Capitolo G64:
geometria differenziale delle superfici

Contenuti delle sezioni

28 pagine

G64:**0.01** Questo capitolo è dedicato alle nozioni basilari della geometria differenziale delle superfici nello spazio tridimensionale sui reali.

All'inizio vengono esposte le nozioni primarie per le superfici e le equazioni che consentono di analizzarle.
Successivamente vengono presentati oggetti geometrici che vengono associati a ogni loro punto, piano tangente e paraboloide osculatore.
Vengono poi introdotte la prima forma fondamentale e vengono individuate espressioni per il calcolo della loro area; viene successivamente esaminata la curvatura normale.
Per effettuare analisi attente delle superfici vengono introdotte le linee di curvatura, la curvatura media e la curvatura totale o gaussiana.
In seguito viene trattata la geometria intrinseca delle superfici e vengono presentate le linee geodetiche sopra una superficie.
In una ultima sezione vengono introdotte le superfici chiuse e viene loro assegnata la caratteristica di Euler.

G64:a. superfici [1]

G64:**a.01** Riprendiamo le nozioni basilari sulle superfici nello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Per **dominio piano** intendiamo un insieme di punti di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aperto, cioè costituito da punti interni, e connesso, cioè tale che dato un qualsiasi duetto di suoi punti è possibile collegarli mediante una poligonale con tutti i segmenti contenuti nell'insieme. Ricordiamo che si distinguono i domini piani semplicemente connessi da quelli molteplicemente connessi: per i primi tutte le poligonali chiuse si possono ridurre con continuità a punti; per i secondi esistono poligonali che non sono riducibili con continuità a punti. Esempi di domini piani molteplicemente connessi son i domini ottenibili da domini semplicemente connessi eliminando loro sottodomini piani chiusi; in parole povere "domoni piani con buchi".

G64:**a.02** Per **superficie elementare** intendiamo un insieme di $\mathbb{R}^{\times 3}$ ottenuto da un dominio piano attraverso una trasformazione topologica.
Si dice **superficie semplice** una superficie Σ tale che ciascuno dei suoi punti possiede un intorno 3D V tale che $\Sigma \cap V$ sia superficie elementare.
Diciamo invece **superficie generica** una superficie ottenibile applicando una trasformazione topologica a una superficie semplice.

G64:**a.03** Introduciamo ora la nozione di superficie parametrizzata e per essa faremo riferimento a uno spazio del genere $\mathbb{R}^{\times 3}$ e a uno spazio del genere $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. I punti del primo spazio sono individuabili con le terne di coordinate cartesiane per le quali usiamo la notazione $\langle x, y, z\rangle$ o sue varianti; i punti dello spazio 2D sono individuabili con le coppie di coordinate cartesiane per le quali usiamo la notazione $\langle u, v\rangle$ o sue varianti.
Diciamo **superficie parametrizzata** una superficie ottenibile come insieme di punti di uno spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ ottenuti da una trasformazione topologica della forma

$$\mathsf{r}(x, y, z) \;=\; \mathsf{f}(u, v) \;=\; \big\langle \xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v)\big\rangle \;,$$

per il punto $\langle u, v\rangle$ che corre entro un dominio piano D.
Le equazioni

$$x = \xi(u, v) \qquad , \qquad y = \eta(u, v) \qquad , \qquad z = \zeta(u, v) \qquad \text{per} \qquad \langle u, v\rangle \in \mathsf{D}$$

si dicono **equazioni parametriche della superficie** o anche **rappresentazione parametrica della superficie**.

G64:**a.04** Ciascuno dei punti $\big\langle \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\big\rangle$ di una superficie Σ si può individuare mediante la coppia di variabili $\big\langle \overline{u}, \overline{v}\big\rangle$ tali che

$$\overline{x} = \xi(\overline{u}, \overline{v}\rangle \qquad , \qquad \overline{y} = \eta(\overline{u}, \overline{v}\rangle \qquad , \qquad \overline{z} = \zeta(\overline{u}, \overline{v}\rangle \;.$$

Le variabili u e v si possono quindi considerare coordinate per la superficie: esse sono dette **coordinate curvilinee** o **coordinate di Gauss** della superficie.

Per la parametrizzazione di una superficie spesso si usano anche notazioni come le seguenti

$$\mathsf{r} \;=\; \mathsf{f}(u, v) \qquad \text{con} \qquad \mathsf{r} \;=\; x\,\mathsf{e}_x + y\,\mathsf{e}_y + z\,\mathsf{e}_z \qquad \text{e}$$

$$\mathsf{f}(u, v) \;=\; f_1(u, v)\,\mathsf{e}_x \;+\; f_2(u, v)\,\mathsf{e}_y \;+\; f_3(u, v)\,\mathsf{e}_z \;.$$

Sopra la superficie Σ si possono individuare molte curve. In particolare si individuano le curve appartenenti a Σ fornite dalle equazioni parametriche fissando un particolare valore per la prima o per la seconda delle variabili u e v. Diremo u-**curve** di Σ quelle ottenute fissando particolari valori della seconda variabile e diremo v-**curve** di Σ quelle ottenute fissando particolari valori della prima variabile.

G64:**a.05** Sia m un intero positivo. Si dice **parametrizzazione** m-**regolare** di una superficie Σ una rappresentazione parametrica della forma

(1) $$\forall\langle u,v\rangle \in \mathsf{D} \quad \vdots \quad x = f_1(u,v) \quad , \quad y = f_2(u,v) \quad , \quad z = f_3(u,v) \qquad \text{per}$$

con D dominio piano di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ed f_1, f_2 e f_3 funzioni bivariate differenziabili con continuità m volte e tali che in ogni punto di D abbia rango 2 la matrice

$$\begin{bmatrix} f_{1,u} & f_{2,u} & f_{3,u} \\ f_{1,v} & f_{2,v} & f_{3,v} \end{bmatrix} .$$

L'ultima richiesta equivale a chiedere che almeno uno dei tre determinanti 2×2 della matrice precedente sia diverso da 0, ovvero che i due vettori derivate parziali f_u e f_v diano $\mathsf{f}_u \wedge \mathsf{f}_v \neq 0$, ossia che i due vettori f_u e f_v siano entrambi nonnulli e noncollineari.

G64:**a.06** Una superficie 1-regolare si dice anche **superficie liscia** (*smooth*).

Prop. Si consideri una superficie liscia Σ data dalle equazioni a05(1) e tale che in un punto $Q_0 = \big\langle u_0, v_0\big\rangle$ sia

(1) $$\begin{bmatrix} f_{1,u}(u_0,v_0) & f_{2,u}(u_0,v_0) \\ f_{1,v}(u_0,v_0) & f_{2,v}(u_0,v_0) \end{bmatrix} \neq 0 \ .$$

Allora la superficie in un intorno di Q_0 ammette una parametrizzazione della forma

$$z \ = \ F(x,y).$$

Dim.: Per il teorema delle funzioni esplicite la (1) garantisce che le equazioni

$$x = f_1(u,v) \qquad \text{e} \qquad y = f_2(u,v)$$

possono essere risolte in un intorno di Q_0 ottenendo espressioni della forma

$$u \ = \ \phi(x,y) \qquad \text{e} \qquad v \ - \ \psi(x,y) \ .$$

Sostituiamo le variabili x e y, con risp., le variabili $\overline{x}$ e $\overline{y}$ in modo da avere le equazioni $u \ = \ \phi(\overline{x},\overline{y})$ e $v \ = \ \psi(xol,\overline{y})$; otterremo allora

$$x \ = \ \overline{x} \qquad , \qquad y \ = \ \overline{y} \qquad , \qquad z \ = \ f_3\left(\phi(\overline{x},\overline{y}) \ , \ \psi(\overline{x},\overline{y})\right) \ ,$$

ovvero le equazioni equivalenti

$$z \ = \ f_3\left(\phi(x,y) \ , \ \psi(x,y)\right) \ .$$

L'equazione a cui siamo giunti ha la forma richiesta ▮

G64:b. piano tangente a una superficie

G64:**b.01** Consideriamo una superficie Σ un suo punto P ed un piano π passante per P. Consideriamo anche un punto Q della superficie (intuitivamente nelle vicinanze di P) e denotiamo con d la distanza $|Q-P|$ e con h la distanza di Q da Π. Se passando al limite per $Q \to P$ il rapporto $\dfrac{h}{d}$ tende a 0, allora diciamo che Π è il piano tangente a Σ in P.

G64:**b.02** **Prop.** Una superficie liscia possiede un piano tangente in ciascuno dei suoi punti.

Dim.: . . . . . .

G64:**b.03** Ci proponiamo ora di trovare equazioni per il piano tangente.

Denotiamo con $P_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle = \mathsf{r}(u,v)$ per $\langle u,v \rangle \in \mathsf{D}$ il punto generico della superficie Σ e questa sia data attraverso le equazioni parametriche generali

$$x_0 \;=\; \xi(u,v) \qquad , \qquad y_0 \;=\; \zeta(u,v) \qquad , \qquad z_0 \;=\; \zeta(u,v) \;. \tag{1}$$

Denotiamo invece con $P = \langle x,y,z \rangle$ il punto corrente sul piano tangente della Σ in P_0.
Chiaramente la condizione che i tre vettori applicati in P_0, $\overrightarrow{P_0\,P}$, $D_u\,\mathsf{r}(u,v)$ e $D_v\,\mathsf{r}(u,v)$ siano complanari costituisce una caratterizzazione del piano tangente in p_0; quindi l'equazione di tale piano è la

$$\overrightarrow{P_0\,P} \cdot [D_u\,\mathsf{r}(u,v) \wedge D_v\,\mathsf{r}(u,v)] = 0 \;, \tag{2}$$

ovvero, nelle coordinate cartesiane x, y e z,

$$\begin{bmatrix} x-\xi(u,v) & y-\eta(u,v) & z-\zeta(u,v \\ D_u\,\xi(u,v) & D_u\,\eta(u,v) & D_u\,\zeta(u,v) \\ D_v\,\xi(u,v) & D_v\,\eta(u,v) & D_v\,\zeta(u,v) \end{bmatrix} \;=\; 0 \qquad . \tag{3}$$

G64:**b.04** Consideriamo il caso più particolare della superficie data da un'equazione della forma $z \;=\; \zeta(x,y)$. Questa caratterizzazione si riconduce alla generale :.03(1) riscrivendola nella forma

$$x_0 \;=\; u \qquad , \qquad y_0 \;=\; v \qquad , \qquad z_0 \;=\; \zeta(u,v) \qquad ,$$

Di conseguenza l'equazione del piano tangente assume la forma particolare della **b03**(3)

$$\begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-\zeta(x_0,y_0) \\ 1 & 0 & D_{x_0}\,\zeta(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & D_{y_0}\,\zeta(x_0,y_0) \end{bmatrix} \;=\; 0 \qquad .$$

ossia l'equivalente

$$z-\zeta(x_0,y_0) \;=\; D_{x_0}\,\zeta(x_0,y_0)\,(x-x_0) + D_{y_0}\,\zeta(x_0,y_0)\,(y-y_0) \;.$$

G64:**b.05** Esaminiamo anche l caso di una superficie Σ data in forma implicita data con le condizioni

$$F(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad (D_{\overline{x}}\,F)^2 + (D_{\overline{y}}\,F)^2 + (D_{\overline{z}}\,F)^2 \;\neq\; 0 \;.$$

In un intorno di un punto $\langle \overline{x},\overline{y},\overline{z} \rangle$ della superficie si riesce a ottenere una rappresentazione parametrica della Σ della forma

$$\overline{x} \;=\; \xi(u,v) \qquad , \qquad \overline{y} \;=\; \eta(u,v) \qquad , \qquad \overline{z} \;=\; \zeta(u,v) \;.$$

Introduciamo anche il vettore $\bar{\mathsf{r}} := \langle \overline{x},\overline{y},\overline{z} \rangle$.

Differenziando rispetto alla u e rispetto alla v l'identità $F(\xi(u,v),\eta(u,v)\zeta(u,v))$ si ottengono le equazioni

$$D_{\overline{x}}F\ D_u\,\xi + D_{\overline{y}}F\ D_u\,\eta + D_{\overline{z}}F\ D_u\,\zeta \ = \ 0 \ ;$$
$$D_{\overline{x}}F\ D_v\,\xi + D_{\overline{y}}F\ D_v\,\eta + D_{\overline{z}}F\ D_v\,\zeta \ = \ 0 \ .$$

Queste dicono che il vettore applicato in $\langle\overline{x},\overline{y},\overline{z}\rangle$ avente come componenti $D_{\overline{x}}F$, $D_{\overline{y}}F$ e $D_{\overline{z}}F$ è perpendicolare ai vettori applicati nello stesso punto $D_u\,\bar{\mathbf{r}}$ e $D_v\,\bar{\mathbf{r}}$ e quindi è ortogonale al piano tangente in $\bar{\mathbf{r}}$. Conoscendo tale vettore si può caratterizzare il piano stesso con l'equazione

$$(x-\overline{x})\ D_{\overline{x}}F(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) + (y-\overline{y})\ D_{\overline{y}}F(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) + (z-\overline{z})\ D_{\overline{z}}F(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \ = \ 0 \ .$$

Ogni retta passante per un punto $\overline{P}$ della superficie e ortogonale al piano ivi tangente si dice **retta normale alla superficie** in $\overline{P}$. Naturalmente tale retta ha la stessa orientazione del vettore applicato $D_u\,\bar{\mathbf{r}} \wedge D_v\,\bar{\mathbf{r}}$ e quindi può essere caratterizzata senza difficoltà.

G64:c. paraboloide osculatore e classi dei punti di una superficie

G64:**c.01** Consideriamo una superficie Σ, un suo punto $\overline{P}$ esprimibile come $\overline{P} = \mathbf{r}(u,v)$ per $\langle\overline{x},\overline{y}\rangle$ corrente in D; sia poi Q un punto di Σ che faremo variare e che conviene pensare “vicino” a $\overline{P}$; scriviamo inoltre $d := |Q - P|$.
Sia inoltre Θ un paraboloide con vertice in $\overline{P}$ ed asse coincidente con la normale di σ in $\overline{P}$e sia Q' il punto in cui interseca Θ la retta passante per Q e parallela all'asse del paraboloide; scriviamo poi $h := |Q - Q'|$.
La superficie Θ si dice **paraboloide osculatore** della superficie Σ in $\overline{P}$ sse per $q \to \overline{P}$ si ha $\dfrac{h}{d^2} to0$.

Si osserva che un paraboloide osculatore potrebbe essere di uno dei tipi che vengono considerati degeneri, un cilindro parabolico o, addirittura, un piano (il piano tangente visto in :b].

G64:**c.02 Prop.** Se la superficie Σ è caratterizzata dalla parametrizzazione con $\mathbf{r}(u,v)$ due volte continuamente differenziabile, allora in ciascuno dei suoi punti $\overline{P}$ nei quali $D_u\,\mathbf{r} \wedge D_v\,\mathbf{r} \neq 0$ possiede uno e un solo paraboloide osculatore.

Dim.: . . . . . ▮

G64:**c.03** Come si è visto, una superficie regolare in un intorno tendenzialmente piccolo di un suo punto si può ottenere in prima approssimazione dal suo piano tangente e in seconda approssimazione dal suo paraboloide osculatore.
Ogni punto di una superficie Σ viene assegnato a una classe che dipende dal tipo di paraboloide osculatore che approssima la Σ nel punto stesso.

Si dice **punto ellittico** di una superficie un punto il cui paraboloide osculatore è di tipo ellittico.
Si dice **punto parabolico** di una superficie un punto il cui paraboloide osculatore è un cilindro parabolico.
Si dice **punto iperbolico** di una superficie un punto il cui paraboloide osculatore è di tipo iperbolico.
Si dice invece **punto planare** di una superficie un punto il cui paraboloide osculatore si riduce al semplice piano tangente.

G64:**c.04** Consideriamo un punto ellittico della superficie Σ $\overline{P} = \langle\overline{x},\overline{y},\overline{z}\rangle$; per semplicità supponiamo che tale punto sia l'origine e che la normale alla superficie in questo punto sia diretta come l'asse Oz.
Il corrispondente paraboloide osculatore ellittico, che chiamiamo Θ, è dato da un'equazione della forma

$$z \;=\; \frac{1}{2}\,(r\,x^2 + 2\,s\,x\,y + t\,y^2)\ . \tag{1}$$

Tale superficie si trova tutta nel semispazio $z \geq 0$ (caso nel quale poniamo $h := 1$), oppure tutta nel semispazio $z \leq 0$ (caso $h := -1$).

Intersechiamo la superficie Θ con il piano $z = \frac{1}{2\,h}$ ed otterremo la sezione ellittica che proiettata sul piano tangente alla Σ in $\overline{P}$ soddisfa l'equazione

$$r\,x^2 + 2\,s\,x\,y + t\,y^2 \;=\; h\ . \tag{2}$$

Questa equazione viene chiamata **indicatrice di Dupin della superficie** oppure **indicatrice di curvatura normale della superficie** Σ nel punto $\overline{P}$.
Si osserva che questa equazione si può ottenere, anche se in forma più elaborata, in ogni punto ellittico, le particolarizzazioni delle coordinate di $\overline{P}$ e della normale servendo solo a semplificare la forma della (2).

G64:**c.05** L'indicatrice di Dupin si può associare anche ai punti iperbolici di una superficie 2-regolare mediante un procedimento simile a quello illustrato per i punti ellittici. In questo caso l'equazione individua due iperboli coniugate ed ha la forma

$$r\,x^2 + 2\,s\,x\,y + t\,y^2 \;=\; \pm 1\ , \tag{1}$$

i due segni del secondo membro corrispondendo alle due iperboli.

Due direzioni sulla superficie Γ in un punto ellittico o iperbolico si dicono **direzioni coniugate** sse corrispondono a due diametri coniugati dell'indicatrice di Dupin.
Si dicono invece **indicazioni principali** le direzioni degli assi dell'ellisse o delle iperboli dell'indicatrice.
Per i punti iperbolici si distinguono anche le **direzioni asintotiche** direzioni corrispondenti ai due asintoti comuni a entrambe le iperboli.

L'indicatrice di Dupin si può definire con un procedimento poco diverso anche per i punti parabolici; in tali punti è data da due rette parallele equidistanti dal punto con paraboloide osculatore parabolico. Per i punti planari invece l'indicatrice di Dupin perde senso e non presenta alcuna utilità.

G64:d. prima forma fondamentale di una superficie

G64:**d.01** Consideriamo una superficie Σ ottenuta mediante una trasformazione topologica di un dominio piano D gestito con le coordinate cartesiane u e v; Σ sia individuata dalla parametrizzazione $\mathbf{r} = \langle x, y\rangle = \overline{\mathbf{r}}(u, v)$. In D si distingue la curva γ individuata dalle equazioni parametriche $u = U(t)$ e $v = V(t)$ per $a \le t \le b$.
La trasformazione $\overline{\mathbf{r}}$ da D a Σ trasforma la curva γ in una curva sulla Σ che denotiamo con Γ.
Questa è caratterizzata dalla espressione parametrica $\mathbf{r} = \overline{\mathbf{r}}(U(t), V(t))$; useremo anche la funzione $\overline{\mathbf{R}}(t) := \overline{\mathbf{r}}(U(t), V(t))$.

La lunghezza della curva Γ è fornita dalla formula
(1)

$$s_\Gamma = \int_{t'}^{t''} \mathrm{d}t \sqrt{D_t\, \overline{\mathbf{R}}(t)^2} =$$

$$\int_{t'}^{t''} \mathrm{d}t \sqrt{{D_U}^2\, \overline{\mathbf{r}}(U,V) \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\, D_U\, \overline{\mathbf{r}}(U,V)\, D_V\, \overline{\mathbf{r}}(U,V) \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) + {D_V}^2\, \overline{\mathbf{r}}(U,V) \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right))^2} \;;$$

$$= \int_\Gamma \sqrt{{D_U}^2\, \overline{\mathbf{r}}(U,V)\, dU^2 + D_U\, \overline{\mathbf{r}}(U,V)\, D_V\, \overline{\mathbf{r}}(U,V)\, \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v + {D_V}^2\, \overline{\mathbf{r}}(U,V)\, \mathrm{d}v^{\,2}}$$

l'ultimo integrale si intende effettuato lungo la curva Γ.

La forma quadratica sotto il segno di radice viene chiamata **prima forma fondamentale della superficie** o **elemento lineare di superficie** relativo alla Γ. In genere viene richiamata in forma abbreviata e con componenti individuati da simboli convenzionali:

(2) $$\mathrm{d}\,s^2 = {D_U}^2\, \overline{\mathbf{r}}\, \mathrm{d}U^{\,2} + D_U\, \overline{\mathbf{r}}\, D_V\, \overline{\mathbf{r}} \mathrm{d}U\ \mathrm{d}V + {D_V}^2\, \overline{\mathbf{r}}\, \mathrm{d}V^{\,2} = E\, \mathrm{d}U^{\,2} + F\, \mathrm{d}U\ \mathrm{d}V + G\ \mathrm{d}V^{\,2} \;,$$

(3) dove $E := {D_U}^2\, \overline{\mathbf{r}}$, $F := D_U\, \overline{\mathbf{r}}\, D_V\, \overline{\mathbf{r}}$ e $G := {D_V}^2\, \overline{\mathbf{r}}$.

La formula (1) dice che la conoscenza della prima forma fondamentale consente di valutare la lunghezza della curva; questo consente di dichiarare che la prima forma fondamentale determina una **metrica sulla superficie**.
Nel seguito denoteremo con FFI_Σ la prima forma fondamentale della superficie Σ.

G64:**d.02** Consideriamo due curve γ_1 e γ_2 nel dominio piano D passanti per un punto $\big\langle u_0, v_0\big\rangle$ date da equazioni parametriche delle forme $u = U_j(t)$, $v = V_j(t)$ per $j = 1, 2$; sia inoltre $\big\langle u_0, v_0\big\rangle = \big\langle U(t_0), V(t_0)\big\rangle$.
Denotiamo con Γ_j, ancora per $j = 1, 2$, la curva ottenuta dalla γ_j con la trasformazione di D nella Σ precisata in :a; queste chiaramente si intersecano nel punto $P_0 := \langle \overline{\mathbf{r}}(u_0, v_0) \in \Sigma$.
Chiamiamo Θ l'angolo formato dalle semirette tangenti alle curve Γ_1 e Γ_2 in P_0 riguardati la variabile t crescente. Questo angolo è fornito dalla espressione

$$\Theta = ...$$

Queste formule dicono che anche l'angolo tra due curve ottenute per trasformazione è determinato dalla prima forma fondamentale.

G64:**d.03** Vediamo ora sotto quali condizioni due curve sulla Σ ottenute mediante trasformazione sono ortogonali nel punto in cui si intersecano.

Quindi due curve corrispondenti l'una a u costante e l'altra a v costante sono ortogonali sse si annulla il secondo addendo della prima forma fondamentale, ovvero [d01] sse $F = 0$.

G64:**d.04** Una trasformazione tra spazi metrici che conserva le distanze, ovvero le lunghezze dei vettori, si dice **trasformazione isometrica tra spazi metrici**. In alcuni studi sulle trasformazioni delle superfici si usa anche il termine **deformazioni**
Due configurazioni si dicono **configurazioni isometriche** sse si possono ottenere l'una dall'altra mediante una trasformazione isometrica. In particolare presentano interesse i **duetti di superfici isometriche**.
Date due superfici isometriche si trova una opportuna parametrizzazione dell'una rispetto all'altra per la quale esse presentano la stessa prima forma fondamentale.
Una superficie "in piccolo", cioè localmente, può essere sottoposta a trasformazioni isometriche; Questo in genere non è possibile per le superfici "in grande". Per esempio una porzione di superficie terrestre può essere rappresentata sul piano, mentre una intera sfera non può essere "deformata": ogni superficie due volte regolare isometrica della sfera non può essere che una sfera congruente.

G64:**d.05** Hanno notevole interesse le trasformazioni differenziabili delle superfici che conservano le ampiezze angolari; esse sono chiamate **trasformazioni conformi delle superfici** ed i loro risultati **rappresentazioni conformi delle superfici**.
Queste sono importanti soprattutto in cartografia: infatti una rappresentazione conforme è in grado di fornire direzioni precise e di riprodurre fedelmente le forme di piccole regioni.

G64:e. area di una superficie

G64:**e.01** Consideriamo una superficie liscia Σ e applichiamole le notazioni ormai usuali.
Di Σ si possono considerare partizioni di diversa finezza ed accade che date due partizioni si può trovare una partizione più fine di entrambe. In altri termini la collezione delle partizioni di una superficie, come per le collezioni delle partizioni di tante strutture geometriche, costituiscono collezioni dirette.
Per le partizioni di superfici interessa procedere su quelle sempre più fini; la finezza di una partizione G si può utilmente riferire al massimo diametro delle porzioni di superficie; denoteremo tale reale positivo con $Dmax(\mathsf{G})$. Procedere indefinitamente verso le partizioni sempre più fini equivale a procedere verso partizioni con diametro massimo tendente a 0.

G64:**e.02** Data una partizione G della superficie Σ, denotiamo con g la variabile nell'insieme G_{G} che individua una porzione della superficie, con $P(g)$ un punto scelto con qualche criterio di centralità nella porzione g e con $\alpha(g)$ l'area della proiezione della porzione determinata dalla normale alla Σ in $P(g)$ sul piano tangente alla Σ in $P(g)$. Risulta quindi determinata la somma delle areole

$$\boldsymbol{Area}(\mathsf{G}) \ := \ \sum_{g \in G_{\mathsf{G}}} \alpha(g) \ .$$

Consideriamo le partizioni via via più fini che si ottengono facendo tendere a 0 il diametro massimo $Dmax(\mathsf{G})$. Se esiste tale limite si dice **area della superficie** Σ e si scrive

$$\boldsymbol{Area}(\Sigma) \ := \ \lim_{Dmax \to 0} \mathcal{A}(\mathsf{G}) \ = \ \lim_{Dmax \to 0} \sum_{g \in G_{\mathsf{G}}} \alpha(g) \ .$$

G64:**e.03** Ci proponiamo ora di trovare una formula per l'area di una superficie Σ caratterizzata, come in precedenza, dalla parametrizzazione vettoriale

$$\mathsf{r} \ = \ \langle x, y, z \rangle \ = \ \bar{\mathsf{r}}(u, v) \qquad \text{per} \qquad \langle u, v \rangle \in \mathsf{D} \ .$$

Passando al limite per $Dmax(\mathsf{G})$ decrescente illimitatamente, denotando con $\bar{\mathsf{n}}(u, v)$ il vettore normale alla Σ in $P(u, v)$ in dipendenza delle coordinate curvilinee u e v, otteniamo

$$\boldsymbol{Area}(\Sigma) \ = \ \iint_{\mathsf{D}} du \ dv \ \left| (D_u \, \bar{\mathsf{r}} \wedge D_v \, \bar{\mathsf{r}}) \cdot \vec{\bar{\mathsf{n}}}(u, v) \right| \ .$$

Otteniamo quindi

$$\boldsymbol{Area}(\Sigma) \ = \ \iint_{\mathsf{D}} du \ dv \ \sqrt{E\,G - F^2} \ .$$

Si osserva dunque che anche l'area di una superficie è determinata dalla prima forma fondamentale.

G64:f. curvatura normale di una superficie

G64:**f.01** Consideriamo la superficie Σ ... Sia data inoltre una curva Γ mediante l'equazione parametrica $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}(u,v)$ e introdotta la lunghezza s di tale curva consideriamo una sua parametrizzazione naturale $\mathbf{r} = RSd(s) := \bar{\mathbf{r}}(\overline{u}(s), \overline{v}(s))$.

Per la derivata seconda della $\mathbf{R}$ abbiamo trovato il suo collegamento alla curvatura k_1 e al vettore unitario normale principale $\vec{\nu}$: $\;{D_s}^2\, \mathbf{R}(s) \;=\; k_1\, \vec{\nu}$.

Dal prodotto scalare dei due membri con il vettore normale alla Σ $\vec{n}$, denotato con θ l'angolo $\angle\, \vec{n}\, \vec{n}$, otteniamo

(1) $$ {D_s}^2\, \mathbf{R}(s)\, \vec{n} \;=\; k_1\, \cos\theta\ . $$

Se denotiamo con " $'$ " e " $''$ " le derivate prima e seconda rispetto ad s, abbiamo

(2) $$ {D_s}^2\, \mathbf{R}(s) \;=\; D_u\, \mathbf{R}\ u" + D_u\, \mathbf{R}\ v" + {D_u}^2\, \mathbf{R}\ {u'}^2 + 2\, D_u\, D_v\, \mathbf{R}\ u'\, v' + {D_v}^2\, \mathbf{R} {v'}^2\ . $$

Di conseguenza

(3) $$ \begin{aligned} {D_s}^2\, \mathbf{R}(s) \cdot \vec{n} \;&=\; ({D_u}^2\, \mathbf{R} \cdot \vec{n})\ {u'}^2 + 2\, (D_u\, D_v\, \mathbf{R} \cdot \vec{n} u'\, v' + ({D_v}^2\, \mathbf{R} \cdot \vec{n})\ {v'}^2 \\ &=\; \frac{L\, \mathrm{d}u^2 + 2\, M\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ + N\ \mathrm{d}v^2}{E\, \mathrm{d}u^2 + 2\, F\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ + G\ \mathrm{d}v^2} \end{aligned} \quad , $$

dove abbiamo introdotto i costrutti

(4) $$ L \;:=\; {D_u}^2\, \mathbf{R}(s) \cdot \vec{n} \quad , \quad M \;:=\; D_u\, D_v\, \mathbf{R}(s) \cdot \vec{n} \quad , \quad N \;:=\; {D_v}^2\, \mathbf{R}(s) \cdot \vec{n}\ . $$

La forma differenziale quadratica a denominatore si chiama **seconda forma fondamentale della superficie** Σ .

Nel seguito denoteremo con $FFII_\Sigma$ la seconda forma fondamentale della superficie Σ.

G64:**f.02** Dalla **f01**(1) si ricava

(1) $$ k_1\ \cos\theta \;=\; \frac{L\, \mathrm{d}u^2 + 2\, M\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ + N\ \mathrm{d}v^2}{E\, \mathrm{d}u^2 + 2\, F\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ + G\ \mathrm{d}v^2}\ . $$

Da questa formula di desume che $k_1\ \cos\theta$ dipende solo dal rapporto $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$, cioè dalla direzione della curva Γ in corrispondenza del punto $\mathbf{r}$. Conviene osservare esplicitamente che il prodotto $k_1\ \cos\theta$ ha lo stesso valore per tutte le curve Γ che hanno la stessa tangente.

Se consideriamo la curva ottenuta come intersezione tra la Σ ed il piano ortogonale al piano tangente, curva chiamata **sezione normale della superficie**.

Per tale configurazione $|\cos\theta| = 1$ e pertanto $k_1\ |\cos\theta| \;=\; k_0$, dove k_0 esprime la curvatura di sezione normale.

Con opportune scelte dei segni si ottiene la seguente uguaglianza più semplice

(2) Teorema (**teorema di Meusnier**) $k_1\ \cos\theta \;=\; k_0$.

Di conseguenza abbiamo anche

(3) $$ k_0 \;=\; \frac{L\, \mathrm{d}u^2 + 2\, M\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ + N\ \mathrm{d}v^2}{E\, \mathrm{d}u^2 + 2\, F\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ + G\ \mathrm{d}v^2}\ . $$

G64:**f.03** Cerchiamo ora le formule per i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di una superficie Σ individuata dalle equazioni parametriche delle forme

$$ x \;=\; \xi(u,v) \quad , \quad y \;=\; \eta(u,v) \quad , \quad z \;=\; \zeta(u,v)\ . $$

Dalle definizioni otteniamo

$$E \;=\; (D_u\,\bar{\mathbf{r}})^2 \;=\; (D_u\,\xi)^2 + (D_u\,\eta)^2 + (D_u\,\zeta)^2 \;;$$

$$F \;=\; (D_u\,\bar{\mathbf{r}})\cdot(D_v\,\bar{\mathbf{r}}) \;=\; (D_u\,\xi)\cdot(D_v\,\xi) + (D_u\,\eta)\cdot(D_v\,\eta) + (D_u\,\zeta)\cdot(D_v\,\zeta) \;;$$

$$G \;=\; (D_v\,\bar{\mathbf{r}})^2 \;=\; (D_v\,\xi)^2 + (D_v\,\eta)^2 + (D_v\,\zeta)^2 \;;$$

$$L \;=\; ({D_u}^2\,\bar{\mathbf{r}})\cdot\vec{n} \;=\; ({D_u}^2\,\bar{\mathbf{r}})\cdot\frac{\bar{\mathbf{r}}_u\wedge\bar{\mathbf{r}}_v}{|\bar{\mathbf{r}}_u\wedge\bar{\mathbf{r}}_v|} \;=\; \frac{\bar{\mathbf{r}}_{u,u}\cdot(\bar{\mathbf{r}}_u\wedge\bar{\mathbf{r}}_v)}{|\bar{\mathbf{r}}_u\wedge\bar{\mathbf{r}}_v|} \;=\; \frac{\begin{vmatrix}\xi_{u,u} & \eta_{u,u} & \zeta_{u,u}\\ \xi_u & \eta_u & \zeta_u\\ \xi_v & \eta_v & \zeta_v\end{vmatrix}}{\sqrt{E\,G-F^2}} \;;$$

$$M \;=\; \frac{\begin{vmatrix}\xi_{u,v}\eta_{u,v} & \zeta_{u,v} & \\ \xi_u & \eta_u & \zeta_u\\ \xi_v & \eta_v & \zeta_v\end{vmatrix}}{\sqrt{E\,G-F^2}} \qquad ; \qquad N \;=\; \frac{\begin{vmatrix}\xi_{v,v} & \eta_{v,v} & \zeta_{v,v}\\ \xi_u & \eta_u & \zeta_u\\ \xi_v & \eta_v & \zeta_v\end{vmatrix}}{\sqrt{E\,G-F^2}} \;.$$

G64:**f.04** Per ottenere i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di una superficie Σ individuata dalla equazione parametrica del tipo $z \;=\; \zeta(x,y)$ basta considerare che questo caso si riduce al precedente se si riscrive con le tre equazioni che seguono

$$x \;=\; u \qquad , \qquad y \;=\; v \qquad , \qquad z \;=\; \zeta(x,y) \;.$$

In tal modo si ottengono le formule

$$E \;=\; 1+p^2 \qquad , \qquad F \;=\; p\,q \qquad , \qquad G \;=\; 1+q^2$$

$$L \;=\; \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad , \qquad M \;=\; \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad , \qquad N \;=\; \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad ,$$

dove $\quad p \;:=\; \zeta_x \;\;,\;\; q \;:=\; \zeta_y \;\;,\;\; r \;:=\; \zeta_{x,x} \;\;,\;\; s \;:=\; \zeta_{x,y} \;\;,\;\; t \;:=\; \zeta_{y,y} \;.$

G64:**f.05** Per affrontare formule significativamente semplici, assumiamo come punto di interesse primario della nostra superficie Σ l'origine $O + \langle x,y,z\rangle$ delle coordinate dello spazio tridimensionale ambiente e assumiamo come piano tangente il piano $z=0$, cioè il piano contenente Gli assi Ox ed Oy. In un intorno di O la superficie è fornita da un'equazione del tipo

$$z \;=\; \frac{1}{2}\,(r\,x^2 + 2\,s\,x\,y + t\,y^2) + \epsilon(x,y)\,(x^2+y^2) \qquad \text{con} \qquad \lim_{x,y\to 0}\,\epsilon(x,y) \;=\; 0 \;.$$

Il paraboloide osculatore in O è dato da

$$z \;=\; \frac{1}{2}\,(r\,x^2 + 2\,s\,x\,y + t\,y^2) \;,$$

mentre l'indicatrice di Dupin nello stesso O è data da

$$r\,x^2 + 2\,s\,x\,y + t\,y^2 \;=\; \pm 1 \;.$$

Inoltre si trova facilmente che in O le due forme fondamentali della superficie Σ e della sua superficie osculatrice coincidono: più precisamente sono, risp.,

$$\mathrm{d}\,s^2 + \mathrm{d}y^{\,2} \qquad \text{e} \qquad r\,\mathrm{d}x^{\,2} + 2\,s\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\; + t\,\mathrm{d}y^{\,2} \qquad .$$

Le semplificazioni adottate possono essere rimosse senza inficiare questi risultati. Si conclude quindi che per una superficie la curvatura normale e il paraboloide osculatore coincidono ed hanno la stessa direzione. In dettaglio abbiamo

$$k_n \;=\; \frac{r\,\mathrm{d}\,s^2 + 2\,s\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\; + t\,\mathrm{d}y^{\,2}}{\mathrm{d}x^{\,2} + \mathrm{d}y^{\,2}} \;.$$

G64:**f.06** Occupiamoci ora dell'indicatrice di Dupin per trovare una espressione per la curvatura in una qualsiasi direzione $\overrightarrow{OQ}$ che si serva delle coordinate x e y di un qualsiasi punto Q appartenente all'indicatrice.
Dato che $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{x}{y}$, abbiamo

(1) $$k_n = \frac{r\,s^2 + 2\,s\,x\,y + t\,y^2}{x^2+y^2} \;.$$

Dato che Q appartiene all'indicatrice, il numeratore vale $+1$ o -1 ed il denominatore $|Q-O|^2$ e quindi

(2) $$k_n = \frac{\pm 1}{|Q-O|^2} \;.$$

Questa uguaglianza che collega indicatrice di Dupin e curvatura normale giustifica il termine "indicatrice della curvatura normale" come sinonimo di "seconda forma fondamentale".

Dalla f06(2) si traggono le conclusioni che seguono.
La curvatura normale di una superficie in una direzione asintotica vale 0.
La curvatura normale di una superficie in una direzione principale presenta valori estremi.

G64:**f.07** Assumiamo ora che le direzioni principali della superficie siano quelle degli assi coordinati Ox ed Oy. In tal caso il parametro s si annulla e si ha

$$K_n = r\left(\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}\right)^2 + t\left(\frac{\mathrm{d}Y}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}\right)^2 \;.$$

Quando $\mathrm{d}x = 0$ si ottiene $k'_n = r$, mentre quando $\mathrm{d}y = 0$ si ha il valore $k''_n = t$, dove si intende che k'_n e k''_n denotino, risp., le curvature normali lungo le direzioni principali.
Se introduciamo l'angolo θ tale che

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}} = \cos\theta \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}} = \sin\theta \;,$$

si ottiene la cosiddetta **formula di Eulero**:

$$k_n = k'_n \cos^2\theta + k''_n \sin^2\theta \;.$$

G64:g. linee coordinate coniugate di una superficie

G64:**g.01** La nozione di direzioni coniugate di una superficie è collegata a quella di indicatrice di Dupin la quale permette di ottenere le equazioni del paraboloide osculatore; l'indicatrice di Dupin inoltre individua una terna di coordinate oblique x, y e z strettamente collegate alle coordinate u e v del dominio piano che sostiene la superficie.

Consideriamo il sistema superficie $\langle \Sigma, \bar{\mathsf{r}}, u, v, \mathsf{D}, E, F, G, L, M.N\rangle$ e sia $P_0 := \bar{\mathsf{r}}(u_0, v_0) \in \Sigma$. In un intorno di P_0 l'equazione della superficie si può scrivere

$$\begin{aligned}\mathsf{r} &= \bar{\mathsf{r}}_u\,(u-u_0+\bar{\mathsf{r}}_v\,(v-v_0)+\frac{1}{2}\,[\bar{\mathsf{r}}_{u,u}\,(u-u_0)^2+2\,\bar{\mathsf{r}}_{u,v}\,(u-u_0)\,(v-v_0)\\ &\quad+\bar{\mathsf{r}}_{v,v}\,(v,v_0)^2]+\epsilon(u,v)[(u-u_0)^2+(v-v_0)^2]\end{aligned} \; .$$

(2) Prop.: Il paraboloide osculatore della Σ in P_0 è espresso dall'equazione

(1) $$z \;=\; \frac{1}{2}\,(L\,x^2+2\,M\,x\,y+N\,y^2)\;.$$

Dim.: Infatti il paraboloide è dato dalla equazione parametrica

$$z \;=\; \frac{1}{2}\,[L\,(u-u_0)^2+2\,M\,(u-u_0)\,(v-v_0)+N\,(v-v_0)^2]$$

e ponendo in essa $x := u - u_0$ e $y := v - v_0$ si ottiene l'espressione enunciata ▮

G64:**g.02** Si verifica senza difficoltà che la superficie e il suo paraboloide osculatore in un punto presentano la stessa prima forma fondamentale e la stessa seconda forma fondamentale e di conseguenza la stessa curvatura normale che a sua volta consente di determinare il paraboloide.

Dall'equazione del paraboloide osculatore g01(2) si ricava l'equazione della indicatrice della curvatura normale

$$L\,x^2+2\,M\,x\,y+N\,y^2 \;=\; \pm 1\;.$$

Sappiamo perché due direzioni sulla superficie $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ e $\dfrac{\delta x}{\delta y}$ siano coniugate rispetto a questa curva basta che sia

$$L\,\mathrm{d}x\,\delta x+2\,M\,(\mathrm{d}x\,\delta y+\mathrm{d}y\;\delta x)+N\,\mathrm{d}y\;\delta y \;=\; 0\;.$$

Dato che nel punto $O \in \Sigma$ precedentemente individuato si hanno le relazioni $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}v$, $\delta x = \delta u$ e $\delta y = \delta v$, la condizione per la coniugazione delle direzioni sulla superficie caratterizzate, risp., da d e da δ, sono

$$L\,\mathrm{d}u\;\delta u+2\,M\,(\mathrm{d}u\;\delta v+\mathrm{d}v\;\delta u)+N\,\mathrm{d}v\;\delta v \;=\; 0\;.$$

Date due famiglie di u-curve e di v-curve, diciamo che si tratta di famiglie di curve coniugate sse in ogni punto della Σ le direzioni della u-curva e della v-curva passanti per tale punto sono coniugate.
Se le due linee sono coniugate, allora $M = 0$.
Viceversa in un punto con $M = 0$ le due linee sono coniugate: infatti abbiamo $\mathrm{d}u = 0$ nella direzione delle v-curve e $\mathrm{d}v = 0$ nella direzione delle u-curve e quindi $2\,M\,\mathrm{d}u\;\mathrm{d}v = 0$, la quale comporta $M = 0$.
Viceversa è ovvio che $M = 0$ implichi $2\,M\,\mathrm{d}u\;\mathrm{d}v = 0$.

G64:**g.03** Una curva sopra una superficie viene detta **curva asintotica** sse ciascuno dei suoi punti è asintotico. Dato che la curvatura normale lungo direzione asintotica è nulla, abbiamo

(1) $$L\,\mathrm{d}u^2+2\,M\,\mathrm{d}u\;\mathrm{d}v+N\,\mathrm{d}v^2 \;=\; 0\;.$$

Questa pertanto è l'equazione di una linea asintotica.

(2) Prop.: Le linee su una superficie sono curve asintotiche sse $L = 0$ ed $N = 0$.

Dim.: Se una u-curva è asintotica, allora $L\,\mathrm{d}u^2 = 0$, ovvero $L = 0$; simmetricamente se v-curva è asintotica, allora $N\,\mathrm{d}v^2 = 0$, ovvero $N = 0$. Viceversa se $L = 0$ ed $N = 0$, allora $L\,\mathrm{d}u^2 = 0$ ed $N\,\mathrm{d}v^2 = 0$, ovvero le linee coordinate sono asintotiche.

G64:**g.04** La semplicità della seconda forma fondamentale in corrispondenza delle linee coordinate asintotiche induce a usarle in molte considerazioni generali.
Bisogna tuttavia osservare che le linee coordinate asintotiche possono essere introdotte solo in vicinanza dei punti iperbolici; in vicinanza di punti ellittici e parabolici occorre sono disponibili famiglie di curve genericamente coniugate, purché non caratterizzate da direzioni asintotiche.

La nozione di direzione asintotica qui è stata introdotta in collegamento con l'indicatrice di Dupin e limitatamente ai punti iperbolici.
In effetti le direzioni asintotiche si possono caratterizzare completamente con il fatto che la curvatura normale lungo queste direzioni è nulla, fatto che può essere studiato anche per i punti parabolici e planari.
Con tale definizione abbiamo due direzioni asintotiche ancora nei punti iperbolici, una nei punti parabolici e tutte le direzioni asintotiche per i punti planari.

G64:h. linee di curvatura di una superficie

G64:**h.01** Le direzioni principali di una superficie sono stati introdotti come quelle degli assi della indicatrice di Dupin; in seguito si è dimostrato che le direzioni principali sono caratterizzate dal fatto che la curvatura principale lungo le loro direzioni assume un valore estremo.
Quindi le direzioni principali possono essere definite mediante questa proprietà e in tal modo estese ai punti planari, privi dell'indicatrice di Dupin. Dato che la curvatura normale in un punto planare è nulla in ogni direzione, ogni direzione va considerata principale.
In altri termini possiamo affermare che in ogni punto di una superficie vi sono due direzioni principali, con le eccezioni dei punti planari e dei cosiddetti **punti sferici**, punti ellittici nei quali l'indicatrice di Dupin è una circonferenza: in questi punti ogni direzione è dirazione principale.

G64:**h.02** Troviamo ora una condizione per le direzioni principali sopra una superficie caratterizzandole con il rapporto $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$.
Ricordiamo che

(1) $$k_n \;=\; \frac{L\,\mathrm{d}u^2 + 2\,M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2}{E\,\mathrm{d}u^2 + 2\,F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2} \;=\; \frac{FFII}{FFI} \;.$$

Dato che lungo le direzioni principali l'espressione a secondo membro presenta valori estremi come funzioni di $\mathrm{d}u$ e $\mathrm{d}v$, devono essere nulle le sue derivate rispetto ad u e v: quindi

(2) $$\frac{2\,(L\,\mathrm{d}u + M\,\mathrm{d}v)}{FFI} - \frac{2\,E\,\mathrm{d}u + F\,\mathrm{d}v}{FFI^2} \;=\; 0 \qquad ; \qquad \frac{2\,(M\,\mathrm{d}u + N\,\mathrm{d}v)}{FFI} - \frac{2\,F\,\mathrm{d}u + G\,\mathrm{d}v}{FFI^2} \;=\; 0 \;.$$

Da queste si ricavano

(3) $$\frac{L\,\mathrm{d}u + M\,\mathrm{d}v}{E\,\mathrm{d}u + F\,\mathrm{d}v} \;=\; \frac{FFII}{FFI} \;=\; k_n \qquad \text{e} \qquad \frac{M\,\mathrm{d}u + N\,\mathrm{d}v}{F\,\mathrm{d}u + G\,\mathrm{d}v} \;=\; \frac{FFII}{FFI} \;=\; k_n \;.$$

Dunque abbiamo l'equazione per la direzione principale

(4) $$\frac{L\,\mathrm{d}u + M\,\mathrm{d}v}{E\,\mathrm{d}u + F\,\mathrm{d}v} \;-\; \frac{M\,\mathrm{d}u + N\,\mathrm{d}v}{F\,\mathrm{d}u + G\,\mathrm{d}v} \;=\; 0 \;.$$

Questa può essere presentata nella forma equivalente, più facile da ricordare,

(5) $$\begin{vmatrix} \mathrm{d}v^2 & -\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v & \mathrm{d}u^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} \;=\; 0 \;.$$

G64:**h.03** Una curva sopra una superficie viene detta **linea di curvatura** sse in ciascuno dei suoi punti la direzione è principale. Possiamo quindi affermare che la precedente equazione h02(5) è l'**equazione differenziale delle linee di curvatura**.

Se le linee coordinate sopra una superficie in una regione priva di punti planari e sferici sono le linee di curvatura, allora $F = 0$ ed $M = 0$. Infatti in ciascuno dei punti di tali regioni vi sono due direzioni ortogonali e coniugate.

G64:**h.04** **Teorema** (**teorema di Rodrigues**) Per la differenziazione lungo una direzione principale si ha

(1) $$\mathrm{d}\,\vec{n} \;=\; -k_n\,\mathrm{d}\,\mathbf{R} \;.$$

Dim.: Adottiamo linee coordinate caratterizzate da u e v tali che le u-curve in un dato punto hanno la direzione principale e le linee coordinate siano mutuamente ortogonali.

Dato che $\vec{n}^2 = 1$, si ha $\vec{n}_u \cdot \vec{n} = 0$, cioè $\vec{n}_u \perp \vec{n}$; di conseguenza si ha una combinazione lineare della forma

(2) $$\vec{n}_u = \lambda\, \bar{\mathbf{r}}_u + \mu\, \bar{\mathbf{r}}_v \ .$$

Applicando il prodotto scalare per $\bar{\mathbf{r}}_v$ e osservando che per l'ortogonalità $\bar{\mathbf{r}}_u \cdot \bar{\mathbf{r}}_v$ e per la coniugazione $\vec{n}_u \cdot \vec{n}_v = 0$, si ottiene $\mu = 0$.
Applicando invece il prodotto scalare per $\bar{\mathbf{r}}_u$ otteniamo $\vec{n}_u \cdot \bar{\mathbf{r}}_u = \lambda\, \bar{\mathbf{r}}_u^2$, ovvero $-L = \lambda\, E$.
Di conseguenza $-\lambda = \dfrac{L}{E}$. Ma quanto trovato è k_u, la curvatura normale lungo la direzione di u; quindi $\vec{n}_u = -k_u\, \bar{\mathbf{r}}_u$. Passando ai differenziali abbiamo l'enunciato ▮

G64:i. curvatura media e gaussiana di una superficie

G64:**i.01** Per curvatura media di una superficie intendiamo la metà della somma delle curvature principali, mentre per **curvatura totale** o **curvatura gaussiana** intendiamo il prodotto delle curvature principali. In un punto ellittico della superficie le curvature principali presentano lo stesso segno e quindi la curvatura gaussiana positiva. In un punto iperbolico le curvature principali presentano segni opposti e quindi una curvatura gaussiana negativa. Nei punti parabolici e planari la curvatura gaussiana è nulla.

G64:**i.02** Cerchiamo ora un'espressione per le curvature media e gassiana che si serve dei coefficienti delle due forme fondamentali. Dalle due formule per la curvatura in una direzione principale caratterizzata da $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ dimostrate in precedenza [h02(3)) si ricavano le equazioni equivalenti

$$L\,\mathrm{d}u + M\,\mathrm{d}v - k_n\,(E\,\mathrm{d}u + F\,\mathrm{d}v \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad M\,\mathrm{d}u + N\,\mathrm{d}v - k_n\,(F\,\mathrm{d}u + G\,\mathrm{d}v \;=\; 0\ ;$$

Eliminando da queste i due differenziali si ricava

$$\begin{vmatrix} L - E\,k_n & M - F\,k_n \\ M - F\,k_n & N - G\,k_n \end{vmatrix} \;=\; 0\ ,$$

ovvero

$$(e\,G - f^2)\,{k_n}^2 - (L\,G - 2\,F\,M + N\,E)\,k_n + (L\,n - M^2 0 \;=\; 0\ .$$

Questa equazione ha come due radici le curvature principali della superficie, ${k_n}'$ e ${k_n}'''$. Di conseguenza per le note proprietà delle radici di secondo grado per la curvatura media e per la curvatura gaussiana si trovano le espressioni

$$\frac{{k_n}' + k_n''}{2} \;=\; \frac{L\,G - 2\,F\,M + N\,E}{@\,(E\,G - F^2)} \qquad \text{e} \qquad {k_n}'\,{k_n}'' \;=\; \frac{l\,N - M^2}{(E\,G - F^2)}\ .$$

G64:**i.03** La nozione di curvatura totale è stato introdotto da F. Gauss attraverso una definizione diversa da quella qui data; vediamola. Consideriamo un generico punto P della superficie Σ ed un suo intorno V ch conviene pensare piccolo. trasliamo i vettori applicati che sono i vettori normali alla Σ nei diversi punti di V in modo che abbiano la stessa estremità iniziale; l'insieme delle estremità finali $\overline{V}(V)$ costituisce una porzione di una sfera chiamata **immagine sferica dell'intorno V della superficie**. Gauss definisce come curvatura totale della Σ in P il limite di $\overline{V}(V)$ per V tendente a un punto.

(1) Prop.: La definizione in G54i01 e la definizione di Gauss per la curvatura totale di una superficie si equivalgono.

Dim.: Introduciamo linee coordinate espresse dalle variabili u e v tali che in un dato punto P la direzione della u-curva sia principale e la v-curva sia ortogonale alla precedente. Dato che in ogni punto $\vec{n}^2 = 1$ abbiamo $\vec{n}_u \cdot \vec{n} = 0$, cioè $\vec{n}_u \perp \vec{n}$ e quindi si può esprimere mediante una combinazione lineare della forma

$$\text{(2)} \qquad \vec{n}_u \;=\; \lambda\,\bar{\mathsf{r}}_u + \mu\,\bar{\mathsf{r}}_v\ .$$

Moltiplichiamo scalarmente la (2) per $\bar{\mathsf{r}}_u$ e osserviamo che l'ortogonalità implica $\bar{\mathsf{r}}_u \cdot \bar{\mathsf{r}}_v \;=\; 0$ e la coniugazione comporta $-M = 0$; se ne conclude $\mu = 0$.
Se invece si moltiplica scalarmente la (2) per $\bar{\mathsf{r}}_u$ $Sdol_u$ si ottiene

$$\vec{n}_u \cdot \bar{\mathsf{r}}_u \;=\; \lambda\,\bar{\mathsf{r}}^2 \qquad \text{ovvero} \qquad -L \;=\; \lambda\,E\ .$$

Di conseguenza

$$-\lambda \;=\; \frac{L}{E}\ .$$

Ma questa è la curvatura normale k_n lungo la direzione della u-curva e quindi

$$\vec{n}_u \;=\; -k_u\,\bar{\mathsf{r}}_u \blacksquare$$

G64:**i.04** Evidentemente il piano è un esempio di superficie con la curvatura totale nulla: infatti in ogni punto del piano e lungo ogni direzione la curvatura è nulla e lo stesso deve accadere per la curvatura totale.
Un esempio di superficie con curvatura costante positiva è una sfera di dato raggio R: la sua curvatura normale in ogni suo punto e lungo ogni direzione è $\dfrac{1}{R}$ e quindi la sua curvatura gaussiana è $\dfrac{1}{R^2}$.
Ci proponiamo ora di dare un esempio di superficie con curvatura gaussiana costante e negativa individuato tra le superfici di rivoluzione. cominciamo con considerazioni generali su queste superfici.

G64:**i.05** Ricordiamo che una superficie di rivoluzione si ottiene ruotando una curva piana intorno a una retta ortogonale al piano nel quale giace, retta che viene detta asse della figura. Le sezioni di una tale superficie con i piani passanti per l'asse si dicono **meridiani della superficie** e le sezioni con i piani iortogonali all'asse si dicono **paralleli della superficie**.
Dato che una superficie di rivoluzione presenta simmetrica speculare rispetto a ogni piano corrisponente a un qualsiasi meridiano, le sue direzioni secondo i meridiani sono principali. Quindi anche le direzioni secondo i paralleli sono principali.
Evidentemente la curvatura normale di una superficie di rivoluzione secondo la direzione di un meridiano fornisce la curvatura secondo essa. La curvatura normale secondo la direzione di un parallelo può invece essere riferita alla sua curvatura grazie al teorema di Meusnier [f02].

Assumiamo come asse di riferimento Oz l'asse della superficie ed esaminiamo un meridiano nel piano Oxz scrivendo la sua equazione nella forma $x \;=\; \xi(z)$. La curvatura normale secondo la sua direzione è data da

$$k_n{}' \;=\; \frac{\xi''}{(1+\xi'^2)^{3/2}} \;.$$

La curvatura normale lungo la direzione del parallelo è data invece da

$$k_n{}'' \;=\; -\frac{1}{\xi\,(1+\xi'^2)^{1/2}} \;;$$

infatti la curvatura è data da $\dfrac{1}{\xi}$, mentre $\dfrac{1}{(1+\xi'^2)^{1/2}}$ è il coseno dell'angolo formato dalla tangente al meridiano e l'asse della superficie, cioè Oz.
Dunque la curvatura gaussiana è espressa da

$$K \;:=\; k_n{}'\,k_n{}'' \;=\; -\frac{\xi''}{\xi\,(1+\xi'^2)^2} \;.$$

Moltiplicando per $\xi\,\xi'$ abbiamo

$$K \subset \xi' \;=\; -\frac{\xi'\,\xi"}{(1+\xi'^2)^2} \;.$$

Integrando otteniamo, servendoci della costante additiva arbitraria $\mathtt{C}$,

$$K\,\xi^2 + \mathtt{C} \;=\; \frac{1}{1+\xi'^2} \;.$$

G64:**i.06** Cerchiamo un caso particolare che possa trattarsi con espressioni analitiche. Per questo scegliamo $\mathtt{C} = 1$ in modo da ottenere

$$K\,\xi^2 \;=\; -\frac{{\xi'}^2}{1+{\xi'}^2}\ .$$

Introdotta la variabile θ ponendo $\xi' \;=:\; \tan\theta$ otteniamo

$$K\,\xi^2 \;=\; -\sin^2\theta \qquad \text{ovvero} \qquad \xi \;=\; \frac{1}{\sqrt{-K}}\,\sin\theta \qquad \text{e inoltre}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \;=\; \cot\theta \ \ ,\ \ \mathrm{d}z \;=\; \frac{1}{\sqrt{-K}}\,\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \;=\; \frac{1}{\sqrt{-K}}\,\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\,\mathrm{d}\theta\ .$$

Dunque abbiamo

$$z \;=\; \frac{1}{\sqrt{-K}}\,\left(\cos\theta + \ln\tan\frac{\theta}{2}\right) + \mathtt{C}_1\ .$$

Per semplicità assumiamo $\mathtt{C}_1 = 0$ e abbiamo il meridiano fornito dalla espressione parametrica

$$x \;=\; \frac{1}{\sqrt{-K}}\,\sin\theta \qquad , \qquad z \;=\; \frac{1}{\sqrt{-K}}\,\left(\cos\theta + \ln\tan\frac{\theta}{2}\right)\ .$$

Questa curva piana viene chiamata **trattrice** e la superficie di rivoluzione ottenuta ruotando la trattrice intorno al suo asse viene detta **pseudosfera**. Questa superficie è stata proposta da E. Beltrami come primo modello di geometria non euclidea.

G64:j. geometria intrinseca di una superficie

G64:**j.01** Per **geometria intrinseca** si intende la parte della geometria che studia le proprietà delle figure in relazione esclusivamente delle lunghezze.
In particolare la geometria intrinseca delle superfici si basa sulle lunghezze delle curve; si trova anche che essa studia le proprietà determinate dalla prima forma fondamentale [d01]. Sono quindi oggetto della geometria differenziale intrinseca le lunghezze delle curve sopra una superficie, gli angoli tra due di esse e le aree di loro regioni.
In effetti anche la curvatura gaussiana di una superficie è studiata dalla geometria intrinseca in quanto si può esprimere servendosi esclusivamente dei coefficienti della prima forma fondamentale.

G64:**j.02** Ricordiamo che, servendoci delle usuali notazioni, abbiamo

$$(1) \qquad K \;=\; \frac{L\,N - M^2}{E\,G - F^2} \qquad \text{e}$$

$$(2) \qquad \begin{aligned} L\,N \;&=\; \frac{1}{E\,G-F^2} \begin{vmatrix} \xi_{u,u} & \eta_{u,u} & \zeta_{u,u} \\ \xi_u & \eta_u & \zeta_u \\ \xi_v & \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_{u,u} & \eta_{u,u} & \zeta_{u,u} \\ \xi_u & \eta_u & \zeta_u \\ \xi_v & \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix} \\ &=\; \frac{1}{E\,G-F^2} \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{u,u}\cdot\mathbf{r}_{v,v} & \mathbf{r}_{u,u}\cdot\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_{u,u}\cdot\mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_{v,v} & E & F \\ \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_{v,v} & F & G \end{vmatrix} \end{aligned} .$$

Similmente si ottiene l'espressione

$$(3) \qquad M^2 \;=\; \frac{1}{E\,G-F^2} \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{u,v}^2 & \mathbf{r}_{u,v}\cdot\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_{u,v}\cdot\mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_{u,v} & E & F \\ \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_{u,v} & F & G \end{vmatrix} ;$$

Di conseguenza

$$(4) \qquad K \;=\; \frac{1}{E\,G-F^2} \left[\begin{vmatrix} \mathbf{r}_{u,u}\cdot\mathbf{r}_{v,v} - {\mathbf{r}_{u,v}}^2 & \mathbf{r}_{u,u}\cdot\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_{u,u}\cdot\mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_{v,v} & E & F \\ \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_{v,v} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{r}_{u,v}\cdot\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_{u,v}\cdot\mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_{u,v} & E & F \\ \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_{u,v} & F & G \end{vmatrix} \right] .$$

Valutiamo alcune derivate rispetto ad u e v:

$${\mathbf{r}_u}^2 \;=\; E \;\;,\;\; \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v \;=\; F \;\;,\;\; {\mathbf{r}_v}^2 \;=\; G$$

ed otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{u,u}\cdot\mathbf{r}_u \;&=\; \frac{1}{2}E_u \quad , \quad \mathbf{r}_{u,v}\cdot\mathbf{r}_v \;=\; \frac{1}{2}G_u \quad , \\ \mathbf{r}_{u,v}\cdot\mathbf{r}_u \;&=\; \frac{1}{2}E_v \quad , \quad \mathbf{r}_{u,u}\cdot\mathbf{r}_v \;=\; F_u - \frac{1}{2}E_v \quad , \\ \mathbf{r}_{v,v}\cdot\mathbf{r}_v \;&=\; \frac{1}{2}G_v \quad , \quad \mathbf{r}_{v,v}\cdot\mathbf{r}_u \;=\; F_v - \frac{1}{2}G_u \quad . \end{aligned}$$

Deriviamo rispetto ad u la quinta uguaglianza, deriviamo rispetto a v la quarta e sottraiamo termine a termine ottenendo

$$\mathbf{r}_{u,u}\cdot\mathbf{r}_{v,v} - {\mathbf{r}_{u,v}}^2 \;=\; -\frac{1}{2}G_{u,u} + F_{u,v} - \frac{1}{2}E_{v,v} \;.$$

A questo punto possiamo sostituire nella (4) tutti i prodotti scalari con le espressioni contenenti solo coefficienti della prima forma fondamentale

$$(5) \qquad K \;=\; \frac{1}{E\,G-F^2} \left[\begin{vmatrix} -\frac12 G_{u,u} + F_{u,v} - \frac12 E_{v,v} & \frac12 E_u & F_u - \frac12 E_v \\ F_v - \frac12 G_u & E & F \\ \frac12 G_u & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac12 E_u & \frac12 G_u \\ \frac12 E_v & E & F \\ \frac12 G_u & F & G \end{vmatrix} \right] .$$

G64:**j.03** Si osserva che per una superficie parametrizzata in modo che la sua prima forma fondamentale si esprima semplicemente come $ds^2 \;=\; \mathrm{d}u^{\,2} + G\,\mathrm{d}v^{\,2}$, l'espressione della curvatura gaussiana si riduce semplicemente alla

$$K \;=\; -\frac{1}{\sqrt{g}}\,(\sqrt{G})_{u,u}\;. \tag{1}$$

È dovuta a F. Gauss la prima espressione della curvatura totale di una superficie che si serve solo dei coefficienti della prima forma fondamentale e delle loro derivate.
Questa possibilità dice che le due forme fondamentali non sono indipendenti. Sorge naturale la domanda se vi siano altri collegamenti tra i coefficienti delle due forme. In effetti sono state trovate da Karl Peterson e Delfino Codazzi le seguenti due uguaglianze

$$2\,(E\,G-F^2)\,(L_v-M_u)-(E\,N-2\,F\,M+G\,L)\,(E_v-F_u)+\begin{vmatrix}E & E_u & L\\ F & F_u & M\\ G & G_u & N\end{vmatrix} \;=\; 0\quad, \tag{2}$$

$$2\,(E\,G-F^2)\,(M_v-N_u)-(E\,N-2\,F\,M+G\,L)\,(F_v-G_u)+\begin{vmatrix}E & E_v & L\\ F & F_v & M\\ G & G_v & N\end{vmatrix} \;=\; 0\quad, \tag{3}$$

G64:**j.04** Concludiamo con l'enunciato di un teorema che stabilisce che non vi sono altre relazioni tra i coefficienti della prima e quelli della seconda forma fondamentale.

Teorema (**teorema di Bonnet**) Consideriamo le due seguenti forme quadratiche

$$E\,\mathrm{d}u^{\,2}+2\,F\,\mathrm{d}u\;\mathrm{d}v\,+G\,\mathrm{d}v^{\,2}\qquad \text{e}\qquad L\,\mathrm{d}u^{\,2}+2\,M\,\mathrm{d}u\;\mathrm{d}v\,+N\,\mathrm{d}v^{\,2}\;,$$

la prima delle quali sia definita positiva.

Se tra le due valgono le relazioni di Gauss, Peterson e Codazzi, allora esiste ed è unica a meno di isometrie una superficie per la quale le due forme sono, risp., la prima e la seconda forma fondamentale.

G64:k. linee geodetiche di una superficie

G64:**k.01** Riprendiamo la nozione di curva geodetica sopra una superficie da un punto di vista un poco diverso.
Una curva Γ sopra una superficie Σ viene detta **curva geodetica della superficie** Σ sse la normale principale in ogni suo punto nel quale la curvatura è diversa da 0 coincide con la normale alla superficie.
Evidentemente per un piano ogni sua retta è curva geodetica; inoltre, dato che per ogni punto del piano e per qualsiasi direzione possiamo tracciare una retta, risulta che le rette sono le sole possibili geodetiche per il piano.
Similmente si trova che per una sfera sono curve geodetiche tutti i suoi cerchi massimi e solo essi.

G64:**k.02** Sia $\mathsf{r} = \mathsf{R}(t)$ una parametrizzazione di una geodetica Γ sulla Σ e cerchiamo una equazione differenziale per tale funzione. A questo scopo denoteremo le derivate prima e seconda rispetto a t della $\mathsf{R}(t)$, risp., con R' e on R". Inoltre considereremo che il punto variabile della curva $\mathsf{R}(t)$ localmente dipenda anche da due coordinate curvilinee u e v e per le derivate della R rispetto a queste variabili useremo notazioni come R_u, R_v, $\mathsf{R}_{u,v}$ e così via. Anche le variabili u e v si possono far dipendere da t e per le loro derivate rispetto a questo parametro useremo notazioni come u', v" e simili.
Dato che i vettori R' ed R" giacciono sul piano osculatore della Γ, abbiamo

(1) $$[\mathsf{R}", \mathsf{R}', \vec{n}] \;=\; 0 \;.$$

Per le derivate della R rispetto al parametro t abbiamo

(2) $$\mathsf{R}' \;=\; \mathsf{R}_u + \mathsf{R}_v\, v' \qquad \text{e} \qquad \mathsf{R}" \;=\; \mathsf{R}_{u,u} + 2\, R_{u,v}\, v' + \mathsf{R}_{v,v}\, {v'}^2 + \mathsf{R}_v\, v" \;.$$

Sostituendo in (1) i primi membri con le corrispondenti espressioni e risolvendo nella v" otteniamo

(3) $$v" \;=\; \frac{1}{[\mathsf{R}_u, \mathsf{R}_v, \vec{n}]}\, (\mathsf{R}_{u,u} + 2\, \mathsf{R}_{u,v}\, v' + \mathsf{R}_{v,v}\, {v'}^2\, \mathsf{R}_u + \mathsf{R}_v \cdot v'\, \vec{n}) \;.$$

Questa relazione si può considerare un'equazione differenziale del secondo ordine nella variabile v. Dal teorema di esistenza e unicità della soluzione per questo genere di equazioni segue che per ogni punto della superficie e secondo ogni direzione passa una e una sola curva geodetica.

G64:**k.03** Una parametrizzazione di una superficie Σ si dice **parametrizzazione semigeodetica di una superficie** sse le curve di una famiglia sono geodetiche e quelle dell'altra famiglia sono ortogonali alle suddette curve geodetiche.
Ci proponiamo di chiarire la forma dell'elemento lineare di superficie di tale Σ in relazione a una parametrizzazione semigeodetica.
Supponiamo che, per esempio, sia la famiglia delle u-curve costituita da curve geodetiche; in tal caso abbiamo

(1) $$[\mathsf{R}_{u,u}, \mathsf{R}_u, \vec{n}] \;=\; 0 \;.$$

Possiamo esprimere $\mathsf{R}_{u,u}$ come combinazione lineare dei tre vettori non complanari R_u, R_v ed $\vec{n}$:

(2) $$\mathsf{R}_{u,u} \;=\; \alpha\, \mathsf{R}_u + \beta\, \mathsf{R}_v + \gamma\, \vec{n} \;.$$

Sostituendo questa combinazione lineare nella (1) si ottiene $\beta\, [\mathsf{R}_{u,u}, \mathsf{R}_u, \vec{n}] \;=\; 0$ e quindi $\beta = 0$.
Moltiplicando scalarmente per R_v i membri della (2) ed osservando che $\mathsf{R}_u \cdot \mathsf{R}_v = F = 0$ a causa della richiesta ortogonalità di U-curve e v-curve, otteniamo

$$\mathsf{R}_{u,u}\, \mathsf{R}_v \;=\; \beta\, {\mathsf{R}_v}^2 \;=\; 0 \quad , \quad \text{dove} \quad \mathsf{R}_{u,u}\, \mathsf{R}_v = (\mathsf{R}_u\, \mathsf{R}_v)_u - \frac{1}{2}\, (\mathsf{R}_u)_v^2 = -\frac{1}{2}\, E_v = 0 \;.$$

Dunque il coefficiente e dipende solo dalla variabile u.

Se introduciamo un nuovo parametro di riferimento $\overline{u}$ tale che sia $d\overline{u} = \sqrt{E}\,\mathrm{d}u$, l'elemento lineare $ds^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + G\,\mathrm{d}v^2$ assume la forma

$$ds^2 \;=\; \mathrm{d}u^2 + G\,\mathrm{d}v^2 \;.$$

G64:**k.04** Si trova che una parametrizzazione semigeodetica si può individuare per ogni superficie e con ampia arbitrarietà. In effetti si dimostra che per ogni curva Γ sopra una superficie Σ e per ogni suo punto P si può introdurre una parametrizzazione semigeodetica in un intorno di P tale che una delle due famiglie di curve coordinate consista di geodetiche ortogonali alla Γ.

G64:**k.05** Intendiamo ora introdurre una importante proprietà estremale delle geodetiche.

Teo Sia Γ una geodetica sopra una superficie Σ e P un suo punto. Sulla Γ si trovano due punti A e B con P tra A e B tali che ogni curva che collega A con B sia più lunga della porzione di Γ che ha come estremità A e B.

Dim.: Tracciamo una geodetica $\overline{\Gamma}$ passante per P ed ivi perpendicolare alla Γ e introduciamo una parametrizzazione semigeodetica in un intorno di P assumendo come geodetiche ortogonali a $\overline{\Gamma}$ la famiglia delle u-curve.

Sia $\hat{\Gamma}$ una qualsiasi curva avente come estremità A e B: per la sua lunghezza si ha

$$s \;=\; \int_{\hat{\Gamma}} \sqrt{\mathrm{d}u^2 + G\,\mathrm{d}v^2} \;>\; \int_{\hat{\Gamma}} |\mathrm{d}u| \;\geq\; |u(B) - u(A)| \;,$$

dove $|u(B) - u(A)|$ fornisce la lunghezza del segmento da A a B della curvA Γ ▮

Questa proprietà estremale di una geodesica consente di usare come sua caratterizzazione la soluzione del problema variazionale per il funzionale

$$s \;=\; \int \mathrm{d}t\,\sqrt{E\,u'^2 + 2\,F\,u'\,v' + G\,v;^2} \;.$$

Si osserva che questo funzionale contiene solo i tre coefficienti E, F e G della prima forma fondamentale e le loro derivate; questo consente di affermare che le geodetiche di una superficie sono un oggetto della geometria intrinseca della superficie stessa.

G64:**k.06** Esaminiamo le caratteristiche delle superfici dotate di una curvatura gaussiana costante. Denotiamo con Σ una tale superficie con K la sua curvatura e con P un suo punto. Tracciamo sopra Σ una arbitraria geodetica $\overline{\Gamma}$ passante per P e definiamo una parametrizzazione semigeodetica in un intorno di P scrivendo come al solito u e v le sue variabili ed $\mathsf{r} = \mathsf{R}(u,v)$ la sua funzione spaziale. Per la variabile u chiediamo che la famiglia delle u-curve siano le geodetiche ortogonali a $\overline{\Gamma}$: l'elemento lineare di superficie assume quindi la forma

(1) $$ds^2 \;=\; \mathrm{d}u^2 + G\,\mathrm{d}v^2 \;.$$

Per la variabile v assumiamo la lunghezza lungo la $\overline{\Gamma}$ misurata da P in modo che lungo di essa quando $u = 0$ sia $G(0,v) = 1$.

(2) Prop.: Sopra la $\overline{\Gamma}$ si ha $G_u = 0$.

Dim.: Essendo $\overline{\Gamma}$ una geodetica si ha $[\mathsf{R}_{u,v}, \mathsf{R}_v, \vec{n}] \;=\; 0$. Per precisare $\mathsf{R}_{u,v}$ scriviamola come combinazione lineare

(3) $$\mathsf{R}_{u,v} \;=\; \alpha\,\mathsf{R}_u + \beta\,\mathsf{R}_v + \gamma\,\vec{n} \;.$$

Da questa segue $\alpha\,[\mathsf{R}_{u,v}, \mathsf{R}_v, \vec{n}] \;=\; 0$ cioè $\alpha = 0$.
Moltiplicando scalarmente per R la (3) abbiamo $\mathsf{R}_{u,v} \cdot \mathsf{R}_u \;=\; 0$.
Ma possiamo scrivere $\mathsf{R}_{u,v} \cdot \mathsf{R}_u \;=\; (\mathsf{R}_u \cdot \mathsf{R}_v)_v - \frac{1}{2}\,({\mathsf{R}_v}^2) \;=\; -\frac{1}{2}\,G_u$; quindi $G_u = 0$ lungo la $\overline{\Gamma}$ quando $u = 0$ ∎

G64:**k.07** Si è visto che una superficie che presenta un elemento lineare di superficie avente forma $\mathrm{d}u^{\,2} + G\,\mathrm{d}v^{\,2}$ possiede la curvatura gaussiana data da $K \;=\; -\dfrac{(\sqrt{G})_{u,u}}{\sqrt{G}}$. Quindi per una superficie con K costante il coefficiente G soddisfa l'equazione differenziale

(1) $$(\sqrt{G})_{u,u} + K\,\sqrt{G} \;=\; 0\ .$$

Vanno esaminati i tre casi alternativi (a) $K > 0$ (b) $K < 0$ e (c) $K = 0$.

$K > 0$ La forma generale per $\sqrt{G}$ che soddisfa (1) è

(2) $$\sqrt{G} \;=\; A(v)\,\cos(\sqrt{K}\,u) + B(v)\,\sin(\sqrt{K}\,u)\ .$$

Dato che $G(0, v) = 1$ e $G_u(0, v) = 0$, abbiamo $A(v) = 1$ e $B(v) = 0$. Quindi se $K > 0$ esiste una parametrizzazione della superficie per la quale la prima forma fondamentale ha la forma

$$ds^2 \;=\; \mathrm{d}u^{\,2} + \cos^2(\sqrt{K}\,u)\,\mathrm{d}v^{\,2}$$

$K < 0$ Con considerazioni simili siottiene

$$ds^2 \;=\; \mathrm{d}u^{\,2} + \cosh^2(\sqrt{-K}\,u)\,\mathrm{d}v^{\,2}\ .$$

$K = 0$ In questo caso semplicemente

$$ds^2 \;=\; \mathrm{d}u^{\,2} + \mathrm{d}v^{\,2}\ .$$

Dalle relazioni trovate si desume che superfici con curvature costanti coincidenti sono localmente isometriche.
In particolare le superfici con curvatura gaussiana costante K positiva sono localmente isometriche a una sfera avente raggio $\dfrac{1}{K}$, quelle con $K < 0$ sono localmente isometriche alla pseudosfera e quelle con $K = 0$ sono localmente isometriche al piano.

G64:**k.08** Consideriamo una superficie Σ e una curva Γ sopra di essa espressa mediante una parametrizzazione $\mathsf{r} = \mathsf{R}(u, v) = \overline{\mathsf{R}}(t)$.
La curvatura della proiezione della Γ sul piano tangente alla Σ in un suo punto P si dice **curvatura geodetica** della curva in P; la denoteremo con $\kappa(\mathsf{r})$.
Per la curvatura geodetica della $\mathsf{r} = \overline{\mathsf{R}}(t)$ si ottiene

(1) $$\kappa(\mathsf{r}) \;=\; \frac{1}{|\mathsf{r}'|^3}\,[\mathsf{r}", \mathsf{r}', \vec{n}]\ .$$

Si vede quindi che la curvatura geodetica di una curva geodetica è 0. Da questo si deduce che anche la curvatura geodetica è oggetto della geometria intrinseca delle superfici.

Limitiamoci ora a enunciare il seguente
(2) Teorema (**teorema di Gauss-Bonnet**) Sia G un dominio sopra una superficie Σ omeomorfo a un cerchio e delimitato da una curva regolare γ. Allora si ha

$$\int_\gamma \mathrm{d}\,s\;\kappa \;=\; 2\,\pi - \iint_G \mathrm{d}\,\sigma\,K\ .$$

Qui l'integrale del primo membro riguarda la curva chiusa γ e la sua lunghezza s, mentre l'integrale al secondo membro riguarda l'area di G. Inoltre per la curvatura geodetica κ si assume che sia positiva per i punti nei quali la γ è convessa verso l'esterno, mentre sia negativa per i punti nei quali la *gam* è convessa verso l'interno.

G64:**k.09** Se la curva γ è liscia a pezzi e presenta un certo numero T di punti di discontinuità della direzione Q_1, Q_2, ..., Q_T e se per $j = 1, 2, ..., T$ il punto Q_t riguarda un cambiamento di direzione di un angolo α_t, allora

(1) $$\int_\gamma ds\,\kappa + \sum_{t=1}^{T} (\pi - \alpha_t) \;=\; 2\,\pi - \iint_G \mathrm{d}\,\mathrm{d}\,\sigma\,K\ .$$

Nel caso particolare di un triangolo geodetico, cioè di triangolo i cui lati sono geodetiche abbiamo, con ovvio significato,

(2) $$\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \;=\; -\iint_G \mathrm{d}\,\sigma\,K\ .$$

In particolare per un triangolo sferico si ha

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\pi \;=\; \frac{\sigma}{R^2}\ ,$$

dove R denota il raggio della sfera e σ denota l'area del triangolo.

G64:I. superfici chiuse

G64:**I.01** Una superficie semplice si dice **superficie chiusa** sse è limitata e priva di frontiera. Tipiche superfici chiuse sono le sfere, i poliedri, i tori e le superfici omeomorfe alle precedenti.

Consideriamo una superficie chiusa Φ e ripartiamola in regioni poligonali g_h che si possono vedere come omeomorfi di cerchi in modo che si possa scrivere $Phi \ = \ \dot{\cup} h \in H g_h$ tali che due di tali regioni aut non hanno punti comuni, aut hanno in comune un punto o hanno in comune un arco di curva che chiamiamo lato in comune. L'insieme delle parti nelle quali si ripartisce la superficie si possa scrivere $\{j \in J :| \ g_j\}$.

La formula di Gauss-Bonnet per la regione g_j afferma

$$\int ds\, \kappa_j + \sum_{t \in T_j} (\pi - \alpha_{j,t}) \ = \ \iiint_{g_j} d\sigma\, K \ .$$

G64:**I.02** Il risultato di queste considerazioni può essere rappresentato dall'uguaglianza

$$2\,\pi\, f_1 - 2\,\pi\, f_0 \ = \ 2\,\pi\, f_2 - \iint_\Phi d\sigma\, K$$

e quindi dalla

(1) $$\frac{1}{2\,\pi} \iint_\Phi d\sigma\, K \ = \ f_2 - f_1 + f_0 \ .$$

L'intero

(2) $$\chi(\Phi) \ := \ f_2 - f_1 + f_0$$

viene chiamato **caratteristica di Eulero della superficie** Φ. L'uguaglianza precedente implica che la caratteristica di Eulero non dipende dalla particolare partizione in regioni poligonali scelta per la superficie Φ.

La caratteristica di Eulero può essere definita per ogni superficie semplice anche se non regolare; si può anche dimostrare che essa non dipende dal procedimento di ripartizione della superficie.
Dato che una trasformazione topologica applicata a una superficie chiusa e a una sua ripartizione mediante poligoni fornisce un'altra superficie chiusa munita di ripartizione in regioni poligonali, abbiamo che la caratteristica di Eulero di una superficie viene conservata da una trasformazione topologica. In altri termini la caratteristica di Eulero è un'invariante topologico.

G64:**I.03** Consideriamo ora i poliedri convessi e la loro area totale. Ciascuna di queste figure si può ottenere mediante una trasformazione topologica di una sfera che si può chiarire riferendosi a una proiezione delle facce del poliedro sopra la superficie di una sfera (interna o esterna al poliedro) con centro nel centro della sfera.
Da questo discende che la caratteristica di Eulero di un qualunque poliedro convesso vale 2. Quindi per un poliedro convesso con n_V vertici, n_E spigoli e n_F facce vale il seguente asserto:

Teorema (**teorema di Eulero**) $n_V - n_E + n_F \ = \ 2$ ovvero $n_V + n_F \ = \ n_E + 2$.

Dato che le trasformazioni topologiche delle superfici non alterano le rispettive caratteristiche di Euler, accade che le superfici semplici sono tutte trasformabili l'una nell'altra.

G64:**I.04** Accenniamo ad alcune superfici descrivibili semplicemente con caratteristiche topologiche diverse da quelle della sfera.

Si immagini una superficie di materiale deformabile che può assumere forma sferica e pratichiamo in essa due fori; si sollevino gli orli dei due fori e si facciano aderire; la superficie che si ottiene può essere chiamata **sfera con un manico**. Si osserva che essa è topologicamente equivalente al toro che si può ottenere facendo ruotare una circonferenza intorno a una retta del suo piano a essa esterna.
Con procedimenti simili, cioè praticando sopra una superficie sferica deformabile m coppie di fori e unendo i due tubi ottenibili da ciascuna coppia: in tal modo si opttengono le superfici chiamate **sfere con m manici**. La caratteristica di Eulero di tale superficie vale $2-2m$; in particolare per un toro è nulla.
Si trova che ogni superficie semplice chiusa si può ottenere mediante una trasformazione topologica da una sfera con più manici.

Superfici diverse dalle precedenti si ottengono con procedimenti tra i quali descriviamo il meno complesso. Iniziamo con una superficie di materiale deformabile con la struttura di una sfera e pratichiamole tre fori; allunghiamo i margini di un foro e facciamo passare il tubo che si può ottenere facendolo passare all'interno della superficie attraverso il secondo foro; infine si collega questo tubo al terzo foro congiungendo i due margini dall'interno della superficie originaria.
Una tale superficie è sostanzialmente diversa dalle figure semplici esaminate in precedenza in quanto muovendo un vettore normale da un punto si può tornare a tale punto con il vettore normale opposto a quello di partenza. Infatti un vettore normale mobile rivolto all'esterno sulla parte iniziale del tubo, quando questo supera il secondo foro risulta rivolto all'interno della superficie originaria. Per tale motivo la figura si dice **superficie unilaterale** o **figura nonorientabile**.
La figura ora ottenuta si dice anche f **figura che presenta un manico del secondo genere**.
Questa figura non si può ottenere localmente con trasformazioni topologiche.
Accade tuttavia che superfici con caratteristiche come quelle accennate esistono entro le spazio tetradimensionale sui reali. Si possono quindi prendere in esame superfici di natura più generale delle semplici sulle quali ci siamo concentrati.

Testi dell'*esposizione* in `http://www.mi.imati.cnr.it/alberto/` e in `http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/`