2) Prop.: Per ogni $\mathsf{a} \in \mathbf{SeqNR}_{defpos}$ si ha $a_{\mathbb{N}} \notin \mathbf{o}(a_{\mathbb{N}})$ ∎

In altre parole $\mathbf{o}_{rel}$ è una relazione antiriflessiva.

(3) Prop.: Per ogni $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{SeqNR}_{defpos}$ $b_n \in \mathbf{o}(a_{\mathbb{N}}) \implies a_{\mathbb{N}} \notin \mathbf{o}(b_{\mathbb{N}})$ ∎

In altre parole $\mathbf{o}_{rel}$ è una relazione antisimmetrica.

(4) Prop.: Per ogni $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{SeqNR}_{defpos}$ e ogni $\mathsf{c} \in \mathbf{SeqNR}$ si ha che

$$b_{\mathbb{N}} \in \mathbf{o}(a_{\mathbb{N}}), c_{\mathbb{N}} \in \mathbf{o}(b_{\mathbb{N}}) \implies c_{\mathbb{N}} \in \mathbf{o}(a_{\mathbb{N}}) \text{ ∎}$$

In parole povere si può affermare che $\mathbf{o}_{rel}$ è una relazione transitiva.

(5) Prop.: Se $c_{\mathbb{N}}\ \mathbf{o}_{rel}\ a_{\mathbb{N}}$ e $a_{\mathbb{N}} \sim b_{\mathbb{N}}$, allora $c_{\mathbb{N}}\ \mathbf{o}_{rel}\ b_{\mathbb{N}}$.

I12 h.05 Ancora consideriamo la successione $\mathsf{a} = a_{\mathbb{N}} \in \mathbf{SeqNR}_{defpos}$ e le assegnamo un ruolo di successione di riferimento.

Denotiamo con $\mathbf{O}(\mathsf{a})$ l'insieme delle successioni b che definitivamente hanno valori b_n per i quali il rapporto $\dfrac{|b_n|}{a_n}$ è limitato; precisamente

$$\mathbf{O}(\mathsf{a}) := \left\{ \langle b_{\mathbb{N}} \rangle \;\vdots\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{|b_n|}{a_n} \right) < +\infty \right\} .$$

Una b appartenente a $\mathbf{O}(\mathsf{a})$ viene chiamata **successione o grande di una seconda** a.

Tradizionalmente invece di $\mathsf{b} \in \mathbf{O}(\mathsf{a})$ si scrive $\mathsf{b} = O(\mathsf{a})$, oppure $b_{\mathbb{N}} = O(a_{\mathbb{N}})$ o anche più semplicemente $b_n = O(a_n)$, relazione che si legge "la successione $a_{\mathbb{N}}$ è o grande della $b_{\mathbb{N}}$".

Nella precedente scrittura il segno "=" non va letto come segno di uguaglianza, in quanto dovrebbe essere associato a una relazione tra le successioni $b_{\mathbb{N}}$ ed $a_{\mathbb{N}}$.

Un modo di procedere equivalente consiste nella definizione diretta della **relazione di rapporto superiormente limitato**, relazione da leggere "essere o grande di":

$$\mathbf{O}_{rel} := \left\{ \langle \mathsf{b}, \mathsf{a} \rangle \in \mathbf{SeqNR} \times \mathbf{SeqNR}_{defpos} \;\text{⫿}\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{|b_n|}{a_n} \right) < +\infty \right\} .$$

Vediamo alcuni esempi, per i quali assumiamo $\alpha, k \in (1, +\infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}_+$ ed $\epsilon \in (0, 1)$.

$$\gamma n^k \in \mathbf{O}\left(n^k\right) \quad , \quad n^k \in \mathbf{O}\left(n^{k+\epsilon}\right) \quad , \quad \sin(n\gamma) \in \mathbf{O}(1) \quad , \quad \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor \in \mathbf{O}(\sqrt{n}) \quad ,$$

$$n^\gamma \in \mathbf{O}\left(n^{\gamma+\delta}\right) \quad , \quad \ln n \in \mathbf{O}\left(n^\gamma\right) \quad , \quad n^k \in \mathbf{O}\left(n^{k+\gamma}\right) \quad , \quad \mathsf{e}^{n+\gamma} \in \mathbf{O}\left(\mathsf{e}^n\right) \quad ,$$

$$n^k \in \mathbf{O}\left(\mathsf{e}^{\sqrt{n}}\right) \quad , \quad n! \in \mathbf{O}\left(n^n\right) \quad , \quad \mathsf{e}^{-n} \in \mathbf{O}\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad , \quad \frac{(-1)^n n}{\ln n} \in \mathbf{O}\left(\frac{n}{\sqrt{\ln n}}\right) \quad ,$$

Conviene segnalare anche i seguenti enunciati non veri:

$$n^\alpha + \mathsf{e}^{\sqrt{n}} \notin \mathbf{O}\left(n^{\alpha+\epsilon}\right) \quad , \quad \mathsf{e}^{2n} \notin \mathbf{O}\left(\mathsf{e}^n\right) \quad , \quad n^\epsilon \notin \mathbf{O}(\ln n) \quad ,$$

I12 h.06 Sulla relazione di rapporto superiormente limitato si trovano le proprietà che seguono.
Per esse prendiamo in considerazione quasi esclusivamente successioni di reali definitivamente positive che denotiamo con $a_{\mathbb{N}}$, $b_{\mathbb{N}}$ e $c_{\mathbb{N}}$.

(1) Prop.: Per ogni $a_{\mathbb{N}} \in \mathbf{SeqNR}_{defpos}$ si ha $a_{\mathbb{N}} \in \mathbf{O}(a_{\mathbb{N}})$ ∎

In altre parole, tra le relazioni entro $\mathbf{SeqNR}_{defpos}$, $\mathbf{O}_{rel}$ è una relazione riflessiva.

(2) Prop.: Se $a_{\mathbb{N}} \in \mathbf{O}(b_{\mathbb{N}})$ e $b_{\mathbb{N}} \in \mathbf{O}(c_{\mathbb{N}})$, allora $a_{\mathbb{N}} \in \mathbf{O}(c_{\mathbb{N}})$ ∎

In altre parole, tra le relazioni entro $\mathbf{SeqNR}_{defpos}$, $\mathbf{O}_{rel}$ è una relazione transitiva.

(3) Prop.: $b_{\mathbb{N}} \sim a_{\mathbb{N}} \implies b_{\mathbb{N}} \in \mathbf{O}\left(a_{\mathbb{N}}\right)$, mentre $b_{\mathbb{N}} \in \mathbf{O}\left(a_{\mathbb{N}}\right) \not\Longrightarrow b_{\mathbb{N}} \sim a_{\mathbb{N}}$ ∎

In altre parole, tra le relazioni entro $\mathbf{SeqNR}_{defpos}$, è una relazione più stringente della $\mathbf{O}_{rel}$.

(4) Prop.: $b_{\mathbb{N}} \sim \alpha \cdot a_{\mathbb{N}}$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}_+ \implies b_{\mathbb{N}} \in \mathbf{O}\left(a_{\mathbb{N}}\right)$ ∎
Viceversa $c_n \in \mathbf{O}\left(a_n\right) \not\Longrightarrow \mathbb{R}_+ \ni \alpha$ tale che $c_n \sim \alpha\, a_n$.

(5) Prop.: Se $b_{\mathbb{N}} \in \mathbf{O}(a_{\mathbb{N}})$ può accadere che sia $a_{\mathbb{N}} \in \mathbf{O}(b_{\mathbb{N}})$ oppure no. In altre parole, tra le relazioni entro $\mathbf{SeqNR}_{defpos}$, $\mathbf{O}_{rel}$ non è una relazione simmetrica, né una relazione antisimmetrica.
Per esempio: $\left\langle 3\,n^2 - 2\,n + 1 \right\rangle \in \mathbf{O}\left(\left\langle 2\,n^2 + 7\,n - 5 \right\rangle\right)$ e $\left\langle 2\,n^2 + 7\,n - 5 \right\rangle \in \mathbf{O}\left(\left\langle 3\,n^2 - 2\,n + 1 \right\rangle\right)$.
$\left\langle 3\,n^2 - 2\,n + 1 \right\rangle \in \mathbf{O}\left(\left\langle 2\,n^3 + 7\,n^2 - 5 \right\rangle\right)$, mentre $\left\langle 2\,n^3 + 7\,n^2 - 5 \right\rangle \notin \mathbf{O}\left(\left\langle 3\,n^2 - 2\,n + 1 \right\rangle\right)$.

I12 h.07 Consideriamo le due successioni $a_{\mathbb{N}}$ definitivamente positiva e $b_{\mathbb{N}}$; si dicono **successioni di uguale ordine di grandezza** sse esistono due numeri reali positivi H e K tali che sia definitivamente $Ha_n \leq |b_n| \leq Ka_n$. In tal caso si scrive

$$b_{\mathbb{N}} \asymp a_{\mathbb{N}} \,.$$

Se anche $b_{\mathbb{N}}$ è definitivamente positiva, allora $b_{\mathbb{N}} \asymp a_{\mathbb{N}} \iff b_{\mathbb{N}} \in \mathbf{O}(a_{\mathbb{N}})$ e $a_{\mathbb{N}} \in \mathbf{O}(b_{\mathbb{N}})$.
Questo equivale ad affermare che, tra le relazioni entro $\mathbf{SeqNR}_{defpos}$, si ha

$$\asymp \;=\; \mathbf{O}_{rel} \,\cup\, {\mathbf{O}_{rel}}^{\mathsf{T}} \,.$$

Tra le relazioni entro $\mathbf{SeqNR}_{defpos}$ la $\asymp$ è una relazione riflessiva simmetrica e transitiva, cioè è una relazione di equivalenza. Le corrispondenti classi di equivalenza sono costituite da successioni definitivamente positive che hanno lo stesso ordine di grandezza.

Questa equivalenza è meno stringente della equivalenza asintotica $\sim$.
Per esempio si ha $\left\langle 3\,n^2 - 8 \right\rangle \asymp \left\langle 4\,n^2 + 6\,n \right\rangle$, mentre $\left\langle 3\,n^2 - 8 \right\rangle \not\sim \left\langle 4\,n^2 + 6n \right\rangle$; inoltre $\mathsf{e}^{\gamma+\sqrt{n}} \asymp \mathsf{e}^{\sqrt{n}}$, mentre $\mathsf{e}^{\gamma+\sqrt{n}} \not\sim \mathsf{e}^{\sqrt{n}}$.

In termini insiemistici quanto enunciato in precedenza si trascrive nelle relazioni

$$\sim \;\subset\; \asymp \qquad , \qquad \left\langle \langle 3\,n^2 - 8\rangle, \langle 4\,n^2 + 6\,n\rangle \right\rangle \;\in\; (\asymp \setminus \sim) \,.$$

Si osserva inoltre che le relazioni $\mathbf{o}_{rel}$ e $\asymp$ sono incompatibili: più precisamente, limitatamente alle relazioni entro il quadrato cartesiano $\mathcal{S} := \mathbf{SeqNR}_{defpos} \times \mathbf{SeqNR}_{defpos}$, questi due insiemi di coppie di successioni definitivamente positive non hanno coppie in comune, ovvero $(\mathbf{o}_{rel} \cap \mathcal{S}) \cap (\asymp \cap \mathcal{S}) \;=\; \emptyset$.

I12 i. sottosuccessione, limite inferiore e limite superiore

I12 i.01 Torniamo ad analizzare meglio l'insieme dei valori limite di una generica successione di componenti reali $\mathsf{a} = a_{\mathbb{N}}$; un tale insieme **Limv**(a) risulta conveniente considerarlo sottoinsieme della cosiddetta **retta reale estesa** $\mathbb{R}_{\pm\mathbf{i}} := \mathbb{R} \dot\cup \{-\infty, +\infty\}$ [a06].

L'analisi di **Limv**(a) porta ad associare a ciascuna delle successioni di componenti reali due parametri di notevole interesse. Inoltre conduce a esaminare le possibilità di unire due o più successioni in una unica successione e viceversa la possibilità di estrarre da una successione di reali delle cosiddette sottosuccessioni [a10], che in particolare possono scegliersi tra le unilimite.

I12 i.02 **(1) Prop.**: Per ogni $\mathsf{a} \in$ **SeqNR** l'insieme **Limv**(a) nell'ambito di $\mathbb{R}_{\pm\mathbf{i}}$ possiede un elemento minimo; questo se la successione è illimitata inferiormente è uguale a $-\infty$; in particolare se a diverge a $-\infty$ si ha **Limv**(a) $= \{-\infty\}$), mentre se è limitata inferiormente $\min($**Limv**(a)$)$ è un numero reale oppure $+\infty$.

Dim.: Evidente l'affermazione nel caso di successione illimitata inferiormente.
Nel caso di una successione $a_{\mathbb{N}}$ limitate inferiormente consideriamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ il reale $u_n := \inf(a_n, a_{n+1}, a_{n+_2}, ...)$; la successione $u_{\mathbb{N}}$ è evidentemente nondecrescente e quindi [b10(1)] $u_{\mathbb{N}}$ è convergente a un limite che è un reale se $u_{\mathbb{N}}$ è limitata superiormente e $+\infty$ nel caso opposto∎

Ne consegue anche la proposizione duale-UD della (1).

(2) Prop.: Per ogni $\mathsf{a} \in$ **SeqNR** l'insieme **Limv**(a) nell'ambito di $\mathbb{R}_{\pm\mathbf{i}}$ possiede un elemento massimo; questo se la successione è illimitata superiormenteè uguale a $+\infty$ e se in particolare diverge a $+\infty$ si ha **Limv**(a) $= \{+\infty\}$); se invece a è limitata superiormente è un numero reale o $-\infty$ ∎

I12 i.03 Per molte $\mathsf{a} \in$ **SeqNR** il minimo e il massimo dell'insieme **Limv**(a) $\subseteq \overline{\mathbb{R}}$ rivestono elevato interesse [e.g. I37b].

Si dice **limite inferiore della successione** o **minimo limite della successione** $a_{\mathbb{N}}$ il minimo nell'ambito di $\mathbb{R}_{\pm\mathbf{i}}$ di **Limv**$(a_{\mathbb{N}})$; esso si denota con $\liminf a_{\mathbb{N}}$.
Segnaliamo che per tale parametro sono usate anche le notazioni $\operatorname{minlim} a_{\mathbb{N}})$ e $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$.

Veniamo alla nozione duale-UD. Si dice **limite superiore della successione** o **massimo limite della successione** $a_{\mathbb{N}}$ il massimo nell'ambito di $\mathbb{R}_{\pm\mathbf{i}}$ di **Limv**$(a_{\mathbb{N}})$; esso si denota con $\limsup a_{\mathbb{N}}$.
Va segnalato che per il limite superiore sono usate anche le notazioni $\operatorname{maxlim} a_{\mathbb{N}})$ e $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$.

Mentre il limite è definito e fornisce informazioni solo per le successioni di **SeqNR** convergenti, $\liminf$ e $\limsup$ sono definiti e quindi forniscono informazioni per tutte le successioni di componenti reali.

I12 i.04 Si osserva che sia il passaggio a $\liminf$ che il passaggio a $\limsup$ possono sono funzioni del genere $\lceil\, \mathbf{SeqNR} \longmapsto \mathbb{R}_{\pm\mathbf{i}} \,\rceil$.

La funzione limite inferiore si può introdurre anche attraverso le definizioni che seguono.

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} \Big(\inf_{m\geq n} a_m \Big) ,$$

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n := \sup_{n\geq 0} \inf_{m\geq n} a_m = \sup\{ \inf\{ x_m : m \geq n \} : n \geq 0 \} .$$

Le definizioni duali-UD delle precedenti sono

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} \Big(\sup_{m\geq n} a_m \Big) ,$$

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n \;:=\; \inf_{n\geq 0}\sup_{m\geq n} a_m \;=\; \inf\{\,\sup\{\,a_m : m\geq n\,\} : n\geq 0\,\}\ .$$

(I) Eserc. ndividuare un esempio di successione di reali per ciascuna delle seguenti caratteristiche:
$\liminf = \limsup = -\infty$
$\liminf = \limsup = +\infty$
$\liminf = -\infty$ e $\limsup \in \mathbb{R}$
$\liminf \in \mathbb{R}$ e $\limsup = +\infty$
$\liminf = \in \mathbb{R}$, $\limsup \in \mathbb{R}$ e $\liminf < \limsup$
$\liminf = \limsup \in \mathbb{R}$

I12 i.05 Le funzioni lim inf e lim sup vengono utilizzate per analizzare l'andamento di molte funzioni. Può essere utile associare a esse il simbolo di confronto **O**.

I12 i.06
Consideriamo un generico insieme E ed una successione $\mathsf{a} = a_{\mathbb{N}} \in \lceil\!\lceil\, \mathbb{N} \longmapsto \mathsf{E} \,\rceil\!\rceil$.
Si dice **sottosuccessione** della $a_{\mathbb{N}}$ ogni successione della forma $\langle a_{f(0)}, a_{f(1)}, a_{f(2)}, ..., a_{f(n)}, ...\rangle$ nella quale f denota una funzione crescente appartenente a $\lceil\!\lceil\, \mathbb{N} \longmapsto_{<} \mathbb{N} \,\rceil\!\rceil$.

Denoteremo con $\mathsf{Sbseq}(\mathsf{a})$ l'insieme delle sottosuccessioni della successione a e scriveremo $\mathsf{asbseqb}$ per enunciare che a è sottosuccessione di b.

A fianco di queste notazioni introduciamo la notazione $\mathsf{Sbseqp}(\mathsf{a})$ per l'insieme delle sottosuccessioni proprie e la relazione essere sottosuccessione propria sbseqp.

Sono facilmente comprensibili i significati delle notazioni duali-UD riguardanti l'insieme delle sovrasuccessioni $\mathsf{Spseq}(\mathsf{a})$, la relazione "essere sovrasuccessione" spseq, l'insieme delle sovrasuccessioni proprie $\mathsf{Spseqp}(\mathsf{a})$ e la relazione "essere sovrasuccessione propria" spseqp.

Considerando la $\mathsf{a} := a_{\mathbb{N}}$ come una funzione-NtR, la precedente sottosuccessione si può vedere ottenuta con la composizione funzionale

$$f \circ_{lr} \mathsf{a} \;=\; \lceil\!\lceil\, n \in \mathbb{N} \;\mapsto\; f(n) \,\rceil\!\rceil \;\circ_{lr}\; \lceil\!\lceil\, k \in \mathbb{N} \;\mapsto\; a_k \,\rceil\!\rceil\ .$$

Chiaramente le funzioni $f \in \lceil\!\lceil\, \mathbb{N} \longmapsto_{<} \mathbb{N} \,\rceil\!\rceil$ sono in corrispondenza biunivoca con i propri codomini numerabili:

$$\{f(0), f(1), f(2), ..., f(n), ...\}\ .$$

Quindi tra le sottosuccessioni di una $a_{\mathbb{N}}$, quella della forma $f \circ_{lr} a_{\mathbb{N}}$ si può caratterizzare con le proprietà che individuano l'insieme $\mathsf{cod}(f)$.
Per tale sottosuccessione adottiamo la denotazione $\mathsf{a}|_{\mathsf{dom}(f)}$.

I12 i.07 Segnaliamo i più notevoli tipi di sottosuccessioni di una $\mathsf{a} = a_{\mathbb{N}}$.

Sottosuccessioni ottenute da traslazioni di $\mathbb{N}$ con una f della forma $\lceil\!\lceil\, n \in \mathbb{N} \lceil\!\lceil\, n + k \,\rceil\!\rceil$ per $k \in \mathbb{P}$; si tratta delle riduzioni della forma $\mathsf{a}|_{\mathbb{N}+k}$.

Sottosuccessioni ottenute da dilatazioni di $\mathbb{N}$ con f della forma $\lceil\!\lceil\, n \in \mathbb{N} \lceil\!\lceil\, n \cdot k \,\rceil\!\rceil$ per $k \in \{2, 3, ...\}$; si tratta delle riduzioni della forma $\mathsf{a}|_{k\cdot\mathbb{N}}$.

Sottosuccessioni ottenute da funzioni crescenti esprimibili algebricamente, come $\langle n \in \mathbb{N} :|\ n^2 + 2\,n\rangle$.

Sottosuccessioni ottenute da funzioni crescenti esprimibili mediante relazioni di ricorrenza, come a_F, dove con F denotiamo una successione crescente di interi, come la successione dei numeri di Fibonacci, o quella dei numeri di Catalan [D20b, D20d].

Sottosuccessioni ottenute da funzioni crescenti esprimibili mediante algoritmi; tra queste si colloca in particolare la sottosuccessione relativa alla successione dei numeri primi, ovvero la successione $\langle a_2, a_3, a_5, a_7, a_{11}, a_{13}, ...\rangle$.

I12 i.08 Consideriamo ora le sottosuccessioni di successioni con valori in uno spazio metrico $\boldsymbol{M} = \langle \mathsf{M}, \mathrm{dist}\rangle$.

(1) Prop.: Per una $\mathsf{a} \in \lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathsf{M} \rceil$ e per ciascuno dei suoi punti limite L appartenenti ad M si possono ottenere sottosuccessioni che convergono allo stesso L.

Dim.: Consideriamo una successione di reali positivi infinitesima $\epsilon_{\mathbb{N}}$ (ad esempio la $\langle k \in \mathbb{N} :| \ 1/n\rangle$).
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un termine che scriviamo $a_{n(k)}$ appartenente a $\mathsf{ball}(\mathrm{dist}, L, \epsilon_k)$; la sottosuccessione $\langle k \in \mathbb{N} :| \ a_{n(k)}\rangle$ soddisfa la condizione di convergenza al punto limite L richiesta ∎

In particolare le costruzioni precedenti possono essere applicate per sottosuccessioni di successioni con valori in uno spazio d dimensionale $\mathbb{R}^{\times d}$ e si possono ottenere le sottosuccessioni $a_{\mathbb{N}}$ che convergono a un $\mathsf{L} \in \mathbf{Limv}(\mathsf{a})$ soddisfacendo a restrizioni espresse da relazioni vettoriali della forma $|a_n - \mathsf{L}| < \epsilon_n$.

Nel caso della successioni di reali a queste restrizioni si può dare la semplice forma $L - \epsilon_n < a_n < L + \epsilon_n$.

I12 i.09 **(1) Prop.**: Siano a e b due successioni con valori in uno spazio metrico $\boldsymbol{M} = \langle \mathsf{M}, \mathrm{dist}\rangle$.

$$\mathsf{a}\ \mathsf{sbseq}\ \mathsf{b} \implies \mathbf{Limv}(\mathsf{a}) \subseteq \mathbf{Limv}(\mathsf{b})$$ ∎

(2) Prop.: Tutte le sottosuccessioni di una successione a con valori in uno spazio metrico $\boldsymbol{M} = \langle \mathsf{M}, \mathrm{dist}\rangle$ che converge ad un limite in M sono convergenti allo stesso limite.

Dim.: Sia $\mathsf{L} := \lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{a}$ e consideriamo una $r \in \lceil \mathbb{N} \longmapsto_{<} \mathbb{N} \rceil$ e la sottosuccessione s della a a essa associata, cioè la sottosuccessione esprimibile come $\mathsf{s} := r \circ_{lr} \mathsf{a} = \mathsf{a}|_{\mathsf{dom}(r)}$.

Per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ipap) la $\mathsf{L} := \lim_{n\to+\infty} \mathsf{a}$ implica che esiste un intero naturale $\overline{n} = \overline{n}(\epsilon)$ tale che $\forall n \in \mathbb{N} + \overline{n} \ : \ a_n \in \mathsf{ball}(\mathrm{dist}, \mathsf{L}, \epsilon)$.
Per il carattere crescente della r si trova quindi un $k \in \mathbb{N}$ tale che $r(k) \in \mathbb{N} + \overline{n}$. Di conseguenza per ogni ϵ la successione s ha i valori definitivamente nella bolla $\mathsf{ball}(\mathrm{dist}, L, \epsilon)$ e questo equivale ad affermare $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathsf{s} = \mathsf{L}$ ∎

(3) Prop.: Data una successione a con valori in uno spazio metrico $\boldsymbol{M} = \langle \mathsf{M}, \mathrm{dist}\rangle$, per qualsiasi $\mathsf{L} \in \mathbf{Limv}(\mathsf{a}) \cap \mathsf{M}$ si trova una sottosuccessione che converge a tale punto di M.

Dim.: Consideriamo una successione decrescente di reali positivi e infinitesima $\langle k \in \mathbb{N} :| \ \epsilon_k\rangle$ e la sottosuccessione della a $^{\searrow}$ $r \circ_{lr} \mathsf{a}$, dove la r si individua associando ad ogni $k \in \mathbb{N}$ il minimo naturale $r(k)$ per il quale si abbia $a_{r(k)} \in \mathsf{ball}(\mathrm{dist}, \mathsf{L}, \epsilon)$. Evidentemente questa sottosuccessione converge ad L ∎

I12 i.10 Dopo le riduzioni di sottosuccessioni, occupiamoci di operazioni di composizione di successioni.

Date due successioni $a_{\mathbb{N}}$ e $b_{\mathbb{N}}$, si definisce come loro **mescolamento esatto delle due successioni**, e si denota con $a_{\mathbb{N}}\ \$\$\ b_{\mathbb{N}}$ la successione $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ...\rangle$, cioè la successione $c_{\mathbb{N}}$ con $c_{2k} := a_k$ e $c_{2k+1} := b_k$.

Ovvio che $a_{\mathbb{N}}$ e $b_{\mathbb{N}}$ sono sottosuccessioni di $a_{\mathbb{N}}\,\$\$\,b_{\mathbb{N}}$.

È anche evidente che $\mathbf{Limv}\left(a_{\mathbb{N}}\,\$\$\,b_{\mathbb{N}}\right) = \mathbf{Limv}(a_{\mathbb{N}}) \cup \mathbf{Limv}(b_{\mathbb{N}})$.

Si possono anche considerare successione ottenute applicando il mescolamento esatto a tre o più successioni.

Va anche osservato che il mescolamento esatto di successioni è un'operazione noncommutativa e nonassociativa.

Infatti $\mathsf{a} = a_{\mathbb{N}} \neq \mathsf{b} = b_{\mathbb{N}}$ implica

$$\mathsf{a} \,\$\$\, \mathsf{b} = \langle a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ... \rangle \neq \mathsf{b} \,\$\$\, \mathsf{a} = \langle b_0, a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, ... \rangle \ .$$

Inoltre se a, b e c sono tre successioni mutuamente diverse

$$\begin{aligned}(a \,\$\$\, \mathsf{b}) \,\$\$\, \mathsf{c} &= \langle a_0, c_0, b_0, c_1, a_1, c_2, b_1, c_3, a_2, c_4, b_2, c_5, ... \rangle \neq \\ &\langle a_0, b_0, a_1, c_0, a_2, b_1, a_3, c_1, a_4, b_2, a_5, c_2, ... \rangle = \mathsf{a} \,\$\$\, (\mathsf{b} \,\$\$\, \mathsf{c})\end{aligned} \ .$$

Accade tuttavia che modificando l'ordine di effettuazione dei mescolamenti esatti di 3 o più successioni rimangono uguali gli insiemi dei valori limiti delle diverse successioni ottenute.

Talora può essere utile servirsi della cosiddetta **alternanza esatta di successioni** riguardante un certo numero $k = 3, 4, ...$ di successioni

$$\mathsf{a}^{(h)} = \langle a^{(h)}{}_0, a^{(h)}{}_1, a^{(h)}{}_2, ..., a^{(h)}{}_n, ... \rangle \quad \text{con} \quad h = 1, 2, ..., k \ ,$$

cioè della successione

$$\langle a^1{}_0, a^2{}_0, ..., a^k{}_0, a^1{}_1, a^2{}_1, ..., a^k{}_1, ..., a^1{}_n, a^2{}_n, ..., a^k{}_n, ... \rangle \ .$$

I12 i.11 Presentiamo ora una rassegna dei tipi di insiemi $\mathbf{Limv}(a_{\mathbb{N}})$ dei valori limite che possono presentare le successioni di numeri reali.

Il caso più semplice è quello in cui $a_{\mathbb{N}}$ è una successione unilimite: in tal caso $\mathbf{Limv}(a_{\mathbb{N}})$ è un singoletto $\{L\}$, dove si può avere aut $L \in \mathbb{R}$, aut $L = -\infty$, aut $L = +\infty$.

Si possono poi individuare successioni per le quali $\mathbf{Limv}(a_{\mathbb{N}})$ è un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$. Denotiamo un tale insieme con $\{L_0, L_1, ..., L_{m-1}\}$.
Una di tali successioni è quella ottenibile come alternanza esatta di m successioni unilimite $\mathsf{a}^{(h)}$ per $h = 0, 1, ..., m-1$, tali che $\forall h = 0, 1, ..., m-1 \ : \ \lim_{n \to +\infty} \mathsf{a}^{(h)} = L_h$, essendo gli L_h diversi tra di loro.
Un esempio è costituito da una successione u il cui termine n-esimo, per $n \in \mathbb{N}$ ha la forma

$$u_n := n\%m + \mathsf{e}_n^{(n\%m)} \ ,$$

dove per ogni $h = 0, 1, 2, ..., m-1$ $\mathsf{e}^{(h)}$ denota una successione infinitesima che può essere scelta ad arbitrio.
Evidentemente $\mathbf{Limv}(\mathsf{u}) = \{0, 1, ..., m-1\}$.

Una espressione più generale si ottiene sostituendo l'addendo $n\%m$ con l'espressione $L_{n\%m}$. Una tale successione si può ottenere come alternanza esatta delle m successioni $\mathsf{s}^{(h)}$ per $h = 0, 1, ..., m-1$, con $s_k^{(h)} := L_h + \mathsf{e}_k^{(h)}$.

Una successione t per la quale $\mathbf{Limv}(\mathsf{t})$ si esprima come successione di limiti finiti diversi $\langle L_0, L_1, ..., L_h, ... \rangle$ si può ottenere a partire da una successione di successioni $aSs^{(h)}$ ciascuna convergente a uno dei valori L_h per $h \in \mathbb{N}$.
Le componenti della t si possono ottenere mediante una sequenzializzazione della totalità dei componenti $s_n^{(h)}$ delle successioni attraverso un procedimento diagonale alla Cantor [B30a07]. In tal modo si possono individuare successioni t con $\mathbf{Limv}(\mathsf{t})$ sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{R}$ che possono essere sia limitati che illimitati.

Con una costruzione di questo tipo è possibile individuare anche successioni a per le quali $\mathbf{Limv}(\mathsf{a}) = \mathbb{Q} \dot\cup \{-\infty, +\infty\}$.

Una successione di reali che abbia tra i valori limite $-\infty$, $+\infty$ o entrambi si può ottenere come mescolamento esatto di una successione con $\mathbf{Limv}$ limitato di uno dei tipi visti sopra con una successione opportunamente illimitata.

I12 i.12 Chiaramente non esiste alcuna successione $\mathsf{a} \in \textbf{SeqNR}$ il cui insieme limite sia continuo: in tal caso avrebbe numerosità superiore ad $\aleph_0$, la numerosità del dominio della funzione a.

Per quanto riguarda le successioni a con $\textbf{Limv}(\mathsf{a})$ sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}_{\pm\mathsf{i}}$ occorre tenere presente la seguente proprietà concernente la topologia metrica di $\textbf{Limv}(\mathsf{a})$.

(1) Prop.: Per ogni successione a con valori in uno spazio metrico $\boldsymbol{M} = \langle \mathsf{M}, \mathrm{dist} \rangle$ il corrispondente insieme $\textbf{Limv}(\mathsf{a})$ contiene i propri punti di accumulazione ∎

Quindi ogni insieme di valori limite di una successione di reali è illimitato inferiormente sse contiene $-\infty$, mentre è illimitato superiormente sse contiene $+\infty$.

Le costruzioni di successioni di reali a con determinati $\textbf{Limv}(\mathsf{a})$, in particolare con $\textbf{Limv}(\mathsf{a}) = \mathbb{Q} \dot\cup \{-\infty, +\infty\}$, si possono generalizzare giungendo alla costruzione di successioni in $\lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}^{\times d} \rceil$ per le quali $\textbf{Limv}(\mathsf{a}) = \mathbb{Q}^{\times d}$ completato con vettori della forma $\langle L_1, L_2, ..., L_d \rangle$ con ciascuno degli L_i appartenente a $\mathbb{Q} \dot\cup \{-\infty, +\infty\}$.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php