1

Capitolo G61
geometria proiettiva [2]

Contenuti delle sezioni

a. disegni in prospettiva p. 2
b. spazio proiettivo p. 4
c. teorema di Desargues p. 5
d. birapporto p. 6
i. teoremi di Pascal e Brianchon p. 11

12 pagine

G61 0.01 Questo capitolo è dedicato alle nozioni basilari della geometria proiettiva.

All'inizio viene trattato il problema dei disegni in prospettiva considerato come la motivazione pratica dello sviluppo delle geometria prospettiva.
Successivamente viene esposto il teorema di Desargues, enunciato considerato il primo risultato della geometria prospettiva. Viene poi esaminato il birapporto, in quanto strumento basilare per molte proprietà della disciplina.
Successivamente vengono introdotte la trattazione delle proiezioni mediante coordinate, le coordinate omogenee e la dualità, relazione pervasiva della geometria proiettiva.
Dopo aver introdotti i polinomi omogenei, si accenna ai promettenti sviluppi riguardanti le curve algebriche.
A questo punto è possibile accennare alle curve duali e si riescono a trattare risultati importanti come i teoremi di Pascal e Brianchon.

G61 a. disegni in prospettiva

G61 a.01 Un problema centrale per la pittura, la vista e la elaborazione delle immagini riguarda le regole che governano la rappresentazione su una superficie piana, tipicamente sopra un rettangolo, di una scena tridimansionale.

Questo tema, già stato affrontato dai geometri ellenistici, è stato ripreso e ampliato dai pittori rinascimantali. A questo proposito vanno fatti i nomi di Filippo Brunelleschi , Masaccio , Leon Battista Alberti , Melozzo da Forlì ed Albrecht Duerer. Una sistemazione teorica più matura si ebbe alla fine del '500 con Guidobaldo del Monte e Simon Stevin ; la pratica dei pittori e degli architetti dei secoli XVI, XVII,e XVIII condusse alla definizione di molteplici tecniche e a una grande varietà di realizzazioni.

G61 a.02 Consideriamo uno scenario semplice che vede un pittore realista che si propone di rappresentare in un quadro una scena che ci limitiamo a supporre stazionaria.
La scena per sua natura è tridimensionale e il pittore, dato che può basarsi solo sui raggi che pervengono al suo occhio (trascuriamoanche ogni problema di visione binoculare), possiede informazioni che rappresentano solo parzialmente la scena reale.
Nel nostro scenario, o modello, schematizziamo sostituendo al pittore un punto di uno spazio euclideo $\mathbb{R}^{\times 3}$ (potremmo pensare a un occhio del pittore o all'obiettivo di una macchina fotografica) che chiamiamo **centro di vista** o punto di vista ed alla scena collocata in una circoscritta regione di $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Il centro di vista ai fini della realizzazione di uno specifico quadro o di una fotografia dispone di un campo visivo limitato. Viceversa, idealmente si può pensare un centro di vista in grado di raccogliere informazioni visive da tutti i punti dello spazio, compatibilmente con gli ostacoli che comportano opacità.

Il nostro pittore/fotografo deve proiettare la scena in una regione appartenente a un dato piano H di $\mathbb{R}^{\times 3}$ prendendo in considerazione le intersezioni con il piano delle linee rette che rappresentano i raggi luminosi che pervengono al centro di vista. L'insieme di queste intersezioni formano l'immagine che rappresenta la scena originale.
La geometria proiettiva che stiamo delineando, e che possiamo qualificare come 2D-3D, studia le proprietà delle figure geometriche ottenibili con le proiezioni cui abbiamo accennato.
Secondo la visione di Felix Klein nota come programma di Erlangen, la geometria cproiettiva si concentra sulle proprietà delle figure geometriche che non sono alterate dalle trasformazioni costituite dalle proiezioni.

G61 a.03 Consideriamo un centro di vista V, un piano H non contenente V e una scena **S** che interessa rappresentare e che si trova nel semispazio delimitato da H che non contiene V. La scena **S** si può tradurre matematicamente come complesso di figure geometriche da definire dettagliatamente o in modo seplificato si può tradurre come insieme di punti $Q \in \mathbb{R}^{\times d}$.

‘ Chiamiamo **proiezione centrale** da V in H la funzione f che a ogni punto Q della scena da rappresentare associa il punto di H $f(Q) := \overline{VQ} \cap H$.

Quando il punto di vista V si allontana illimitatamente dal piano H e dalla scena, nella direzione caratterizzata dal vettore $\vec{v}$ non paralllelo ad H la proiezione centrale tende alla cosiddetta **proiezione parallela** secondo la direzione $\vec{v}$ consistente nella funzione $g(Q) := L_Q \cap H$, dove L_Q denota la retta passante per Q e diretta come $\vec{v}$.

È necessario distinguere tra le proprietà che le proiezioni conservano e quelle che in genere non conservano. Tra le prime vi sono: l'essere un punto, essere una retta e essere una sezione conica; tra le seconde la lunghezza dei segmenti, l'ampiezza degli angoli, l'area e l'essere una circonferenza.

G61 a.04 Per attuare una proiezione da un centro di vista V bisogna distinguere le linee radiali, linee alle quali ppartiene V e i piani radiali, piani sui quali giace V.

Linee radiali rappresentate da punti e piani radiali rappresentati da rette.
Linee non radiali rappresentate da rette
Piani non radiali ...

G61 a.05

Si distinguono prospettiva a tre punti, a due punti, a un punto e parallela.

G61 b. spazio proiettivo

G61 b.01 Diciamo **punto proiettivo** una linea radiale.
Definiamo **retta proiettiva** l'insieme delle linee radiali appartenenti a un piano radiale.
Diciamo **piano proiettivo** l'insieme delle linee radiali in uno spazio radiale tridimesionale.

Fissato l'intero positivo d, diciamo **spazio proiettivo d-dimensionale** l'insieme delle linee radiali nello spazio euclideo $\mathbb{R}^{\times d+1}$
(1) Prop.: Lo spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ ampliato con punti all'infinito equivale allo spazio proiettivo d-dimensionale.
.....

G61 c. teorema di Desargues

G61 c.01 Siano A, B e C tre punti diversi di uno spazio proiettivo. Per **triangolo proiettivo** ΔABC si intende il trio di rette $\overline{-AB-}$, $\overline{-BC-}$ e $\overline{-CA-}$. Talora nel seguito del capitolo semplificheremo il termine triangolo proiettivo con il solo sostantivo triangolo. La definizione dice che permutando i vertici nella scrittura ΔABC il triangolo non cambia.

Introduciamo una relazione tra triangoli proiettivi Due triangoli proiettivi si dicono **triangoli posti in prospettiva** sse si possono scrivere ΔABC e $\Delta A'B'C'$ in modo che $\overline{-AA'-}$, $\overline{-BB'-}$ e $\overline{-CC'-}$ abbiano un punto in comune. Queste tre rette le diciamo rette della prospettiva. Evidentemente la relazione essere in prospettiva è una relazione simmetrica e possiamo assumere che sia riflessiva.

G61 c.02 Teorema teorema di Desargues
Consideriamo due triangoli in prospettiva ΔABC e $\Delta A'B'C'$. I punti nei quali si intersecano i rispettivi lati,

$$P := \overline{-AB-} \cap \overline{-A'B'-} \quad , \quad Q := \overline{-BC-} \cap \overline{-B'C'-} \quad \text{e} \quad R := \overline{-CA-} \cap \overline{-C'A'-} \ ,$$

sono collineari.

G61 d. birapporto

G61 d.01 Da una raffigurazione in prospettiva non Si possono ricavare direttamente le distanze tra gli oggetti della figura, in quanto una tale immagine non raffigura fedelmente la distanza radiali.
Si possono però valutare le distanze relative tra tre o più oggetti collineari, naturalmente se non si trovano sulla stessa linea radiale, supposto di conoscere la posizione del punto evanescente della retta contenente gli oggetti. Queste misurazioni si effettuano servendosi del cosiddetto **birapporto** (in inglese *cross ratio*.
Prima di definirlo ricordiamo che in $\mathbb{R}^{\times 3}$ il rapporto tra due vettori paralleli $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dei quali il secondo sia diverso dal vettore nullo è $\dfrac{\vec{v}}{\vec{w}}$ e se tale rapporto si identifica con t si ha $\vec{v} = t\,\vec{w}$.

Consideriamo tre punti A, B e C sopra una retta orientata R e, fissate un'origine e una unità di misura della retta R, sono definite come tre numeri reali le ascisse a, b e c dei tre punti.
Si definiscono il **rapporto semplice dei tre punti allineati**

$$[{}_{/}A, B, C] \;:=\; \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$$

ed il rapporto semplice delle relative coordinate

$$[{}_{ra}a, b, c] \;:=\; \frac{c-a}{c-b} \;=\; \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}\ .$$

In queste pagine semplificheremo la notazione trascurando il deponente della "[".
Va sottolineato che la funzione trivariata $[A, B, C]$ dipende dall'ordine di comparsa dei tre punti tra le parentesi quadre. In particolare si trova $[B, A, C] \;=\; -\dfrac{1}{[A, B, C]}$.

G61 d.02 È interessante esaminare l'andamento del rapporto $[A, B, C]$ tenendo fissi A e B e facendo variare C. Risulta utile anche pensare il rapporto come una pendenza introducendo la grandezza $m \;:=\; \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$ da pensarsi funzione della posizione di C, ovvero della coordinata c,

$$m(c) \;=\; \frac{c-a}{c-b}\ .$$

Da questa segue $m\,c - m\,b = c - a$ e in definitiva

$$c(m) = \frac{a - m\,b}{1-m}\ .$$

Esaminiamo l'andamento della $m(c)$, sempre limitandosi ad A collocata alla sinistra di B. Per C tendente a $-\infty$ la funzione tende a $+1$ dal basso; per $-\infty < c < a$ la funzione decresce da 1 a 0; $m(a) = 0$; per $a < c < b$ il rapporto è negativo e decrescente; $\lim\limits_{c\to b-} m(c) = -\infty$; $\lim\limits_{c\to b+} m(c) = +\infty$; per $b < c$ la funzione decresce con valori superiori ad 1; $\lim\limits_{c\to+\infty} m(c) = +1+$.
Si vede inoltre che la funzione $m(c)$ è invertibile e la sua inversa è la $c(m)$. Per questa invertibilità può essere vantaggioso considerare le due funzioni come permutazioni dell'insieme $\mathbb{R}\dot\cup\{-\infty, +\infty\}$. Questo naturalmente richiede di essere in grado di tenere sotto controllo le entità $-\infty$ e $+\infty$ e come vedremo nella geometria proiettiva risulta possibile trattare con varie entità infinite.

Queste considerazioni dicono cha la posizione del punto C si può esprimere anche con il rapporto $[A, B, C]$; questa grandezza viene chiamata **coordinata baricentrica del punto C riferita ai punti A e B**.

Una coordinata baricentrica significativa si ha con $a = 0$ e $b = 1$; in tal caso $m(c) = \dfrac{c}{c-1}$ e $c(m) = \dfrac{-m}{1-m}$.

G61 d.03 Le considerazioni sulla $m(c)$ e sulla $c(m)$ conducono anche a un altro tipo di coordinate.
Per alcune considerazioni quantitative può creare problemi il fare riferimento ad entità non finite come le entità $-\infty$ e $+\infty$ da trattare come numeri reali non finiti.
Questa difficoltà può essere aggirata introducendo le cosiddette **coordinate omogenee**.

Scriviamo il rapporto tra tre punti come quoziente di un numeratore e di un denominatore:

$$[{}_{/}A, B, C] \;:=\; \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \;=:\; \frac{c_1}{c_2} \;;$$

evidentemente c_1 e c_2 non sono determinati univocamente ma a meno di un fattore di proporzionalità di $\mathbb{R}_{nz}$; si dice semplicemente che le distanze i C da A e da B stanno in un dato raporto; i parametri x_1 e c_1 si possono sostituire senza difficoltà con $k\,c_1$ e $k\,c_2$ per ogni $k \in \mathbb{R}_{nz}$. Si torna alla formulazione con il parametro m ponendo, per esempio, $c_1 = m$ e $c_2 = 1$; in tal caso il punto B può essere individuato dalle coordinate omogenee viene ha come coordinate omogenee $b_1 = 1$ e $b_2 = 0$ parametri finiti che forniscono il quoziente ∞.

Segnaliamo un primo vantaggio delle coordinate omogenee: consentono di trattare tutti i punti dell'asse reale esteso $\mathbb{R}\,\dot\cup\,\{-\infty, +\infty\}$ con coordinate finite.

G61 d.04 Dati quattro punti allineati e mutuamente distinti A, B C e D, definiamo **birapporto dei 4 punti allineati** il numero reale

$$[{}_{\times}A, B, C, D] \;:=\; \frac{[{}_{/}A, B, C]}{[{}_{/}A, B, D]} \;=\; \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} \cdot \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}} \;.$$

Si definisce inoltre **birapporto di 4 numeri reali** mutuamente distinti a, b, c e d

$$[{}_{\times}a, b, c, d] \;:=\; \frac{[{}_{/}a, b, c]}{[{}_{/}a, b, d]} \;=\; \frac{c-a}{d-a}\,\frac{d-b}{c-b} \;.$$

La seconda definizione si può considerare un caso particolare della prima riguardante 4 punti sulla retta reale individuati dalle rispettive ascisse.

Il birapporto è una funzione tetravariata che, come vedremo, subisce modifiche ben determinate quando si permutano i suoi quattro argomenti.

Conveniamo infine di semplificare in questo capitolo la notazione per i birapporti lasciando cadere il deponente ${}_{/}$ dalla prima parentesi quadrata. In qualche formula nella quale i punti sono dati da lettere senza o con ridotti segni diacritici semplifichiamo ulteriormente le notazioni dei birapporti eliminando le virgole, ossia ponendo $[A\,B\,C\,D] := [A, B, C, D]$.

G61 d.05 La caratteristica primaria del birapporto tra quattro punti allineati è quella di essere invariante in seguito a proiezioni.

(1) Prop.: Consideriamo quattro punti distinti A, B, C e D allineati sulla retta R, un punto P che non appartiene alla retta R, una retta Q diversa dalla R e i quattro punti A', B', C' e D' ottenuti proiettando da P su Q, risp., i 4 punti A, B, C e D.

$$[A, B, C, D] \;=\; \frac{\sin\angle APC}{\sin\angle APD} \cdot \frac{\sin\angle APD}{\sin\angle BPC} \;; \tag{2}$$

(3) $$[A'\,B'\,C'\,D'] \;=\; [A\,B\,C\,D]\;.$$

Occorre precisare che gli angoli di cui consideriamo i seni sono da considerare orientati. Nella figura i quattro angoli sono negativi, come pure i relativi seni.

Dim.: Non presenta difficoltà rendersi conto che espressioni dei due membri della (2) devono avere lo stesso segno. Resta da dimostrare solo che i valori assoluti dei due membri coincidono e per questo si ha la seguente catena di uguaglianze

$$|\,[A,B,C,D]\,| \;=\; \frac{AC}{AD}\,\frac{BC}{BD} \;=\; \frac{\textbf{\textit{Area}}(\Delta APC)}{\textbf{\textit{Area}}(\Delta APD)}\cdot\frac{\textbf{\textit{Area}}(\Delta BPD)}{\textbf{\textit{Area}}(\Delta BPC)} \;=$$

$$\left|\frac{(AP)(CP)\,\sin\angle APC}{(AP)(DP)\,\sin\angle APD}\right|\,\left|\frac{(BP)(DP)\,\sin\angle BPD}{(BP)(CP)\,\sin\angle BPC}\right| \;=\; \left|\frac{\sin\angle APC\;\sin\angle BPD}{\sin\angle APD\;\sin\angle BPC}\right|\;.$$

L'uguaglianza precedente dimostra la (2); la (3) segue subito dalla osservazione che $\angle A'PC' = \angle APC$, $\angle B'PD' = \angle BPD$, ecc. . $\angle A'PD' = \angle APD$ e $\angle B'PC' = \angle BPC$ ∎

G61 d.06 **(1) Prop.**: Il birapporto di quattro punti non cambia se si scambiano il il primo punto con il secondo e il terzo con il quarto.

Dim.: $[B\,A\,D\,C] \;=\; \dfrac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \;=\; \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}} \;=\; [A\,B\,C\,D]$ ∎

(2) Prop.: Il birapporto di quattro punti non cambia se si scambia la prima coppia di argomenti con la seconda coppia.

Dim.: $[CDAB] \;=\; \dfrac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{DA}}\,\dfrac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{CB}} \;=\; \dfrac{(-\overrightarrow{AC})}{(-\overrightarrow{AD})}\,\dfrac{(-\overrightarrow{BD})}{(-\overrightarrow{BC})} \;=\; \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}}\,\dfrac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}} \;=\; [ABCD]$ ∎

(3) Prop.: Il birapporto di quattro punti non cambia se si riflette la sequenza dei quattro argomenti.

Dim.: $[DCBA] \;=\; \big|\,(1)\,\big| \;=\; [CDAB] \;=\; \big|\,(2)\,\big| \;=\; [ABCD]$ ∎

G61 d.07 Facciamo riferimento al birapporto $\beta := [A,B,C,D]$ e mostriamo che permutazioni della quaterna di punti che determinano un birapporto diverse dalle precedenti conducono a valori in genere diversi da β, ma a esso strettamente collegati.

(1) Prop.: $[ABDC] = \beta^{-1}$.

Dim.: $[ABDC] \;=\; \dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}\,\dfrac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AC}} \;=\; \left(\dfrac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}}\,\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}\right)^{-1} \;=\; [ABCD]^{-1} \;=\; \beta^{-1}$ ∎

In termini discorsivi possiamo affermare che lo scambio degli ultimi due argomenti del birapporto equivale al passaggio al valore reciproco.

(2) Prop.: $[ACBD] = 1-\beta$.

Dim.: $[ACBD] \;=\; \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CB}}\,\dfrac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AD}} \;=\; \dfrac{(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})}{\overrightarrow{CB}}\,\dfrac{(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})}{\overrightarrow{AD}} \;=$

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}\,\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}} + \frac{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}\,\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}\,\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{CB}\,\overrightarrow{AD}} \;=\; -[ABCD] + \frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}} \;=\; -\beta+1$$ ∎

Discorsivamente possiamo affermare che lo scambio del secondo e del terzo argomento del birapporto modifica il valore β in $1-\beta$.

(3) Prop.: $[ADBC] = \dfrac{\beta-1}{\beta}$.

Dim.: Consideriamo (1) e scambiamo in essa gli argomenti secondo e terzo ottenendo:
$[ADBC] \;=\; \lfloor_{\mathbb{N}}(2)\rfloor_{\mathbb{N}} \;=\; 1-[ABDC] \;=\; \lfloor_{\mathbb{N}}(1)\rfloor_{\mathbb{N}} \;=\; 1-(\beta^{-1}) \;=\; \dfrac{\beta-1}{\beta} =$ ∎

(4) Prop.: $[ADCB] \;=\; \dfrac{\beta}{\beta-1}$.

Dim.: $[ADCB] \;=\; \lfloor_{\mathbb{N}}(1)\rfloor_{\mathbb{N}} \;=\; [ADBC]^{-1} \;=\; \lfloor_{\mathbb{N}}(3)\rfloor_{\mathbb{N}} \;=\; \left(\dfrac{\beta-1}{\beta}\right)^{-1} \;=\; \dfrac{\beta}{\beta-1}$ ∎

(5) Prop.: $[ACDB] = \dfrac{1}{1-\beta}$.

Dim.: $[ACDB] \;=\; \lfloor_{\mathbb{N}}(2)\rfloor_{\mathbb{N}} \;=\; 1-[ADCB] \;=\; \lfloor_{\mathbb{N}}(4)\rfloor_{\mathbb{N}} \;=\; 1-\dfrac{\beta}{\beta-1} \;=\; \dfrac{(\beta-1)-\beta}{\beta-1} \;=\; \dfrac{1}{1-\beta}$ ∎

G61 d.08 In sintesi abbiamo la seguente tabella dei valori dei $4! = 24$ birapporti riguardanti quattro punti.

$[ABCD] = [BADC] = [CDAB] = [DCBA] =: \beta$;
$[ABDC] = [BADC] = [CDBA] = [DCAB] = \dfrac{1}{\beta}$;
$[ACBD] = [BDAC] = [CADB] = [DBCA] = 1-\beta$;
$[ADBC] = [BCAD] = [CBDA] = [DACB] = \dfrac{\beta-1}{\beta}$;
$[ADCB] = [BCDA] = [CBAD] = [DABC] = \dfrac{\beta}{\beta-1}$;
$[ACDB] = [BDCA] = [CABD] = [DBAC] = \dfrac{1}{1-\beta}$.

G61 d.09 Il birapporto si vuole esteso a tutte le quaterne di punti allineati su rette, sia al finito che all'infinito.
I birapporti aventi l'ultimo argomento all'infinito si definiscono come limiti:

$$[A,B,C,\pm\infty] \;:=\; \lim_{P\to\pm\infty}[A.B,C,P] \;=\; \lim P\to\pm\infty \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}\,\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{AP}} \;=\; \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}\cdot 1 \;=\; \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \;.$$

Si osserva che il birapporto con un argomento all'infinito si esprime con un rapporto semplice. I casi con più punti all'infinito si possono trascurare.

Per trattare birapporti con argomento all'infinito si può anche operare mediante elementi di $\mathbb{R}\dot\cup\{-\infty,+\infty\}$ estendendo la possibilità di dividere due coordinate infinite secondo le seguenti definizioni:

$$\frac{+\infty}{+\infty} \;:=\; \frac{-\infty}{-\infty} \;:=\; 1 \qquad , \qquad \frac{+\infty}{-\infty} \;:=\; \frac{-\infty}{+\infty} \;:=\; -1 \;.$$

G61 d.10 Se si considerano fissi i tre punti A, B e C e D variabile, abbiamo $[A,B,C,D] = [ABC]\cdot[BAD]$. Quindi il valore del birapporto è dato da un fattore moltiplicativo costante per il rapporto semplice $[BAD]$; quest'ultimo è coordinata baricentrica di D rispetto a B ed A.
Ricordando d02, si può affermare che il birapporto rispetto a tre punti fissati si trova in corrispondenza biunivoca con la posizione di D e quindi può costituire una coordinata per i punti sopra una retta.

G61 d.11 Se $\beta = -1$ la quaterna $\langle A,B,C,D\rangle$ si dice **quaterna armonica**; in tal caso si parla di **birapporto armonico**.

(1) Prop.: $[ABCD]$ è un birapporto armonico sse $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = -\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$ ∎

In termini geometrici si osserva che in un birapporto armonico $[ABCD]$ i punti C e D hanno coordinate baricentriche rispetto ad A e B opposte, cioè uguali in modulo e di segno opposto; in particolare se C si trova tra A e B il punto D è esterno al segmento AB. Si dice allora che C e D separano armonicamente C e D.
Dato che anche $[CDAB] = -1$, anche i primi due punti di un birapporto armonico separano armonicamente gli ultimi due. Quindi possiamo dire che in un birapporto armonico il primo e il secondo duetto di punti si separano armonicamente.

(2) Prop.: Il birapporto $[ABCD]$ è armonico sse scambiando gli ultimi due argomenti il valore non cambia.

Dim.: Se $\beta = [ABCD] = -1$ per d07(1) si ha $[ABDC] = (-1)^{-1} = -1 = [ABCD]$.
$[ABDC] = [ABCD] =: \beta \implies \beta^{-1} = \beta \iff \beta^2 = 1 \iff \beta = \pm 1$; ma il caso $\beta = 1$ implicherebbe la coincidenza di C e D e va trascurato ∎

(3) Prop.: Per i valori dei birapporti armonici relativi alle diverse permutazioni degli argomenti sono possibili solo tre valori: -1, $\dfrac{1}{2}$ e 2.

Dim.: Infatti $\beta = -1 \quad \implies \quad \beta^{-1} = 11$, $1 - \beta = 2$, $\dfrac{1}{1-\beta} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\beta - 1}{\beta} = 2$, $\dfrac{\beta}{\beta - 1} = \dfrac{1}{2}$ ∎

G61 d.12 Il birapporto armonico consente di caratterizzare svariate configurazioni geometriche. Presentiamone due elementari.

Osserviamo preliminarmente che se $[ABCD] = -1$ e inoltre D si trova all'infinito, allora C coincide con il punto medio di AB.

Consideriamo un triangolo qualsiasi ΔABT, la retta $\overline{-AB-}$, e la semiretta $\overline{AT-}$; consideriamo inoltre la bisettrice di $\angle ATB$ (interna per ΔABT) e la bisettrice dell'angolo $\overline{BOAO-}$ (interna per ΔABT), nonché le intersezioni con $\overline{-AB-}$ delle due bisettrici che denotiamo, risp., con C e D. 'E noto dalla geometria elementare che $[ABCD]$ è un birapporto armonico.

G61 d.13 Il birapporto si può definire anche per quattro rette α β, γ e δ di un fascio con un dato sostegno.
Presa una qualsiasi retta RSs non appartenente al fascio, si individuano le 4 intersezioni

$$A := \alpha \cup \mathsf{R} \quad , \quad B := \beta \cup \mathsf{R} \quad , \quad C := \gamma \cup \mathsf{R} \quad , \quad D := \delta \cup \mathsf{R} \quad .$$

Come birapporto delle quattro rette si definisce

$$[\alpha\beta\gamma\delta] \ := \ [ABCD] \ .$$

Questa definizione non dipende da R in forza di quanto dimostrato in d05.

G61 i. teoremi di Pascal e Brianchon

G61 i.01 Si definisce **esagono proiettivo** un sestetto di rette in $\mathbf{P}^2$. In questo capitolo semplificheremo il termine trascurando l'aggettivo "proiettivo".

Osserviamo che un esagono risulta definito anche fornendo la sequenza ciclica dei punti di intersezione di una sequenza ciclica delle rette che lo costituiscono. Questi punti sono detti **vertici dell'esagono proiettivo**.

G61 i.02 Teorema (**teorema di Pascal**)
Consideriamo un esagono definito dalla sequenza ciclica dei suoi vertici $\langle_{cy} A, C', B, A', C, B' \rangle$. Se questi vertici giacciono su una conica nonsingolare i tre punti
$P := \overline{-AB'-} \cap \overline{-A'B-}$, $Q := \overline{-BC'-} \cap \overline{-B'C-}$ ed $R := \overline{-AC'-} \cap \overline{-A'C-}$ sono collineari.

Dim.: Consideriamo i punti $X := \overline{-AB'-} \cap \overline{-BC'-}$ e $Y := \overline{-AC'-} \cap \overline{-B'C-}$ e proiettiamo da B

G61 i.03 È opportuno sottolineare che il teorema di Pascal, enunciato di importanza storica, è valido quale che sia la collocazione dei sei vertici sulla conica nonsingolare.

Le notazioni scelte per i vertici dicono che i sei punti sono "schierati" come due terne. Questa scelta non vuole essere restrittiva sulla collocazione dei vertici, ma vuole solo contribuire a facilitare una prima comprensione del teorema presentato con un posizionamento dei punti in grado di semplificare la spiegazione.

Non è difficile capire che facendo variare la collocazione dei vertici il teorema rimane valido.
Anzi esso rimane valido anche quando due vertici coincidono, situazione che bisogna vedere come caso limite riguardante l'avvicinamento illimitato di un vertice a un altro. Quindi al limite la retta passante per due tali punti va identificata con la tangente alla conica nel punto in cui i due vertici si fondono.

Dal teorema precedente possiamo ricavare agevolmente il teorema duale, altro teorema di importanza storica.

G61 i.04 Teorema (**teorema di Brianchon**)
Consideriamo un esagono le cui sei rette, per mera semplicità espositiva, presentiamo come due terne denotandole a, b, c, a', b' e c'.
Le rette $p := \overline{(-a \cap b')(a' \cap b)-}$, $q := \overline{(-a \cap c')(a' \cap c)-}$ ed $r := \overline{(-b \cap c')(b' \cap c)-}$ si intersecano in un unico punto.

Dim.: È sufficiente ricavare l'enunciato duale del teorema di Pascal i01(1), dopo aver osservato che la figura duale di una conica nonsingolare è una conica nonsingolare ∎

G61 i.05 Dai teoremi precedenti segue la possibilità di risolvere il problema della costruzione delle tangenti a una conica nonsingolare, problema che generalizza quello classico della costruzione della tangente a una circonferenza.

(1) Algoritmo: Consideriamo una conica nonsingolare C e un punto P non appartenente a tale curva; si traccino le tangenti della conica passanti per P.

Si traccino tre rette r_1, r_2 ed r_3, passanti per P ciascuna delle quali in grado di intersecare la C in due punti. Scriviamo quindi

$$\{A, A'\} := r_1 \cap \mathsf{C} \quad , \quad \{B, B'\} := r_2 \cap \mathsf{C} \quad \text{e} \quad \{C, C'\} := r_3 \cap \mathsf{C} \, .$$

Individuiamo i punti

$$R := \overline{-AB'-} \cap \overline{-A'B-} \quad , \quad S := \overline{-BC'-} \cap \overline{-B'C-} \quad \text{e} \quad \{T_1, T_2\} := \overline{-RS-} \cap \mathsf{K} \, .$$

Le rette $\overline{-PT_1-}$ e $\overline{-PT_2-}$ sono le tangenti cercate.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php