1

Capitolo G55
octonioni e algebre simili

Contenuti delle sezioni

7 pagine

G550.01 Questo capitolo è dedicato alle nozioni basilari sugli octonioni e ad alcune informazioni riguardanti altre algebre sui numeri reali che si possono considerare estensioni di quelle dei quaternioni e degli stessi octonioni.

Gli octonioni sono introdotti come costituenti di un'algebra sui reali ad 8 dimensioni e che conviene studiare come espansione dell'algebra sui quaternioni con il mantenimento di proprietà il più ampio possibile.

Viene anche fatto un cenno all'algebra dei cosiddetti esadecanioni, entità che costituiscono un'algebra sui reali a 16 dimensioni che a sua volta conviene studiare come espansione dell'algebra degli octonioni con la perdita di proprietà più ridotta possibile.

La successiva parte del capitolo viene dedicata alla cosiddetta costruzione di Cayley-Dickson, una costruzione formale che generalizza le estensioni che dai numeri complessi portano ai quaternioni, da questi portano agli octonioni e da questi conducono agli esadecanioni.

Nell'ultima parte vengono presentate, per confronto, le algebre di Clifford in quanto costituenti un insieme di algebre alle quali si richiede l'associatività e che si basano, non sopra una involuzione, ma sopra una forma quadratica.

G55 a. octonioni

G55a.01 La possibilità di costruire un'algebra sullo spazio ad 8 dimensioni sui reali $\mathbb{R}^{\times 8}$ fu avviata dalla precisazione di un prodotto tra elementi da parte di John T. Graves, amico di Hamilton, nel 1843 e da parte di Arthur Cayley.

Conveniamo di riferire $\mathbb{R}^{\times 8}$ a una base canonica ordinata che scriviamo $\mathfrak{B}_8 := \langle \mathsf{1}, \mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{k}, \mathsf{l}, \mathsf{m}, \mathsf{n}, \mathsf{o} \rangle$ e introduciamo il prodotto che denotiamo con $\boxdot$ e che vogliamo distributivo a sinistra e a destra al fine di poterci servire della combinazione lineare-$\mathbb{R}$.

Questo prodotto si vuole compatibile con la richiesta che $\mathsf{1}$ sia unità bilatera e può essere definito assumendo la seguente tavola di moltiplicazione:

$$\begin{bmatrix} & \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} & \mathsf{l} & \mathsf{m} & \mathsf{n} & \mathsf{o} \\ \\ \mathsf{i} & -1 & \mathsf{k} & -\mathsf{j} & \mathsf{m} & -\mathsf{l} & -\mathsf{o} & \mathsf{n} \\ \mathsf{j} & -\mathsf{k} & -1 & \mathsf{i} & \mathsf{n} & \mathsf{o} & -\mathsf{l} & -\mathsf{m} \\ \mathsf{k} & \mathsf{j} & -\mathsf{i} & -1 & \mathsf{o} & -\mathsf{n} & \mathsf{m} & -\mathsf{l} \\ \mathsf{l} & -\mathsf{m} & -\mathsf{n} & -\mathsf{o} & -1 & \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} \\ \mathsf{m} & \mathsf{l} & -\mathsf{o} & \mathsf{n} & -\mathsf{i} & -1 & -\mathsf{k} & \mathsf{j} \\ \mathsf{n} & \mathsf{o} & \mathsf{l} & -\mathsf{n} & -\mathsf{j} & \mathsf{k} & -1 & -\mathsf{i} \\ \mathsf{o} & -\mathsf{n} & \mathsf{m} & \mathsf{l} & -\mathsf{k} & -\mathsf{j} & \mathsf{i} & -1 \end{bmatrix} .$$

Lo spazio $\mathbb{R}^{\times 8}$ munito di questo prodotto viene detto **algebra degli octonioni** e si denota questa struttura algebrica con la notazione $\mathsf{Octn} = \langle \mathbb{R}^{\times 8}, \boxdot \rangle$.

G55a.02 Il contenuto della precedente tavola si ricostruisce con relativa facilità servendosi della seguente raffigurazione della geometria finita chiamata **piano di Fano** completata con una opportuna orientazione delle sue rette; questa è resa necessaria dalla noncommutatività del prodotto.

//input pG55a02

Le rette orientate di questa figura dicono che il prodotto di due "punti" ciclicamente consecutivi fornisce il terzo punto. Per esempio la sequenza $\langle \mathsf{n}, \mathsf{i}, \mathsf{o} \rangle$ comporta $\mathsf{n} \boxdot \mathsf{i} = \mathsf{o}$ e la $\langle \mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{k} \rangle$ implica $\mathsf{i} \boxdot \mathsf{j} = \mathsf{k}$.

Si osserva che l'insieme dei 16 elementi $\{\pm\mathsf{1}, \pm\mathsf{i}, \pm\mathsf{j}, \pm\mathsf{k}, \pm\mathsf{l}, \pm\mathsf{m}, \pm\mathsf{n}, \pm\mathsf{o}\}$ è chiuso rispetto alla moltiplicazione, che questa operazione è parzialmente antisimmetrica: l'antisimmetria venendo meno quando sono fattori 1 4e -1). Inoltre ogni elemento è dotato di un reciproco, come si ricava dalla seguente tabella

$$\begin{vmatrix} \mathsf{1} & \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} & \mathsf{l} & \mathsf{m} & \mathsf{n} & \mathsf{o} & -\mathsf{1} & -\mathsf{i} & -\mathsf{j} & -\mathsf{k} & -\mathsf{l} & -\mathsf{m} & -\mathsf{n} & -\mathsf{o} \\ \mathsf{1} & -\mathsf{i} & -\mathsf{j} & -\mathsf{k} & -\mathsf{l} & -\mathsf{m} & -\mathsf{n} & -\mathsf{o} & \mathsf{1} & \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} & \mathsf{l} & \mathsf{m} & \mathsf{n} & \mathsf{o} \end{vmatrix} .$$

Infine va sottolineato che questo prodotto non è associativo: ad esempio $(\mathsf{j} \boxdot \mathsf{k}) \boxdot \mathsf{l} = -\mathsf{j} \boxdot (\mathsf{k} \boxdot \mathsf{l})$; quindi i 16 suddetti elementi muniti di $\boxdot$ non costituiscono un gruppo, ma possono solo essere gli elementi di un'algebra unifera.

G55a.03 In vari momenti conviene presentare la sequenza degli elementi della base canonica degli octonioni anche con la seguente notazione numerata $\mathfrak{B}_8 = \ laai = 0, 1, ..., 7 :| \mathsf{e}_i \rangle$; quindi un generico elemento dell'algebra $\mathbb{O}$ può assumere la forma

$$\mathsf{x} = x_0\, \mathsf{e}_0 + x_0\, \mathsf{e}_0 + x_1\, \mathsf{e}_1 + x_2\, \mathsf{e}_2 + x_3\, \mathsf{e}_3 + x_4\, \mathsf{e}_4 + x_5\, \mathsf{e}_5 + x_6\, \mathsf{e}_6 + x_7\, \mathsf{e}_7 \ .$$

Ogni elemento della forma $x_0\,\mathsf{e}_0$ viene detto **octonione scalare** o anche octonione reale oppure octoniobe temporale; spesso la sua scrittura viene semplificata nella x_0.

Ogni elemento della forma $\sum_{i=1}^{7} x_i\,\mathsf{e}_i$ viene invece chiamato **octonione vettoriale** [eptadimensionale] o anche octonione immaginario o octonione puro.

Si parla anche di parte reale e di parte immaginaria di un octonione.

Di conseguenza un octonione si può presentare come somma della sua parte scalare e della sua parte vettoriale, ad esempio come $\mathsf{P} = t + \overrightarrow{\mathsf{P}}$; questa la chiamiamo **scrittura 1+7 degli octonioni**.

Sulla parte vettoriale $\overrightarrow{\mathsf{P}}$ si può definire la composizione prodotto scalare per la quale scriviamo $\overrightarrow{\mathsf{P}} \cdot \overrightarrow{\mathsf{Q}}$

G55a.04 Si constata che, analogamente alla possibilità di esprimere un quaternione come somma di due numeri complessi, ogni octonione $\mathsf{P} \;=\; \sum_{j=0}^{7} p_j\,\mathsf{e}_j$ può essere fornito dalle due espressioni (dovute alla noncommutatività) $\mathsf{P} \;=\; \mathsf{Q} + \mathsf{R} \ast \mathsf{I} \;=\; \mathsf{Q} + \mathsf{I} \ast (\mathsf{R}^*)$, nelle quali Q ed R sono quaternioni.

Il prodotto di octonioni si può dunque esprimere come

$$\mathsf{P} \cdot \mathsf{S} \;=\; (\mathsf{Q} + \mathsf{R} \cdot \mathsf{I})\,(\mathsf{T} + \mathsf{U} \cdot \mathsf{I}) \;=\; \mathsf{Q} \ast \mathsf{T} - \mathsf{U}^* \ast \mathsf{R} + (\mathsf{T} \ast \mathsf{Q} + \mathsf{R} \ast (\mathsf{T}^*)) \cdot \mathsf{I}\ .$$

In questi sviluppi formali occorre preoccuparsi delle non associatività del prodotto; in particolare sono utili le seguenti uguaglianze

$$\mathsf{Q} \cdot (\mathsf{U} \cdot \mathsf{I}) \;=\; (\mathsf{U} \cdot \mathsf{Q}) \cdot \mathsf{I} \qquad , \qquad (\mathsf{R} \cdot \mathsf{I}) \cdot \mathsf{T}) \cdot \mathsf{I} \;=\; (\mathsf{R} \cdot (\mathsf{T}^*) \cdot \mathsf{I} \qquad , \qquad (\mathsf{R} \cdot \mathsf{I})\,(\mathsf{U} \cdot \mathsf{I}) \;=\; -(\mathsf{U}^*)\mathsf{R}\ .$$

G55a.05 Ancora similmente ai quaternioni, si definisce **coniugato di un octonione** come

$$\mathsf{P}^* \;:=\; (p + \overrightarrow{\mathsf{P}})^* \;=\; (\mathsf{Q} + \mathsf{R} \cdot \mathsf{I})^* \;=\; p - \overrightarrow{\mathsf{P}} \;=\; \mathsf{Q}^* - \mathsf{R} \cdot \mathsf{I}.$$

La coniugazione consente di calcolare agevolmente la norma al quadrato di un octonione definita come

$$||\mathsf{P}|| \;:=\; \left|\sum_{j=0}^{7} q_j\,\mathsf{e}_j\right|^2 \;:=\; \sum_{j=0}^{7} {q_j}^2\ .$$

Questa definizione fornisce una norma definita positiva e quindi rende $\mathbb{O}$ una algebra unifera normata.

G55a.06 Si trovano le seguenti uguaglianze:

$$\mathsf{P} \cdot (\mathsf{P}^*) \;=\; |\mathsf{P}|^2 \qquad , \qquad (\mathsf{P} \cdot \mathsf{S})^* \;=\; (\mathsf{S}^*) \cdot (\mathsf{P}^*) \qquad , \qquad |\mathsf{P} \cdot \mathsf{S}| \;=\; |\mathsf{P}|\,|\mathsf{S}|\ .$$

Si ha anche che ogni octonione P diverso da $\mathbf{0}_8$ possiede un inverso moltiplicativo, $\dfrac{\mathsf{P}^*}{|\mathsf{P}|^2}$

Come i numeri complessi e i quaternioni, gli octonioni possono essere scritti in una forma polare

$$\mathsf{P} \;=\; r\,(\cos\theta + \mathsf{H}\,\sin\theta) \quad \text{ dove } \; r := |\mathsf{P}| \; \text{ ed H è tale che } \; \mathsf{H}^2 \;=\; -\mathbf{1}\ .$$

Quindi a ogni octonione con parte vettoriale nonnulla è associato il sottospazio vettoriale bidimensionale di $\mathbb{O}$ sotteso da $\mathbf{1}$ e da P i cui elementi possono essere considerati i numeri complessi.

Osserviamo anche che l'insieme degli octonioni U tali che $\mathsf{U}^2 = -\mathbf{1}$ costituisce la sfera esadimensionale.

G55 b. prodotto vettoriale in 7D

G55b.01 Vogliamo ora introdurre un prodotto vettoriale per la parte vettoriale degli octonioni; per un tale prodotto useremo scritture come $\overrightarrow{\mathsf{P}} \wedge \overrightarrow{\mathsf{Q}}$.
Le proprietà del prodotto di octonioni conducono a un prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^{\times 7}$ che definiamo come

$$\overrightarrow{\mathsf{P}} \wedge \overrightarrow{\mathsf{Q}} \;:=\; \overrightarrow{\mathsf{P}} * \overrightarrow{\mathsf{Q}} + \overrightarrow{\mathsf{P}} \cdot \overrightarrow{\mathsf{Q}} \;. \tag{1}$$

Servendosi delle componenti cartesiane degli octonioni vettoriali otteniamo la tavola di moltiplicazione

$$\overrightarrow{\mathsf{P}} \wedge \overrightarrow{\mathsf{Q}} \;=\; \overrightarrow{\langle p_i, p_j, p_k, p_l, p_m, p_n, p_o\rangle} \wedge \overrightarrow{\langle q_i, q_j, q_k, q_l, q_m, q_n, q_o\rangle} \;=$$

$$\begin{array}{lccccccclll}
(& & +p_j\,q_k & -p_k\,q_j & +p_l\,q_m & -p_m\,q_l & -p_n\,q_o & +p_o\,q_n &) & \mathbf{i} & + \\
(& -p_i\,q_k & & +p_k\,q_i & +p_l\,q_n & +p_m\,q_o & -p_n\,q_l & -p_o\,q_m &) & \mathbf{j} & + \\
(& +p_i\,q_j & -p_j\,q_i & & +p_l\,q_o & -p_m\,q_m & +p_n\,q_m & -p_o\,q_l &) & \mathbf{k} & + \\
(& -p_i\,q_m & -p_j\,q_n & -p_k\,q_o & & +p_m\,q_i & +p_n\,q_j & +p_o\,q_k &) & \mathbf{l} & + \\
(& +p_i\,q_l & -p_j\,q_o & +p_k\,q_n & -p_l\,q_i & & -p_n\,q_k & +p_o\,q_j &) & \mathbf{m} & + \\
(& +p_i\,q_o & +p_j\,q_l & -p_k\,q_m & -p_l\,q_j & +p_m\,q_k & & -p_o\,q_i &) & \mathbf{n} & + \\
(& -p_i\,q_n & +p_j\,q_m & +p_k\,q_l & -p_l\,q_k & -p_m\,q_j & +p_n\,q_i & &) & \mathbf{o} &
\end{array} \;.$$

G55b.02 Il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^{\times 7}$, come quello in $\mathbb{R}^{\times 3}$, è una operazione bilineare e antisimmetrica. Esso però non soddisfa l'identità di Jacobi, ossia in generale per gli octonioni spaziali accade che

$$\exists \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R} \in \mathsf{Octn} \;\; ST \;\; \overrightarrow{\mathsf{P}} \wedge (\overrightarrow{\mathsf{Q}} \wedge \overrightarrow{\mathsf{R}}) \;+\; \overrightarrow{\mathsf{Q}} \wedge (\overrightarrow{\mathsf{R}} \wedge \overrightarrow{\mathsf{P}}) \;+\; \overrightarrow{\mathsf{R}} \wedge (\overrightarrow{\mathsf{P}} \wedge \overrightarrow{\mathsf{Q}}) \;\neq\; \mathbf{0}_7 \;.$$

Equivalentemente viene meno l'identità del triplo prodotto vettoriale, cioè

$$\exists \overrightarrow{\mathsf{P}}, \overrightarrow{\mathsf{Q}}, \overrightarrow{\mathsf{R}} \in \mathsf{Octn} \quad ST \quad \overrightarrow{\mathsf{P}} \wedge (\overrightarrow{\mathsf{Q}} \wedge \overrightarrow{\mathsf{R}}) \;\neq\; (\overrightarrow{\mathsf{P}} \cdot \overrightarrow{\mathsf{S}})\,\overrightarrow{\mathsf{Q}} - (\overrightarrow{\mathsf{P}} \cdot \overrightarrow{\mathsf{Q}})\,\overrightarrow{\mathsf{R}}$$

G55b.03 Valgono invece le seguenti uguaglianze per octonioni vettoriali qualsiasi P, Q ed R:

$$\mathsf{P} \wedge (\mathsf{Q} + \mathsf{R}) \;=\; \mathsf{P} \wedge \mathsf{Q} + \mathsf{P} \wedge \mathsf{R} \quad , \quad \mathsf{P} \wedge \mathsf{P} \;=\; \mathbf{0} \quad , \quad \mathsf{P} \wedge \mathsf{Q} \;=\; -\mathsf{Q} \wedge \mathsf{P}$$

$$x\,(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}) \;=\; (x\,\mathsf{P}) \wedge \mathsf{Q} \quad , \quad \mathsf{P} \cdot (\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}) \;=\; \mathbf{0} \quad , \quad |\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q} \;=\; |\mathsf{P}|\,|\mathsf{Q}|\,\sin\theta$$

$$\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}) \cdot \mathsf{R} \;=\; (\mathsf{Q} \wedge \mathsf{R}) \cdot \mathsf{P} \;=\; (\mathsf{R} \wedge \mathsf{P}) \cdot \mathsf{Q} \quad , \quad \mathsf{P} \wedge (\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}) \;=\; ((\mathsf{P} \cdot \mathsf{Q})\,\mathsf{P} - (\mathsf{P} \cdot \mathsf{P})\,\mathsf{Q}$$

G55 c. algebra degli esadecanioni

G55c.01 L'**algebra degli esadecanioni**, chiamata anche **algebra dei sedenioni** è un'algebra unifera no commutativa e non associativa come accade all'algebra degli octonioni e neppure alternativa.
Ricordiamo che le algebre alternative sono algebre che non sono associative pma tali che per ogni coppia di loro elementi $\langle x, y\rangle$ accade che

$$x(x\,y) = (x\,x)y \;\wedge\; (y\,x)x = y(x\,x) \ .$$

Questa algebra che denotiamo con **Esdn** si può definire come spazio a sedici dimensione sui reali munito di un opportuno prodotto.
Ogni esadecanione si può quindi esprimere come combinazione lineare-R di 16 vettori di base della forma

$$\mathsf{x} \ = \ \sum_{i=0}^{15} x_i \, \mathsf{e}_i \ .$$

Per il suo prodotto che denotiamo con " $\odot$ ", avanziamo varie richieste.
Essi presentano potenze definite, cioè vale la associatività per i prodotti di più repliche di un unico elemento; quindi per ogni $x \in$ **Esdn** è univocamente definita ogni potenza positiva x^n.
Per i vettori della sua base si può chedere che tutti i quadrati abbiano un valore facente parte di $1, 0, 1\}$; questa è una specie di richiesta di normalità.
Dato che il quadrato di taluni elementi (della base) valgono l'elemento nullo dello spazio $\mathbf{0}_{16}$, l'algebra non è un'algebra di divisione.

G55c.02 Vediamo la complessa tavola di composizione del prodotto. In essa abbreviamo ogni e_i con il semplice i

G55c.03 Dalla tavola si ricavano le seguenti relazioni.
Il prodotto è flessibile, cioè ....

G55 **d. costruzione di Cayley-Dickson**

G55d.01 La costruzione del titolo è un procedimento che ha lo scopo di ampliare alcune algebre A su un campo dotate di una involuzione in una nuova algebra B sullo stesso campo e dotata di una involuzione la quale presenta la dimensione doppia di quella della precedente A e contiene questa come sottoalgebra.
Con ciascuno degli accennati ampliamenti la tavola di moltiplicazione si quadruplica e presenta come quarta parte la tavola della precedente; si dimostra che con questo ampliamento B si perdono alcune delle proprietà dell'algebra A, mantenute solo nel quarto della tavola riguardante quest'ultima.

Di questo genere di ampliamento delle algebre sono state studiate alcune generalizzazioni e modifiche e sono state proposte parecchie altre varianti.

Queste catene di ampliamenti contribuiscono a definire l'articolato complesso delle algebre su campo e i molteplici collegamenti di queste con strutture di altre specie dotate di proprietà combinatoriche e geometriche spesso interessanti per svariate applicazioni anche di carattere fisico-matematico e algoritmico.

Gli elementi di queste algebre vengono chiamati un po' genericamente **numeri ipercomplessi**.

G55d.02 La catena di algebre ottenibili con la costruzione dovuta a Dickson e riguardante gli octonioni studiati da Cayley riguarda il campo dei numeri reali e l'algebra su $\mathbb{R}$ avente come terreno lo stesso $\mathbb{R}$.

Si tratta di una catena che riguarda via via l'algebra unidimensionale dei numeri reali, l'algebra bidimensionale dei numeri complessi, l'algebra quadridimensionale dei quaternioni,l'algebra degli ottonioni di dimensione 8 e l'algebra degli esadecanioni.
È stata individuata anche un'**algebra dei trigintaduonioni** ottenuta dall'algebra degli esadecanioni come suo ampliamentoa 32 dimensioni.

G55 e. algebre di Clifford [1]

G55e.01 Per algebra di Clifford si intende una algebra unifera associativa dotata di una forma quadratica.

Consideriamo il campo K e lo spazio vettoriale V su K e sia Q una forma quadratica del genere $Q \in \lceil \mathsf{V} funbcK\}$.
Si dice **algebra di Clifford** su K, V e Q e si denota con $\mathsf{Clf}[K, \mathsf{V}, Q]$ l'algebra unifera la cui unità denotiamo con $\mathbf{1}$ che sia associativa e il più possibile libera, ma che soddisfi la proprietà

(1) $$\forall v \in VSs \;\; \vdots \;\; v^2 \; = \; Q(v) \; .$$

G55e.02 Nel caso V sia uno spazio finitodimensionale sul campo dei numeri reali e la forma Q sia nondegenere, l'algebra $\mathsf{Clf}[\mathbb{R}, \mathsf{V}, Q]$ si può denotare più precisamente con una notazione della forma $\mathsf{Clf}_{p,q}[\mathbb{R}, Q]$.
Questa scrittura segnala che lo spazio vettoriale sui reali sottostante possiede una base costituita da p vettori base e_i tali che ${\mathsf{e}_i}^2 \; = \; \mathbf{1}$ e q vettori base e_j tali che ${\mathsf{e}_j}^2 \; = \; -\mathbf{1}$ e q. Questi vettori di base normalizzati possono essere trovati con un processo di ortogonalizzazione.