Capitolo G70:
repertorio di curve piane speciali

Contenuti delle sezioni

37 pagine

G70:**0.01** Questo capitolo raccoglie definizioni, proprietà principali e riferimenti, principalmente sitografici, per un centinaio tra curve piane speciali e famiglie di tali entità.
Si tratta di una raccolta di termini e di risultati che solo in piccola parte sono sostenuti da deduzioni.
Per alcune curve sono segnalate anche applicazioni di rilievo.
Il capitolo si chiude con un indice terminologico che vuole facilitare la consultazione del materiale.

G70:a. considerazioni introduttive

G70:**a.01** I paragrafi che seguono sono costituiti da sezioni ciascuna delle quali dedicata a una entità che appartiene ai generi seguenti.

- Singola curva che rappresenta una classe di similitudine di curve.
- Famiglia di curve caratterizzata da almeno una equazione nella quale entrano uno o più costanti che consentono di distinguere le singole curve (classi di similitudine) della famiglia;
- Tipo di curve caratterizzato da un tipo di costruzione che si può applicare a tutte le curve piane che posseggano caratteristiche poco restrittive (come regolarità, costituzione di curva chiusa e limitatezza); queste costruzioni di curve basate su curve spesso hanno natura geometrica, ma talora natura cinematica e meccanica; queste costruzioni qui le chiamiamo **trasformazioni costruttive**.
- Collezione di curve caratterizzata da una proprietà.

La distinzione tra questi generi di entità non è sempre ben definita. Ogni entità è caratterizzata da uno o più nomi che spesso fanno riferimento a personalità della storia della matematica o di discipline scientifiche e tecnologiche.
Le entità sono presentate in 12 paragrafi con estensioni differenziate: 7 di questi riguardano le curve algebriche che vengono distinte considerandone i gradi; 3 paragrafi contengono curve trascendenti distinguendo tra cicloidi e curve affini, spirali e altre. Il penultimo paragrafo presenta le curve ricavabili da altre curve mediante una determinata trasformazione costruttiva. L'ultimo riguarda le collezioni di curve individuate da uno specifico comportamento.

G70:**a.02** Le entità vengono presentate con nomi e formule di definizione. Queste formule riguardano equazioni cartesiane nelle variabili x e y e talora in variabili alternative$X$ e Y, equazioni polari nelle variabili ρ e ϕ, parametrizzazioni cartesiane e parametrizzazioni polari nel parametro t e talora nel parametro alternativo u. Per ragioni di semplicità, si privilegiano le formule costituenti le forme canoniche dalle quali si possono ricavare più facilmente le proprietà principali. Solo raramente si considerano formule che abbracciano la totalità dei casi.

Attualmente solo in pochi casi le definizioni sono seguite da proprietà e descrizioni ottenute con dimostrazioni o argomentazioni stringenti. Attualmente non compare alcuna figura: molte figure e notevoli animazioni si possono tuttavia raggiungere attraverso la sitografia presente per ciascuna delle entità che seguono.

Tra le entità esistono varie relazioni: le relazioni di appartenenza di curve a famiglie e collezioni, le relazioni di inclusione tra famiglie e collezioni e le relazioni dovute a trasformazioni costruttive.

G70:**a.03** Oltre alle versioni inglese, italiana e francese di Wikipedia [`Main page (we)`, `Pagina Principale (wi)` e `https://fr.wikipedia.org/wiki/Wikipédia:Accueil principal`] qui vengono citati più volte pagine dei siti che seguono attraverso segnalazioni sintetiche dei loro URL.

Sito *Encyclopédie des Formes Mathématiques Remarquables* (`http://www.mathcurve.com/`) dovuto a Robert Ferreol per il quale abbreviamo `http://http://www.mathcurve.com/courbes2d/xxxx` con EFMR2D/xxxx .

Settore `Famous Curves Index` del sito `https://it.wikipedia.org/wiki/MacTutor` dovuto a Robert John O'Connor e Edmund F. Robertson.
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Curves/Curves.html`,
abbreviando `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Curves/xxxx` con FAMCUR/xxxx

Enciclopedia in linea *Wolfram MathWorld* (http://mathworld.wolfram.com/letters/) iniziativa avviata da Eric Weisstein.
abbreviando http://http://mathworld.wolfram.com/xxxx con MW/xxxx

Sito *2dcurves.com* o *Mathematical curves* (http://ttp://www.2dcurves.com/) dovuto a Wassenaar per il quale abbreviamo http://http://www.2dcurves.com/xxxx con 2DCURVES/xxxx

Settore *A Visual Dictionary of Special Plane Curves* (http://xahlee.org/PageTwo_dir/more.html del sito *xahlee*, per il quale usiamo l'abbreviazione XAHLEE/xxxx per http://http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/xxxx .

Sito *OEIS*, *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* dovuto a Neil Sloane [http://http://www.research.att.com/∼njas/sequences/] per il quale abbreviamo http://http://www.research.att.com/ njas/sequences/Axxxxxx con OEIS/Axxxxxx.

G70:**a.04** Ricordiamo anche i testi che seguono.

J. Dennis Lawrence (1972): *A catalog of special plane curves*, Dover Publications — ISBN 0-486-60288-5
Lockwood , E. H. (1961): *A Book of Curves*, Cambridge University Press
Yates , Robert C. (1952): *Curves and their Properties*, National Council of Teachers of Mathematics
Cundy , Henry Martin ; Rollett , A. P. (1989): *Mathematical Models*, 3rd ed. Tarquin Pub. Stradbroke, England
Shikin , E. V. (1995): *Handbook and Atlas of Curves*, CRC Press, Boca Raton
Salmon , George (1879): *A Treatise on the Higher Plane Curves*, Hodges, Foster, and Figgis

G70:b. curve algebriche di grado 2

G70:**b.01 sezioni coniche** Curve piane discusse in G50. Una sezione conica è definibile come intersezione tra un cono circolare retto e un piano, oppure come insieme dei punti determinati da un'equazione polare della forma

$$\rho = (1 - e\,\cos\phi) \qquad \text{con } e \in \mathbb{R}_+$$

(e viene detta eccentricità della conica) oppure come soluzione reale di un'equazione quadratica della forma

$$a\,x^2 + 2hxy + b\,y^2 + 2gx + 2fy + c = 0\ .$$

Segnaliamo anche `Sezioni coniche (wi)` e `http://EFMR2D/conic/conic.shtml`.

G70:**b.02 parabola** Conica di eccentricità 1, discussa come tale in G50 e in particolare in G50b. Si può caratterizzare con un'equazione cartesiana, una parametrizzazione cartesiana o con un'equazione polare:

$$y^2 = 2\,p\,x \qquad \text{dove} \quad p \in \mathbb{R}_+$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{p}{2}\,t^2 \\ y = p\,t \end{cases} \qquad \text{con } p \in \mathbb{R}_+$$

$$\rho = \frac{p}{1+\cos\phi} = \frac{p}{2\,\cos^2\frac{\phi}{2}}$$

V.a. `Parabola (wi)`, EFMR2D/parabole/parabole.shtml

G70:**b.03 ellisse** Conica, discussa come tale in G50 e in particolare in G50c, fornita in una sua forma canonica dall'equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{dove} \quad a, b \in \mathbb{R}_+\ .$$

Equivalentemente si può caratterizzare con la parametrizzazione cartesiana

$$\begin{cases} x = a\,\cos\,t \\ y = b\,\sin\,t \end{cases} \qquad \text{per} \quad 0 \le t \le 2\,\pi$$

e con l'equazione polare (nel caso $a > b$)

$$\rho = \frac{a\,b}{\sqrt{b^2\,\cos^2\phi + a^2\,\sin^2\phi}} = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2\,\cos^2\phi}} \quad cone = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\ .$$

Il parametro e esprime la sua eccentricità e le ellissi si possono definire come le coniche con eccentricità compresa tra 0 e 1. V. a. `Ellisse (wi)`, EFMR2D/ellipse/ellipse.shtml

G70:**b.04 circonferenza** Luogo dei punti di uguale distanza, R, da un punto dato, $C = \langle x_C, y_C \rangle$ chiamato centro della circonferenza; quindi curva caratterizzata dall'equazione cartesiana

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C) = R^2 \qquad \text{con } R \in \mathbb{R}_{0+}\ .$$

Si tratta di un caso particolare dell'ellissi, quello relativo ad eccentricità nulla e all'equazione di secondo grado della forma

$$a\,x^2 + a\,y^2 + b\,x + c\,y + d = 0\ .$$

Essa è caratterizzata anche dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} x = x_C + R\cos t \\ y = y_C + R\sin t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi] \qquad , \qquad \begin{cases} x = x_C + R\,\dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ y = y_C + R\,\dfrac{2\,u}{1+u^2} \end{cases} \quad con u \in \mathbb{R} \ .$$

$$\rho^2 = -2\,\rho\,R_C\,\cos(\phi - \phi_C) + {R_C}^2 = R^2 \ ,$$

dove R_C è la distanza di C dall'origine e ϕ_C l'angolo tra l'asse orientato Ox e il segmento orientato $\overrightarrow{OC}$.

V.a. EFMR2D/cercle/cercle.shtml, `Circonferenza (wi)` e `Circle (we)`

G70:**b.05 iperbole** Conica, discussa come tale in G50 e in particolare in G50d, fornita in una sua forma canonica dall'equazione cartesiana $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, con $0 < a < b$. Si tratta di una curva che presenta due rami ed è invariante per riflessione rispetto ad Ox ed Oy (e per simmetria centrale). I suoi due rami sono rappresentabili con due sistemi di equazioni parametriche nelle quali entrano le funzioni seno e coseno iperbolico che da questo fatto traggono i loro nomi; le equazioni differiscono solo per il segno dell'ordinata e in effetti riguardano curve ottenibili per riflessione rispetto ad Oy:

$$\begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases} \quad \text{per} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{(ramo destro)} \qquad \begin{cases} x = -a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases} \quad per t \in \mathbb{R} \quad \text{(ramo sinistro)} \ .$$

G70:c. curve algebriche di grado 3

G70:**c.01 cubiche** Curve che soddisfano un'equazione polinomiale di terzo grado nelle variabili cartesiane x e y, cioè un'equazione della forma

$$a\,x^3 + b\,x^2\,y + c\,x\,y^2 + d\,y^3 + e\,x^2 + f\,x\,y + g\,y^2 + h\,x + i\,y + j = 0\ .$$

Quindi le cubiche costituiscono uno spazio proiettivo di 9 dimensioni e si può trovare una cubica imponendo che essa passi per 9 punti assegnati. Si vedano anche `https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic plane curve` e *CubicCurve.html*

G70:**c.02 versiera della Agnesi** Cubica individuata dalle equazioni cartesiane

$$y(x^2 + a^3) = a^3 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{oppure} \qquad y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}\ .$$

Espressa anche da una parametrizzazione cartesiana e da una parametrizzazione polare:

$$\begin{cases} x = at \\ y = \dfrac{a}{1+t^2} \end{cases} \quad \text{per} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x = a\,\tan\phi \\ y = a\,\cos^2\phi \end{cases} \quad \text{per} \quad \theta \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big]$$

Essa coincide sostanzialmente con la funzione di **distribuzione lorentziana**, ossia con la **curva di risonanza**. Presenta come asintoto l'asse Ox.
V.a. `Versiera (wi)`, EFRM2D/agnesi/agnesi.shtml, 2dcurves/cubic/cubicr.html#witch of Agnesi

G70:**c.03 parabola semicubica** o **parabola di Neill** Cubica la cui equazione cartesiana è

$$ax^3 - y^2 = 0$$

Nell'origine presenta una cuspide
V.a. EFMR2D/parabolesemicubic/parabolesemicubic.shtml, SC2 393

G70:**c.04 folium di Cartesio**

$$\begin{cases} x = t(t-1) \\ y = t(t-1)2t-1) \end{cases} \quad pert \in \mathbb{R}\ .$$

Curva illimitata intrecciata; passa due volte nell'origine, per $t = 0, 1$: si dice quindi che ha un punto doppio nell'origine ; la trasformazione $\lceil t \leftrightarrow 1 - t \rceil$ equivale alla sua riflessione rispetto ad Ox e ha l'effetto di cambiare il suo orientamento.
V.a `Folium of Descartes (wi)`

G70:**c.05 cissoide di Diocle** Cubica individuata dalle seguenti equazioni

$$x^3 + (x-a)y^2 = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad y^2 = \frac{x^3}{2a - x}\ ,$$

$$\rho = 2a\,\tan\phi\,\sin\phi = a\left(\frac{1}{\cos\phi} - \cos\phi\right)$$

o dalla parametrizzazione cartesiana razionale

$$\begin{cases} x = \dfrac{a\,t^2}{1+t^2} \\ y = t\,x \end{cases}\ .$$

G70:**c.06** **strofoide** Cubica individuata dalla seguente equazione

$$\rho = b\,\frac{\sin(a - 2\,\phi)}{\sin(a - \phi)}$$

V.a. EFMR2D/strophoid/strophoid.shtml

G70:**c.07** **strofoide diritta** o **strofoide di Newton** Strofoide particolare relativa ad $a = \frac{\pi}{2}$ e quindi caratterizzata dall'equazione

$$\rho = b\,\frac{\cos\,2\theta}{\cos\theta}\ ,$$

ovvero dall'equazione cartesiana

$$(x + a)x^2 + (x - a)y^2 = 0 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}_+ \quad \text{ovvero} \quad y = \pm\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}\ .$$

G70:**c.08** **parabola divergente di Newton** Classe di cubiche individuate dalla seguente equazione cartesiana

$$a\,y^2 = x(x^2 - 2\,b\,x + c) \quad \text{con } a \in \mathbb{R}_+, b, c \in \mathbb{R}\ .$$

V.a. 2DCURVES/cubic/cubicn.html

G70:**c.09** **serpentina** o **anguinea** Cubica individuata dalle seguenti equazioni

$$y = \frac{a\,d\,x}{x^2 + d^2} \quad \text{con } a, d \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{ovvero} \qquad x^2\,y + \alpha\,\beta\,y - \alpha^2\,x = 0 \quad con \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$$

$$\rho^2 = \frac{\mathrm{d}}{\cos\phi}\left(\frac{a}{\sin\phi} - \frac{\mathrm{d}}{\cos\phi}\right)\ ,$$

$$\begin{cases} x = d\,\tan\,\dfrac{t}{2} \\ y = \dfrac{a}{2}\,\sin\,t \end{cases} \quad \text{per} \quad \pi < t < \pi \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = \alpha\,\cot\,t \\ y = \beta\,\sin\,t\,\cos\,t \end{cases}\ .$$

G70:**c.10** **cubica di Tschirnhausen** Cubica individuata dalle seguenti equazioni

$$27\,a\,y^2 = x^2(9a - x) \qquad \text{ovvero} \qquad 3\,\alpha\,y^2 = x(x - \alpha)^2$$

$$\begin{cases} x = 9a\,(1 - 3t^2) \\ y = t\,x \end{cases}$$

$$\rho = a\sec^3\frac{\phi}{3}$$

V.a EFMR2D/tschirnhausen/tschirnhausen.shtml

G70:**c.11** **trisettrice di MacLaurin** Cubica individuata dalle seguenti equazioni

$$y^2(a + x) = x^2(3a - x)$$

$$\rho = 2\,a\,\frac{\sin\,3\phi}{\sin\,2\phi}$$

V.a. `Trisectrix of MacLaurin (we)`,

G70:**c.12** **tridente di Newton** o **parabola di Cartesio** Cubica individuata dalla seguente equazione

$$x\,y = c\,x^3 + \mathrm{d}x^2 + e\,x + f$$

V.a. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Trident de Newton`, `http://FAMCUR/Trident.html`, `http://EFMR2D/trident/trident.shtml`.

G70:**c.13** **concoide di de Sluze** È la concoide di una retta, cioè la cubica individuata dall'equazione cartesiana

$$a(x+a)(x^2+y^2) = k^2 x^2 \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}_+$$
$$a(\rho\,\cos\phi + a) = k^2\,\cos^2\phi$$

V.a. `Conchoid of de Sluze` (we), FAMCUR/Conchoidsl.html

G70:**c.14** **folium parabolico** Cubica individuata dalle seguenti equazioni

$$x^3 = a\,(x^2 - y^2) + b\,x\,y \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}_+$$
$$\rho = \frac{a}{\cos\phi} - \tan\phi\,\frac{a\,\tan\phi - b}{\cos\phi} = \frac{a\,\cos 2\phi + \frac{b}{2}\,\sin 2\phi}{\cos^3\phi}$$

V.a. EFMR2D/foliumparabolic/foliumparabolic.shtml

G70:**c.15** **ofiuride** Cubica individuata dalle seguenti equazioni

$$x^2(x^2+y^2) = bxy - ay^2$$
$$\rho = a\,\cos\phi + b\,\sin\phi - \frac{a}{\cos\phi} = (b\,\cos\phi - a\,\sin\phi)\,\tan\phi$$

V.a. EFMR2D/ophiuride/ophiuride.shtml

G70:**c.16** **cubica di Lamé** Curva caratterizzata dall'equazione cartesiana

$$x^3 + y^3 = a^3$$

oppure da quella ottenibile con una rotazione di $-\dfrac{\pi}{4}$,

$$2\,Y^3 + 6\,Y\,X^2 = \left(\sqrt{2}\,a\right)^3 \ .$$

G70:**c.17** **cissoidale di Zahradnik** Curva caratterizzata dall'equazione polare

$$\rho = \frac{\mathrm{d}}{\cos\phi} + \frac{2a\,\cos\phi + 2b\,\sin\phi}{\alpha\,\cos^2\phi + 2\beta\,\cos\phi\,\sin\phi + \gamma\,\sim^2\phi} \ .$$

V.a. EFMR2D/cissoidaledezahradnik/cissoidaledezahradnik.shtml

G70:**c.18** **trifoglio equilatero** o **trisettrice di de Longchamps** Curva caratterizzata dalle seguenti equazioni

$$x(x^2 - 3y^2) = a(x^2+y^2) \qquad \text{oppure} \qquad y = \pm\sqrt{\frac{x-a}{3x+a}}$$
$$\rho = \frac{a}{\cos 3\phi}$$
$$\begin{cases} x = a\,\dfrac{1+t^2}{1-3\,t^2} \\ y = t\,x \end{cases}$$

V.a. EFMR2D/trefleequilatere/trefleequilatere.shtml

G70:d. curve algebriche di grado 4

G70:**d.01** **quartiche** Curve che soddisfano un'equazione polinomiale di quarto grado nelle variabili cartesiane x e y, cioè un'equazione con 15 parametri. Quindi le quartiche costituiscono uno spazio proiettivo di 14 dimensioni e si può trovare una quartica imponendo che essa passi per 14 punti assegnati.
V.a. `Quartics (we)`, MW/QuarticCurve.html

G70:**d.02** **concoidi** Quartiche la cui equazione cartesiana è

$$(x^2+y^2)(x-d)^2-b^2x^2=0 \qquad \text{con } a,d\in\mathbb{R}_+$$

Essa passa per l'origine
V.a. EFMR2D/conchoid/conchoid.shtml

G70:**d.03** **concoide di Nicomede** È la concoide di una retta, cioè la curva algebrica del quarto ordine individuata dall'equazione cartesiana

$$(x^2+y^2-ax)^2-b^2(x^2+y^2)=0 \qquad \text{con } a,b\in\mathbb{R}_+$$

V.a. EFMR2D/conchoiddenicomede/conchoiddenicomede.shtml

G70:**d.04** **curva di Jerabek** Curva caratterizzata da

$$(x^2+y^2)(x-a)^2=k^2(x^2+y^2-ax)^2$$

$$\rho = s\,\frac{k\,\cos\phi-1}{k-\cos\phi}$$

Si tratta di una concoide focale di conica dotata di centro.
V.a. EFMR2D/jerabek/jerabek.shtml

G70:**d.05** **limaccia di Pascal** o **lumaca di Pascal** o **limaccia di Duerer** È la concoide di una circonferenza, cioè la curva algebrica del quarto ordine la cui equazione cartesiana è

$$(x^2+y^2-ax)^2-b^2(x^2+y^2)=0 \qquad \text{con}$$

Essa viene anche individuata dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=\cos^2 t+b\,\cos t \\ y=a\,\cos t\,\sin t+b\,\sin t \end{cases} \qquad \text{con } 0\le t\le 2\,\pi\ .$$

Essa inoltre può essere caratterizzata dall'equazione polare

$$\rho = a\,\cos\phi+b\ .$$

G70:**d.06** **cardioide** Curva algebrica del quarto ordine la cui equazione cartesiana è

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-ax)-a^2y^2=0 \qquad \text{con } a\in\mathbb{R}_+\ .$$

Essa viene anche individuata dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=a\,\cos t\,(1+\cos t) \\ y=a\,\sin t\,(1+\cos t) \end{cases} \qquad \text{con } 0\le t\le 2\,\pi\ .$$

Essa inoltre può essere caratterizzata dall'equazione polare

$$\rho = a\,(1 + \cos\phi)\ .$$

G70:**d.07** **ovali di Cassini** Curva algebrica del quarto ordine la cui equazione cartesiana è

$$(x^2 + y^2) - 2c^2(x^2 - y^2) - (a^2 - c^4) = 0 \qquad \text{con } a, c \in \mathbb{R}_+\ .$$

G70:**d.08** **ovali di Cartesio** o **curva aplanetica** o **optoide** Curva algebrica del quarto ordine la cui equazione cartesiana è

$$((1 - m^2)(x^2 + y^2) + 2m^2cx + a^2 - m^2c^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)\ .$$

G70:**d.09** **bicorno** Quartica studiata da Sylvester e Cayley, la cui equazione cartesiana è

$$y^2(a^2 - x^2) - (x^2 + 2ay - a)^2 = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad y = \frac{a^2 - x^2}{2a \pm \sqrt{a^2 - x^2}} \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}_+\ .$$

Essa viene anche individuata dalla parametrizzazione cartesiana

$$\begin{cases} x = a\ \sin\ t \\ y = a\,\dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos\ t} \end{cases} \qquad \text{con } \pi \le t \le \pi\ .$$

Si tratta di una curva chiusa invariante per $((x \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright -x))$ dotata di due cuspidi nei punti $\langle \mp a, 0\rangle$.
V.a. `Bicorn (we)` e EFMR2D/bicorne/bicorne.shtml.

G70:**d.10** **kampile di Eudosso** Curva caratterizzata da

$$a^2x^4 - b^4(x^2 + y^2) = 0$$

$$\rho = \frac{b^2}{a\ \cos^2\theta}$$

V.a. EFMR2D/campyle/campyle.shtml, `Kampyle of Eudoxus (we)`, FAMCUR/Kampyle.html

G70:**d.11** **curva kappa** o **curva di Gutschoven** Curva caratterizzata da

$$y^2(x^2 + y^2) = a^2\,x^2$$

$$\rho = a\ \cot\theta$$

Segnaliamo anche `Curva kappa (wi)` e `http://AMCUR/Kappa.html`

G70:**d.12** **perle di de Sluze** Curve caratterizzate da

$$y^n = k(a - x)^p x^m$$

V.a. FAMCUR/Pearls.html

G70:**d.13** **curva del diavolo**

$$y^4 - x^4 + ay^2 + bx^2 = 0$$

$$r = 4\,a\ \cos\theta\, sin^2\theta$$

V.a. FAMCUR/Devils.html, `Devil's curve (we)`, EFMR2D/diable/diable.shtml

G70:**d.14** **folium doppio** o **bifolium** Curva caratterizzata da

$$(x^2 + y^2)^2 = 4axy^2$$

V.a. EFMR2D/bifolium/bifolium.shtml

G70:**d.15** **conchiglie di Duerer** Curva caratterizzata da

$$(x^2 + xy + ax - b^2)^2 = (b^2 - x^2)(x - y + a)^2$$

V.a. FAMCUR/Durers.html

G70:**d.16** **curva a forma di otto** o **lemniscata di Gerono** Curva caratterizzata da

$$x^4 = a^2(x^2 - y^2)$$

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\phi \sec^4\phi$$

Oppure

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\phi$$

V.a. EFMR2D/gerono/gerono.shtml

G70:**d.17** **quartica piriforme** Curva caratterizzata da

$$b^2 y^2 = x^3(a - x) \ .$$

FAMCUR/Pearshaped.html

G70:**d.18** **quartica pisello** Curva caratterizzata da

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = x(x^2 + y^2) \ .$$

G70:**d.19** **curva bicuspide** Curva caratterizzata da

$$(x^2 - a^2)(x - a)^2 + (y^2 - a^2)^2 = 0 \quad \text{per} \quad a \in \mathbb{R}_+ \ .$$

Simmetrica rispetto ad Ox, presenta due cuspidi in $\langle a, \pm a\rangle$.
V.a. MW/BicuspidCurve.html

G70:**d.20** **quartica staffa** Curva caratterizzata da

$$(x^2 - 1)^2 = y^2(y - 1)(y - 2)(y + 5)$$

V.a. MW/StirrupCurve.html

G70:**d.21** **curva di Trott** Curva caratterizzata da

$$144(x^4 + y^4) - 225(x^2 + y^2) + 350x^2y^2 + 81 = 0$$

V.a. `Bitangents of a quartic (we)`

G70:**d.22** **curva crociforme** Curva caratterizzata da

$$x^2 + y^2 - x^2\, y^2 = 0$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sin t}{h} \\ y = 1 + \cos t \end{cases} \qquad \text{con } t \in [0, 2\,\pi] \ .$$

G70:**d.23** **quartica di Juel** Curva caratterizzata da

$$(x^2 - y^2)^2 = a^2\, x^2 - b^2\, y^2 \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}_+$$
$$\rho = \frac{\sqrt{a^2\, \cos^2\theta - b^2\, \sin^2\theta}}{\cos\, 2\theta}$$

V.a. EFMR2D/alain/alain.shtml

G70:**d.24** **ippopede di Proclo** o **lemniscata di Booth** Curva caratterizzata da

$$\big(x^2 + y^2\big)^2 + 4\, b(b - a)(x^2 + y^2) = 4\, b^2\, x^2 \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}_+$$
$$\rho^2 = 4b(a - b \sin^2\theta)$$

Essa si può anche caratterizzare come sezione spirica relativa a un piano secante parallelo all'asse del toro. È evidentemente simmetrica per riflessione rispetto ad Ox e rispetto ad Oy. Se $b = 2a$ coincide con la lemniscata di Bernoulli.
V.a. EFMR2D/booth/booth.shtml

G70:**d.25** **curva a punta di pallottola** Curva caratterizzata da

$$a^2\, y^2 - b^2\, x^2 = x^2\, y^2$$

V.a `Bullet-nose curve (we)`

G70:**d.26** **tricuspide** o **deltoide** Curva caratterizzata da

$$(x^2 + y^2)^2 - 8x(x^2 - 3y^2) + 18(x^2 + y^2) - 27 = 0$$
$$\begin{cases} x = 2\, \cos\, t + \cos\, 2t \\ y = 2\, \sin\, t - \sin\, 2t \end{cases}$$

V.a. EFMR2D/deltoid/deltoid.shtml

G70:**d.27** **lemniscata di Jacques Bernoulli** Curva caratterizzata da

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$
$$\begin{cases} x = a\, \dfrac{\sin\, t}{1 + \cos^2 t} \\[2ex] y = a\, \dfrac{\sin\, t\, \cos\, t}{1 + \cos^2 t} \end{cases}$$
$$\rho^2 = a^2\, \cos\, 2\theta \qquad \text{dove} \qquad \tan\theta = \cos\, t\ .$$

G70:**d.28** **sezioni spiriche** o **spiriche di Perseo** Quartiche individuate dall'equazione cartesiana

$$(x^2 + y^2)^2 = d\, x^2 + e\, y^2 + f$$

Particolari sezioni spiriche sono gli ovali di Cassini e la lemniscata di Bernoulli.
V.a. EFMR2D/spiricdeperseus/spiricdeperseus.shtml

G70:e. curve algebriche di grado 5

G70:**e.01** **quintiche** Curve caratterizzate da
V.a. MW/QuinticCurve.html

G70:**e.02** **curva di Burnside** Curva caratterizzata da

$$y^2 - x(x^4 - 1) = 0$$

V.a. MW/BurnsideCurve.html

G70:**e.03** **quintica di de l'Hopital** Curva caratterizzata da

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{u - u^5}{5}\right) \\ y = \dfrac{a}{4}(1 + u^2)^2 \end{cases} .$$

G70:f. curve algebriche di grado 6

G70:**f.01** **sestiche** Curve caratterizzate da
V.a. MW/SexticCurve.html, EFMR2D/sextic/sexticrationnelle.shtml

G70:**f.02** **astroide** Curva chiusa definita in una sua forma canonica dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a\,\cos^3\theta \\ y = a\,\sin^3\theta \end{cases} \quad \text{per} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Essa si può ottenere in forma implicita cartesiana con l'equazione $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$. Essa si può anche definire come ipocicloide a quattro cuspidi, ossia essa si può ottenere cinematicamente come traccia di un punto di una circonferenza di raggio $a/4$ che viene fatta rotolare all'interno di una circonferenza di raggio a; per tale motivo essa viene chiamata anche **tetracuspide**.
Questa curva ha come centro l'origine ed è invariante per le riflessioni rispetto ad Ox e rispetto ad Oy.
Essa è regolare in tutti i suoi punti a eccezione delle quattro cuspidi poste nei punti $\langle\pm 1, 0\rangle$ e $\langle 0, \pm 1\rangle$.
Segnaliamo inoltre `Astroide (wi)` e `http://XAHLEE/Astroid_dir/astroid.html`.

G70:**f.03** **nefroide di Freeth** Strofoide individuata dall'equazione polare

$$\rho = a\left(1 + 2\sin\frac{\phi}{2}\right) \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}_+$$

V.a. FAMCUR/Freeths.html

G70:**f.04** **atriftaloide** o **curva atriftotlassica** Curva caratterizzata da

$$x^4(x^2+y^2) - (ax^2-b)^2 = 0 \qquad \text{dove} \quad A, b \in \mathbb{R}_+$$

V.a. MW/Atriphtaloid.html

G70:**f.05** **quadrifoglio** o **rosa a 4 petali** Curva caratterizzata da

$$(x^2+y^2)^3 = (x^2-y^2)^2$$

$$\rho = \cos\,2\phi$$

V.a. EFMR2D/trefle/trefle.shtml, `Quadrifolium (we)`

G70:**f.06** **sestica di Cayley** Curva algebrica di grado 6 la cui equazione cartesiana è

$$4(x^2+y^2-ax)^3 = 27a^2(x^2+y^2)^2 \ .$$

G70:**f.07** **cornoide** Curva caratterizzata da

$$-4a^6+3a^2x^4+x^6+8a^4y^2-6a^2x^2y^2+3x^4y^2-5a^2y^4+3x^2y^4+y^6 = 0 \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}_+ \ .$$

Essa viene anche individuata dalla parametrizzazione cartesiana

$$\begin{cases} x = a\,\cos\,t(1-2\,\sin^2 t) \\ y = a\,\sin\,t(1+2\,\cos^2 t) \end{cases} \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}_+ \ .$$

G70:**f.08** **cicloide di Ceva** Curva caratterizzata da

$$(x^2+y^2)^3 = (3x^2-y^2)^2$$

$$\rho = 1 + 2\,\cos 2\phi$$

V.a. MW/CycloidofCeva.html

G70:**f.09** **curva di Talbot** Curva caratterizzata da

$$\begin{cases} x = (a^2 + f^2\,\sin t)\dfrac{\cos t}{a} \\ Y = (a^2 - 2f^2 + f^2\,\sin t)\,\dfrac{\sin t}{b} \end{cases}$$

V.a. MW/TalbotsCurve.html

G70:**f.10** **scarabeo** Curva caratterizzata da

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + ax)^2 - b^2(x^2 - y^2)^2 = 0 \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}_{nz}$$

$$\rho = b\,\cos 2\phi) - a\,\cos\phi \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}_{nz}$$

V.a. MW/Scarabaeus.html

G70:**f.11** **farfalla sestica** Curva caratterizzata da

$$y^6 = x^2 - x^6$$

G70:**f.12** **sestica manubrio** Curva caratterizzata da

$$a^4 y^2 = a^2\,x^4 - x^6$$

V.a. MW/DumbbellCurve.html

G70:**f.13** **sestica cuore** Curva caratterizzata da

$$a^4 y^2 = a^2\,x^4 - x^6$$

V.a. MW/HeartCurve.html

G70:**f.14** **evoluta di ellisse** L'ellisse definita dalla parametrizzazione cartesiana $\left\{\begin{array}{l} X = a\,\cos t \\ Y = b\,\sin t \end{array}\right]$ con $0 < b < a$ ha come evoluta la curva data dalla parametrizzazione cartesiana

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\,\cos^3 t \\ y = \dfrac{b^2 - a^2}{b}\,\sin^3 t \end{array}\right]$$

o dall'equivalente equazione cartesiana

$$(a\,x)^{2/3} + (b\,y)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

V.a. MW/EllipseEvolute.html

G70:**f.15** **evoluta di limaccia di Etienne Pascal** La limaccia definita dalla equazione polare $\rho = b + a\,\cos\phi$ ha come evoluta la curva data dalla parametrizzazione cartesiana

$$\begin{cases} x = \dfrac{a\left[4a^2 + 4b^2 + 9ab\cos t - ab\,\cos 3t\right]}{4(2a^2 + b^2 + 3ab\,\cos t)} \\ y = \dfrac{a^2\,b\,\sin^3 t}{2a^2 + b^2 + 3\,a\,b\,\cos t} \end{cases}$$

G70:**f.16** **curva di Watt** Curva caratterizzata da

$$\rho^2 = b^2 - \left[a \sin\phi \pm \sqrt{c^2 - a^2 \cos^2\phi}\right]^2 \ .$$

V.a. EFMR/courbes2D/watt/watt.shtml

G70:**f.17** **curva della bocca** o **curva del bacio** Curva caratterizzata da

$$a^4 y^2 = (a^2 - x^2)^3$$

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \ .$$

G70:**f.18** **trisettrice di Ceva** Curva caratterizzata da

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2 (3x^2 - y^2)^2 \ ,$$

$$\rho = a\,(1 + 2\cos 2\phi) = a\,\frac{\sin 3\phi}{\sin\phi} \ .$$

G70:g. curve algebriche di grado 7 e 8

G70:**g.01** **settiche** Curve caratterizzate da
V.a. EMFR/courbes2d/septic/septic.shtml

G70:**g.02** **biquadriche** Curve caratterizzate da
V.a. EMFR/courbes2d/biquartic/biquartic.shtml

G70:**g.03** **toroidi** Curve parallele all'ellisse: la parametrizzazione cartesiana del toroide parallelo all'ellissi caratterizzata da $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$ che presenta la distanza d e

$$\begin{cases} x = \left(a \pm \dfrac{bd}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}\right) \cos t \\ y = \left(b \pm \dfrac{ad}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}\right) \sin t \end{cases} .$$

Esse danno il contorno apparente di una superficie torica.
V.a. EMFR/courbes2d//toroid/toroid.shtml

G70:**g.04** **ovali di Cayley** Curve caratterizzate da
V.a. EMFR/courbes2d/cayleyovale/cayleyovale.shtml

G70:**g.05** **cuore di Raphael Laporte** Curva caratterizzata da
V.a. `EMFR/courbes2d/ornementales/ornementales.shtml`

G70:h. famiglie con curve algebriche di gradi diversi

G70:**h.01** **curve di Lissajous** o **curve di Bowditch** Curve caratterizzate da

$$\begin{cases} x = a \, \dfrac{\sin(m+n)t}{\sin(m-n)t} \\ y = b \, \sin t \end{cases}$$

V.a. `Lissajous curve (we)`

G70:**h.02** **curve rodonee** Curve caratterizzate da

$$\rho = a \, \sin(q \, \phi) \quad \text{con} \quad q \in \mathbb{Q}_+$$

Se $k = 2h+1$ è un intero dispari la curva si dice **rosa a** $2h+1$ **petali**; se $k = 2h$ è un intero pari la curva si dice **rosa a** $4h$ **petali**.
V.a. `Rhodonea curve (we)`, MW/Rose.html

G70:**h.03** **curve di Lamé** o **superellissi** Curve caratterizzate da

$$\left|\frac{x}{a}\right|^r + \left|\frac{y}{b}\right|^r = 1 \qquad \text{con } a, b, r \in \mathbb{R}_+$$

$$\begin{cases} x = a \, \cos^{2/r} t \\ y = b \, \sin^{2/r} t \end{cases}$$

V.a. `Superellipse (we)`, MW/Superellipse.html

G70:**h.04** **folioide** Curva caratterizzata dall'equazione polare

$$\rho^2 + b^2 - 2\, b\, \rho \, \cos n\phi = a^2 \qquad \text{con } a, b, n \in \mathbb{R}_+$$

o dalla equivalente

$$\rho = a \left(e \, \cos n\phi \pm \sqrt{1 - e^2 \, \sin^2 n\phi} \right) \qquad \text{dove} \quad e = \frac{b}{a} \; .$$

G70:i. cicloidi, epicicloidi e ipocicloidi

G70:**i.01** **cicloide** Curva periodica illimitata individuata dalla parametrizzazione cartesiana

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad \text{per} \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

Si tratta di una rulletta e si può ottenere meccanicamente come curva tracciata da un punto fissato su una circonferenza di raggio a che viene fatta rotolare sopra una retta Ox. Si tratta di una curva periodica di periodo 2π il cui diagramma è invariante per traslazioni orizzontali di passo $2\pi a$.
Per prima salita della cicloide si intende la curva aperta limitata caratterizzata dalle equazioni (1) limitando la variabile indipendente $t \in [0, \pi]$. Le (1) mostrano che il diagramma della prima salita , al crescere della t da 0 a π vede crescere la x da 0 ad $a\pi$ e la y da 0 a $2a$. L'arco di cicloide relativo a $t \in [\pi, 2\pi]$ si ottiene dalla prima salita per riflessione rispetto alla retta $x = \pi a$
La prima salita della cicloide si caratterizza facilmente con l'equazione cartesiana ottenuta sostituendo la t nella prima equazione (1) con l'espressione $t = \arccos\left(1 - \dfrac{y}{a}\right)$ equivalente alla seconda equazione, cioè con l'espressione

$$(2) \qquad x = a \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}\ .$$

Chiaramente la cicloide è regolare per ogni x reale a eccezione delle ascisse $k\,a\,\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ in ciascuno dei quali presenta una cuspide.
Per l'area delimitata da un'arcata della cicloide, a es. di quella corrispondente a $0 \le x \le 2\pi$, si trova (SC2 190) che vale $3\pi a^2$.
Inoltre vanno segnalati `http://EFMR2D/cycloid/cycloid.shtml`, `Cicloide (wi)` e `Tautochrone curve (we)`.

G70:**i.02** **epitrocoide**

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos t - c\,\cos((a/b+1)t) \\ y = (a+b)\sin t - c\,\sin((a/b+1)t) \end{cases}$$

V.a. EFMR2D/epitrochoid/epitrochoid.shtml

G70:**i.03** **brachistocrona** È la curva riflessa rispetto ad Ox della cicloide.
V.a. `Brachistochrone (we)`

G70:j. spirali

G70:**j.01** Le spirali sono curve dotate di punti asintotici e di conseguenza non sono curve algebriche, ma curve trascendenti.
V.a. `Spiral (we)`

G70:**j.02** **spirale di Archimede**

$$\rho = a + b\,\phi$$

V.a. EFMR2D/archimede/archimede.shtml

G70:**j.03** **spirale iperbolica**

$$\rho = \frac{a}{\phi} \quad \text{per} \quad \phi \in \mathbb{R}_{nz} \;\; \text{e} \;\; a \in \mathbb{R}_+ \; .$$

G70:**j.04** **spirale logaritmica** o **spirale equiangolare** o **spirale di Jacques Bernoulli**

$$\rho = a\, \exp(\phi\, \cot\, b)$$

V.a. `Spirale logaritmica (wi)`

G70:**j.05** **spirale sinusoidale**

$$\rho^\nu = 2\, a^\nu \,\cos\, \nu\phi \quad \text{per} \quad \nu \in \mathbb{R}\;,\; a \in \mathbb{R}_+$$

V.a. EFMRcourbes2d/spiralesinusoidale/spiralesinusoidale.shtml

G70:**j.06** **spirale di Fermat**

$$\rho^2 = a^2\, \phi \quad \text{per} \quad a \in \mathbb{R}_+$$

V.a. `Fermat's_spiral (we)`, MW/FermatsSpiral.html

G70:**j.07** **lituo**

$$\rho^2 = \frac{a^2}{\phi} \quad \text{per} \quad a \in \mathbb{R}_+$$

V.a. *Lituus.html*

G70:**j.08** **involuta della circonferenza**

$$\begin{cases} x = a\,(\cos\, t + t\, \sin\, t) \\ y = a\,(\sin\, t - t\, \cos\, t) \end{cases}$$

G70:**j.09** **clotoidi** o **spirali di Cornu** o **spirale di Eulero** o **spirale di Nielsen** Curva individuata dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a\sqrt{\pi} \displaystyle\int_0^t du\, \cos\left(\frac{\pi\, u^2}{2}\right) \\ y = a\sqrt{\pi} \displaystyle\int_0^t du\, \sin\left(\frac{\pi\, u^2}{2}\right) \end{cases} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}_+ \quad \text{per} \quad t \in \mathbb{R} \; .$$

La forma delle precedenti equazioni implica che essa presenti un centro di simmetria nell'origine O, punti appartenenti al primo quadrante e punti appartenenti al terzo quadrante. Inoltre essa presenta due punti asintotici, $A = \left\langle \frac{a\sqrt{\pi}}{2}, \frac{a\sqrt{\pi}}{2} \right\rangle$ e $-A = \left\langle -\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{a\sqrt{\pi}}{2} \right\rangle$.
Detto $P(t)$ il suo punto corrente e posto $s := a\,\sqrt{\pi}\, t$, tale parametro esprime la lunghezza dell'arco da O a P se questo punto sta nel primo quadrante e l'opposto di tale lunghezza sse P sta nel terzo

quadrante La spirale di Eulero è caratterizzata dal fatto che la sua curvatura $1/r$ nel punto corrente P è proporzionale a $|s|$: $\dfrac{1}{r} = \dfrac{s}{a^2}$.
V.a. `Euler spiral (we)`

G70:**j.10 spirale SiCi**

$$\begin{cases} x = -a\,\mathrm{Ci}(t) = a \displaystyle\int_t^{+\infty} \mathrm{d}u\, \frac{\cos\,u}{u} \\ y = a\left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(t)\right) = a \displaystyle\int_t^{+\infty} \mathrm{d}u\, \frac{\sin\,u}{u} \end{cases} \qquad \text{dove} \quad a \in \mathbb{R}_+$$

In queste formule compaiono le funzioni seno integrale e coseno integrale:

$$Si(x) \;:=\; \int_0^x \mathrm{d}t\, \frac{\sin\,t}{t} \quad , \quad Ci(x) \;:=\; \gamma_{em} + \ln x + \int_0^x \mathrm{d}t\, \frac{\cos\,t - 1}{t} \;.$$

V.a. EFMR2D/sici/sici.shtml, `Trigonometric integral (we)`

G70:**j.11 spirale trattrice** Curva caratterizzata dalla parametrizzazione polare

$$\begin{cases} \rho = a\,\cos\,t \\ \phi = \tan\,t - t \end{cases} \qquad \text{per} \quad -\pi < t < \pi$$

oppure dall'equazione polare

$$\phi = \pm\left(\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho} - \arccos\frac{\rho}{a}\right) \qquad \text{dove} \quad a \in \mathbb{R}_+$$

V.a. EFMR2D/spiraletractrice/spiraletractrice.shtml

G70:**j.12 spirali di Poinsot** Famiglia di curve caratterizzata dalla equazione polare

$$\rho = \frac{a}{c\,\cosh\,k\phi + s\,\sinh\,k\phi} \qquad \text{con } a, c, s \in \mathbb{R}\;,\; c^2 + s^2 > 0$$

Se $|c| = |s|$ si ha una spirale logaritmica; se $|c| > |s|$ si hanno spirali che si avvicinano alla spirale limitata caratterizzata dall'equazione $\rho = b\,\mathrm{csch}\;k\phi$; se $|c| < |s|$ si hanno spirali che si avvicinano alla spirale dotata di asintoto data dalla $\rho = b\,\mathrm{sech}\,k\phi$.
V.a. EFMR2D/poinsot/poinsot.shtm

G70:k. altre curve trascendenti

G70:**k.01** **catenaria** Curva costituente il diagramma della funzione

$$y = \cosh x = \frac{\mathsf{e}^x + \mathsf{e}^{-x}}{2} \ .$$

Si segnalano anche `[Catenaria (wi)`, `Catenary (we)` e `http://EFMR2D/chainette/chainette.shtml`.

G70:**k.02** **catenaria elastica** Curva caratterizzata dalle due seguenti parametrizzazioni cartesiane equivalenti

$$\begin{cases} x = a\,(\operatorname{arsinh} t + k\,t) \\ y = a\left(\sqrt{1+t^2} + \frac{k}{2}\,t^2\right) \end{cases} , \quad \begin{cases} x = a\,(u + k\,\sinh\,u) \\ y = a\left(\cosh\,u + \frac{k}{2}\,\sinh^2\,u\right) \end{cases} \qquad \text{con } a, k \in \mathbb{R}_+ \ , \quad t = \sinh\,u$$

V.a. EFMR2D/chainette/chainetteelastique.shtml

G70:**k.03** **distribuzione normale degli errori**

$$y = \sqrt{2\,\pi}\,\mathsf{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

V.a. `Curva degli errori (wi)`, `Normal distribution (we)`.

G70:**k.04** **trattrice** Curva individuata dall'equazione cartesiana

$$x^2 = \left[a\,\operatorname{arcosh}\left(\frac{a}{y}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}\right]^2 \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}_+ \ .$$

Si tratta quindi di una curva pari che per x crescente da 0 a $+\infty$ decresce dal massimo in $\langle 0, a\rangle$ a 0, ammettendo Ox come asintoto orizzontale. Essa in $\langle 0, a\rangle$ presenta una cuspide con tangente verticale. Essa è caratterizzata dal fatto che la sua tangente in un suo qualsiasi punto P interseca Ox in un punto T tale che $PT = a$.
V.a. `Trattrice (geometria) (wi)`

G70:**k.05** **sintrattrice** Curva individuata dall'equazione cartesiana

$$x + \sqrt{b^2 - y^2} = a\,\ln\frac{b + \sqrt{b^2 - y^2}}{y}$$

V.a. `Syntractrix (we)`

G70:**k.06** **farfalla** Curva caratterizzata dall'equazione polare

$$\rho = \mathsf{e}^{\sin\phi} - 2\,\cos\,4\phi) + \sin^5\left[\frac{1}{24}(2\,\phi - \pi)\right]$$

o dalla parametrizzazione cartesiana

$$\begin{cases} x = \sin\,t\left[\mathsf{e}^{\cos\,t} - 2\,\cos\,4t + \sin^5\frac{t}{12}\right] \\ y = \cos\,t\left[\mathsf{e}^{\cos\,t} - 2\,\cos\,4t + \sin^5\frac{t}{12}\right] \end{cases} .$$

G70:**k.07** **cocleoide** Curva caratterizzata da

$$\rho = a\,\frac{\sin\phi}{\phi}$$

$$(x^2+y^2)\ \arctan\frac{y}{x} = ay$$

Essa viene anche individuata dalla parametrizzazione cartesiana

$$\begin{cases} x = \dfrac{a\ \sin\ t\ \cos\ t}{t} \\ y = \dfrac{a\sin^2 t}{t} \end{cases} \qquad \text{con}\ \ .$$

G70:**k.08** **quadratrice di Abdank-Abakanowicz** Curva individuata dalla parametrizzazione cartesiana

$$\begin{cases} x = a\ \sin\ t \\ y = \dfrac{a^2}{2}(t+\sin\ t\ \cos\ t) \end{cases} \qquad \text{con}\ a \in \mathbb{R}_+\ .$$

G70:**k.09** **alisoide di Cesaro** Curva caratterizzata da

$$\begin{cases} x = k^2\,a\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}u\,\frac{\cos\ u}{\cos^2\ k\,u} \\ y = k^2\,a\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}u\,\frac{\sin\ u}{\cos^2\ k\,u} \end{cases} \qquad \text{con}\ a,b \in \mathbb{R}_+\ ,\ \ k := \frac{b}{a}\ .$$

G70:**k.10** **curva balistica** o **parabola smorzata** Curva caratterizzata da

$$y = \frac{b}{a}\,x + c\ \ln\left(1-\frac{x}{a}\right)\ .$$

G70:**k.11** **curve di Joseph Plateau** Curve caratterizzate da

$$\begin{cases} x = a\,\dfrac{\sin(nt+c)}{\sin(m-n)t} \\ y = 2a\,\dfrac{\sin\ mt\ \sin\ nt}{\sin(m-n)t} \end{cases}$$

Evidentemente sono curve simmetriche rispetto ad Ox.
V.a. MW/PlateauCurves.html

G70:**k.13** **quadratrice di Ippia** o **trisettrice di Ippia** o **quadratrice di Dinostrato** Curva caratterizzata da

$$y = x\ \cot\left(\frac{\pi\,x}{2\,a}\right)$$

$$\rho = \frac{2\,a\,\phi}{\pi\ \sin\ \phi}$$

V. a. FAMCUR/Quadratrix.html, EFMR2D/dinostrate/dinostrate.shtml,
XAHLEE_dir/QuadratrixOfHippias_dir/quadratrixOfHippias.html

G70:**k.14** **sezioni toriche** Per sezione torica si intende una curva piana ottenuta come intersezione di un toro con un piano. Quando il piano secante è parallelo all'asse di simmetria cilindrica del toro si hanno curve dell'insieme delle sezioni spiriche.
V.a. MW/ToricSection.html

G70:**k.15** **curva cuore di Dascanio** Essa viene individuata dalla parametrizzazione cartesiana

$$\begin{cases} x = \sin\ t\ \cos\ t\ \ln|t| \\ y = |t|^{3/10}\sqrt{\cos\ t} \end{cases} \qquad \text{con}\ \ .$$

G70:**k.16** **curva cuore di Kuriscak**

$$x^2 + \left[y + \frac{2(x^2+|x|-6)}{3(x^2+|x|+2)}\right]^2 = 36$$

V.a. MW/HeartCurve.html

G70:**k.17** **curva piriforme** Caratterizzata dalla parametrizzazione cartesiana

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sin\, t}{h} \\ y = 1 + \cos\, t \end{cases} \qquad \text{con } t \in [0, 2\,\pi]\ ,\ \ h \in [2, +\infty)\ .$$

G70:**k.18** **curva di Joukovski** o **ala d'aeroplano**
V.a. EFMR2D/joukowski/joukowski.shtml

G70:**k.19** **curva della mascotte** Curva definita cinematicamente dalle equazioni

$$\begin{cases} x = V_0\, t + R\,\cos\phi \\ y = R\,\sin\phi \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathrm{d}\phi}{st} = \omega_0 \left(\sin\phi + \sqrt{k^2 - \sin^2\phi}\right)$$

$$\text{dove} \quad V_0, V, R \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad \omega_0 := \frac{V_0}{R} \quad , \quad k := \frac{V}{V_0}$$

Queste portano alla traiettoria avente come parametrizzazione cartesiana

$$\begin{cases} x = R\left(\cos\phi + \displaystyle\int_0^\phi \frac{\mathrm{d}\psi}{\sin\psi + \sqrt{k^2 - \sin^2\,\psi}}\right) \\ y = R\,\sin\phi \end{cases} .$$

G70:**k.20** **settrice di MacLaurin** o **settrice di Plateau** o **curva isociclotomica** Luogo dei punti in cui si intersecano due rette che ruotano la prima, $\mathcal{R}_O$, intorno all'origine O con velocità angolare ω, la seconda, $\mathcal{R}_a$, intorno al punto $A = \langle a, 0\rangle$ con velocità angolare $k\,\omega$, essendo ϕ_0 l'angolo formato dalle due rette quando $\mathcal{R}_O$ passa per A (ed è orizzontale. La curva è caratterizzata dall'equazione polare con centro nell'origine

$$\rho = a\,\frac{\sin(\phi_0 + k\phi)}{\sin(\phi_0 + (k-1)\phi)}\ .$$

Alternativamente dall'equazione polare con centro in A

$$\sigma = a\,\frac{\sin\,\frac{\psi}{k}}{\sin\left(\phi_0 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\psi\right)}\ .$$

Scambiare k con $\dfrac{1}{k}$ equivale a scambiare O e A. Se $k = 2$ o $k = \dfrac{1}{2}$ la settrice è una circonferenza; se $k = -1$ la retta asse di simmetria per riflessione del segmento OA; se $k = 3$ si ha la trisettrice di MacLaurin.
V.a. `http://EFMR2D/sectrice/sectricedemaclaurin.shtml`

G70:**k.21** **curva dei meandri** o **curva generata dal seno**

$$\begin{cases} x = a\,\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}u\,\cos(\phi_m a x \sin\,u) \\ y = a\,\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}u\,\sin(\phi_m a x \sin\,u) \end{cases} .$$

G70:**k.22 curva elastica** Curva tale che la sua curvatura in ogni suo punto P è proporzionale alla sua distanza da una data retta; questa retta è chiamata direttrice della curva.

$$\begin{cases} x = a\,\sqrt{k+\cos t} \\ y = \dfrac{a}{2}\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}u\,\frac{\cos u}{\sqrt{k+\cos u}} \end{cases} .$$

G70:I. curve ricavate da altre curve

G70:**I.01** **curve isottiche** Per curva isottica d'angolo α di una data curva Γ si intende il luogo dei punti dai quali si possono tracciare due tangenti alla Γ che delimitano un angolo di ampiezza α.
V.a EFMR2D/isoptic/isoptic.shtml

G70:**I.02** **rullette** e **curve cicloidali** Per rulletta si intende una curva piana ottenibile meccanicamente a partire da due curve piane regolari date, una M mobile che chiameremo **curva rotolante** e una fissa G che diremo **curva guida**; la M deve essere una curva chiusa e denotiamo con I_M l'insieme ottenuto ampliando M con i punti del suo interno; la G può essere sia aperta che chiusa e in genere non è intrecciata. La curva M viene fatta rotolare senza strisciare a contatto di un lato della curva G (questo pone restrizioni alle curvature di M e G). Una rulletta si ottiene come traccia di un punto stabilito T fissato rigidamente ad Mo ad I_M.

Le **curve cicloidali** sono le particolari rullette aventi come curva mobile M una circonferenza. Viene tracciata: una cosiddetta curva cicloidale propria sse il punto tracciante T appartiene ad M; una curva cicloidale contratta sse T è punto interno ad M; una curva cicloidale estesa sse T è esterno ad I_M. Le curve cicloidali contratte ed estese sono chiamate anche **trocoidi**.
V.a. EFMR2D/trochoid/trochoid.shtml

G70:**I.03** **podaria** o **pedale** Data una curva Γ e un punto P, si dice podaria della Γ rispetto al polo P l'insieme dei punti x individuati come proiezioni ortogonali di P sulle diverse rette tangenti t alla Γ; il punto $\mathsf{x}(\mathsf{t})$ viene chiamato anche piede di P sulla t.

Se Γ è data dalla parametrizzazione cartesiana $\begin{cases} X = F(t) \\ Y = G(t) \end{cases}$, la tangente $\mathsf{t}(t)$ alla Γ in $\langle F(t), G(t)\rangle$ ha equazione $\left\| \dfrac{y-G(t)}{G'(t)} = \dfrac{x-F(t))}{F'(t)} \right\|$.
La proiezione di $P = \langle x_P, y_P\rangle$ sulla $\mathsf{t}(t)$ si trova sulla perpendicolare alla tangente che passa per P, cioè sulla $\left\| \dfrac{y-y_P}{F'(t)} = -\dfrac{x-x_P)}{G(t)} \right\|$.
Di conseguenza il punto generico della podaria è dato da

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_P\, F'^2(t) + (y_P - G(t))\, F'(t)\, G'(t) + F(t)\, G'^2(t)}{F'^2(t) + G'^2(t)} \\ y = \dfrac{G(t)\, F'^2(t) + (x_P - F(t))\, F'(t)\, G'(t) + y_P\, F'^2(t)}{F'^2(t) + G'^2(t)} \end{cases}$$

V.a. EFMR2D/podaire/podaire.shtml

G70:**I.04** **antipodaria** o **ortocaustica** Si dice antipodaria di una curva Γ rispetto al punto P, chiamato polo, la curva G tale che Γ è la podaria della G rispetto a P
V.a. EFMR2D/antipodaire/antipodaire.shtml

G70:**I.05** **inviluppo** Si consideri una famiglia a un parametro τ di curve piane $\mathsf{F} = \{\tau \in T :| \Gamma_\tau\}$; si dice inviluppo di tale famiglia il luogo dei punti caratteristici di tali curve, cioè il luogo costituito dai punti di intersezione di $\Gamma\tau$ e $\Gamma_{\tau'}$ per $\tau' \to \tau$.
La curva inviluppo di una famiglia F è tangente a ciascuna delle curve Γ_τ e in linea di massima ogni curva Γ_τ è tangente in almeno un punto alla curva inviluppo.

V.a. EFMR2D/enveloppe/enveloppe.shtml

G70:**I.06** **evoluta** L'evoluta di una curva Γ è il luogo dei suoi centri di curvatura.
V.a. EFMR2D/developpee/developpee.shtml

G70:**I.07** **caustica**
V.a. EFMR2D/caustic/caustic.htm

G70:**I.08** **curva ortotomica**
V.a. EFMR2D/orthotomic/orthotomic.shtml

G70:**I.09** **anticaustica**
V.a. EFMR2D/anticaustic/anticaustic.shtml

G70:**I.10** **reciproca polare**

G70:**I.11** **cissoidale** Date due curve Γ_1 e Γ_2, si dice cissoidale di tali curve rispetto a un punto P il luogo dei punti M tali che $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PM_1} + \overrightarrow{PM_2}$, dove M_1 è un punto generico di Γ_1, M_2 è il corrispondente punto di Γ_2 allineato con P ed M_1
V.a. EFMR2D/cissoidale/cissoidale.shtml

G70:m. altre collezioni di curve

G70:**m.01** **curva autoparallela** o **curva orbiforme** o **curva di larghezza costante**
Curva connessa parallela a se stessa.
V.a. EFMR2D/largeur%20constante/largeur%20constante.shtml

G70:**m.02** **curve di inseguimento**

$$y = cx^2 - \ln x \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}_+$$

V.a. FAMCUR/Pursuit.html

G70:**m.03** **curva anallagmatica**
V.a. EFMR2D/anallagmatic/anallagmatic.shtml

G70:n. indice KWIC dei nomi di curve piane

A

B

C

D

E

F

G

I

N

O

P

Q

R

S

T

V W Z

Testi dell'*esposizione* in http://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e in http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/