1

Capitolo G54
quaternioni

Contenuti delle sezioni

a. algebra dei quaternioni p. 2
b. norma e inversione dei quaternioni p. 9
c. radici quadrate, esponenziale e logaritmo di quaternioni p. 12
d. quaternioni e rotazioni in tre dimensioni p. 15
e. gruppo dei quaternioni p. 17
f. sottoanelli e sottogruppi di quaternioni p. 19

19 pagine

G54 0.01 Questo capitolo è dedicato alle nozioni basilari sui quaternioni e sul loro utilizzo per calcolare le rotazioni in tre dimensioni.

L'introduzione dei quaternioni è dovuta principalmente a William Rowan Hamilton (ma non vanno dimenticate idee e proposte di Eulero, Gauss e Olinde Rodrigues). Essi furono visti primariamente come estensioni dei numeri complessi in grado di rendere più efficienti i calcoli geometrici similmente a quanto i numeri complessi riescono a potenziare gli strumenti di calcolo per la geometria del piano.

I quaternioni in seguito hanno trovato svariate applicazioni.
Un primo filone applicativo riguarda il trattamento delle rotazioni spaziali, per le quali presentano vantaggi algoritmici rispetto al calcolo vettoriale e al calcolo matriciale. Da questo sono seguite le loro utilizzazioni nella grafica con il computer, nella visione computerizzata, nella costruzione del software per la visualizzazione, per la realtà virtuale e per l'animazione con un massiccio utilizzo nei sistemi sui quali si basano gli attuali diffusissimi videogiochi.

Altre applicazioni riguardano l'elettromagnetismo (a partire da Maxwell) e la relatività speciale (con Minkowski), la robotica, la teoria del controllo, l'elaborazione dei segnali, la meccanica quantistica dello spin, la dinamica delle molecole, la meccanica orbitale, il controllo dei veicoli spaziali, la bioinformatica.

Inoltre i quaternioni interessano la teoria dei numeri grazie ai loro collegamenti con le forme quadratiche.

I quaternioni sono qui introdotti come elementi di un'algebra sul campo dei numeri reali e successivamente sono esaminati nei loro molteplici sviluppi algoritmici e dai conseguenti collegamenti con tematiche algebriche e geometriche.

Alla fine del capitolo viene presentati alcuni sottoinsiemi dell'insieme dei quaternioni costituenti sottogruppi e sottoanelli di quaternioni con interessanti collegamenti a entità matematiche di vari generi, in particolare con reticoli.

G54 a. algebra dei quaternioni

G54 a.01 Definiamo i **quaternioni** come gli elementi di un'algebra quadridimensionale sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}_{Fld}$ che denotiamo con $\mathbb{H}$.
I quaternioni costituiscono innanzi tutto uno spazio vettoriale sui reali e l'insieme dei suoi elementi si può identificare con $\mathbb{R}^{\times 4}$, cioè con un insieme di vettori sui quali agisce con le operazioni delle combinazioni lineari.
Per ottenere $\mathbb{H}$ occorre munire tale spazio di una opportuna operazione di prodotto che si rivela noncommutativa.

Come vedremo le accennate molteplici applicazioni dei quaternioni rendono opportuno di presentarli mediante svariati generi di notazioni ciascuno dei quali risulta vantaggioso per una parte delle attività che li richiedono.

G54 a.02 Un primo prevedibile modo di presentare un quaternione si serve di una quaterna di numeri reali; per segnalare che una tale quaterna $\langle a,b,c,d\rangle$ si vuole considerare un elemento dell'algebra $\mathbb{H}$ è opportuno usare la scrittura $\big\langle_q\, a,b,c,d\big\rangle$. Tale rappresentazione si dice **scrittura-RRRR dei quaternioni**.

Serve inoltre riferire l'algebra dei quaternioni a quattro vettori di base che denotiamo con $\mathbf{1}_q$, $\mathbf{i}_q$, $\mathbf{j}_q$ e $\mathbf{k}_q$ i quali sono derivabili da scritture-RRRR attraverso le definizioni

$$\mathbf{1}_q := \big\langle_q\, 1,0,0,0\big\rangle\ ,\quad \mathbf{i}_q := \big\langle_q\, 0,1,0,0\big\rangle\ ,\quad \mathbf{j}_q := \big\langle_q\, 0,0,1,0\big\rangle\ ,\quad \mathbf{k}_q := \big\langle_q 0,0,0,1\big\rangle\ .$$

La base ordinata $\big\langle \mathbf{1}_q, \mathbf{i}_q, \mathbf{j}_q, \mathbf{k}_q\big\rangle$ viene detta **base canonica dei quaternioni** e varie proprietà di $\mathbb{H}$ si riescono a renderechiaramente leggibili facendo riferimento ad essa.

Nel seguito del capitolo tuttavia conviene semplificare le notazioni trascurando il deponente $_q$ ai versori della base canonica; le notazioni più complete dei quaternioni rimangono utili quando questi oggetti sono da collegare con precisione alle altre entità con le quali interagiscono, in particolare con i diversi cosiddetti "numeri ipercomplessi" che incontreremo in G55.

G54 a.03 Per l'insieme dei quaternioni adottiamo la notazione **Qtrn**

Un generico quaternione **Q** si può trattare attraverso scritture quali

$$\mathbf{q}\ =\ a\,\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}\ :=\ \big\langle_q\, a,b,c,d\big\rangle\ .$$

Questa notazione la chiamiamo **scrittura-1ijk dei quaternioni**.

Dovendo trattare più quaternioni useremo scritture-RRRR o scritture-1ijk munite di indici come

$$\mathbf{q}_u\ =\big\langle\ a_u,b_u,c_u,d_u\big\rangle\ =\ a_u\,\mathbf{1} + b_u\,\mathbf{i} + c_u\,\mathbf{j} + d_u\,\mathbf{k}\ ,$$

ove u denota un indice opportuno (lettera, cifra, ...).
Dato che **1** verrà assunto come unità per il prodotto, in a02(1), risulta spesso conveniente abbreviare le scritture-1ijk con scritture come $\mathbf{q} = \alpha + \beta\,\mathbf{i} + \gamma\,\mathbf{j} + \delta\,\mathbf{k}$; una di queste la chiamiamo **scrittura-ijk dei quaternioni**.

Per segnalare che il simbolo **q** o una equivalente scrittura identifica possiamo usare affermazioni della forma

(2) $\qquad \mathbf{q}\in\mathbf{Qtrn}\ \ ,\ \ a+b\,\mathbf{i}+c\,\mathbf{j}+d\,\mathbf{k}\in\mathbf{Qtrn}\ \ ,\ \ \langle_q\, a,b,c,d\rangle\in\mathbf{Qtrn}$ o simili .

Sull'insieme dei quaternioni definiamo una somma e una moltiplicazione per un reale in stretta corrispondenza con le operazioni sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\times 4}{}_{Vsp}$. Servendoci della scrittura-ijk, cioè riferendoci alla base canonica, definiamo

$$\forall u = 1,2\ ,\ \mathbf{q}_u = a_u + b_u\,\mathbf{i} + c_u\,\mathbf{j} + d_u\,\mathbf{k} \in \mathbf{Qtrn}\ :\ \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2\ :=\ (a_1+a_2) + (b_1+b_2)\,\mathbf{i} + (c_1+c_2)\,\mathbf{j} + (d_1+d_2)\,\mathbf{k}\ ;$$

$$\forall r \in \mathbb{R}\ ,\ \mathbf{q} = a + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k} \in \mathbf{Qtrn}\ :\ r\,\mathbf{q}\ :=\ r\,a + r\,b\,\mathbf{i} + r\,c\,\mathbf{j} + r\,d\,\mathbf{k}\ .$$

Equivalentemente si poteva iniziare con la definizione di combinazione lineare-R dei quaternioni e ricavare le due proprietà precedenti come casi particolari. Servendoci della scrittura-RRRR avremmo

$$\forall u = 1,2\ ,\ \big\langle_q\ a_u, b_u, c_u, d_u\big\rangle \in \mathbf{Qtrn}\ ,\ \lambda_u \in \mathbb{R}\ :$$
$$\lambda_1 \big\langle_q\ a_1, b_1, c_1, d_1\big\rangle + \lambda_2 \big\langle_q\ a_2, b_2, c_2, d_2\big\rangle := \big\langle_q\ \lambda_1\,a_1 + \lambda_2\,a_2, \lambda_1\,b_1 + \lambda_2\,b_2, \lambda_1\,c_1 + \lambda_2\,c_2, \lambda_1\,d_1 + \lambda_2\,d_2\big\rangle$$

G54 a.04 Il prodotto dell'algebra dei quaternioni, che spesso viene chiamato **prodotto di Hamilton**, come per ogni algebra su campo, deve fornire una forma bilineare, cioè deve essere un'operazione binaria distributiva a destra e a sinistra sulle combinazioni lineari. Il prodotto lo denotiamo con $*$, riservandoci però di trascurare questo segno nelle espressioni che in seguito a questa semplificazione non risultano ambigue; chiediamo poi che il prodotto sia associativo e completiamo la sua definizione con la tavola di moltiplicazione degli elementi della sua base canonica. A tal fine è sufficiente richiedere le seguenti uguaglianze:

$$(1) \qquad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{Qtrn}\ :\ \mathbf{1} * \mathbf{q} := \mathbf{q} * \mathbf{1} = \mathbf{q} \qquad , \qquad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} * \mathbf{j} * \mathbf{k} = -\mathbf{1}\ .$$

Prop. Per l'operazione che soddisfa le (1) valgono le uguaglianze che seguono.

$$(2) \qquad \mathbf{i} * \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{j} * \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad , \quad \mathbf{k} * \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{j} * \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{k} * \mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad , \quad \mathbf{i} * \mathbf{k} = -\mathbf{j} \quad .$$

Come conseguenza delle (1) abbiamo $\mathbf{i} * \mathbf{j} * \mathbf{k} * \mathbf{k} = -\mathbf{k}$ e quindi la prima delle uguaglianze (3) $\mathbf{i} * \mathbf{j} = \mathbf{k}$.
La seconda delle (3) deriva da $\mathbf{i} * (-\mathbf{1}) = \mathbf{i} * (\mathbf{i} * \mathbf{j} * \mathbf{k}) = -\mathbf{j} * \mathbf{k}$ che implica $\mathbf{j} * \mathbf{k} = \mathbf{i}$.
La terza da $\mathbf{i} * \mathbf{i} * \mathbf{j} * \mathbf{k} = -\mathbf{i}$ che comporta $\mathbf{j} * \mathbf{k} = \mathbf{i}$.
Dalle espressioni per $\mathbf{j}$ e $\mathbf{i}$ segue la prima relazione di anticommutatività $\mathbf{j} * \mathbf{i} = \mathbf{k} * \mathbf{i} * \mathbf{j} * \mathbf{k} = -\mathbf{k}$.
Similmente si ottengono $\mathbf{k} * \mathbf{j} = (\mathbf{i} * \mathbf{j} * \mathbf{k}) * \mathbf{i} = -\mathbf{i}$ e $\mathbf{i} * \mathbf{k} = \mathbf{j} * \mathbf{k} * \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ ∎

Abbiamo quindi la seguente tavola di composizione del prodotto

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} & \mathbf{1} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{i} & \mathbf{i} & -\mathbf{1} & \mathbf{k} & -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} & \mathbf{j} & -\mathbf{k} & -\mathbf{1} & \mathbf{i} \\ \mathbf{k} & \mathbf{k} & \mathbf{j} & -\mathbf{i} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \quad .$$

Si osserva che il prodotto di Hamilton non è commutativo, ma è parzialmente anticommutativo; più precisamente dalle (3) segue che il prodotto è anticommutativo se ci si limita ai quaternioni che hanno nullo il primo coefficiente nella scritture-1ijk.

G54 a.05 Esplicitiamo il prodotto tra due quaternioni presentati nella forma-ijk e successivamente nella forma-RRRR.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 \ &=\ (a_1 + b_1\,\mathbf{i} + c_1\,\mathbf{j} + d_1\,\mathbf{k}) * (a_2 + b_2\,\mathbf{i} + c_2\,\mathbf{j} + d_2\,\mathbf{k}) \\ (1) \qquad &=\ (a_1\,a_2 - b_1\,b_2 - c_1\,c_2 - d_1\,d_2) + (a_1\,b_2 + b_1\,a_2 + c_1\,d_2 - d_1\,c_2)\,\mathbf{i} \qquad . \\ &+\ (a_1\,c_2 - b_1\,d_2 + c_1\,a_2 + b_1\,d_2)\,\mathbf{j} + (a_1\,d_2 + b_1\,c_2 - c_1\,b_2 + d_1\,a_2)\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1 \ast \mathbf{q}_2 &= \left\langle_q\, a_1, b_1, c_1, d_1 \right\rangle \ast \left\langle_q\, a_2, b_2, c_2, d_2 \right\rangle \\
&= \left\langle_q a_1\, a_2 - b_1\, b_2 - c_1\, c_2 - d_1\, d_2\ ,\ a_1\, b_2 + b_1\, a_2 + c_1\, d_2 - d_1\, c_2 \right. \\
&\quad \left.,\ a_1\, c_2 - b_1\, d_2 + c_1\, a_2 + d_1\, b_2\ ,\ a_1\, d_2 + b_1\, c_2 - c_1\, b_2 + d_1\, a_2 \right\rangle
\end{aligned} \qquad (2)
$$

Abbiamo dunque completata la definizione dell'**algebra dei quaternioni** $\mathbb{H}$ e per essa possiamo scrivere

$$\mathbb{H} \ :=\ \left\langle \mathbb{R}^{\times 4}{}_{Vsp}\ ,\ \ast \right\rangle . \qquad (3)$$

L'origine $\mathbf{0}_4$ dello spazio $\mathbb{R}^{\times 4}$ costituisce l'elemento nullo per il prodotto dell'algebra $\mathbb{H}$.
Si osserva anche che l'insieme dei quaternioni munito del solo prodotto di Hamilton costituisce un anello di divisione: infatti si constata che il prodotto di due elementi nonnulli non può fornisce l'elemento nullo.

G54 a.06 Presentiamo due scritture dei quaternioni atte a chiarire una importante distinzione tra due sottoinsiemi di **Qtrn**.

Si distinguono i quaternioni della forma $a\,\mathbf{1}$ con a reale che vengono detti **quaternioni scalari**, **quaternioni temporali** o anche quaternioni reali e i quaternioni della forma $b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}$ che vengono detti **quaternioni vettoriali**, **quaternioni spaziali** o anche quaternioni immaginari puri.

Relativamente a un $\mathbf{q} = a\,\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k} \in$ **Qtrn** $a\,\mathbf{1}$ si dice **componente scalare componente temporale** o anche componente reale, mentre $b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}$ viene chiamato **componente vettoriale componente spaziale** o anche componente immaginaria.

La distinzione tra quaternioni scalari e vettoriali si chiarisce con la fattorizzazione dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\times 4}$ come $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\times 3}$, ovvero con la sua decomposizione mediante somma diretta $\mathbb{R}^{\times 4} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\times 3}$.

Possono essere utili i simboli **QtrnS** e **QtrnV** per denotare, risp., l'insieme dei quaternioni scalari e l'insieme dei quaternioni vettoriali.

G54 a.07 Chiaramente i quaternioni scalari commutano con tutti gli elementi di **Qtrn**; viceversa dalle relazioni di anticommutazione dei quaternioni $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ segue che un quaternione $\mathbf{q} = a + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}$ per commutare con tutti gli altri deve avere $b = c = d = 0$. Dunque il centro dell'anello di divisione $\langle \mathbb{R}^{\times 4}\ ,\ \ast \rangle$ e dell'algebra $\mathbb{H}$ coincide con l'insieme dei quaternioni scalari.

Per evidenziare la distinzione tra quaternioni scalari e vettoriali si usano anche le scritture

$$\mathbf{q} = a + \overrightarrow{\langle b, c, d \rangle} \quad , \quad a = sclr(\mathbf{q}) = \Re(\mathbf{q}) \quad , \quad \overrightarrow{\langle b, c, d \rangle} = vctr(\mathbf{q}) = \Im(\mathbf{q}) \ . \qquad (1)$$

La presentazione di un quaternione che distingue la parte scalare dalla parte vettoriale sarà detta **forma-1D3D del quaternione**.

È utile esprimere il prodotto di Hamilton di due quaternioni nella forma-SV:

$$(a_1 + \overrightarrow{\mathbf{v}_1}) \ast (a_2 + \overrightarrow{\mathbf{v}_2}) \ =\ a_1\, a_2 - \overrightarrow{\mathbf{v}_1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}_2} + (a_1\, \mathbf{v}_2 + a_2\, \mathbf{v}_1 + \overrightarrow{\mathbf{v}_1} \wedge \overrightarrow{\mathbf{v}_2}) \ . \qquad (2)$$

Accostiamo alla precedente l'espressione del prodotto $\mathbf{q}_2 \ast \mathbf{q}_1$

$$(a_2 + \overrightarrow{\mathbf{v}_2}) \ast (a_1 + \overrightarrow{\mathbf{v}_1}) \ =\ a_2\, a_1 - \overrightarrow{\mathbf{v}_2} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}_1} + (a_2\, \mathbf{v}_1 + a_1\, \mathbf{v}_2 + \overrightarrow{\mathbf{v}_2} \wedge \overrightarrow{\mathbf{v}_1}) \ . \qquad (3)$$

Da esse si ricava che i due quaternioni commutano, cioè $\mathbf{q}_1 \ast \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2 \ast \mathbf{q}_1$ sse le due rispettive parti vettoriali sono collineari, cioè sse $vctr(\mathbf{q}_1) /\!\!/ vctr(\mathbf{q}_2)$.?

G54 a.08 Per esaminare le caratteristiche di $\mathbb{H}$ risulta utile servirsi della permutazione di **Qtrn** che a ogni $\mathbf{q} = a + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k} = a + \overrightarrow{\langle b, c, d \rangle}$ associa il quaternione $\mathbf{q}^*\ :=\ a - b\,\mathbf{i} - c\,\mathbf{j} - d\,\mathbf{k} = a - \overrightarrow{\langle b, c, d \rangle}$.
Segnaliamo che talora invece della scrittura $\mathbf{q}^*$ si usano la scrittura $\overline{\mathbf{q}}$ o la $\widetilde{\mathbf{q}}$.

Questa trasformazione di **Qtrn** viene chiamata **coniugazione dei quaternioni**
Evidentemente questa coniugazione è una involuzione, cioè

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbf{Qtrn} \ : \ (\mathbf{q}^*)^* = \mathbf{q} \ . \tag{1}$$

È anche evidente che la coniugazione rispetta la combinazione lineare-$\mathbb{R}$ dei quaternioni

$$\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} \ , \ \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbf{Qtrn} \ : \ (r_1\,\mathbf{q} + r_2\,\mathbf{q}_2)^* = r_1\,{\mathbf{q}_1}^* + r_2\,{\mathbf{q}_2}^* \ . \tag{2}$$

Per trattare la coniugazione in $\mathbb{H}$ risultano convenienti anche espressioni come le seguenti.

$$\forall \mathbf{q} = a + \overrightarrow{\mathbf{v}} = a + \overrightarrow{\langle b, c, d\rangle} \in \mathbf{Qtrn} \ : \ \mathbf{q}^* = a - \overrightarrow{\mathbf{v}} = a - \overrightarrow{\langle b, c, d\rangle} \ . \tag{3}$$

Queste giustificano l'uso del termine **inversione spaziale** dei quaternioni come sinonimo della loro coniugazione .

Si osserva anche che la parte scalare e la parte vettoriale di un quaternione si possono esprimere in modo semplice servendosi della coniugazione di quaternioni: infatti si constata che

$$sclr(\mathbf{q}) = a = \frac{1}{2}\left(\mathbf{q} + \mathbf{q}^*\right) \qquad , \qquad vctr(\mathbf{q}) = \overrightarrow{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*\right) \ . \tag{4}$$

Si nota infine che i quaternioni invarianti per coniugazione sono gli scalari ($b = c = d = 0$), mentre i quaternioni vettoriali si dicono antivarianti per coniugazione.

G54 a.09 Consideriamo due quaternioni vettoriali $\mathbf{w}_u = b_u\,\mathbf{i} + c_u\,\mathbf{j} + d_u\,\mathbf{k}$ per $u = 1, 2$. Questi si possono considerare elementi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\times 3}$ ed il loro prodotto scalare è dato da

$$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \ = \ b_1\,b_2 + c_1\,c_2 + d_1\,d_2 \ , \tag{1}$$

mentre il loro prodotto vettoriale è dato dall'espressione

$$\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2 \ = \ (c_1\,d_2 - d_1\,c_2)\,\mathbf{i} + (d_1\,b_2 - b_1\,d_2)\,\mathbf{j} + (b_1\,c_2 - c_1\,b_2)\,\mathbf{k} \ . \tag{2}$$

Si constata che le componenti scalari dei prodotti $\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2$, $({\mathbf{q}_1}^*) * \mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_2 * ({\mathbf{q}_1}^*)$, $\mathbf{q}_1 * ({\mathbf{q}_2}^*)$ e $\mathbf{q}_2 * ({\mathbf{q}_1}^*)$ sono date dal precedente prodotto scalare, mentre sono diverse le relative componenti vettoriali; si constata anche che valgono le uguaglianze

$$\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 \ = \ \frac{1}{2}\left((\mathbf{q}_1)^* * \mathbf{q}_2 + ({\mathbf{q}_2}^*) * \mathbf{q}_1\right) \ = \ \frac{1}{2}\left(\mathbf{q}_1 * ({\mathbf{q}_2}^*) + (\mathbf{q}_2 * ({\mathbf{q}_1}^*)\right) \ . \tag{3}$$

Si trova inoltre che il suddetto prodotto vettoriale coincide con la parte vettoriale dei prodotti di Hamilton $\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2$ e $-({\mathbf{q}_2}^*) * ({\mathbf{q}_1}^*)$. Si trova anche che vale l'espressione

$$\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2 \ = \ \frac{1}{2}\left(\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 + ({\mathbf{q}_2}^*) * ({\mathbf{q}_1}^*)\right) \ . \tag{4}$$

G54 a.10 contrariamente a quanto avviene per la coniugazione complessa, il coniugato di un quaternione si può esprimere mediante questo e i quaternioni della base canonica.

(1) Prop.: $\forall \mathbf{q} \in \mathbf{Qtrn} \ : \ \mathbf{q}^* \ = \ \frac{1}{2}\,(\mathbf{q} + \mathbf{i} * \mathbf{q} * \mathbf{i} + \mathbf{j} * \mathbf{q} * \mathbf{j} + \mathbf{k} * \mathbf{q} * \mathbf{k})$.

Dim.: Si osserva il seguente sistema di uguaglianze:

$$\begin{aligned}
(a + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}) \qquad &= \quad a + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k} \quad , \\
\mathbf{i} * (a + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}) * \mathbf{i} \quad &= \quad -a - b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k} \quad , \\
\mathbf{j} * (a + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}) * \mathbf{j} \quad &= \quad -a + b\,\mathbf{i} - c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k} \quad , \\
\mathbf{k} * (a + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}) * \mathbf{k} \quad &= \quad -a + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} - d\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

.

Da queste si ricava $\mathbf{q}+\mathbf{i}*\mathbf{q}*\mathbf{i}+\mathbf{j}*\mathbf{q}*\mathbf{j}+\mathbf{k}*\mathbf{q}*\mathbf{k} = -2\,a+2\,b\,\mathbf{i}+2\,c\,\mathbf{j}+2\,d\,\mathbf{k}$, equivalente all'enunciato ∎
Si osserva che non si hanno possibilità di questo genere per la coniugazione nel campo complesso.

G54 a.11 Per trattare i quaternioni si usa anche una scrittura vicina alla precedente scrittura-SV che presenta la parte scalare e la parte vettoriale di un quaternione come membri di una coppia cui attribuire un significato particolare espressa assumendo come delimitatore iniziale " $\langle_q$ ". Si scrive dunque

$$\mathbf{q} = a+b\,\mathbf{i}+c\,\mathbf{j}+d\,\mathbf{k} = a+\overrightarrow{\mathbf{v}} =: \langle_q\, a,\mathbf{v}\,\rangle\ . \tag{1}$$

Abbiamo quindi le uguaglianze

$$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}\ :\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2=\lambda,\langle_q\, a_1,\mathbf{v}_1\,\rangle+\mu\,\langle_q\, a_2,\mathbf{v}_2\,\rangle = \langle_q\, \lambda\,a_1+\mu\,a_2\ ,\ \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{v}_1}+\mu\,\overrightarrow{\mathbf{v}_2}\,\rangle\ . \tag{2}$$

$$\mathbf{q}_1*\mathbf{q}_2 = \langle_q\, a_1\,a_2-\overrightarrow{\mathbf{v}_1}\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}_2}\ ,\ a_1\,\overrightarrow{\mathbf{v}_2}+a_2\,\overrightarrow{\mathbf{v}_1}+\overrightarrow{\mathbf{v}_1}\wedge\overrightarrow{\mathbf{v}_2}\,\rangle\ . \tag{3}$$

$$\mathbf{q}^* = \langle_q\, a,\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\rangle^* = \langle_q\, a,-\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\rangle\ . \tag{4}$$

Facendo riferimento alla notazione delle coppie si è indotti ad introdurre il **prodotto scalare di due quaternioni**:

$$\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2 := \langle_q\, a_1,\overrightarrow{\mathbf{v}_1}\,\rangle\cdot\langle_q\, a_2,\overrightarrow{\mathbf{v}_2}\,\rangle = a_1\,a_2+\overrightarrow{\mathbf{v}_1}\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}_2} = a_1\,a_2+b_1\,b_2+c_1\,c_2+d_1\,d_2\ . \tag{5}$$

Si tratta di una forma bilineare simmetrica e in particolare si deve segnalare che

$$\mathbf{q}*(\mathbf{q}^*) = a^2-b^2-c^2-d^2 = a^2-|\mathbf{v}|^2\ . \tag{6}$$

G54 a.12 Il campo dei numeri complessi si può considerare uno spazio bidimensionale sui numeri reali e, munito del prodotto, costituisce un'algebra bidimensionale sui reali. Questa algebra è evidentemente isomorfa alle tre sottoalgebre di $\mathbb{H}$ aventi come terreno, risp., l'insieme $\{a,b\in\mathbb{R}:|\ a+b\,\mathbf{i}\}$, l'insieme $\{a,c\in\mathbb{R}:|\ a+c\,\mathbf{j}\}$, l'insieme $\{a,d\in\mathbb{R}:|\ a+d\,\mathbf{k}\}$.
Dunque nell'algebra $\mathbb{H}$ risultano immerse tre algebre di numeri complessi.
Inoltre la coniugazione dei quaternioni si può considerare un'estensione quadridimensionale della coniugazione dei numeri complessi.

Se si osserva che il generico quaternione si può scrivere $\mathbf{q}=(a+b\,\mathbf{i})+(c+d\,\mathbf{i})\,\mathbf{j}$, si individua una biiezion evidente tra l'insieme dei quaternioni e l'insieme $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

Per taluni sviluppi conviene fare riferimento ai due numeri complessi precedenti e avvalersi delle operazioni sul campo dei complessi. Per questo conviene identificare $\mathbf{i}$ e l'unità immaginaria i e identificare le operazioni algebriche su coppie di complessi con quelle sui quaternioni.

Per alcune precisazioni formali possono essere utili le notazioni $cpx1(\mathbf{q}) := a+b\,\mathbf{i}$ e $cpx2(\mathbf{q}) := c+d\,\mathbf{i}$; esse consentono di scrivere $\mathbf{q}=cpx1(\mathbf{q})+cpx2(\mathbf{q})\,\mathbf{j}$.

Similmente si usano scritture come $\mathbf{Z}_{[1]} := a+b\,\mathbf{i} = cpx1(\mathbf{q})$ e $\mathbf{Z}_{[2]} := c+d\,\mathbf{i} = cpx2(\mathbf{q})$ in modo da poter scrivere $\mathbf{q} = \mathbf{Z}_{[1]}+\mathbf{Z}_{[2]}*\mathbf{j}$.
Quando servono delle scritture di più quaternioni $\mathbf{q}_u$ per $u=1,2,...$, si usano scritture come $\mathbf{q}_u = \mathbf{Z}_{[1],u}+\mathbf{Z}_{[2],u}*\mathbf{j}$.
Questa modalità di presentazione dei quaternioni la chiamiamo **scrittura-CC dei quaternioni**.
Questa forma consente di scrivere in modo relativamente leggibile il prodotto di due quaternioni: se facciamo riferimento alle decomposizini $\mathbf{q}_u = \mathbf{Z}_{[1],u}+\mathbf{Z}_{[2],u}*\mathbf{j}$ per $u=1,2$ abbiamo l'espressione

$$\mathbf{q}_1*\mathbf{q}_2 = \left(\mathbf{Z}_{[1],1}*\mathbf{Z}_{[1],2}-\mathbf{Z}_{[1],2}*(\mathbf{Z}_{[2],2})^*\right)+\left(\mathbf{Z}_{[1],2}*\mathbf{Z}_{[2],2}+\mathbf{Z}_{[2],1}*(\mathbf{Z}_{[1],2})^*\right)*\mathbf{j}\ . \tag{1}$$

G54 a.13 I quaternioni possono essere presentati anche come particolari matrici di profilo 2×2 le cui entrate sono numeri complessi che otteniamo con la seguente applicazione lineare-C

$$(1) \qquad \forall \mathsf{q} = a + b\,\mathsf{i} + c\,\mathsf{j} + d\,\mathsf{k} \in \mathbf{Qtrn} \;:\; \mathsf{GL2C}(\mathsf{q}) \;:=\; \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \;:=\; \begin{bmatrix} a+\mathsf{i}\,b & c+\mathsf{i}\,d \\ -c+\mathsf{i}\,d & a-\mathsf{i}\,b \end{bmatrix} .$$

Evidentemente la combinazione lineare-R di queste matrici viene rispettata dalla applicazione GL2C. Inoltre si verifica che questa funzione lineare-C rispetta anche il prodotto di Hamilton, ossia

$$(2) \qquad \forall \mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2 \in \mathbf{Qtrn} \;:\; \mathsf{GL2C}(\mathsf{q}_1 * \mathsf{q}_2) \;=\; \mathsf{GL2C}(\mathsf{q}_1) \dashv \mathsf{GL2C}(\mathsf{q}_2) .$$

Quindi la applicazione GL2C costituisce una rappresentazione lineare-R dell'algebra $\mathbb{H}$ mediante matrici appartenente al gruppo $\mathrm{GLSs}_2(\mathbb{C})$.

Si osserva anche che un quaternione z ha la forma $a + b\,\mathsf{i}$, ossia fa parte di quelli più semplicemente associati ai numeri complessi, sse la matrice $\mathsf{GL2C}(\mathsf{z})$ è diagonale.
Inoltre per ogni quaternione la matrice trasposta fornisce la matrice del quaternione coniugato, ossia

$$(3) \qquad \forall \mathsf{q} \in \mathbf{Qtrn} \;:\; \big(\mathsf{GL2C}(\mathsf{q})\big)^{\mathsf{T}} \;=\; \mathsf{GL2C}(\mathsf{q}^*) .$$

G54 a.14 Si trova un'altra rappresentazione dei quaternioni mediante matrici 2×2 sui numeri che si ottiene dalla applicazione lineare-C che denotiamo con SL2C e che definiamo riferendoci ai quaternioni della base canonica:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \mathsf{SL2C}(\mathbf{1}) \;:=\; \boldsymbol{U} \;:=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \qquad \mathsf{SL2C}(\mathsf{i}) \;:=\; \boldsymbol{I} \;:=\; \begin{bmatrix} \mathsf{i} & 0 \\ 0 & -\mathsf{i} \end{bmatrix} \quad , \\ \mathsf{SL2C}(\mathsf{j}) \;:=\; \boldsymbol{J} \;:=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \qquad \mathsf{SL2C}(\mathsf{k}) \;:=\; \boldsymbol{K} \;:=\; \begin{bmatrix} 0 & \mathsf{i} \\ \mathsf{i} & 0 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Si tratta di matrici con determinante uguale ad 1 strettamente collegate alle matrici di Pauli utilizzate in meccanica quantistica per il trattamento degli spin degli elettroni e di particelle simili.

Dalle definizioni si ricavano facilmente le seguenti regole di composizione

$$(2) \qquad \boldsymbol{I}^2 = -\boldsymbol{U} \,,\; \boldsymbol{J}^2 = -\boldsymbol{U} \,,\; \boldsymbol{K}^2 = -\boldsymbol{U} \,,\; \boldsymbol{I} \dashv \boldsymbol{J} \dashv \boldsymbol{K} = -\boldsymbol{U} .$$

Confrontando queste uguaglianze e il fatto che la $\boldsymbol{U}$ è la matrice identità con le relazioni in a02(1) si ottiene che la SL2C costituisce una rappresentazione lineare di $\mathbf{H}$ mediante matrici del gruppo lineare $\mathsf{SL}_2(\mathbb{C})$.

G54 a.15 Introduciamo un'altra presentazione matriciale dei quaternioni mediante matrici 4×4 con entrate reali. Questa presentazione la chiamiamo **scrittura-M44 dei quaternioni** e la basiamo sulla funzione $\mathsf{M44} \in \lceil\, \mathbf{Qtrn} \longmapsto \mathbf{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \,\rceil$ che chiediamo sia lineare-R e che definiamo con la sua azione sui quaternioni della base canonica:

$$\mathsf{M44} \;:=\; \left\downarrow \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{i} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\downarrow .$$

In forza della linearità-R di M44 si ottiene l'espressione generale

$$(2) \qquad \mathsf{M44}(\mathsf{q}) \;=\; \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -b & c \\ -c & d & a & -d \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} .$$

Sono opportune alcune osservazioni esplicite.

Le matrici dei quaternioni della base canonica sono matrici a blocchi 2×2 ciascuno dei quali è diagonale e conseguentemente sono tali anche le matrici dei quaternioni spaziali.

Il coniugato di un quaternione è rappresentato dalla matrice trasposta, cioè $\mathsf{M44}(\bar{\mathbf{q}}) \;=\; (\mathsf{M44}(\mathbf{q}))^{\mathsf{T}}$.

Il determinante di una matrice fornita da $\mathsf{M44}$ è la quarta potenza della norma, cioè

$$\det(\mathsf{M44}(\mathbf{q})) \;=\; ||\mathbf{q}||^4 \; .$$

G54 b. norma e inversione dei quaternioni

G54 b.01 Per il prodotto di Hamilton tra un quaternione e il suo coniugato, dalle formule trovate si ottiene

$$\mathbf{q} * (\mathbf{q}^*) \;=\; a^2+b^2+c^2+d^2 \;=\; (\mathbf{q}^*) * \mathbf{q}\ . \tag{1}$$

Questo numero reale viene chiamato **norma al quadrato del quaternione q** e per essa si usa la notazione $||\mathbf{q}||^2 \;:=\; \mathbf{q} * (\mathbf{q}^*)$.
In effetti è evidente che

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbf{Qtrn} \;:\; ||\mathbf{q}||^2 = 0 \iff \mathbf{q} = \mathbf{0}_4\ . \tag{2}$$

Si constata inoltre che valgono le proprietà

$$\forall r \in \mathbb{R}\ ,\ \mathbf{q} \in \mathbf{Qtrn} \;:\; ||r\,\mathbf{q}|| = |r|\,||\mathbf{q}||\ ; \tag{3}$$

$$\forall \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbf{Qtrn} \;:\; ||\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|| \le ||\mathbf{q}_1|| + ||\mathbf{q}_2||\ . \tag{4}$$

Valgono dunque tutte le proprietà richieste alle norme [G41a10] sugli spazi vettoriali e questo giustifica l'uso del termine norma per i quaternioni.

(5) Prop.: $\forall \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbf{Qtrn} \;:\; ||\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2|| = ||\mathbf{q}_1|| \cdot ||\mathbf{q}_2||$ ∎

Dunque l'insieme dei quaternioni munito della norma, ossia la coppia $\big\langle \mathbf{Qtrn}, ||\star|| \big\rangle$, costituisce uno spazio normato.

Si definisce inoltre come **distanza tra quaternioni** la funzione bivariata

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_{\mathbb{H}} \;:=\; & \Big\lceil\ \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle \mapsto ||\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2||\ \Big\rceil \;= \\ & \Big\lceil\ \Big\langle \langle_q\, a_1, b_1, c_1, d_1 \rangle, \langle_q\, a_2, b_2, c_2, d_2 \rangle \Big\rangle \mapsto \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2+(d_1-d_2)^2}\ \Big\rceil\ . \end{aligned}$$

L'insieme dei quaternioni munito di $\mathrm{dist}_{\mathbb{H}}$ costituisce uno spazio metrico isomorfo (in parole povere, identificabile) con lo spazio $\mathbb{R}^{\times 4}$ munito della distanza euclidea.

In molte formule per la norma di un quaternione $\mathbf{q}$ è comodo usare notazioni come $q := ||\mathbf{q}||$, $q_u = ||\mathbf{q}_u||$ o simili .

G54 b.02 Un quaternione si dice **quaternione unitario** o **quaternione normalizzato** sse ha norma 1. Chiaramente a ogni quaternione $\mathbf{q}$ nonnullo si può associare un quaternione unitario a esso collineare, $\dfrac{1}{||\mathbf{q}||}\,\mathbf{q}$; questo viene detto anche **versore quaternione** associato a $\mathbf{q}$ e può essere utile servirsi della notazione

$$vrsr(\mathbf{q}) \;=\; /vrsr(a+b\,\mathbf{i}+c\,\mathbf{j}+d\,\mathbf{k}) \;=\; vrsr\big(a, \overrightarrow{\mathbf{v}}\big) \;:=\; \frac{1}{||\mathbf{q}||}\,\mathbf{q} = \frac{\mathbf{q}}{a^2+b^2+c^2+d^2} = \frac{\mathbf{q}}{a^2+|\overrightarrow{\mathbf{v}}|}\ . \tag{1}$$

Dunque ogni quaternione $\mathbf{q}$ si può esprimere come $\mathbf{q} \;=\; ||\mathbf{q}|| \cdot vrsr(\mathbf{q})$.

Per affermare che un quaternione $\mathbf{q}$ è unitario scriveremo

$$\mathbf{q} \in \mathbf{QtrnU} \;\text{ ove }\; \mathbf{QtrnU} \;:=\; \big\{ \mathbf{q} \in \mathbf{Qtrn} \;\big\rceil\; ||\mathbf{q}|| = 1 \big\}$$

L'insieme dei quaternioni unitari corrisponde alla sfera 3D in $\mathbb{R}^{\times 4}$ di raggio 1, cioè all'insieme

$$\big\{ \mathbf{q} = a+b\,\mathbf{i}+c\,\mathbf{j}+d\,\mathbf{k} \;\big\rceil\; a^2+b^2+c^2+d^2 = 1 \big\}\ . \tag{2}$$

(3) Prop.: Consideriamo un quaternione $\mathbf{q}$; esso è unitario, cioè $||\mathbf{q}|| = 1$ sse $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$.

Dim.: Segue direttamente da b01(1) ∎

(4) Prop.: Il prodotto di due quaternioni unitari è un quaternione unitario.

Dim.: Se $\mathsf{q}_u \in \mathbf{QtrnU}$ per $u = 1, 2$, in forza di b01(5) si ha $||\mathsf{q}_1 * \mathsf{q}_2|| = ||\mathsf{q}_1|| \cdot ||\mathsf{q}_2|| = 1$ ∎

L'insieme dei quaternioni unitari munito del prodotto di Hamilton costituisce dunque un gruppo.
Più compiutamente si dimostra che si tratta di un gruppo topologico e che si ha isomorfismo tra S^3 ed SU(2).

G54 b.03 Ogni quaternione nonnullo $\mathsf{q} = a + b\,\mathsf{i} + c\,\mathsf{j} + d\,\mathsf{k}$ possiede un unico inverso moltiplicativo bilatero

$$\mathsf{q}^{-1} \;=\; \frac{\mathsf{q}^*}{\mathsf{q} * (\mathsf{q}^*)} \;=\; \frac{\mathsf{q}^*}{||\mathsf{q}||^2} \;=\; \frac{\mathsf{q}^*}{a^2+b^2+c^2+d^2}\ . \tag{1}$$

In effetti si constata facilmente che $\mathsf{q} * (\mathsf{q}^{-1}) \;=\; \mathsf{q} * \left(\dfrac{\mathsf{q}^*}{||\mathsf{q}||^2}\right) \;=\; \mathbf{1}$; inoltre per l'arbitrarietà di $\mathsf{q} \in \mathbf{Qtrn} \setminus \{\mathbf{0}\}$ dalla precedente segue anche $(\mathsf{q}^{-1}) * \mathsf{q} \;=\; \mathbf{1}$; infine questa arbitrarietà implica anche

$$(\mathsf{q}^*)^{-1} \;=\; \frac{\mathsf{q}}{(\mathsf{q}^*) * \mathsf{q}} \;=\; \frac{\mathsf{q}}{a^2+b^2+c^2+d^2} \;=\; (\mathsf{q}^{-1})^*\ . \tag{2}$$

Può presentare qualche vantaggio servirsi per l'inverso della notazione equivalente $\dfrac{1}{\mathsf{q}} \;:=\; \mathsf{q}^{-1}$.

G54 b.04 La espressione dell'inverso di un quaternione nonnullo dato nella notazione-CC $\mathsf{q} \;=\; \mathsf{Z}_{[1]} + \mathsf{Z}_{[2]} * \mathsf{j}$ con $\mathsf{Z}_{[1]} := a + b\,\mathsf{i}$ e $\mathsf{Z}_{[2]} := c + d\,\mathsf{i}$, come si constata senza difficoltà, è la seguente.

$$\frac{1}{\mathsf{q}} \;=\; \frac{(\mathsf{Z}_{[1]})^*}{||\mathsf{Z}_{[1]}||^2 + ||\mathsf{Z}_{[2]}||^2} - \frac{\mathsf{Z}_{[2]}}{||\mathsf{Z}_{[1]}||^2 + ||\mathsf{Z}_{[2]}||^2}\,\mathsf{j} \;=\; \frac{1}{||\mathsf{q}||^2}\,\Big((\mathsf{Z}_{[1]})^* - \mathsf{Z}_{[2]}\,\mathsf{j}\Big)\ . \tag{1}$$

Si osserva che la constatazione suddetta si ottiene più facilmente se ci si lascia guidare dalla similitudine con l'inversione moltiplicativa dei numeri complessi e si considera che

$$\big(\mathsf{Z}_{[1]} + \mathsf{Z}_{[2]} * \mathsf{j}\big) * \big((\mathsf{Z}_{[1]})^* - \mathsf{Z}_{[2]} * \mathsf{j}\big) \;=\; ||\mathsf{Z}_{[1]}||^2 + ||\mathsf{Z}_{[2]}||^2 \;=\; ||\mathsf{q}||^2\ .$$

Diamo anche l'espressione dell'inverso di un quaternione nella cosiddetta forma-GL2C, $\mathsf{q} \;=\; \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$. Ricordando che $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}^{-1} \;=\; \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}\,\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$ si ottiene

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}^{-1} \;=\; \frac{1}{||\mathsf{q}||^2}\,\begin{bmatrix} \overline{z} & -w \\ -\overline{w} & z \end{bmatrix}\ . \tag{2}$$

G54 b.05 La noncommutatività del prodotto di Hamilton porta a definire due divisioni per quaternioni nonnulli.
Si dice **divisione con divisore a sinistra p** del quaternione **q** il quaternione $\mathsf{l} := (\mathsf{p}^{-1}) * \mathsf{q}$, cioè il quaternione, unico, tale che $\mathsf{p} * \mathsf{l} = \mathsf{q}$.
Si dice **divisione con divisore a destra p** del quaternione **q** il quaternione $\mathsf{r} := \mathsf{q} * (\mathsf{p}^{-1})$, cioè il quaternione, unico, tale che $\mathsf{r} * \mathsf{p} = \mathsf{q}$.

G54 b.06 Possono servire le seguenti raccolte di formule per la norma e per la coniugazione dei quaternioni.

$$\forall \mathsf{q} \in \mathbf{Qtrn} \quad : \quad ||\mathsf{q}|| = 0 \Longleftrightarrow \mathsf{q} = \mathbf{0}_4\ .$$

$$\forall \mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2 \in \mathbf{Qtrn} \quad : \quad ||\mathsf{q}_1 + \mathsf{q}_2|| \le ||\mathsf{q}_1|| + ||\mathsf{q}_2||\ .$$

(1) $$\forall \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbf{Qtrn} \quad : \quad ||\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|| = ||\mathbf{q}_1|| + ||\mathbf{q}_2|| \iff \mathbb{R} \ni r \between \mathbf{q}_1 = r\,\mathbf{q}_2 \ .$$

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbf{Qtrn} \quad : \quad ||\mathbf{q}^*|| = ||\mathbf{q}|| \ .$$

$$\forall \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbf{Qtrn} \quad : \quad ||\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2|| = ||\mathbf{q}_2 * \mathbf{q}_1|| = ||\mathbf{q}_1||\,||\mathbf{q}_2|| \ .$$

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbf{Qtrn} \quad : \quad \left(\mathbf{q}^*\right)^* = \mathbf{q} \ .$$

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbf{Qtrn} \quad : \quad (\mathbf{q}^{-1})^* = (\mathbf{q}*)^{-1} = \frac{\mathbf{q}}{||\mathbf{q}||^2} \ .$$

(2) $$\forall \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbf{Qtrn} \quad : \quad (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^* = {\mathbf{q}_1}^* + {\mathbf{q}_2}^* \ .$$

$$\forall \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbf{Qtrn} \quad : \quad (\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2)^* = {\mathbf{q}_2}^* * {\mathbf{q}_1}^* \ .$$

$$\forall \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbf{Qtrn} \quad : \quad (\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2)^{-1} = {\mathbf{q}_2}^{-1} * {\mathbf{q}_1}^{-1} \ .$$

G54 c. radici quadrate, esponenziale e logaritmo di quaternioni

G54 c.01 Consideriamo un quaternione unitario $\mathbf{w} = \langle a, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle$. Dato che $a^2 + |\overrightarrow{\mathbf{v}}|^2 = 1$, si vede che gli si può associare il numero reale θ tale che

$$a = \cos(\theta) \quad , \quad \overrightarrow{\mathbf{v}} = \sin(\theta)\, \overrightarrow{\mathbf{u}} \quad \text{ove} \quad \overrightarrow{\mathbf{u}} := \mathit{vrsr}(\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \mathit{vrsr}(\mathit{vctr}(\mathbf{w})) \; . \tag{1}$$

Dunque $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ è un versore di $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Più in generale ogni quaternione $\mathbf{q}$ si può presentare come

$$\mathbf{q} = \rho \cos\theta + \rho \sin\theta\, \mathbf{u} \qquad \text{con} \quad \rho := ||\mathbf{q}|| \; , \; \mathbf{u} := \mathit{vrsr}(\overrightarrow{\langle b, c, d \rangle}) \; . \tag{2}$$

L'espressione precedente costituisce un'altra forma di presentazione dei quaternioni chiamata **forma polare dei quaternioni**.
Questa espressione viene detta anche **decomposizione polare** dei quaternioni; a questo proposito va ricordato che la nozione di decomposizione polare ha portata piuttosto estesa [`decomposizione polare (wi)`].

Alla scrittura polare del quaternione $\mathbf{q}$ si può dare anche la forma

$$\mathbf{q} = ||\mathbf{q}||\, \mathbf{e}^{\theta\, \mathbf{u}} = ||\mathbf{q}|| \left(\cos\theta + \sin\theta\, \mathbf{u}\right) \qquad \text{con} \quad a = ||\mathbf{q}||\, \cos\theta \quad , \quad \overrightarrow{\mathbf{v}} = ||\mathbf{q}||\, \sin\theta\, \mathbf{u} \; . \tag{3}$$

G54 c.02 Nel campo dei numeri complessi si trovano esattamente due numeri, i e $-\mathsf{i}$, il cui quadrato è -1; da questo segue che ogni numero complesso diverso da 0 possiede esattamente due radici quadrate.

Nell'algebra $\mathbb{H}$ le cose sono meno semplici: in effetti la noncommutatività del prodotto non garantisce che un polinomio abbia un numero di radici uguale al suo grado. In particolare -1 possiede infinite radici quadrate che costituiscono una sfera di raggio 1 nello spazio tridimensionale dei quaternioni spaziali.

Per chiarire le cose cerchiamo quali quaternioni della forma $\mathbf{q} = a + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}$ possono avere il quadrato uguale al quaternione scalare -1. Questa richiesta equivale al soddisfacimento del seguente sistema di equazioni numeriche

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - c^2 - d^2 &= -1 \\ 2\,a\,b &= 0 \\ 2\,a\,c &= 0 \\ 2\,a\,d &= 0 \end{aligned}$$

Le ultime tre equazioni implicano aut $a = 0$ aut $b = c = d = 0$. La seconda alternativa è inaccettabile, in quanto la prima equazione implicherebbe $a^2 = -1$ per qualche a numero reale. Deve quindi essere $a = 0$ e $b^2 + c^2 + d^2 = 1$; questo dice che sono radici quadrate di -1 esattamente i quaternioni immaginari puri costituiti da vettori del sottospazio di **Qtrn** sotteso da $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, che qui denotiamo con $\mathbf{Qtrn}_{ijk}$, aventi la forma $\overrightarrow{b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}}$ e come norma 1.
Questi vettori corrispondono ai punti della sfera avente centro nell'origine e raggio 1.

Più in generale possiamo affermare che tutti e soli i quaternioni scalari negativi $-r\,\mathbf{1}$ con $r \in \mathbb{R}_+$ possiedono infinite radici quadrate costituenti sfere in $\mathbf{Qtrn}_{ijk}$ aventi centro nell'origine e raggio $\sqrt{r}$. Oltre a questi il quaternione nullo ha una sola radice quadrata e tutti gli altri quaternioni posseggono due radici quadrate, l'una l'opposta dell'altra.

G54 c.03 Ad ogni quaternione $\mathsf{q} = a + b\,\mathsf{i} + c\,\mathsf{j} + d\,\mathsf{k} = a + \overrightarrow{\mathsf{v}}$ si possono associare la serie esponenziale

$$\exp(\mathsf{q}) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n}{n!} \;=\; e^a + \left(\cos||\overrightarrow{\mathsf{v}}|| + \frac{\overrightarrow{\mathsf{v}}}{||\overrightarrow{\mathsf{v}}||}\,\sin||\overrightarrow{\mathsf{v}}||\right) \tag{1}$$

ed il logaritmo naturale

$$\ln(\mathsf{q}) \;:=\; \ln||\mathsf{q}|| \;+\; \frac{\overrightarrow{\mathsf{v}}}{||\overrightarrow{\mathsf{v}}||}\arccos\frac{a}{||\mathsf{q}||}\;. \tag{2}$$

In particolare ogni quaternione unitario può essere espresso in forma polare da $\mathsf{e}^{\hat{n}\,\theta}$.

A questo punto siamo anche in grado di ricavare una utile espressione per un quaternione elevato a una arbitraria potenza reale r:

$$\mathsf{q}^r \;=\; ||\mathsf{q}||^r\,\mathsf{e}^{\hat{n}\,r\,\theta} \;=\; ||\mathsf{q}||^r\left(\cos(r\,\theta) + \hat{n}\,\sin(r\,\theta)\right)\,, \tag{3}$$

G54 c.04 Le sottoalgebre di $\mathbb{H}$ possono essere individuate abbastanza facilmente.

Per ogni quaternione non scalare $\mathsf{q} = \langle a, \overrightarrow{\mathsf{v}}\rangle$ con $\overrightarrow{\mathsf{v}} \neq \mathbf{0}_3$ si ha:

$$\mathsf{q}^2 \;=\; a^2 - |\overrightarrow{\mathsf{v}}|^2 + 2\,a\,\overrightarrow{\mathsf{v}} \;=\; -(a^2 + |\overrightarrow{\mathsf{v}}|^2) + 2\,a\,\overrightarrow{\mathsf{v}} \;\in\; \mathbb{R} \oplus \left(\overrightarrow{\mathsf{v}}\,\mathbb{R}\right)\,.$$

Inoltre, dato che $\overrightarrow{\mathsf{v}} * \overrightarrow{\mathsf{v}} = -(b^2 + c^2 + d^2)$, si ha $\mathsf{q}^3 \in \mathbb{R} \oplus (\overrightarrow{\mathsf{v}}\,\mathbb{R})$ e in generale

$$\forall n \in \mathbb{N} \;:\; \mathsf{q}^n \;\in\; \mathbb{R} \oplus (\overrightarrow{\mathsf{v}}\,\mathbb{R})\,.$$

In conclusione ogni quaternione q non scalare genera una sottoalgebra di $\mathbb{H}$ della forma $\mathbb{R} \oplus (\overrightarrow{\mathsf{q}}\,\mathbb{R})$.
Evidentemente, posto $\mathsf{u} := \mathit{vrsr}(\mathsf{v}) = \dfrac{\mathsf{v}}{||\mathsf{v}||}$, a questa sottoalgebra si può dare anche la forma $\mathbb{R} \oplus (\overrightarrow{\mathsf{u}}\,\mathbb{R})$; dato che $\mathsf{u}^2 = -1$ la sottoalgebra risulta isomorfa all'algebra costituita dal piano dei complessi.

Vediamo in cosa può consistere una sottoalgebra $\boldsymbol{A}$ che contiene due quaternioni che scriviamo $\mathsf{q} = a + \overrightarrow{\mathsf{v}}$ e $\mathsf{Q} = \boldsymbol{A} + \overrightarrow{\mathbf{V}}$.
Essa deve contenere anche $(\mathsf{q} - a)\,(\mathsf{Q} - \boldsymbol{A}) = \overrightarrow{\mathsf{v}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{V}}$. Quindi se $\overrightarrow{\mathsf{v}}$ ed $\overrightarrow{\mathbf{V}}$ non sono collineari l'algebra $\boldsymbol{A}$ può essere tanto estesa da contenere tutto il sottospazio tridimensionale di tutti i quaternioni immaginari puri e quindi deve coincidere con $\mathbb{H}$.

In conclusione le sottoalgebre di $\mathbb{H}$ possono essere:

la sottoalgebra avente come terreno solo $\mathbf{0}_4$;

una famiglia (infinita) di piani isomorfi all'algebra dei complessi indicizzata dal vettore $\overrightarrow{\mathbf{0}_4\,P}$ con P corrente sulla sfera di raggio 1 nello spazio tridimensionale dei quaternioni immaginari puri;

la sottoalgebra impropria $\mathbb{H}$.

G54 c.05 Affrontiamo il problema del calcolo del doppio prodotto di quaternioni avente la forma $\mathsf{p} \;:=\; \mathsf{q}_1 * \mathsf{q}_2 * {\mathsf{q}_1}^{-1}$.

Dopo aver osservato che la associatività del prodotto non richiede parentesi di raggruppamento per la precedente espressione, abbiamo

$$\mathsf{p} \;= \left\langle_q\, a_1, \overrightarrow{\mathsf{v}_1}\right\rangle * \left\langle_q\, a_2, \overrightarrow{\mathsf{v}_2}\right\rangle * \left\langle_q\, a_1, \overrightarrow{\mathsf{v}_1}\right\rangle^{-1} \;=\; \frac{1}{||\mathsf{q}_1||}\left\langle_q\, a_1, \overrightarrow{\mathsf{v}_1}\,\right\rangle * \left\langle_q\, a_2, \overrightarrow{\mathsf{v}_2}\,\right\rangle * \left\langle_q\, a_1, -\overrightarrow{\mathsf{v}_1}\,\right\rangle \frac{1}{||\mathsf{q}_1||}\;.$$

Dato che il quaternione $\dfrac{1}{||\mathsf{q}_1||}\left\langle_q\, a_1, \overrightarrow{\mathsf{v}_1}\,\right\rangle$ ed il suo inverso sono unitari si possono scrivere nelle rispettive forma polari ottenendo

$$\mathsf{p} \;= \left\langle_q\, \cos\theta\;,\; \sin\theta\,\overrightarrow{\mathsf{u}}\right\rangle * \left\langle_q\, a_2, \mathsf{v}_2\right\rangle * \left\langle_q\, \cos\theta\;,\; -\sin\theta\,\overrightarrow{\mathsf{u}}\right\rangle\,.$$

Grazie alla distributività si ottiene

$$\mathbf{p} \;= \left\langle_q\; \cos\theta\;,\; \sin\theta\,\vec{\mathbf{u}}\right\rangle * \left(\left\langle_q\; a_2, \mathbf{0}\right\rangle + \left\langle_q\; 0, \mathbf{v}_2\right\rangle\right) * \left\langle_q\; \cos\theta\;,\; -\sin\theta\,\vec{\mathbf{u}}\right\rangle .$$

Il fattore $\left\langle_q\; a_2, \mathbf{0}\right\rangle$ fa parte del centro e commuta con il fattore che lo precede il quale si elide con il terzo fattore fornendo quindi il solo termine $\left\langle_q\; a_2, \mathbf{0}\right\rangle$. Si ottiene quindi

$$\mathbf{p} \;= \left\langle_q\; a_2, \mathbf{0}\right\rangle + \mathbf{p}_2 \quad \text{con} \quad \mathbf{p}_2 \;:= \left\langle_q\; \cos\theta\;,\; -\sin\theta\,\vec{\mathbf{u}}\right\rangle .$$

Si ottiene quindi

$$\mathbf{p} \;= \left\langle_q\; a_2, \mathbf{0}\right\rangle + \left\langle_q\; 0\;,\; \cos 2\theta\,\vec{\mathbf{v}} + (1-\cos 2\theta)(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}})\,\mathbf{u} + 2\sin 2\theta(\vec{\mathbf{u}}\wedge\vec{\mathbf{v}})\right\rangle .$$

G54 d. quaternioni e rotazioni in tre dimensioni

G54 d.01 Ci proponiamo di esaminare come i quaternioni consentono di trattare, e con quali vantaggi, le rotazioni nello spazio tridimensionale, cioè nello spazio ordinario per la fisica classica e per le tradizionali applicazioni meccaniche e pratiche. Cominciamo con un riesame delle caratteristiche di quelle che qui chiameremo concisamente "rotazioni".

Cominciamo con una rappresentazione geometrica dell'insieme delle rotazioni in $\mathbb{R}^{\times 3}$; tale insieme lo denotiamo qui con ***Rot*** e la rappresentazione che ne diamo la diciamo **rappresentazione mediante sfera 1-to-2**; la citata sfera è $\mathsf{Sphr}_{\mathbf{1}_3, 2\,\pi}$ e qui per semplicità la identifichiamo con $\boldsymbol{S}$.
Ogni rotazione consiste nel ruotare di un certo angolo intorno ad un certo asse. Se l'angolo è nullo l'asse non ha importanza; tale operazione è la la rotazione identità ed è rappresentata geometricamente con il centro di $\boldsymbol{S}$.

Le rotazioni di angoli piccoli nonnulli ϕ intorno all'asse individuato dal versore $\mathbf{u}$ si fanno corrispondere a punti della $\boldsymbol{S}$ esprimibili come vettori $\phi\,\mathbf{u}$. Le rotazioni di angoli via via crescenti sono rappresentate dai punti delle sfere di centro $\mathbf{1}_3$ di raggi via via maggiori. Se ci si limita ad angoli di rotazione ϕ non grandi la rappresentazione mediante sfere di raggi ϕ risulta fedele, cioè biunivoca.

Questa biunivocità cade quando si trattano angoli di rotazione che superano π; con tali ampiezze ϕ accade che la rotazione rappresentata da $\phi\,\mathbf{u}$ coincide con la rotazione rappresentata da $-(2\,\pi - \phi)\,\mathbf{u}$. In particolare la rotazione data da $\pi\,\mathbf{u}$ coincide con quella data da $-\pi\,\mathbf{u}$, cioè dal punto antipodo del suddetto.

Quando si considerano angoli $\phi \in (\pi, 2\,\pi)$ si ritrovano le rotazioni di angoli $2\,\pi - \phi$ appartenenti a $(0, \pi)$, cioè corrispondenti a punti antipodi di $\boldsymbol{S}$.

Infine se si considerano le rotazioni dell'angolo angolo $\phi = 2\,\pi$ si ritrova la rotazione identità.

G54 d.02 Conviene richiamare il teorema sulla rotazione di Eulero. Esso dice che ogni rotazione nello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ (e per estensione ogni sequenza di tali rotazioni caratterizzate da un unico centro) di un sistema di riferimento (o di un corpo rigido) equivale a una sola rotazione di un dato angolo intorno a un determinato asse che viene chiamato **asse di Eulero**.

In termini di algebra lineare esso riguarda ogni coppia di sistemi di riferimento di $\mathbb{R}^{\times 3}$ che hanno in comune l'origine per ogni coppia di sistemi di riferimento che hanno in comune l'origine $\langle \mathsf{Oxyz}\,,\, \overline{O\,\xi\,\eta\,\zeta} \rangle$.

Dal teorema segue che ogni rotazione in $\mathbb{R}^{\times 3}$ può essere rappresentata da una coppia $\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \theta \rangle$ con $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vettore di lunghezza 1 e θ angolo definito a meno dell'aggiunta di un multiplo intero di $2\,\pi$.

G54 d.03 Colleghiamo lo spazio 3D al sistema di riferimento caratterizzato dalla base canonica $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ al sottospazio dei quaternioni immaginari e scriviamo

$$\theta\,\overrightarrow{\mathbf{u}} = u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k}\ .$$

Questo vettore si può identificare con il quaternione che scriviamo

$$\mathbf{q} \;=\; \exp\left(\frac{1}{2}\,\theta\,(u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k})\right) \;=\; \cos\frac{\theta}{2} + (u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k})\,\sin\frac{\theta}{2}\ .$$

A questo quaternione assegnamo il ruolo di rotazione agente sui vettori di $\mathbb{R}^{\times 3}$; questa rotazione la denotiamo con

$$\mathcal{R}[\mathbf{q}] \;:=\; \mathcal{R}[\mathbf{0}_4, \theta\,\overrightarrow{\mathbf{u}}] \;=\; \mathcal{R}[\theta\,\overrightarrow{\mathbf{u}}]\ .$$

Il generico vettore dello spazio 3D lo scriviamo

$$\mathbf{p} = \langle p_x, p_y, p_z \rangle = p_x\,\mathbf{i} + p_y\,\mathbf{j} + p_z\,\mathbf{k}$$

e ci riserviamo la possibilità di considerarlo un quaternione spaziale.

Il trasformato di $\mathbf{p}$ per la rotazione $\mathcal{R}[\mathbf{q}]$ può essere calcolato come quaternione ottenuto da $\mathbf{p}$ applicandogli la coniugazione gruppale dovuta a $\mathbf{q}$, cioè come

$$\mathbf{p}' \;:=\; \mathbf{q} * \mathbf{p} * (\mathbf{q}^{-1}) \;.$$

G54 d.04 Chiaramente si ha

$$\mathbf{q}^{-1} \;=\; \exp\left(-\frac{1}{2}\,\theta\,(u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k})\right) \;=\; \cos\frac{\theta}{2} - \left(u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k}\right)\,\sin\frac{\theta}{2}\;.$$

Per la composizione di due rotazioni si osserva che

$$\mathbf{p}\,\mathbf{q}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}\,(\mathbf{p}\,\mathbf{q})^{-1} \;=\; \mathbf{p}\,(\mathbf{q}\,\overrightarrow{\mathbf{v}}\,\mathbf{q}^{-1})\,\mathbf{p}^{-1}$$

e che la componente scalare del risultato è nulla.

G54 e. gruppo dei quaternioni

G54 e.01 Come si è detto, il gruppo dei quaternioni, che qui denotiamo con Q_8 è un gruppo di ordine 8 che si può caratterizzare come sottoanello di $\mathbb{H}$ costituito dai quaternioni ottenibili come prodotti di Hamilton dei tre elementi $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$.
Si osserva che le potenze di $\mathbf{i}$ sono il terreno di un gruppo ciclico di ordine 4, quello costituito da $\mathbf{i}$, $\mathbf{i}^2 = -1$, $\mathbf{i}^3 = -\mathbf{i}$ ed $\mathbf{i}^4 = 1$.
Similmente si hanno il sottogruppo ciclico costituito da $\mathbf{j}$, $\mathbf{j}^2 = -1$, $\mathbf{j}^3 = -\mathbf{j}$ ed $\mathbf{j}^4 = 1$ e quello costituito da $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}^2 = -1$, $\mathbf{k}^3 = -\mathbf{i}$ e $\mathbf{k}^4 = 1$. Si osserva anche che questi sottogruppi possono considerarsi generati, risp., da $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$ e $-\mathbf{k}$.

Il **gruppo dei quaternioni** viene caratterizzato dalla seguente tavola di moltiplicazione:

$$\begin{bmatrix}
 & 1 & -1 & \mathbf{i} & -\mathbf{i} & \mathbf{j} & -\mathbf{j} & \mathbf{k} & -\mathbf{k} \\
 & & & & & & & & \\
1 & 1 & -1 & \mathbf{i} & -\mathbf{i} & \mathbf{j} & -\mathbf{j} & \mathbf{k} & -\mathbf{k} \\
-1 & -1 & 1 & \mathbf{i} & -\mathbf{i} & -\mathbf{j} & \mathbf{j} & -\mathbf{k} & \mathbf{k} \\
\mathbf{i} & \mathbf{i} & -\mathbf{i} & -1 & 1 & \mathbf{k} & -\mathbf{k} & -\mathbf{j} & \mathbf{j} \\
-\mathbf{i} & -\mathbf{i} & \mathbf{i} & 1 & -1 & -\mathbf{k} & \mathbf{k} & \mathbf{j} & -\mathbf{j} \\
\mathbf{j} & \mathbf{j} & -\mathbf{j} & -\mathbf{k} & \mathbf{k} & -1 & 1 & \mathbf{i} & -\mathbf{i} \\
-\mathbf{j} & -\mathbf{j} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & -\mathbf{k} & 1 & -1 & -\mathbf{i} & \mathbf{i} \\
\mathbf{k} & \mathbf{k} & -\mathbf{k} & \mathbf{j} & -\mathbf{j} & -\mathbf{i} & \mathbf{i} & -1 & 1 \\
-\mathbf{k} & -\mathbf{k} & \mathbf{k} & -\mathbf{j} & \mathbf{j} & \mathbf{i} & -\mathbf{i} & 1 & -1
\end{bmatrix} .$$

Può servire osservare che i prodotti di Hamilton degli elementi i, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ si compongono come i tre versori di $\mathbb{R}^{\times 3}$ quando si effettuano i loro prodotti vettori:

$$\mathbf{i} \barwedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \ , \quad \mathbf{j} \barwedge \mathbf{i} = -\mathbf{k} \ , \quad \mathbf{j} \barwedge \mathbf{k} = \mathbf{i} \ , \quad \mathbf{k} \barwedge \mathbf{j} = -\mathbf{i} \ , \quad \mathbf{k} \barwedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \ , \quad \mathbf{i} \barwedge \mathbf{k} = -\mathbf{j} \ .$$

Dunque Q_8 è un gruppo nonabeliano.

G54 e.02 Si constata facilmente che il gruppo dei quaternioni è caratterizzato dalla seguente presentazione

$$\mathsf{Q}_8 \ = \big\langle_{Grp} \{-1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \ \big| \ (-1)^2 = 1 \ , \ \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1 \ , \ \forall q \in \mathbf{Q} : \ 1\,q = q\,1 = q \ , -1\,q = q\,(-1) \big\rangle \ .$$

Si dimostra che a una seconda presentazione di Q_8 si può dare la seguente forma :

$$\mathsf{Q}_8 \ = \big\langle_{Grp} \{x, y\} \ \big| \ x^4 = 1 \ , \ x^2 = y^2 \ , \ y^{-1}\,x\,y = x^{-1} \ \big\rangle$$

Per tale presentazione si possono assumere $x = \mathbf{i}$ e $y = \mathbf{j}$ e di conseguenza si pone $\mathbf{k} := x \barwedge y$.

Il centro di Q_8 è evidentemente $\{1, -1\}$; si constata che questo è anche il sottogruppo dei commutatori di Q_8.

Il gruppo quoziente $\dfrac{\mathsf{Q}_8}{\{1,-1\}}$ risulta isomorfo al Viergruppe di Klein che abbiamo denotato con V_{Kl}.
È isomorfo a tale gruppo di ordine 4 anche il gruppo degli automorfismi interni di Q_8.

Il gruppo di tutti gli automorfismi di Q_8 è invece isomorfo al gruppo simmetrico di 4 oggetti Sym_4. Il gruppo degli automorfismi esterni di Q_8 è $\dfrac{\mathsf{Sym}_4}{\mathsf{V}_K}$ e questo è isomorfo con Sym_3.
Le classi di coniugio di Q_8 sono le seguenti cinque: $\{1, -1\}$, $\{i, -i\}$, $\{\mathbf{j}, -\mathbf{j}\}$ e $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$.

G54 e.03 Il gruppo dei quaternioni può essere rappresentato come sottogruppo del gruppo delle matrici 2×2 sul campo dei numeri complessi, gruppo che si denota con la scrittura $\mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$.

Questa rappresentazione è data dalla seguente applicazione:

$$\left\downarrow \begin{array}{cccccccc} \mathbf{1} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{-1} & \mathbf{-i} & \mathbf{-j} & \mathbf{-k} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathsf{i} & 0 \\ 0 & -\mathsf{i} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \mathsf{i} \\ \mathsf{i} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\mathsf{i} & 0 \\ 0 & \mathsf{i} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -\mathsf{i} \\ -\mathsf{i} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\downarrow .$$

Dato che tutte le matrici precedenti hanno determinante uguale ad 1, in effetti abbiamo una rappresentazione di Q_8 sul gruppo lineare speciale $\mathsf{SL}_2(\mathbb{C})$.

Un'altra importante rappresentazione di Q_8 lo vede sottogruppo del gruppo delle matrici 2×2 sul campo finito di 3 elementi che scriviamo $\mathsf{F}_3 := .\{-1, 01\}$
La viergruppe rappresentazione è data dalla seguente applicazione:

$$\left\downarrow \begin{array}{cccccccc} \mathbf{1} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{-1} & \mathbf{-i} & \mathbf{-j} & \mathbf{-k} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\downarrow .$$

G54 f. sottoanelli e sottogruppi dei quaternioni

G54 f.01 Si dicono **quaternioni di Hurwitz** i quaternioni la cui componenti sono numeri semiinteri, ossia sono numeri interi o numeri semidispari.
Denotiamo l'insieme dei quaternioni di Hurwitz con

$$\mathbf{QtrnH} \;:=\; \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H} \; ST \; a, b, c, d \in \mathbb{Z}/2\}$$

Si dicono **quaternioni di Lipschitz** i quaternioni le cui componenti sono nuneri interi
Denotiamo l'insieme dei quaternioni di Lipshitz con

$$\mathbf{QtrnL} \;:=\; \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H} \; ST \; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \rceil$$

Evidentemente $\mathbf{QtrnH} \;=\; \mathbf{QtrnL} \;\dot\cup\; \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H} \; ST \; a, b, c, d \in \mathbb{Z} + 1/2\}$.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php