1

Capitolo G63
geometria differenziale delle curve

Contenuti delle sezioni

19 pagine

G630.01 La geometria differenziale si occupa delle proprietà geometriche che per essere studiate richiedono le nozioni e le tecniche dell'analisi infinitesimale.
La geometria differenziale che potremmo chiamare classica si è occupata delle curve in RcR e in $\mathbb{R}^{\times 3}$ e delle superfici in $\mathbb{R}^{\times 3}$.
Nel XX secolo questi studi si sono molto estesi sia per quanto riguarda il numero delle dimensioni degli spazi ambiente, sia per la natura di questi spazi (non più solo euclidei, ma anche proiettivi, affini e altro). In effetti si può fare della geometria differenziale anche senza servirsi della nozione di distanza.
Questo capitolo e il successivo sono dedicati all'introduzione di nozioni "classiche". Nel presente si trattano le nozioni basilari della geometria differenziale delle curve in 2 o 3 dimensioni; nella successiva le nozioni differenziali basilari della geometria delle superfici in $]Rcptr$.

G630.02 All'inizio vengono riprese e approfondite le nozioni di curva in 2 e 3 dimensioni e gli strumenti vettoriali per le descrizioni delle curve e delle superfici.
Successivamente vengono introdotte le nozioni di tangente, piano osculatore di una curva in un suo punto. Si passa poi alla nozione
Vengono poi a esaminare l'inviluppo di una famiglia di curve piane.
Definita la lunghezza di un arco di curva, si possono trattare le parametrizzazioni naturali delle curve rettificabili.
Per una curva sufficientemente regolare si definiscono la curvatura e la tensione in un punto.
Alla fine per le curve con parametrizzazioni tre volte differenziabili si dimostrano le formule di Frenet e alcune altre formule collegate.

G63 a. curve [1]

G63a.01 La nozione di curva si riconduce a quella di trasformazione di interesse geometrico.
Una trasformazione T da un dominio D a un codominio C si dice **trasformazione continua** sse manda ogni intorno di C in un intorno di C.
Con la terminologia infinitesimale più usuale una trasformazione da D a C è continua in $P \in D$ sse a ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ si può associare un $\delta_\epsilon \in \mathbb{R}_+$ tale che a ogni $Q \in D$ che dista da P meno di δ la trasformazione conduce a $T(Q)$ che dista da$T(P)$ meno di ϵ.
Consideriamo una trasformazione da D a C. Essa si dice **trasformazione topologica** sse è continua, invertibile e tale che sia continua anche la sua inversa. Equivalentemente essa viene detta **trasformazione bicontinua invertibile**.

Meno esigentemente si dice **trasformazione localmente topologica** in un punto P del suo dominio D una trasformazione tale che sia topologica una sua restrizione a un intorno di P. Hanno particolare interesse le trasformazioni localmente topologiche in ogni punto del rispettivo dominio.

G63a.02 Al fine di un primo orientamento, introduciamo ora il termine chiave del presente capitolo con una certa vaghezza.
Per **curva** si può intendere, solo vagamente, il risultato di una applicazione "sufficientemente regolare" di un intervallo dei reali nel piano RcR o nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^{\times 3}$; a seconda del dominio parleremo di **curve 2D** o di **curve 3D**.
In seguito, per eliminare la riconosciuta vaghezza, della qualifica "sufficientemente regolare" daremo adeguate definizioni.
Nel seguito introdurremo molte nozioni facendo riferimento soltanto a curve 3D, nozioni che possono essere applicate con semplici modifiche anche a curve 2D. In particolare osserviamo che le curve 3D nelle quali la coordinata z (o un'altra di esse) assume un valore fisso sono isomorfe alle curve 2D. Più in generale sono isomorfe alle curva 2D tutte le curve 3D i cui punti appartengono a un piano di $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Diremo **curva elementare** una curva ottenuta con una "trasformazione elementare" di un segmento reale aperto.
Per trasformazione elementare qui intendiamo una trasformazione esprimibile con funzioni delle componenti cartesiane fornite da espressioni algebriche, trascendenti elementari o altre funzioni che si sappiano sottoporre a operazioni infinitesimali.

Diremo invece **curva semplice** una curva 2D o 3D che in ciascuno dei suoi punti possiede un intorno (2D o 3D) riducendosi al quale la curva risulta elementare.
Diremo infine **curva generica** una curva ottenuta applicando una trasformazione localmente topologica a una curva semplice.

G63a.03 Le definizioni consentono di affermare che lo studio locale di ogni curva si può ridurre allo studio di una curva elementare.
Sia Γ una curva 3D elementare ottenibile con una trasformazione elementare di un segmento $\overline{AB}$ di retta. Poniamo in biiezione questo segmento con l'intervallo reale $\mathsf{I} :=$ (a,b) e introduciamo il parametro t variabile in I.
Al variare di t abbiamo il punto P variabile sulla Γ; Se P si individua con la terna di coordinate cartesiane $\langle x, y, z\rangle$, la trasformazione del segmento nella curva si può rappresentare con una terna di equazioni della forma

$$x = \xi(t) \qquad , \qquad y = \eta(t) \qquad , \qquad z = \zeta(t) \ ,$$

dove le funzioni ξ, η e ζ si possono considerare elementari e soddisfano alla richiesta

$$\forall t', t'' \in (\text{a,b}) \;:\; [\xi(t') - \xi(t'')]^2 + [\eta(t') - \eta(t'')]^2 + [\zeta(t') - \zeta(t'')]^2 > 0 \ .$$

Queste equazioni sono dette **equazioni parametriche della curva** Γ, avendo t il ruolo di parametro.

Una curva elementare ammette svariate parametrizzazioni, cioè diverse scelte per il parametro e conseguentemente diverse equazioni parametriche. In particolare per ogni funzione continua e strettamente monotona $\tau := \phi(t)$ per $t \in \mathsf{I}$, un'altra parametrizzazione della Gam è data dalle equazioni

$$x = \xi(\phi(t)) \qquad , \qquad y = \eta(\phi(t)) \qquad \text{e} \qquad z = \zeta(\phi(t)) \ .$$

G63a.04 Sia m un intero positivo; una curva γ si dice **curva regolare-**m sse le sue equazioni parametriche

(1) $$x = \xi(t) \qquad , \qquad y = \eta(t) \qquad , \qquad z = \zeta(t) \ ,$$

sono m volte differenziabili e soddisfano la condizione di non annullamento simultaneo delle derivate

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 > 0 \ .$$

Le curve regolari-1 sono dette anche **curve liscie** (*smooth*).
Si dice **curva analitica** una curva che ammette una parametrizzazione analitica, cioè ammette equazioni parametriche della forma (1) nelle quali le tre funzioni $\xi(t)$, $\eta(t)$ e $\zeta(t)$ sono funzioni analitiche.

G63a.05 Le curve che ammettono una parametrizzazione della forma

(1) $$x = \xi(t) \ \ , \ \ y = \eta(t) \ \ , \ \ z = t \qquad \text{ossia} \qquad x = \xi(z) \ \ , \ \ y = \eta(z)$$

o parametrizzazioni riconducibili a questa (ad esempio mediante uno scambio di assi di riferimento) sono particolarmente agevoli da studiare. Si cercano quindi condizioni che consentono a una curva una parametrizzazione della forma precedente, almeno localmente.
Una risposta a questa richiesta è fornita dall'enunciato che segue

(2) Prop.: Consideriamo un curva regolare Γ, un suo punto $P_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ ed una sua presentazione parametrica

$$x = \xi(t) \ \ , \ \ y = \eta(t) \ \ , \ \ z = \zeta(t)$$

in un intorno di P_0 tale che sia $P_0 = \langle \xi(t_0), \eta(t_0), \zeta(t_0) \rangle$, cioè con P_0 corrispondente al valore t_0 del parametro variabile.
Se $\xi'(t_0) \neq 0$, allora la Γ può essere presentata in un intorno sufficientemente piccolo di P_0 dalle equazioni

$$y = \phi(x) \qquad , \qquad z = \psi(x) \ ,$$

con $\phi(x)$ e $\psi(x)$ funzioni regolari.

Dim.: In forza del teorema della funzione implicita, esiste una funzione regolare $\chi(x)$ tale che sia $\chi(x_0) = t_0$ e che per ogni x appartenente a un opportuno intorno di x_0 sia $x = \xi(\chi(x))$. Se differenziamo questa identità rispetto ad x, per $x = x_0$ otteniamo $1 = \xi'(t_0)\, \epsilon'(x_0)$. Questa uguaglianza garantisce che sia $\chi(x_0) \neq 0$ e quindi che la funzione $\chi(x)$ in un opportuno intorno di x_0 sia monotona. Di conseguenza possiamo sostituire il parametro t con il parametro x sostituendo t con $\chi(x)$, ottenendo infine le equazioni parametriche

$$y = \eta(\chi(x)) \qquad \text{e} \qquad z = \zeta(\chi(x)) \ ,$$

equazioni aventi la forma richiesta ∎

G63a.06 Consideriamo una curva 3D Γ e un suo punto P_0; questo si dice **punto ordinario della curva** sse essa in un intorno di P ammette una parametrizzazione liscia

(1) $$x = \xi(t) \quad , \quad y = \eta(t) \quad , \quad z = \zeta(t) \qquad \text{con} \qquad {\xi'(t)}^2 + {\eta'(t)}^2 + {\zeta'(t)}^2 > 0 \; .$$

All'opposto P_0 si dice **punto singolare della curva** sse una tale parametrizzazione non esiste. Il problema della distinzione tra punti ordinari e punti singolari di una curva ha grande importanza.
Per molte importanti curve 2D il problema può risolversi grazie al seguente enunciato.

(2) Prop.: Sia Γ una curva 2D data dalle equazioni parametriche

$$x = \xi(t) \qquad \text{e} \qquad y = \eta(t) \qquad \text{con le funzioni opportunamente derivabili} \; .$$

Se la prima delle derivate nonnulle della $\xi(t)$ e della $\eta(t)$ ha grado dispari P è punto ordinario. Se la prima delle derivate nonnulle della $\xi(t)$ e della $\eta(t)$ ha grado pari P è punto singolare.

Dim.: Senza ledere la generalità, per semplificare le notazionoi, assumiamo che P sia l'origine $\mathbf{0}_2$ e che il valore del parametro t corrispondente a P sia 0 (la proprietà non cambia se la curva e il parametro vengono sottoposti a traslazioni).
Sia m il minimo grado di non annullamento della derivata della $\xi(t)$ ed n il minimo grado di non annullamento della derivata della $\eta(t)$. Per la formula di Taylor abbiamo

$$x = \frac{t^m}{m!}\,(\xi^{(m)}(0) + \epsilon_x(t)) \qquad , \qquad y = \frac{t^n}{n!}\,(\eta^{(n)}(0) + \epsilon_y(t)) \; .$$

Senza ledere la generalità assumiamo sia $m \leq n$

Nel caso m dispari introduciamo il parametro $\tau := t^m$ per una nuova parametrizzazione della Γ ed osserviamo che τ è funzione crescente della t.
La nuova parametrizzazione è liscia in quanto

$$\left.\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau}\right|_P = \lim_{t\to 0}\frac{\xi(t)}{t^m} = \frac{1}{m!}\,\xi^{(m)}(0) \neq 0 \quad .$$

Di conseguenza P è punto ordinario.

Nel caso m pari la funzione $\xi(t)$ non cambia segno in vicinanza di $t = 0$; quindi la curva in tale vicinanza sta nel semipiano relativo a $x \geq 0$ sse $\xi^{(m)}(0) > 0$ e nel semipiano con $x \leq 0$ sse $\xi^{(m)}(0) < 0$.

G63 b. vettori e funzioni vettoriali

G63b.01 Molte proprietà delle curve e delle superfici sono meglio trattate servendosi delle notazioni vettoriali. Ricordiamo le principali introdotte in precedenza e diamo alcuni altri risultati che ci verranno utili.
Nel seguito le scritture $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e simili rappresentano vettori di $\mathbb{R}^{\times 3}$ e in particolare di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mentre useremo lettere greche per denotare elementi del campo dei reali, entità che per distinguerle dai vettori in genere chiameremo scalari.
Ogni vettore $\mathbf{V}$ può essere individuato attraverso le sue coordinate cartesiane relative a un dato sistema di riferimento monometrico e per questo useremo notazioni come $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ o come $\mathbf{v} = \langle v_x, v_y, v_z \rangle$.
Con $|\mathbf{v}|$ denotiamo la lunghezza del vettore $\mathbf{v}$, scalare nonnegativo ottenibile dalle coordinate cartesiane come $|\mathbf{v}| := \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$.
Se $\alpha \in \mathbb{R}$ la moltiplicazione per α di un vettore $\mathbf{v}$ ci fornisce $\alpha\,\mathbf{v} := \langle \alpha\, v_1, \alpha\, v_2, \alpha\, v_3 \rangle$.
Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definiamo come combinazione lineare $\alpha\,\mathbf{v} + \beta\,\mathbf{W} := \langle \alpha\, v_1 + \beta\, w_1, \alpha\, v_2 + \beta\, w_2, \alpha\, v_3 + \beta\, w_3 \rangle$.
Ci serviremo spesso dei versori canonici $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$ e della espressione di un vettore come combinazione lineare di tali vettori $\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{e}_1 + v_2\,\mathbf{e}_2 + v_3\,\mathbf{e}_3 = v_x\,\mathbf{e}_x + v_y\,\mathbf{e}_y + v_z\,\mathbf{e}_z$.

G63b.02 Ricordiamo che si definisce **prodotto scalare dei due vettori** $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$

(1) $$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \;:=\; v_1\, w_1 + v_2\, w_2 + v_3\, w_3 \;=\; |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| \cos(\angle \mathbf{v}\,\mathbf{w}) \ .$$

Si trova facilmente che questa funzione del genere $\lceil \mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{R}^{\times 3} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ è una composizione bilineare, simmetrica e definita positiva, cioè tale che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}_2$. Inoltre il prodotto scalare è distributivo a sinistra e (ovviamente per la simmetria) a destra.

Spesso è utile servirsi della proprietà che segue.

(2) Prop.: $$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\times 3} \;:\; \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \implies \mathbf{v} = \mathbf{w} \ .$$

Dim.: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \implies (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = 0$; se fosse $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ il vettore $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ sarebbe ortogonale ad un vettore arbitrario, cosa impossibile ▮

G63b.03 Si definisce **prodotto vettore dei due vettori** $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \;:=\; |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| \sin(\angle \mathbf{v}\,\mathbf{w})\,\mathbf{p} \ ,$$

dove $\mathbf{p}$ è il vettore ortogonale al piano in cui giacciono $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ orientato in modo che un osservatore collocato nella sua posizione vede l'angolo $\angle \mathbf{v}\,\mathbf{w}$ orientato positivamente.
Si trova facilmente che il prodotto vettoriale è una funzione del genere $\lceil \mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{R}^{\times 3} \longmapsto \mathbb{R}^{\times 3} \rceil$, bilineare e antisimmetrica; inoltre $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}_3 \iff \mathbf{v} /\!/ \mathbf{w}$.

Si trova che

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\times 3} \;:\; (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \;=\; \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) \ .$$

Questo rende opportuno servirsi della composizione ternaria,

$$[\mathbf{v}\,\mathbf{w}\,\mathbf{u}] \;:=\; (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \ , \text{ funzione del genere } \lceil \mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{R}^{\times 3} \longmapsto \mathbb{R} \rceil \ .$$

Per questa composizione si trovano numerose proprietà; vediamo quelle ottenibili più direttamente dalle definizioni.

$[\mathbf{v}\,\mathbf{w}\,\mathbf{u}] = [\mathbf{w}\,\mathbf{u}\,\mathbf{v}] = [\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}] = -[\mathbf{u}\,\mathbf{w}\,\mathbf{v}] = -[\mathbf{w}\,\mathbf{v}\,\mathbf{u}] = -[\mathbf{v}\,\mathbf{u}\,\mathbf{w}]$.

Il valore di $[\mathbf{v}\,\mathbf{w}\,\mathbf{u}]$ esprime il volume del parallelepipedo orientato avente tre spigoli uscenti dall'origine costituiti, nell'ordine dai vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$.

$[\mathbf{v}\,\mathbf{w}\,\mathbf{u}] = 0$ sse il corrispondente parallelepipedo collassa, cioè sse i tre vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$ sono linearmente dipendenti.

G63b.04 Il prodotto vettore è distributivo, sia a sinistra che a destra. Dimostriamo la distributività a destra; la distributività a sinistra discende da quella a destra e dalla antisimmetria.

È naturale chiedersi se il prodotto vettore sia associativo, ma l'uguaglianza delle due composizioni che esprime questa proprietà non è affatto garantita. Si trovano infatti le espressioni

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{u} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}$$

Vale la **identità di Lagrange**

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{t}) \;=\; (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\,(\mathbf{w} \cdot \mathbf{t}) - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \;.$$

G63b.05 È spesso necessario esprimere un vettore mediante le sue coordinate cartesiane e per questo sono utili le espressioni mediante coordinate cartesiane delle composizioni di vettori.

Consideriamo per $i = 1, 2, 3, ...$ i vettori generici $\mathbf{r}_i = x_i\,\mathbf{e}_x + y_i\,\mathbf{e}_y + z_i\,\mathbf{e}_z$ e i $\mathbf{q}_i = u_i\,\mathbf{e}_x + v_i\,\mathbf{e}_y + w_i\,\mathbf{e}_z$.

Servono anche uguaglianze facilmente dimostrabili come le seguenti

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_x = x \;,\quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_y = y \;,\quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z = z \;,\quad \mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_x)\,\mathbf{e}_x + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_y)\,\mathbf{e}_y + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z)\,\mathbf{e}_z \;.$$

Si trovano senza particolari accorgimenti le seguenti espressioni

$$\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 \;=\; \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_x + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_z \;.$$

$$[\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2\,\mathbf{r}_3] \;=\; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \;.$$

$$[\mathbf{q}_1\,\mathbf{q}_2\,\mathbf{q}_3]\,[\mathbf{r}_1\,\mathbf{r}_2\,\mathbf{r}_3] \;=\; \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & u_3 & u_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{r}_2 & \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{r}_2 & \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{r}_2 & \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{r}_3 \end{vmatrix} \;.$$

G63b.06 Consideriamo due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ che appartengono a due piani passanti per l'origine che si intersecano nella retta associata al versore $\mathbf{i}$. Allora

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i})\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \;=\; \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \;.$$

G63b.07 Dopo i precedenti richiami sui vettori non dipendenti da parametri, presentiamo le proprietà delle funzioni del genere $\lceil \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^{\times 3} \rceil$ utili allo studio delle curve.

Come già accannato, una curva può essere studiata attraverso una funzione della forma

$$\lceil\, t \in [\text{a,b}\,] \;\mapsto\; \mathbb{R}^{\times 3} \,\rceil \qquad \text{che abbrevieremo con la scrittura} \quad \mathbf{r} = \mathbf{f}(t) \;.$$

Alle funzioni $\mathbf{f}(t)$ si applica la nozione di limite relativa a spazi metrici:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) - \;=\; \mathbf{f}_0 \quad \text{sse} \quad \lim_{t \to t_0} |\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_0| \;=\; 0 \;.$$

Le proprietà di questo genere di limite sono riassunte dalle formule che seguono.

Assumiamo che sia $t_0 \in \mathbf{I} := [a,b\,]$, $\lim_{t\to t_0} \mathsf{f}(t) = \mathsf{f}_0$, $\lim_{n\to t_0} \mathsf{g}(t) = \mathsf{g}_0$, $\lambda \in \lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$, $\lim_{t\to t_0} \lambda(t) = \lambda_0$. Valgono le uguaglianze

$$\lim_{t\to t_0}[\mathsf{f}(t) \pm \mathsf{g}(t)] \;=\; \mathsf{f}_0 \pm \mathsf{g}_0 \;; \qquad \lim_{t\to t_0}[\lambda(t)\,\mathsf{f}(t)] \;=\; \lambda_0\,\mathsf{f}_0 \;;$$
$$\lim_{t\to t_0}[\mathsf{f}(t) \cdot \mathsf{g}(t)] \;=\; \mathsf{f}_0 \cdot \mathsf{g}_0 \;; \qquad \lim_{t\to t_0}[\mathsf{f}(t) \wedge \mathsf{g}(t)] \;=\; \mathsf{f}_0 \wedge \mathsf{g}_0 \;.$$

G63b.08 La proprietà di continuità e la costruzione della derivazione per le funzioni vettoriali, funzioni che possiamo chiamare **funzioni-R3tR3**, estende in modo prevedibile quelle per le funzioni-RtR. Limitiamoci alle formule che seguono.

$$\mathsf{f}(t) \text{ si dice continua in } t_0 \text{ sse } \lim_{t\to t_0} \mathsf{f}(t) \;= \mathsf{f}(t_0).$$

$$\text{Si dice derivata della } \mathsf{f}(t) \text{ in } t \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{f}(t) \;=\; \mathsf{f}'(t) \;:=\; \lim_{h\to 0} \frac{\mathsf{f}(t+h) - \mathsf{f}(t)}{h} \;.$$

Le proprietà della derivazione sono date dalle formule che seguono; in esse utilizziamo le notazioni introdotte in b07.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathsf{f}(t) \pm \mathsf{g}(t)] \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{f}(t) \pm \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{g}(t)] \;;$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\lambda(t)\,\mathsf{f}(t)] \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t)\,\mathsf{f}(t)] + \lambda(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{f}(t) \;;$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathsf{f}(t) \cdot \mathsf{g}(t)] \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{f}(t)\,\mathsf{g}(t) + \mathsf{f}(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{g}(t) \;;$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathsf{f}(t) \wedge \mathsf{g}(t)] \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{f}(t) \wedge \mathsf{g}(t) + \mathsf{f}(t) \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{g}(t) \;.$$

Prevedibili le definizioni delle derivate seconda, terza ecc. Per ogni m intero positivo è importante l'insieme delle funzioni-R3tR3 differenziabili m volte.

G63b.09 Diciamo funzioe-RtRRR una funzione del genere $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 3} \rceil$. Una tale funzione si può esprimere mediante le tre funzioni-RtR che costituiscono le sue tre componenti cartesiane:

$$\mathsf{f}(t) \;=\; \langle \xi(t), \eta(t)\zeta(t)\rangle \;=\; \xi(t)\,\mathsf{e}_x + \eta(t)\,\mathsf{e}_y + \zeta(t)\,\mathsf{e}_z \;.$$

Le sue proprietà di differenziabilità sono strettamente collegate alle proprietà di differenziabilità delle sue componenti cartesiane $\xi(t)$, $\eta(t)$ e $\zeta(t)$.

(2) Prop.: La funzione $\mathsf{f}(t)$ è differenziabile m volte $\iff$ sono differenziabile m volte le funzioni sue componenti $\xi(t)$, $\eta(t)$ e $\zeta(t)$.

Dim.: Discende dalla possibilità di esprimere la funzione vettoriale come combinazione lineare delle sue componenti.
"$\Longrightarrow$": Basta osservare che $\xi(t) = \mathsf{f}(t) \cdot \mathsf{e}_x$, $\eta(t) = \mathsf{f}(t) \cdot \mathsf{e}_y$, e $\zeta(t) = \mathsf{f}(t) \cdot \mathsf{e}_z$.
"$\Longleftarrow$": Discende dalla espressione lineare $\mathsf{f}(t) \;=\; \xi(t)\,\mathsf{e}_x + \eta(t)\,\mathsf{e}_y + \zeta(t)\,\mathsf{e}_z$ ▮

G63b.10 Per le funzioni-R3tR3 vale anche la formula di Taylor.

La regolarità della curva corrisponde alla regolarità della funzione che è la sua rappresentazione vettoriale.

G63 c. tangente a una curva

G63c.01 Diamo una definizione di tangente a una curva che presenta vari vantaggi.

Consideriamo una curva γ un suo punto P e una retta R passante per P. Consideriamo anche un punto Q appartenente alla Γ e diciamo d la sua distanza da P, $d := |Q - P|$, Q' la sua proiezione sulla R ed r la distanza di Q dalla retta R, cioè $r := |Q - Q'|$. Diciamo che la R è una **retta tangente alla curva** Γ in P sse $\lim_{P \to Q} \frac{r}{d} = 0$.

Conviene osservare esplicitamente che il rapporto $\frac{r}{d}$ è il seno dell'angolo $\angle \overrightarrow{PQ'-}\,\overrightarrow{PQ-}$. Da questa segue direttamente che Γ possiede tangente in P sse esiste $\lim_{Q \to P} \overline{-PQ-}$ (retta costituente la tangente in P).

G63c.02 **(1) Prop.**: Consideriamo una curva liscia Γ individuata dalla sua equazione vettoriale $\mathsf{f}(t)$ per t corrente in un intervallo reale $($a,b $)$. La curva possiede una e una sola tangente in ogni suo punto e la tangente in ogni suo punto P ha la dirazione di $\mathsf{F}'(t)$.

Dim.:

G63c.03 Presentiamo le equazioni della tangente alla curva Γ nel punto $P(t)$, tangente che denotiamo con $\mathsf{t}(t)$, in relazione ai vari modi di presentare la curva.

Ricordiamo che una linea retta passante per il punto $P_0 = \big\langle x_0, y_0, z_0 \big\rangle$ e avente la dirazione di un vettore $\langle a, b, c\rangle$ viene convenientemente individuata dalle equazioni

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \ .$$

Dato che d02(1) fornisce la direzione della tangente, l'equazione della tangente si può facilmente ricavare.

G63c.04 La curva Γ sia nota attraverso le funzioni scalari costituenti le equazioni parametriche

$$x = \xi(t) \qquad , \qquad y = \eta(t) \qquad , \qquad z = \zeta(t) \ .$$

In tal caso la tangente $\mathsf{t}(t)$, avendo la direzione di $\langle \xi'(t), \eta'(t), \zeta(t)\rangle$, è data dalle equazioni

$$\frac{x - \xi(t)}{\xi'(t)} \ = \ \frac{y - \eta(t)}{\eta'(t)} \ = \ \frac{z - \zeta(t)}{\zeta'(t)} \ .$$

Se in particolare la Γ è piana ed è data dalle equazioni $x = \xi(t)$ e $y = \eta(t)$ si ha l'equazione

$$\frac{x - \xi(t)}{\xi'(t)} \ = \ \frac{y - \eta(t)}{\eta'(t)} \ .$$

La curva sia data dalle equazioni $y = \epsilon(x)$ e $z = \theta(x)$. Questa presentazione conviene considerarla un caso particolare di rappresentazione parametrica

$$x = t \qquad , \qquad y = \epsilon(t) \qquad , \qquad z = \theta(t)$$

e di conseguenza la tangente passante per il punto $P_0 = lax_0, \epsilon(x_0), \theta(x_0)\big\rangle$ si ottiene dalle equazioni

$$x - x_0 \ = \ \frac{y - \epsilon(x_0)}{\epsilon'(x_0)} \ = \ \frac{z - \theta(x_0)}{\theta'(x_0} \ ,$$

oppure dalle equazioni equivalenti

$$y = \epsilon(x_0) + \epsilon'(x_0)\,(x - x_0) \qquad , \qquad z = \theta(x_0) + \theta'(x_0)\,(x - x_0) \ .$$

Si osserva che se la curva è piana e data dalla equazione della forma $y = f(x)$ si ottiene la ben nota equazione

$$y \;=\; f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\ .$$

G63c.05 Consideriamo ora il caso della curva data dalle equazioni implicite della forma

$$(1) \qquad \phi(x,y,z) = 0 \qquad , \qquad \psi(x,y,z) = 0\ .$$

Chiediamo la tangente nel suo punto $P_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ per il quale si chiede che la matrice delle derivate parziali, per le quali usiamo notazioni come $\phi_x \;:=\; \dfrac{\partial}{\partial x}\phi$ e $\psi_z :=\; \dfrac{\partial}{\partial z}\psi$,

$$\begin{bmatrix} \phi_x & \phi_y & \phi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{bmatrix}$$

abbia rango 2; questo significa chiedere che in vicinanza di P_0 le funzioni ϕ e ψ siano esprimibili come funzioni esplicite in ciascuna delle coppie di variabili.
Dunque in vicinanza di P_0 si può ottenere una parametrizzazione regolare per la curva

$$x = \xi(t) \qquad , \qquad y = \eta(t) \qquad , \qquad z = \zeta(t)\ .$$

Le equazioni implicite (1) espresse come funzioni di t:

$$\phi(\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) \;=\; 0 \qquad , \qquad \psi(\xi(t), \eta(t), \zeta(t)) \;=\; 0\ .$$

Esse possono essere differenziate rispetto alla t ottenendo

$$\phi_x\,\xi' + \phi_y\,\eta' + \phi_z\,\zeta' \;=\; 0 \qquad , \qquad \psi_x\,\xi' + \psi_y\,\eta' + \psi_z\,\zeta' \;=\; 0\ .$$

Quindi il vettore tangente $\mathsf{r}' = \langle \xi', \eta', \zeta' \rangle$ deve essere perpendicolare ai vettori $\langle \phi_x, \phi_y, \phi_z \rangle$ e $\langle \psi_x, \psi_y, \psi_z \rangle$, cioè ha la direzione del loro prodotto vettore Quindi le equazioni della tangente nel punto P_0 sono

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \phi_y & \phi_z \\ \psi_y & \psi_z \end{vmatrix}} \;=\; \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \phi_z & \phi_x \\ \psi_z & \psi_x \end{vmatrix}} \;=\; \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}}\ .$$

Osserviamo esplicitamente che le derivate parziali qui richieste sono da valutare in corrispondenza del valore t_0 del parametro.

Nel caso in cui la *Gam* sia la curva piana data dall'equazione della forma $\phi(x,y) = 0$ la tangente è data dalle equazioni equivalenti

$$\frac{x - x_0}{\phi_y} \;=\; \frac{y - y_0}{-\phi_x} \qquad \text{ovvero} \qquad (x - x_0)\,\phi_x + (y - y_0)\,\phi_y \;=\; 0\ .$$

Queste sono ottenibili dalle tridimensionali ponendo $z = 0$.

G63c.06 Il piano perpendicolare alla tangente t nel punto P_0 della curva Γ viene chiamato **piano normale alla curva** in P_0.
La sua equazione si trova senza difficoltà dalla relazione $(\mathsf{r} - \mathsf{f}(t_0) \cdot \mathsf{f}'(t_0) = 0$.

G63 d. piano osculatore di una curva

G63d.01 Consideriamo una curva Γ, un suo punto P un suo secondo punto Q (che conviene pensare nelle vicinanze di P) ed un piano Π passante per P. Denotiamo poi con d la distanza da P di Q, cioè poniamo $d := |Q - P|$, e denotiamo con $\overline{Q}$ la proiezione ortogonale di Q su Π e con e la distanza di Q da Π, cioè definiamo $e := |\overline{Q} - Q|$.
Se $\lim_{Q \to P} \frac{e}{d^2} = 0$ il piano limite di Π viene detto **piano osculatore della curva** Γ nel punto P.

G63d.02 **(1) Prop.**: Una curva Gam che possa esprimersi con un'equazione parametrica della forma $P(t) = \mathbf{r}(t)$ e che sia 2 volte differenziabile possiede un piano osculatore in tutti i suoi punti. Inoltre aut il piano osculatore è unico aut ogni piano contenente la tangente in P che scriviamo $\mathbf{t}$ è osculatore. Il piano osculatore è parallelo ai vettori $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}"(t)$.

Dim.: Il punto Q è esprimibile come $Q = \mathbf{r}(t+h)$ Anche il piano osculatore si può considerare funzione del parametro t, cioè può individuarsi come $\Pi(t)$. Denotiamo con $\mathbf{n}$ il versore normale a Π in P; abbiamo allora

$$d = |\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)| \qquad , \qquad e = |\mathbf{n}\,(\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t))| \ ;$$
$$\frac{e}{d^2} = \frac{\mathbf{n}\,(\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t))}{((\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)))^2} = \ldots$$

G63d.03 Per precisare l'equazione del piano osculatore in $P(t)$
Quindi il loro triplo prodotto scalare deve essere nullo.

$$\begin{vmatrix} x - \xi(t) & y - \eta(t) & z - \zeta(t) \\ \xi'(t) & \eta'(t) & \zeta'(t) \\ \xi''(t) & \eta''(t) & \zeta|(t) \end{vmatrix} = 0 \ .$$

G63d.04 Consideriamo le rette normali alla curva in un suo punto, cioè le rette passante per $P(t)$ perpendicolari alla tangente in P. Se il piano osculatore è unico sono distinguibili due normali: la **retta normale principale** è la normale appartenente al piano osculatore, mentre si dice **retta binormale** la normale perpendicolare alla principale.
Conoscendo le equazioni dalla tangente e del piano osculatore della curva la derivazione delle equazioni della normale principale e della binormale sono ottenibili senza difficoltà.

G63 e. inviluppo di una famiglia di curve piane

G63e.01 Consideriamo una famiglia a un parametro t di curve piane $\{t \in$ (a,b) :| $\gamma_{[t]}\}$ individuata dalla famiglia di equazioni $\phi(x, y, t) = 0$. Consideriamo inoltre una curva piana individuata dalle equazioni parametriche $P(t) = \langle \xi(t), \eta(t) \rangle$. Se nel punto $P(t)$ la curva γ_t ha la stessa tangente $\mathbf{t}(t)$ della Γ si dice che Γ è l'**inviluppo della famiglia delle curve** $\gamma_{[t]}$.

G63e.02 Per individuare un'equazione per l'inviluppo sostituiamo le variabili x e y nella ϕ, risp., con le funzioni $x = \xi(t)$ e $y = \eta(t)$ ottenendo l'identità

$$\phi(\xi(t), \eta(t), t) \;=\; 0 \;.$$

Differenziamo questa identità rispetto alla variabile t ottenendo

$$\phi_x \, \xi'(t) + \phi_y \, \eta'(t) + \phi_t \;=\; 0 \;.$$

Si osserva che vale la $\phi_x \, \xi'(t) + \phi_y \, \eta'(t) = 0$: infatti il vettore $\langle \xi'(t), \eta'(t) \rangle$ è il vettore tangente in $P(t)$ della Γ, mentre la coppia $\langle \phi_y, -\phi_x \rangle$ fornisce il vettore tangente in $P(t)$ della $\gamma_{[t]}$ ed i due vettori per ipotesi sono collineari.
Dunque le funzioni $\xi(t)$ e $\eta(t)$ soddisfano le equazioni

$$\phi(x, y, t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \phi_t(x, y, t) = 0 \;.$$

Da queste equazioni generiche per specifiche forme della ϕ si possono ricavare equazioni di specifiche curve inviluppo.

G63e.03 Spesso è utile individuare l'inviluppo della famiglia delle rette tangenti di una data curva piana. Questa sia data dalle equazioni

(1) $$x = \chi(t) \qquad , \qquad y = \theta(t) \;.$$

Dato che $\epsilon'(t0$ e $\theta'(t)$ forniscono le componenti cartesiane del vettore tangente variabile, l'equazione delle normali è

(2) $$(x - \chi(t)) \, \epsilon'(t) + (y - \theta(t)) \, \theta'(t) \;=\; 0 \;.$$

Differenziamo questa rispetto a t ottenendo

(3) $$(x - \chi(t)) \, \chi\text{"}(t) - [\epsilon'(t)]^2 + (y - \theta(t)) \, \theta''(t) - [\theta'(t)]^2 \;=\; 0 \;.$$

Se dal sistema delle equazioni (2) e (3) ricaviamo le funzioni $x(t) = \chi(t)$ e $y(t) = \theta(t)$, otteniamo le equazioni dell'inviluppo richiesto

$$x(t) = \chi(t) - \frac{(x'^2 + y'^2) \, y'}{y\text{"} \, x' - x\text{"} \, y'} \qquad , \qquad y(t) = \theta(t) - \frac{(x'^2 + y'^2) \, x'}{y\text{"} \, x' - x\text{"} \, y'} \;,$$

purché sia verificata la condizione $y\text{"} \, x' - x\text{"} \, y' \neq 0$.

G63e.04 L'inviluppo delle normali di una curva piana viene chiamato **evoluta della curva**.
Questa costruzione, come vedremo, possiede proprietà notevoli.

G63 f. lunghezza di una curva

G63f.01 Consideriamo l'intervallo reale $\mathsf{I} = [a,b\,]$ ed una curva Γ data dalle equazioni parametriche

$$x = \xi(t) \quad , \quad y = \eta(t) \quad , \quad z = \zeta(t) \quad \text{ovvero} \quad P(t) = \mathbf{r}(t) \quad \text{per} \quad a \le t \le b \,.$$

Ad ogni suddivisione di I $\mathsf{S} := \langle t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_m = b \rangle$ è associata la poligonale $\mathsf{P} := \langle P_0, P_1, P_2, ..., P_m \rangle$ dove per $j = 0, 1, 2, ..., m$ si è posto $P_j := \mathbf{r}(t_j)$; è inoltre definita la lunghezza della P che denotiamo con $|\mathsf{P}| := \sum_{j=1}^{m} |P_j = P_{j-1}|$ e la massima delle lunghezze dei suoi segmenti, ovvero la massima distanza tra punti successivi della suddivisione, che denotiamo con $MD(\mathsf{P})$.

Per l'insieme delle poligonali ottenibili dalla Γ si definisce un ordine parziale di maggiore infittimento basato sull'avere più punti di suddivisione dell'intervallo I e tale ordine rende l'insieme delle poligonali un insieme diretto; questo dice che date due poligonali si trova una terza poligonale con più infittimento di entrambe.
Si può quindi definire il limite delle lunghezze $|\mathsf{P}|$ al tendere a 0 della massima distanza per le poligonali P. Se tale limite esiste la Γ si dice **curva rettificabile** ed il valore del limite si dice **lunghezza della curva**.

G63f.02 Prop. Ogni curva liscia è rettificabile e se è espressa dalla funzione $\mathbf{r}(t)$ per $t \in \mathsf{I} := [a,b\,]$, la sua lunghezza $s(a, b)$ è data da

$$(1) \qquad s(a, b) \;=\; \int_a^b dt\, |\mathbf{r}'(t)| \;.$$

Dim.: La lunghezza della poligonale relativa alla suddivisione S della Γ è esprimibile come

$$\sum_{j=1}^{m} |P_j = P_{j-1}| \;=\; \sum_{j=1}^{m} |\mathbf{r}(t_j) - \mathbf{R}(t_{j-1}| \;=\; T_1 + T_2 + T_3 \qquad , \quad \text{dove} \quad .$$

$$(2) \qquad T_1 \;:=\; \int_a^b dt\, \mathbf{r}'(t) \qquad , \qquad T_2 \;:=\; \sum_{j=1}^{m} (t_j - t_{j-1})\, \|\mathbf{r}'(t_j) - \int_a^b dt\, \mathbf{r}'(t) \qquad ,$$

$$T_3 \;:=\; \sum_{j=1}^{m} |\mathbf{r}(t_j) - \mathbf{r}(t_{j-1}| - \sum_{j=1}^{m} (t_j - t_{j-1})\, |\mathbf{r}'(t_j)| \;.$$

Al tendere a 0 della distanza massima $MD(\mathsf{P})$ il primo addendo di T_0 tende a 0, mentre T_3 tende al valore dell'espressione

$$\sum_{j=1}^{m} \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathrm{d}t\, \mathbf{r}'(t) \right| \;-\; \sum_{j=1}^{m} \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathrm{d}t\, \mathbf{r}'(t_j) \right| \;.$$

e quindi, essendo per la disuguaglianza triangolare la differenza di due valori assoluti non superiore al valore assoluto della loro differenza, T_3 tende a un valore non superiore a

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathrm{d}t\, \left| \mathbf{R}'(t) - \mathbf{r}(t_j) \right| \quad .$$

Grazie alla continuità di $\mathbf{r}'(t)$, e quindi alla sua continuità uniforme, sull'intervallo I, per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ipap) si trova una suddivisione per la quale

$$\forall j = 1, 2, ..., m \;,\; t \in [t_{j-1}, t_j] \quad \vdots \quad |\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(t_j)| < \epsilon \;.$$

Quindi in tali condizioni T_3 è inferiore a

$$\int_a^b dt\,\epsilon = (b-a)\,\epsilon\ .$$

Raccogliendo le considerazioni sui tre termini introdotti in (2) si conclude che al limite per $MD(\mathsf{S}) \to 0$ la lunghezza della poligonale tende all'integrale T_1 ▮

G63f.03 Se la curva Γ è data mediante le equazioni

$$x = \xi(t) \qquad , \qquad y = \eta(t) \qquad , \qquad z = \zeta(t)\ ,$$

la lunghezza del suo arco corrispondente a $t_1 \leq t \leq t_2$ viene fornita dalla

$$s(t_1,t_2) \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\sqrt{\xi'(t)^2 + \eta'(t)^2 + \zeta'(t)^2}\ .$$

Se la curva Γ è data mediante le equazioni

$$y = \eta(x) \qquad \text{e} \qquad z = \zeta(x)\ ,$$

la lunghezza del suo arco è data dalla

$$s(t_1,t_2) \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\sqrt{11 + \eta'(t)^2 + \zeta'(t)^2}\ .$$

Quando la curva è piana e appartiene al piano Oxy le espressioni precedenti si semplificano ponendo $\zeta'(t) = 0$.

G63f.04 La funzione s associata a una curva Γ è stata presentata come una misura positiva, ma può vedersi anche come funzione con valori negativi. In effetti l'espressione (1) induce a pensare che la s sia una funzione antisimmetrica nei suoi due argomenti: $s(t_2,t_1) \;=\; -s(t_1,t_2)$. Possiamo anche fissare un convenzionale valore di riferimento t_0 per la variabile t e ridefinire la s come funzione-RtR ponendo

$$s(t) \;:=\; \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\bar{t}\,|\mathbf{r}'(\bar{t})| \quad \text{per} \quad t \geq 0 \qquad \text{e} \quad s(-t) := -s(t)\ .$$

parametrizzazione naturale della curva.

G63 g. curvatura di una curva

G63g.01 Consideriamo una curva Γ che genericamente riteniamo individuata da equazioni parametriche $\mathsf{r} = \mathsf{r}(s)$. Sia $P(s)$ un punto qualsiasi della Γ eQ un punto nelle sue vicinanze; questo si può scrivere $Q = P(s + \Delta s)$. Sia $\Delta\theta$ l'angolo formato dalle tangenti in P e in Q Si dice **curvatura della curva** Γ in P il limite, se esiste,

$$\mathsf{crvt}(P) \ := \ \lim_{Q \to P} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \ .$$

Si osserva che l'angolo $\mathtt{D}\theta$ può essere positivo, nullo o negativo e con esso la curvatura. Per esempio esaminiamo la curva piana sinusoide $y = sin(x)$ per $-2\,\pi < x < 2\,\pi$. Essa ha curvatura nulla nei punti di flesso relativi a $x = j\,\pi$ per $j = -1, 0, 1$, curvatura positiva dove volge la concavità verso, cioè per $-2\,\pi < x < -\pi$ e $0 < x < \pi$, curvatura negativa per $-pi < x < 0$ e $\pi < x < 2\,\pi$. In effetti ogni curva piana due volte differenziabile $y = f(x)$ presenta curvatura nulla nei punti di flesso, curvatura positiva per i valori della x caratterizzati da concavità volta verso il basso e curvatura negativa dove alla x corrisponde una concavità volta verso l'alto.

G63g.02 **Prop.** Una curva Γ due volte differenziabile avente parametrizzazione naturale $\mathsf{r}(s)$ presenta la curvatura

$$\mathsf{crvt}(P(s)) \ = \ \mathsf{r}''(s) \ . \tag{1}$$

Dim.: Consideriamo il punto della curva $P(s) = \mathsf{r}(s)$ e il punto nelle sue vicinanze Q che possa scriversi $Q = rSd(s + \Delta s)$; consideriamo inoltre i vettori tangenti unitari nei due punti che individuiamo come $\mathsf{tanv}(s) = \mathsf{r}'(s)$ e $\mathsf{tanv}(s + \Delta s) = \mathsf{r}'(s + \Delta s)$. I vettori tangenti, dato che sono versori, formano l'angolo

$$\Delta\theta = \mathsf{tanv}(s + \Delta s) - \mathsf{tanv}(s) = 2\,\sin\,\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\sin\,\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \ .$$

Passando al limite per $\Delta s \to 0$ si ha

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathsf{tanv}(s + \Delta s) - \mathsf{tanv}(s)}{\Delta s} \ = \ \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sin\,\frac{|\Delta\theta|}{2}}{\frac{|\Delta\theta|}{2}} \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\,s} \ = \ \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\,s} \ .$$

La differenziabilità due volte della $\mathsf{r}(s)$ garantisce la differenziabilità di $\mathsf{tanv}(s)$ e quindi l'esistenza della curvatura in $P(s)$ e il suo valore dato nella (1) ∎

Spesso per il valore assoluto della curvatura si usa la notazione $\mathtt{k}_1(s) := |\mathsf{crvt}(P(s))|$.

G63g.03 Consideriamo un punto $P(s)$ nel quale la curva presenta curvatura diversa da 0 e il vettore $\mathsf{upnv}(s) \ := \ \dfrac{\mathsf{crvt}(s)}{\mathtt{k}_1}$ applicato in $P(s)$; Questo vettore ha lunghezza 1 e lo chiamiamo **vettore normale principale unitario**; esso spesso viene denotato con $\vec{\nu}(s)$.
Sappiamo che esso appartiene al piano osculatore in $P(s)$ [d04]; inoltre esso è perpendicolare al **versore tangente unitario** $\mathsf{tanv}(s)$, in quanto $\mathsf{tanv}(s) \cdot \mathsf{tanv}(s) = 1$ e quindi $\mathsf{tanv}(s) \cdot \mathsf{tanv}v'(s) = 0$, cioè $\mathsf{tanv}(s) \cdot \mathsf{crvt}(s) = 0$. Dunque $\mathsf{crvt}(s)$ ha la direzione del vettore normale principale.
Osserviamo inoltre che questi vettori dipendenti da s si possono considerare funzioni del punto della curva e non dipendono dal punto scelto per porre $s = 0$.

Introduciamo anche il vettore $\mathsf{ubnv}(P) \ := \ \mathsf{tanv}(P) \wedge \mathsf{upnv}(P)$; esso ha la direzione della binormale alla curva [d04]

G63g.04 Entriamo in qualche dettaglio sulle espressioni delle varie composizioni in relazione alle diverse modalità di esprimere le curve.
Consideriamo due equazioni vettoriali riguardanti, risp., una non meglio specificata variabile t e la variabile lunghezza s; di questa si conosca l'espressione $s = \overline{s}(t)$.
Per le derivate rispetto alla t delle funzioni useremo la notazione con il primo "′", mentre per le derivate rispetto ad s useremo la notazione che si serve di D_s prefisso.
Si considerino quindi le due espressioni parametriche della curva

$$P \;=\; \mathbf{r}(t) \;=\; \overline{\mathbf{r}}(s)\ .$$

Queste sono collegate dalla formula

$$\mathbf{r}'(t) \;=\; D_s\overline{\mathbf{r}}(t)\ \overline{s}'(t)\ .$$

Da questa, essendo $\overline{\mathbf{r}}(t)$ un versore, segue $\mathbf{r}'^2 \;=\; \overline{s}'(t)^2$ e quindi

$$D_s\overline{\mathbf{R}}(t) \;=\; \frac{\mathbf{r}'(t)}{\sqrt{\mathbf{R}'^2}}\ .$$

Differenziamo rispetto a t anche questa uguaglianza ottenendo

$$D_s{}^2\,\overline{\mathbf{r}}(t)\ \overline{s}'(t) \;=\; \frac{\mathbf{r}''(t)}{\sqrt{\mathbf{r}'^2}} - \frac{(\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t))\ \mathbf{r}'(t)}{(\sqrt{\mathbf{r}'^2}^2)^3}\ .$$

Passiamo al quadrato scalare di entrambi i membri e, grazie all'uguaglianza $\overline{s}'(t)^2 = \mathbf{r}'(t)^2$, otteniamo

$$\mathtt{k}_1{}^2 \;=\; \frac{\mathbf{r}''(t)^2\ \mathbf{r}'(t)^2 - (\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t))^2}{\mathbf{r}'(t)^{2^3}} \;=\; \frac{(\mathbf{r}'(t)\wedge\mathbf{r}''(t))^2}{\mathbf{r}'(t)^{2^3}}\ .$$

G63g.05 Per una curva fornita dalle equazioni

$$x = \xi(t) \qquad , \qquad y = \eta(t) \qquad , \qquad z = \zeta(t)\ ,$$

si ottiene

$$\mathtt{k}_1{}^2 \;=\; \frac{\begin{vmatrix}\xi'' & \eta'' \\ \xi' & \eta'\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\eta'' & \zeta'' \\ \eta' & \zeta'\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\zeta'' & \xi'' \\ \zeta' & \xi'\end{vmatrix}}{((\xi'(t)^2 + (\eta'(t)^2 + (\zeta'(t)^2)^3}\ .$$

Se in particolare la curva è piana, si pone $\zeta'(t) = \zeta''(t) = 0$ e si ottiene

$$\mathtt{k}_1{}^2 \;=\; \frac{(\xi''(t)\,\eta'(t) - \eta''(t)\,\xi'(t))^2}{(\xi'(t)^2 + \eta'(t)^2)^3}\ .$$

Se invece abbiamo una curva piana espressa come $y = \eta(x)$ abbiamo

$$\mathtt{k}_1{}^2 \;=\; \frac{\eta''(t)^2}{(1 + \eta'(t)^2)^3}\ .$$

G63g.06 Cerchiamo in particolare le curve piane che in ogni punto presentano curvatura nulla.
Per esse $\mathtt{k}_1 = |\mathbf{r}''(t)| = 0$, cioè $\mathbf{r}''(t) = 0$, ossia $\mathbf{r}(s) = \mathbf{v}\,s + \mathbf{w}$, essendo $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vettori costanti qualsiasi.
Quindi le curve con curvatura nulla in tutti i loro punti sono le rette o i loro segmenti.

G63 h. torsione di una curva

G63h.01 Consideriamo ancora la curva Γ, un suo punto P esprimibile come $\bar{\mathsf{r}}(s)$ e un punto tendenzialmente a esso vicino Q ottenibile come $\bar{\mathsf{s}}(s+\Delta s)$. Denotiamo inoltre con $\Delta\psi$ l'angolo formato dai due piani osculatori in P e Q.
Si dice **torsione della curva** Γ in $P = \bar{\mathsf{r}}(s)$, se esiste, il limite del rapporto $\dfrac{\Delta\psi}{\Delta s}$ per $Q \to P$, ovvero per $\Delta s \to 0$; tale scalare lo denotiamo con $\mathsf{trsn}(s)$. Il valore assoluto della torsione relativo a un valore di s si usa scrivere $|\mathtt{k}_2(s)| \;:=\; |\mathsf{trsn}(s)|$.

G63h.02 Prop. Una curva individuata da una funzione vettoriale $\bar{\mathsf{r}}(s)$ tre volte differenziabile, in ogni punto nel quale la sua curvatura è diversa da 0 possiede valore assoluto della torsione dato da

$$|\mathtt{k}_2(s)| \;=\; \frac{|[\bar{\mathsf{r}}'(s), \bar{\mathsf{r}}''(s), \bar{\mathsf{r}}'''(s)]|}{{\mathtt{k}_1}^2} \;.$$

Dim.: Essendo la curvatura della Γ nonnulla in P, per continuità è diversa da 0 anche nei punti vicini. Nei punti con curvatura nonnulla anche i vettori $\bar{\mathsf{r}}'(s)$ e $\bar{\mathsf{r}}''(s)$ sono nonnulli e non mutuamente paralleli. Quindi in ogni punto Q sufficientemente vicino a P esiste un piano osculatore della Γ.

Consideriamo i vettori binormali unitari nei due punti P e Q $\mathsf{ubnv}(s)$ ed $\mathsf{ubnv}(s+\Delta s)$; essi formano l'angolo $\Delta\psi$ e quindi

$$\mathsf{ubnv}(s+\Delta s) - \mathsf{ubnv}(s) \;=\; 2\,\sin\frac{\Delta\psi}{2} \;.$$

Di conseguenza

$$\frac{\mathsf{ubnv}(s+\Delta s) - \mathsf{ubnv}(s)}{\Delta s} \;=\; \frac{2\,\sin\frac{\Delta\psi}{2}}{\Delta s} \;=\; \frac{\sin\frac{\Delta\psi}{2}}{\frac{\Delta\psi}{2}} \cdot \frac{\delta\psi}{|\Delta s|} \;.$$

Passando al limite per $\Delta s \to 0$ si ottiene

$$|\mathtt{k}_2(P)| \;=\; D_s\mathsf{ubnv}(P) \;.$$

Il vettore $D_s\mathsf{ubnv}(P)$ è perpendicolare a $\mathsf{ubnv}(P)$ in quanto

$$D_s\,\mathsf{ubnv}(s)\cdot\mathsf{ubnv}(s) \;=\; D_s\left(\frac{1}{2}\mathsf{ubnv}(P(s))\right) = 0 \;.$$

Anche $\mathsf{tanv}(P(s))$ è perpendicolare a $Ds\,\mathsf{ubnv}(P(s))$: infatti

$$D_s\mathsf{ubnv}(P) \;=\; D_s(\mathsf{tanv}(P)\wedge\vec{\nu}) \;=\; D_s\mathsf{tanv}(P)\wedge\vec{\nu}+\mathsf{tanv}(P)\wedge\vec{\nu} \;=\; \lfloor_{\mathsf{N}}\, D_s\,\mathsf{ubnv}(s) /\!\!/ \vec{\nu}\,{}_{\mathsf{N}}\rfloor \;=\; \mathsf{tanv}(P)\wedge\vec{\nu} \;.$$

Pertanto $|\mathtt{k}_2| \;=\; |D_s\,\mathsf{ubnv}(s)\cdot\vec{\nu}|$; tenendo conto della $\vec{\nu} = \dfrac{1}{\mathtt{k}_1}\dfrac{d^2}{ds^2}\,\bar{\mathsf{r}}$ e della $\mathsf{ubnv}(P) \;=\; \dfrac{\mathsf{r}'\wedge\mathsf{r}''}{\mathtt{k}_1}$ si ottiene l'uguaglianza enunciata ▮

G63h.03 A questo punto possiamo definire la torsione di una curva.
A causa del parallelismo tra *ubnv*$'(P)$ e $\vec{\nu}$, segue che muovendosi sulla Γ nel senso scelto per la s crescente il piano osculatore della Γ ruota intorno alla tangente e dunque possiamo definire la torsione (con segno) con un'espressione del tipo $\mathsf{trsn} = \mathtt{k}_2 := \pm|\mathtt{k}_2|$.
Qui assumiamo il segno più sse la rotazione del piano tangente è nella direzione da $\vec{\nu}$ verso $\mathsf{ubnv}(P)$ e il segno $-$ sse viceversa. Con tale definizione abbiamo

$$\mathsf{trsn}(P) = \mathtt{k}_2(P) \;=\; D_s\,\bar{\mathsf{r}}(s)\vec{\nu} \qquad \text{o} \qquad \mathsf{trsn}(P) = \mathtt{k}_2(P) \;=\; -\frac{[\mathsf{r}', \mathsf{r}'', \mathsf{r}''']}{{\mathtt{k}_1}^2} \;.$$

G63h.04 Se la curva è individuata da una parametrizzazione della forma $\mathsf{r}(t)$ conoscendo la funzione $t = \bar{t}(s)$, per l'espressione della torsione abbiamo

$$D_s\,\mathsf{r}(t) \;=\; \mathsf{r}'\;D_s\,\bar{t}(s) \qquad , \qquad D^2_{s,s}\,\mathsf{r}(t) \;=\; \mathsf{r}''(t)\,(D_s\,\mathsf{r}(t))^2 + \mathsf{r}'(t)\;D^2_{s,s}\,\bar{t}(s) \qquad ,$$
$$D^3_{s,s,s}\,\mathsf{r}(t) \;=\; \mathsf{r}'''(t)\,(D_s\,\mathsf{r}(t))^3 + L(\mathsf{r}',\mathsf{r}'') \qquad ,$$

dove $L(\mathsf{r}',\mathsf{r}'')$ denota una combinazione lineare dei vettori r' e r''. Sostituendo queste espressioni nella formula per $\mathtt{k}_2$ ed osservando che $(D_s\,\bar{t}(s))^2 \;=\; \dfrac{1}{(\mathsf{r}')^2}$, abbiamo

$$\mathsf{trsn}(P) = \mathtt{k}_2(P) \;=\; -\,\frac{[\mathsf{r}',\mathsf{r}'',\mathsf{r}''']}{(\mathsf{r}'\wedge\mathsf{r}'')^2}\ .$$

G63h.05 Ci chiediamo ora quali sono le curve che presentano la torsione nulla in ciascuno dei loro punti, cioè per le quali $\mathtt{k}_2 \;=\; \vec{\beta}'\,\vec{\nu} \;=\; 0$.
Dato che $\vec{\beta}'\cdot\vec{\tau} \;=\; 0$ e $\vec{\beta}'\cdot\vec{\beta} \;=\; 0$, abbiamo $\vec{\beta}' \;=\; \mathbf{0}_3$ e quindi $\vec{\beta}$ costante; denotiamolo con $\vec{\beta}_0$.
I vettori $\vec{\tau}$ e $\vec{\beta} = \vec{\beta}_0$ sono perpendicolari; quindi $\mathsf{r}'\cdot\vec{\beta}_0 \;=\; 0$ e $(\bar{\mathsf{r}}(s) - \bar{\mathsf{r}}_0)\cdot\vec{\beta}_0 \;=\; 0$. Questo significa che queste curve appartengono a un piano ottenibile con l'equazione $(\bar{\mathsf{r}} - \bar{\mathsf{r}}_0)\cdot\vec{\beta}_0 \;=\; 0$. Dunque le curve con torsione nulla in ogni punto sono le curve piane.

G63 i. formule di Frenet

G63i.01 Rivestono interesse tre semirette che hanno l'estremità in un punto P di una curva Γ tendenzialmente regolare; queste semirette hanno le direzioni dei vettori $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ e $\vec{\beta}$. Questi tre vettori funzioni di P, ovvero della coordinata lunghezza s, individuano un triedro che viene chiamato **triedro mobile sulla curva**, anch'esso funzione di P o di s.

Esprimiamo le derivate rispetto ad s di $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ e $\vec{\beta}$ mediante gli stessi vettori $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ e $\vec{\beta}$. Per il vettore tangente otteniamo

$$D_s\,\vec{\tau} \;=\; D^2_{s,s}\,\bar{\mathsf{r}} \;=\; \mathtt{k}_1\,\vec{\nu}\ .$$

Per il vettore $\vec{\beta}$ va ricordato che $D_s\,betvec(s) \,/\!\!/\, \vec{\nu}$ e che $D_s\,\vec{\beta}\cdot\vec{\nu} \;=\; \mathtt{k}_2$, per cui

$$D_s\,\vec{\beta}(s) \;=\; \mathtt{k}_2\,\vec{\nu}\ .$$

Infine per la derivata del vettore $\vec{\nu}$ si ottiene

$$D_s\,\vec{\nu} \;=\; D_s\,(\vec{\beta}\wedge\vec{\tau}) \;=\; D_s\,\vec{\beta}\,\wedge\,\vec{\tau}+\vec{\beta}\,\wedge\,D_s\,\vec{\tau} \;=\; \mathtt{k}_2\,\vec{\nu}\,\wedge\,\vec{\tau}+\mathtt{k}_1\,\vec{\beta}\,\wedge\,\vec{\nu} \;=\; -\,(\mathtt{k}_1\,\vec{\tau}+\mathtt{k}_2\,\vec{\beta})\,-$$

G63i.02 Le formule

$$D_s\,\vec{\tau}' \;=\; \mathtt{k}_1\,\vec{\nu} \qquad , \qquad D_s\,\vec{\nu} \;=\; -\,\mathtt{k}_1\,\vec{\tau}-\mathtt{k}_2\,\vec{\beta} \qquad , \qquad D_s\,\vec{\beta}=\mathtt{k}_2\,\vec{\nu} \qquad ,$$

sono chiamate **formule di Frenet**.
La curvatura e la torsione della curva, come funzioni della coordinata lunghezza, hanno la forma

$$\mathtt{k}_1 \;=\; \phi(s) \qquad \text{e} \qquad \mathtt{k}_2 \;=\; \psi(s)\ .$$

Queste equazioni sono chiamate **equazioni naturali della curva**.

G63 j. evolute ed evolventi delle curve piane

G63j.01 Consideriamo una curva Γ tre volte differenziabile fornita dalla equazione $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}(s)$. In corrispondenza di un punto corrente $P(s) := \bar{\mathbf{r}}(s)$ valutiamo la lunghezza del raggio di curvatura $\rho(s) := \dfrac{1}{\mathtt{k}_1(s)}$ e tracciamo il vettore applicato in P avente come lunghezza ρ e la direzione del vettore normale $\vec{\nu}$. Il punto $Z_c(s) := P + \rho(s)\,\vec{\nu}(s)$ viene detto **centro di curvatura** della curva in corrispondenza di $P(s)$.

Questo nome è giustificato dal fatto che la circonferenza di centro Z_c e raggio ρ ha un contatto di ordine 3 con la Γ, ossia che la distanza tra un punto Q sulla Gam (che conviene figurarsi nelle vicinanze di P) e la circonferenza $Circ_{Z,\rho}$ è un infinitesimo di ordine 3 rispetto alla distanza $|Q - P|$. Può essere utile ricordare che la tangente ha un contatto di ordine 2 con una curva regolare.
Il luogo dei centri di curvatura di una curva si dice **evoluta della curva**.

G63j.02 **Prop.** L'evoluta di una curva è l'inviluppo della famiglia delle normali della curva.

Dim.: L;equazione della evoluta è

$$\mathbf{r}_{evl}(s) \;=\; \bar{\mathbf{r}}(s) + \frac{1}{\mathtt{k}_1(s)}\,\vec{\nu}\ ,$$

mentre il vettore tangente dell'evoluta è

$$D_s\,\mathbf{r}_{evl}(s) \;=\; D^2_{s,s}\bar{\mathbf{r}}(s) + D_s\left(\frac{1}{\mathtt{k}_1}\right)\vec{\nu} + \frac{1}{\mathtt{k}_1}\,(-\mathtt{k}_1\,\vec{\tau}) \;=\; D_s\left(\frac{1}{\mathtt{k}_1}\right) D_s\,\vec{\nu}\ .$$

Si tratta quindi di un vettore diretto come la normale della curva. Quindi la normale è una tangente dell'evoluta e questo equivale all'enunciato ▮

Si osservi che se $D_s\,\mathtt{k}_1 \neq 0$ la lunghezza dell'evoluta relativa ad $s \in [$a,b $]$ è data da

$$\int_a^b ds\,|D_s\mathbf{r}_{evl}(s)| \;=\; \int_a^b ds\,\left|D_s\left(\frac{1}{\mathtt{k}_1}\right)\right| \;=\; \left|\frac{1}{\mathtt{k}_1(b)} - \frac{1}{\mathtt{k}_1(a)}\right|\ ,$$

cioè dal valore assoluto della differenza tra i raggi di curvatura nelle estremità del segmento di curva.

G63j.03 Definiamo ora un'altra curva associata a una curva Γ sufficientemente regolare data mediante la sua parametrizzazione naturale $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}(s)$. Per un valore negativo del parametro s tracciamo un segmento applicato di lunghezza $|s|$ dal punto $P(s)$ sulla sua tangente secondo l'orientazione del vettore $\vec{\tau}$; per s positivo adottiamo l'orientazione opposta.
La curva descritta dall'estremità di questo segmento applicato si dice **evolvente della curva** Γ.

Evolute ed evolventi hanno parecchie applicazioni pratiche; ad esempio in meccanica di precisione i denti dei pignoni cilindrici hanno la forma delle evolventi delle circonferenze.