1

Capitolo G53
geometria sferica

Contenuti delle sezioni

29 pagine

G530.01 Questo capitolo è dedicato alle nozioni basilari della geometria della superficie sferica e ad alcune delle sue applicazioni.

Dopo il richiamo e il completamento di alcune semplici proprietà della sfera, vengono introdotte le linee geodetiche e sono esaminati i cosiddetti triangoli geodetici.
Per una visione organica dei triangoli sferici viene intreodotta la corrispondenza di dualità che li riguarda.

Nella seconda parte vengono trattate alcune applicazioni: l'uso della bussola, il sistema delle latitudini e delle longitudini per lo studio della superficie terrestre, i problemi che si pongono in cartografia, la tipologia delle proiezioni piane di porzioni di superfici e la modellizzazione della volta celeste con le coordinate usate in astronomia.

G53 a. sfera [1]

G53a.01 Cominciamo con il ricordare e ampliare le caratteristiche basilari delle sfere, cioè delle più semplici figure dello spazio euclideo tridimensionale che non siano oggetti lineari come rette e piani.

Si definisce **superficie sferica** l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^{\times 3}$ equidistanti da un dato punto chiamato centro di tale superficie o, più semplicemente, **centro della sfera**. La distanza dal centro di ciascuno dei punti della superficie sferica viene detta raggio della superficie sferica o, più semplicemente, **raggio della sfera**.

Il termine raggio viene usato anche per ciascuno dei segmenti o vettori applicati che hanno come estremità iniziale il centro e come estremità finale un punto della superficie sferica.
Questa omonimia in genere può essere chiarita dal contesto; quando necessario si può distinguere il raggio inteso come vettore o segmento tra il centro di una sfera e un punto della sua superficie e il raggio scalare, misura delle lunghezze di vettori raggi.

Nel sistema di riferimento cartesiano Oxyz la superficie sferica avente centro in $C = \langle C_x, C_y, C_z \rangle$ e raggio r è l'insieme dei punti $P = \langle x, y, z\rangle$ caratterizzati dall'equazione

(1) $$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 \; = \; r^2$$

Definiamo **sfera aperta** di centro C e raggio r l'insieme dei punti $\langle x, y, z\rangle$ caratterizzati dalla disuguaglianza

(2) $$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 < r^2 \; ,$$

punti che sono i punti interni della sfera aperta; chiamiamo inoltre **sfera chiusa** di centro C e raggio r l'insieme dei punti $\langle x, y, z\rangle$ caratterizzati dalla disuguaglianza

(3) $$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 \le r^2 \; .$$

G53a.02 Chiaramente in $\mathbb{R}^{\times 3}$ le superfici sferiche sono in biiezione con le sfere aperte e con le sfere chiuse.
Possiamo anche procedere come segue.
La sfera aperta di centro C e raggio r si definisce come l'insieme costituito da C e dai punti interni ai vari segmenti di lunghezza r che hanno una estremità in C.
Si definisce poi superficie sferica la frontiera di una sfera aperta.

Aggiungiamo la definizione di sfera chiusa come l'unione di una superficie sferica e della corrispondente sfera aperta.
Una sfera chiusa si può anche ottenere come chiusura convessa di una superficie sferica.

Questi stretti legami rendono lecito usare il termine **sfera** di centro C e raggio r per una entità riguardante il complesso dei tre insiemi di punti di $\mathbb{R}^{\times 3}$ definiti sopra.
A tale entità composita risulta comodo attribuire costruzioni che possono definirsi a partire vuoi dalla superficie sferica, vuoi dalla sfera aperta, vuoi dalla sfera chiusa.

In molti contesti utilizzando il termine "sfera" senza precisare se si tratta di superficie sferica, di sfera aperta o di sfera chiusa, grazie alle citate biiezioni che collegano tali configurazioni, si possono avere discorsi semplificati che il lettore interessato riuscirebbe a chiarire anche sul piano dei dettagli formali tenendo conto del contesto.

G53a.03 Per identificare la superficie sferica di centro C e raggio r useremo la notazione $\mathsf{sphs}C, r$; per identificare la corrispondente sfera chiusa useremo invece la notazione $\mathsf{sphr}(C, r)$; per identificare la corrispondente sfera aperta useremo invece la notazione $\mathsf{sphr}^{(o)}(C, r)$;

Evidentemente una sfera chiusa si può ottenere come chiusura convessa di una superficie sferica e viceversa una superficie sferica si può ottenere come frontiera o bordo di una sfera chiusa.
Abbiamo quindi $\mathsf{sphr}(c,r) = Cnvxcl\big(\mathsf{sphs}(C,r)\big)$, mentre viceversa $\mathsf{sphs}(C,r) = \mathsf{Frntr}\big(\mathsf{sphr}(C,r)\big) = \partial\big(\mathsf{sphr}(C,r)\big)$. Inoltre la sfera aperta corrispondente è esprimibile come $\mathsf{sphr}^{(o)}(C,r) = \mathsf{sphr}(C,r) \setminus \partial\big(\mathsf{sphr}(C,r)\big)$.

Se identifichiamo una sfera aperta scrivendo $\mathsf{S} := (x-x_C)^2 + (y-y_C)^2 + (z-z_C)^2 < r^2$, per specificare la corrispondente sfera chiusa scriviamo $\overline{\mathsf{S}}$, mentre se $\boldsymbol{S}$ denota una sfera chiusa per individuare la corrispondente la sfera aperta scriviamo $\mathsf{S}^{(0)}$.

//input pG53a03

In molti contesti è conveniente usare la notazione $\mathsf{sphr}(C,r)$ per la intera figura sfera di di centro C e raggio r.

In particolare diciamo **sfera canonica** la sfera avente centro nell'origine e raggio uguale ad 1. Tale figura sarà identificata mediante $\mathfrak{sphr} := \mathsf{sphr}_{\mathbf{0}_3,1}$.
L'importanza della sfera canonica dipende dai seguenti fatti. La generica sfera di raggio 1 e centro in C si può ottenere applicando alla $\mathfrak{sphr}$ la traslazione $\boldsymbol{Trsl}[\overrightarrow{C-O}]$.
La generica sfera di centro nell'origine $\mathbf{0}_3$ e raggio r si può ottenere applicando alla $\mathfrak{sphr}$ l'omotetia di fattore r.
La generica sfera di centro C e raggio r si può ottenere dalla $\mathfrak{sphr}$ applicandole prima la suddetta traslazione e poi l'omotetia di fattore r oppure applicando prima la dilatazione di fattore r e poi la traslazione suddetta.

Possiamo quindi affermare che tutte le sfere in $\mathbb{R}^{\times 3}$ sono figure solide simili.
Da questa similitudine tra le sfere segue che molte proprietà delle sfere generiche e specifiche si possono ottenere da proprietà di $\mathfrak{sphr}$.
In questi casi si parla di proprietà ottenibili per similitudine, cioè ottenibili servendosi di traslazioni, omotetie e talora di riflessioni.

In particolare ogni sfera rimane invariata se le si applica una qualsiasi rotazione avente come centro lo stesso centro della sfera e se le se applica una qualsiasi riflessione rispetto a un piano passante per il suo centro.

G53a.04 Una superficie sferica Σ tripartisce lo spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ nell'insieme limitato dei punti interni alla sfera, nell'insieme dei punti della stessa Σ e nell'insieme (illimitato) dei punti esterni alla sfera.

Ogni retta passante per il centro C di una sfera di raggio r interseca la superficie sferica in due punti che delimitano un segmento che viene chiamato **diametro della sfera**; evidentemente tutti i diametri della sfera hanno la stessa lunghezza, $2\,r$. I punti di un diametro si possono vedere come l'unione dei punti di un suo vettore raggio $\vec{r}$ e di quelli del vettore ottenuto riflettendo questo rispetto al piano passante per C e ortogonale ad $\vec{r}$.
Tale vettore applicato si dice **opposto per la sfera** di $\vec{r}$ e le due estremità di un diametro di una sfera si dicono **antipodi della sfera** o punti antipodali per la sfera.

Ogni piano passante per il centro di una sfera si dice **piano diametrale della sfera**.
Ogni piano diametrale Π della $\mathsf{sphr}(C,r)$ interseca la superficie sferica in una circonferenza di raggio r espressa da $\Pi \cap \mathsf{sphs}(C,r)$.

Le circonferenze così ottenute e i corrispondenti cerchi si dicono, risp., **circonferenze massimali della sfera**, mentre i cerchi che esse delimitano sono detti **cerchi massimali della sfera**.

Un piano diametrale di una sfera la divide in due parti congruenti chiamate **emisferi** della sfera.
Procedendo più dettagliatamente si distinguono gli emisferi aperti, gli emisferi chiusi e le superfici emisferiche.

G53a.05 Data una sfera $\mathsf{sphr}(C, r)$ e una retta R possono darsi tre situazioni.
Se la distanza da R da C è minore di r la retta interseca S in due punti; in tal caso si dice che R è una **retta secante della sfera**.
Se la distanza da R da C è uguale ad r la retta interseca S in un solo punto e si dice che la R è una **retta tangente della sfera**.
Se la distanza da R da C è maggiore di r la retta non interseca S e si dice **retta esterna alla sfera**.

Considerazioni simili riguardano le relazioni tra una sfera $\mathsf{sphr}(C, r)$ ed un piano Π.
Se la distanza da R da Π è minore di r il piano interseca S in una circonferenza di raggio minore o uguale ad r; in tal caso Π si dice **piano secante della sfera**.
Se la distanza da R da C è uguale ad r il piano interseca S in un solo punto e si dice che Π è **piano tangente alla sfera**.
Se la distanza da R da C è maggiore di r il piano non interseca S e si dice **piano esterno alla sfera**.

Si trova facilmente che tra tutte le circonferenze individuate su una superficie sferica $\mathsf{sphs}(C, r)$ come intersezioni con piani secanti solo quelle ottenute con piani diametrali hanno raggio uguale ad r, cioè sono circonferenze masimali; le rimanenti hanno raggi compresi tra 0 ed r e si dicono **circonferenze minori della sfera**.

G53a.06 Consideriamo una sfera $\mathsf{S} = \mathsf{sphr}(C, r)$, un piano Π ad essa secante e non diametrale e il cerchio minore ottenuto come $\mathsf{C} := \mathsf{S} \cap \Pi$.
I punti della sfera aperta sono tripartiti da C: le tre parti sono lo stesso C e due insiemi che sono chiamati **calotte sferiche**: questi due insiemi non sono connessi: ogni segmento che unisce due punti appartenenti alle due diverse calotte interseca C. Le due calotte determinate da un piano secante si dicono **calotte complementari**. Il cerchio C si dice **base di entrambe le calotte**.

Più dettagliatamente per una calotta sferica si distinguono il cerchio di base C, la superficie che con la base costituisce la frontiera del solido calotta sferica, la superficie laterale ottenibile eliminando C dalla superficie e l'insieme dei suoi punti interni; quest'ultimo è evidentemente un insieme aperto e convesso.

Data una calotta sferica, chiamiamo Z il centro del suo cerchio di base e denotiamo con Q la retta passante per il centro Z della sua base e perpendicolare alla base stessa; diciamo inoltre **apice della calotta sferica** il punto A in cui la Q interseca la superficie laterale della calotta (e la sfera di partenza).
Si dice **altezza di una calotta sferica** o **saetta di una calotta sferica** il segmento ZA; come al solito con questo termine si denota anche la lunghezza del segmento ZA.

Evidentemente la somma delle lunghezze delle due saette di due calotte complementari individuate da un piano secante è uguale al diametro della sfera $2\,r$.

//input pG53a06

G53a.07 Consideriamo ora la sfera $\mathsf{S} := \mathsf{sphr}(C, r)$ e due piani Π_1 e Π_2 paralleli e secanti della S che assumiamo diversi e non diametrali. Questi individuano 4 calotte sferiche costituenti due duetti di calotte complementari; solo due di esse hanno punti comuni. La figura individuata da questi punti si dice **segmento sferico della sfera** data. I due cerchi ottenuti come intersezioni con la sfera dei due piani sono detti **basi** di segmento sferico e la distanza tra i due piani (o tra i centri delle due basi) viene detta **altezza** o **saetta** del segmento sferico.

Per trattare i segmenti sferici conviene considerare un sistema di riferimento che abbia l'origine nel centro C della sfera e come asse verticale la retta ortogonale alle basi e passante per i loro centri. Queste basi le chiamiamo C_1 e C_2 e, risp., i loro raggi li denotiamo con ρ_1 e ρ_2 e i loro centri con Z_1 e Z_2; questi siano forniti mediante le coordinate cartesiane dalle espressioni $Z_u =:\langle 0,0,z_u\rangle$, per $u = 1,2$. Supponiamo sia $-r < z_1 < z_2 < r$, cioè che il cerchio C_1 si trovi al di sotto di C_2.

//input pG53a07

Per tale segmento sferico si trova che l'area della superficie laterale è data da

$$2\,\pi\,r\,h \qquad \text{con} \qquad h := z_2 - z_1 \ , \tag{1}$$

mentre il volume è fornito dalla formula

$$\frac{\pi}{6}\,h\,\left(3\,{\rho_1}^2 + 3\,{\rho_2}^2 + h^2\right) \ . \tag{2}$$

G53a.08 Consideriamo una sfera $\mathsf{S} := \mathsf{sphr}(C,r)$ e un piano a essa secante Π che in linea di massima supponiamo non passi per il centro C. Denotiamo con Γ il corrispondente cerchio minore esprimibile come $\mathsf{S}\cap\Pi$, con Z il suo centro, con ρ il suo raggio con h la distanza tra C e Z e con $\mathcal{K}_\infty$ il cono retto unilatero avente C come vertice e come generatrici le semirette $\overline{CP}$ con P punto variabile sulla circonferenza Γ. La distanza di C dal piano Π, cioè CZ, è quindi $\sqrt{r^2-\rho^2}$. Denotiamo inoltre con A il punto in cui la semiretta $\overrightarrow{CZ}$ interseca la superficie sferica, con $\mathcal{L}$ la superficie laterale della calotta sferica avente come base Γ e contenente A (calotta convessa), con $\mathcal{K}$ il cono ottenuto limitando $\mathcal{K}_\infty$ con la base $Cnvxcl(\Gamma)$ e con $\mathcal{M}$ la superficie laterale di tale cono.

//input pG53a08

Si dice **settore sferico da cono [convesso]** della sfera S determinato dal suo piano secante Π la figura delimitata dai punti delle superfici laterali $\mathcal{L}$ ed $\mathcal{M}$; la denoteremo con $\mathcal{T}$. La variante chiusa di questa figura solida si può individuare come $\mathcal{T} \ := \ \mathcal{K}_\infty \cap \mathsf{S}$.

La superficie $\mathcal{M}$ tripartisce la sfera $\mathsf{sphr}(C,r)$ nell'insieme costituito dai punti interni di $\mathcal{K}$ e dai punti di $\mathcal{L}$, nella stessa Mcl e nell'insieme restante della sfera.
Il primo di questo insiemi lo diciamo **settore sferico da cono nonconvesso** determinato da C e Γ.

G53a.09 Consideriamo ancora la sfera $\mathsf{sphr}(C,r)$ una sua circonferenza Γ un primo punto di questa A e un suo secondo punto P che considerare variabile.
Consideriamo anche i triangoli mistilinei Ξ_P delimitati dal raggio CA, da un secondo raggio CP con P punto variabile sulla circonferenza Γ e dall'arco $A^\frown B$ sulla stessa Γ; inoltre consideriamo il settore circolare delimitato dal suddetto triangolo mistilineo e dai segmenti raggi che incontrano i suoi punti, settore che denotiamo con $\overline{\Xi}$.

La superficie del settore sferico $\mathcal{T}$, identificabile con $\mathsf{K}\cup\mathsf{H}$, si può considerare ottenuto come insieme dei punti toccati dal lato CP e dall'arco $P^\frown A$ (facenti parte della frontiera del triangolo Ξ) fatti ruotare dell'angolo di ampiezza $2\,\pi$ intorno al segmento CA.
Corrispondentemente il settore T si può considerare ottenuto come insieme dei punti toccati dal settore circolare $\overline{\Xi}$ fatto ruotare come sopra.

È utile caratterizzare il generico settore circolare convesso sopra considerato con il punto A e con l'ampiezza α dell'angolo $\angle\overline{CA}\,C\,\overline{CP}$; il nostro settore si può anche caratterizzare con A e con il raggio ρ della circonferenza minore Γ ; evidentemente $\alpha = \arccos\dfrac{h}{r}$ ed $\rho = \sqrt{r^2-h^2}$.
Si osserva che se al limite il piano secante è diametrale abbiamo $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ e il settore sferico consiste in un emisfero. Se all'opposto Π è piano tangente alla sfera, chiamato A il punto di tangenza, il settore sferico degenera nel segmento CA.

G53a.10 Consideriamo ora una retta $\mathcal{R}$ secante di $\mathsf{S} = \mathsf{sphr}(C,r)$ e due piani Π e Ψ la cui intersezione è $\mathcal{R}$
In particolare questi piani possono essere diametrali e in tal caso $\mathcal{R}$ contiene un segmento diametrale.
Denotiamo con P e Q i due punti nei quali $\mathcal{R}$ interseca la sfera S; denotiamo con Γ la circonferenza $\partial\mathsf{S}\cap\Pi$ e con Δ la circonferenza $\partial\mathsf{S}\cap\Psi$.

I punti P e Q in quanto appartenenti a Γ individuano due archi complementari di questa circonferenza che scriviamo Γ_1 e Γ_2; essi inoltre individuano sue archi complementari di Δ che scriviamo Δ_1 e Δ_2.

I piani Π e Ψ ripartiscono le sfera in 9 parti: segmento PQ, i 4 settori circolari determinati dai quattro archi Γ_1, Γ_2, Δ_1 e Dlt_2 e 4 porzioni della sfera aperta che sono separate tra di loro dal segmento PQ e dagli archi.
Queste figure solide sono chiamate **lune sferiche** e le relative porzioni della superficie sferica sono detti **digoni sferici**. Le due lune contenenti lo stesso piano bisettore sono dette lune opposte. Una sola luna contiene C; le altre due lune opposte sono l'una la riflessa dell'altra rispetto al piano bisettore passante per C.
Anche per tali figure si possono considerare lo varianti costituite da frontiere, solidi aperti e loro chiusure, ma prescindiamo da questi dettagli confidando nell'intuizione.

G53a.11 Le entità geometriche precedenti si controllano facilmente con il diagramma piano delle loro proiezioni sul piano Φ diametrale di S ortogonale ad $\mathcal{R}$. Su questo diagramma, che denotiamo con D_Φ, conviene tracciare anche il punto R in cui si incontrano Π, Ψ e Φ e le proiezioni dei due piani bisettori dei diedri determinati da Π e Ψ; esse consentono di individuare le due coppie di angoli tra i piani e bisettori che denotiamo con α e $90^\circ-\alpha$. Ciascuna delle lune si caratterizza convenientemente mediante PQ e la sua posizione nel diagramma piano, posizione che si può collegare al percorso antiorario della circonferenza $\partial\mathsf{S}\cup\Phi$: da questa si ricavano α oppure $90^\circ-\alpha$ e da uno di questi angoli la distanza di R da C.

Quando i due piani Π e Ψ sono diametrali, R coincide con C e si parla di **lune diametrali**; in questo caso due lune opposte sono congruenti. La suddivisione della sfera in lune diametrali è un caso particolare della suddivisione della sfera mediante semipiani aventi come retta frontiera una retta diametrale; per tali porzioni di sfera si parla di **spicchi della sfera**.
Quando Π e Ψ sono anche ortogonali si hanno 4 lune congruenti; queste si possono ottenere mediante omotetia e rototraslazioni da unioni di due ottanti della sfera canonica aventi una faccia (quarto di cerchio) comune.

Osserviamo anche che quando α si avvicina a $90°$ due lune opposte tendono a degenerare in due calotte e gli altri due in due semicerchi. Nel caso delle lune diametrali esse tendono a degenerare in emisferi.

G53a.12 Ci proponiamo ora di definire un altro tipo di settore sferico e successivamente di generalizzare questa configurazione. Per semplicità cominciamo dal caso particolare che riguarda la sfera canonica $\mathfrak{sphr}$.

Sulla sfera canonica si individuano 3 coppie di punti definiti come intersezioni della sfera con gli assi cartesiani

(1) $$X_{\pm 1} \;:=\; \langle \pm 1, 0, 0\rangle \quad , \quad Y_{\pm 1} \;:=\; \langle 0, \pm 1, 0\rangle \quad , \quad Z_{\pm 1} \;:=\; \langle 0, 0, \pm 1\rangle \quad .$$

Consideriamo i tre piani diametrali $Plan[x = 0]$, $Plan[y = 0]$ e $Plan[z = 0]$; essi intersecano la sfera canonica nelle tre circonferenze massime caratterizzate dai sistemi di equazioni

(2) $$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} y = 0 \\ z^2 + x^2 = 1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad .$$

Ciascuna di queste tre circonferenze massime è suddivisa in 4 archi ciascuno avente ampiezza angolare uguale a $\dfrac{\pi}{2}$ e individuabili come:

(3) $$\begin{array}{c} X_1 \frown Y_1 \;\;,\;\; Y_1 \frown X_{-1} \;\;,\;\; X_{-1} \frown Y_{-1} \;\;,\;\; Y_{-1} \frown X_1 \;\;, \\[1em] Y_1 \frown Z_1 \;\;,\;\; Z_1 \frown Y_{-1} \;\;,\;\; Y_{-1} \frown Z_{-1} \;\;,\;\; Z_{-1} \frown Y_1 \;\;, \\[1em] Z_1 \frown X_1 \;\;,\;\; X_1 \frown Z_{-1} \;\;,\;\; Z_{-1} \frown X_{-1} \;\;,\;\; X_{-1} \frown Z_1 \;\;. \end{array}$$

Si individuano inoltre 8 porzioni della superficie sferica ciascuna delimitata da 3 archi individuabili come:

(4) $$\begin{array}{c} X_1 \frown Y_1 \frown Z_1 \;\;,\;\; Y_1 \frown X_{-1} \frown Z_1 \;\;,\;\; X_{-1} \frown Y_{-1} \frown Z_1 \;\;,\;\; Y_{-1} \frown X_1 \frown Z_1 \;\;, \\ X_1 \frown Y_1 \frown Z_{-1} \;\;,\;\; Y_1 \frown X_{-1} \frown Z_{-1} \;\;,\;\; X_{-1} \frown Y_{-1} \frown Z_{-1} \;\;,\;\; Y_{-1} \frown X_1 \frown Z_{-1} \;\;. \end{array}$$

Come vedremo queste 8 porzioni sono casi particolari di triangoli sferici. A ciascuno di essi si associa un triedro di vertice C delimitato da tre quadranti in $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Questi triedri consentono di definire altrettanti **settori circolari da trigoni** come loro intersezioni con la sfera canonica.

G53a.13 Diamo alcune espressioni per le valutazioni dei maggiori componenti della sfera $\mathsf{S} = \mathsf{sphr}(C, r)$. Queste valutazioni si possono ottenere con il calcolo integrale applicato a solidi di rotazione.

Area della superficie della sfera $\mathcal{A} \;:=\; \boldsymbol{Area}\big(\partial(\mathsf{sphr}(C, r)\big) \;=\; 4\,\pi\,r^2\,;$ conseguentemente $r \;=\; \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\mathcal{A}}{\pi}}$.

Volume della sfera $\mathcal{V} \;:=\; \boldsymbol{Vol}\big(\mathsf{sphr}(C, r)\big) = \dfrac{4}{3}\,\pi\,r^3\,;$ conseguentemente $r \;=\; \sqrt[3]{\dfrac{3\,\mathcal{V}}{4\,\pi}}$.

Ovviamente su area superficiale e volume della sfera la posizione del centro non ha influenza; in altre parole area superficiale e volume sono invarianti per isometrie, come accade a ogni figura solida.

Può essere utile osservare che $\mathcal{V} = \pi\,r^2\,\dfrac{4}{3}\,r$, cioè che il volume della sfera di raggio r è uguale a quello di un cilindro circolare retto avente r come raggio delle circonferenze ottenute intersecando il cilindro con un piano ortogonale all'asse del cilindro e altezza pari ai $\dfrac{4}{3}$ di tale raggio.

Il volume del segmento sferico S avente basi di raggi ρ_1 e ρ_2 ed altezza h che denotiamo con $\mathsf{S}_{\rho_1,\rho_2,h}$ è

$$\boldsymbol{Vol}\big(\mathsf{S}_{\rho_1,\rho_2,h}\big) \;=\; \frac{\pi}{2}\,h\left({\rho_1}^2+{\rho_2}^2\right)+\frac{\pi}{6}\,h^3 \;.$$

In particolare il volume della calotta sferica avente base di raggio $s = r\,\sin\alpha$ e altezza $h = r(1-\cos\alpha) < r$ che denotiamo con $\mathsf{C}_{r,\alpha}$ è

$$\boldsymbol{Vol}\big(\mathsf{C}_{r,\alpha}\big) \;=\; \frac{\pi}{2}\,h\,\left({\rho_1}^2+\frac{1}{3}\,h^2\right) \;.$$

Il volume e la superficie di un settore sferico dipendono solo dal raggio della sfera e dall'angolo α, ovvero da r ed h.
Per l'area abbiamo $\pi\,r\,(r+h)$; per il volume l'espressione $\dfrac{2}{3}\,\pi\,r^2\,h$.

Per lo spicchio di angolo α abbiamo per l'area della superficie $\pi\,r^2\,(1+2\,\alpha)$ e per il volume $\dfrac{4}{3}\,\alpha\,r^3$.

G53 b. geodetiche

G53b.01 La nozione di geodetica ha portata assai estesa: in un ambiente (spazio) nel quale ha senso trattare una distanza tra i suoi elementi (punti) per **geodetica** si intende una curva che è più corta che unisce due suoi punti.
Esaminiamo le geodetiche delle sfere.

Nello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ la geodtica tra due punti P e Q è il segmento PQ, ma ora consideriamo come ambiente solo la superficie della sfera e il segmento delimitato da due punti della superficie sferica non le appartiene.

G53b.02 Consideriamo una sfera $\mathsf{S} := \mathsf{sphr}(C, r)$ e due suoi punti P e Q; ci chiediamo quale è la curva più corta appartenente ad S che unisce P e Q.
Occorre distinguere due casi. Se i punti P e Q sono antipodali, ossia sono allineati con il centro C e tutti i piani contenenti il segmento PQ sono diametrali per la sfera e su ciascuna delle circonferenze massime alla quale appartengono P e Q si individuano due archi che sono semicirconferenze aventi come estremi i due punti in esame. Tutti questi archi sono le curve di minima distanza tra P e Q.

Se all'opposto P e Q non sono antipodali i tre punti P, Q e C appartengono a un unico piano Π che è diametrale per la sfera; sulla circonferenza massima $\mathsf{S} \cap \Pi$ i punti P e Q sono le estremità di due archi di lunghezza diversa e, come dimostreremo, il più corto dei due costituisce la curva più corta tra i due punti.
Questo arco insiste sull'angolo $\angle(P, C, Q)$ e, denotata con $|\angle(P, C, Q)|$ la sua ampiezza in radianti la sua lunghezza è data da $r \cdot |\angle(P, C, Q)|$.

G53b.03 Per trattare vari problemi riguardanti una sfera $\mathsf{S} = \mathsf{sphr}(C, r)$ conviene servirsi di due specifici sistemi di riferimento entrambi con l'origine coincidente con il centro della S. Chiamiamo $\mathbf{RS}(x, y, z)$ la terna di riferimento in coordinate cartesiane e chiamiamo $\mathbf{RS}(r, \theta, \phi)$ il sistema in coordinate polari sferiche.
Il collegamento tra i due sistemi di coordinate è dato dalle formule che seguono.

$$\begin{cases} x &= r \sin\theta \sin\phi \\ y &= r \cos\theta \sin\phi \\ x &= r \cos\theta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi &= \arccos\dfrac{z}{r} \\ \theta &= \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases} \quad .$$

G53 c. triangoli geodetici

G53c.01 Consideriamo una sfera $\mathsf{S} = \mathsf{sphr}(Z, r)$ e sulla sua superficie un triangolo sferico avente come vertici i punti A, B e C. Denotiamo questa figura con $\mathsf{sphtr}_{\mathsf{S}}(A, B, C) =: \mathsf{T}$.

I lati di T li denotiamo con $a := B^\frown C$, lato opposto al vertice A, con $b := C^\frown A$ e con $c := A^\frown B$; nelle attuali considerazioni si possono considerare nonorientati tutti gli archi e conseguentemente anche gli angoli loro associati.

I vertici A, B e C si possono identificare, risp., con i vettori applicati $\overrightarrow{ZA}$, $\overrightarrow{ZB}$ e $\overrightarrow{ZC}$ e questi quando si tratta solo la sfera S si possono abbreviare, risp., con $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$

//input pG53c01

Al triangolo sferico sono associati due generi di angoli: gli **angoli sferici di arco** che misurano gli angoli sottesi dai tre duetti di archi e gli **angoli sferici di vertice** associati ai tre vertici del triangolo.

Gli angoli di arco riguardano sia i tre duetti di archi che i duetti di facce del triedro definito dal centro Z e da T. Possiamo definirli come

(1) $\angle a \;:=\; \angle(\overrightarrow{ZB}, \overrightarrow{ZC}) = \angle(\vec{B}, \vec{C})$, $\angle b \;:=\; \angle(\overrightarrow{ZC}, \overrightarrow{ZA}) = \angle(\vec{C}, \vec{A})$, $\angle c \;:=\; \angle(\overrightarrow{ZA}, \overrightarrow{ZB}) = \angle(\vec{A}, \vec{B})$.

Ciascuno dei tre angoli di vertice misura tre oggetti geometrici. L'angolo $\angle A$ misura:

- l'angolo tra gli archi $A^\frown B$ ed $A^\frown C$;
- l'angolo formato sul piano Π_A tangente alla sfera in A tra un vettore $\overrightarrow{T_{A,B}}$ tangente di $A^\frown B$ e un vettore $\overrightarrow{T_{A,C}}$ tangente di $A^\frown C$;
- l'angolo tra i piani $\mathsf{Plan}(AZB)$ e $\mathsf{Plan}(AZC)$.

Si osserva che le prime due ampiezze sono uguali in quanto la prima è definita come uguale alla seconda, mentre la seconda e la terza ampiezza sono uguali in quanto $\overrightarrow{T_{A,B}}$ e $\overrightarrow{T_{A,C}}$ sono perpendicolari alla retta $\overleftrightarrow{ZA}$ nella quale si intersecano i piani $\mathsf{Plan}(AZB)$ e $\mathsf{Plan}(AZC)$

Del tutto simili le definizioni di $\angle B$ ed $\angle C$ e le notazioni per i piani e i vettori associati.

G53c.02 **(1) Prop.**: Nel triangolo sferico $\mathsf{T} = \mathsf{sphtr}_{\mathsf{S}}(A, B, C)$ gli angoli tra gli archi sferici sono dati da

(1) $$\angle a = \angle(\vec{B}, \vec{C}) \qquad , \qquad \angle b = \angle(\vec{C}, \vec{A}) \qquad , \qquad \angle c = \angle(\vec{A}, \vec{B}) \ ;$$

gli angoli di vertici sono invece ottenibili con prodotti vettore da

(2) $$\angle A = \angle(\vec{A} \wedge \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{C}) \qquad , \qquad \angle B = \angle(\vec{B} \wedge \vec{C}, \vec{B} \wedge \vec{A}) \qquad , \qquad \angle C = \angle(\vec{C} \wedge \vec{A}, \vec{C} \wedge \vec{B}) \ .$$

Dim.: La (1) non è che una riformulazione delle definizioni.
Per quanto riguarda la (2) si osserva che $\vec{A} \wedge \vec{B}$ è perpendicolare a $\mathsf{Plan}(ABZ)$ ed $\vec{A} \wedge \vec{C}$ è perpendicolare a $\mathsf{Plan}(ACZ)$. Questo implica che $\angle(\vec{A} \wedge \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{C})$ uguaglia $\angle A$ o il suo complementare $180°$.
Consideriamo i vettori $\overrightarrow{T_{AB}}$ tangente in A al cerchio comprendente $A^\frown B$ diretto da A verso B e $\overrightarrow{T_{AC}}$ tangente in A al cerchio comprendente $A^\frown C$ diretto da A verso C.
Ricordiamo inoltre che $\angle A \;:=\; \angle\left(\overrightarrow{T_{AB}}, \overrightarrow{T_{AC}}\right)$.

La definizione del prodotto vettore implica che $\vec{A}\wedge\overrightarrow{T_{AB}}$ ha la direzione ottenuta ruotando $\overrightarrow{T_{AB}}$ di $+90°$ intorno all'asse $\overrightarrow{ZA}$ (cioè la direzione di $-\overrightarrow{T_{AC}}$) e che $\vec{A}\wedge\overrightarrow{T_{AC}}$ ha la direzione ottenuta ruotando $\overrightarrow{T_{AC}}$ di $+90°$ intorno all'asse $\overrightarrow{ZB}$ (cioè la direzione di $-\overrightarrow{T_{AB}}$).
Dato che le rotazioni non cambiano gli angoli abbiamo $\angle\left(\overrightarrow{T_{AB}},\overrightarrow{T_{AC}}\right) = \angle\left(\vec{A}\wedge\overrightarrow{T_{AB}}\ ,\ \vec{A}\wedge\overrightarrow{T_{AC}}\right)$.
Dato che la direzione di $\vec{A}\wedge\overrightarrow{T_{AB}}$ coincide con quella di $\vec{A}\wedge\vec{B}$ e la direzione di $\vec{A}\wedge\overrightarrow{T_{AC}}$ coincide con quella di $\vec{A}\wedge\vec{C}$ si conclude che

$$\angle A \;=\; \angle(\vec{A}\wedge\vec{B},\vec{A}\wedge\vec{C})\ .$$

Con le argomentazioni ottenute dalla precedente ruotando circolarmente i vertici del triangolo si ottengono la seconda e la terza delle equazioni (2) ∎

G53c.03 **(1) Prop.**: Nel triangolo sferico $\mathsf{T} = \mathsf{sphtr}_{\mathsf{sphr}_{Z,r}}(A,B,C)$, se si esprimono gli angoli in radianti, vale l'uguaglianza,

$$\angle A + \angle B + \angle C \;=\; \pi + \frac{\boldsymbol{Area}(\mathsf{T})}{r^2}\ .$$

Dim.: Per semplicità delle notazioni supponiamo che Z coincida con l'origine $\mathbf{0}_3$.
Consideriamo un punto P sulla sfera $\mathsf{S} := \mathsf{sphr}_{Z,r}$, il suo antipodo $-P$ e due cerchi massimi passanti per P e $-P$; denotiamo inoltre con Σ il settore delimitato da due semicerchi con estremità in P e $-P$ e con θ l'angolo di tale settore; per semplicità scegliamo che sia $\theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. Evidentemente il rapporto tra l'area della superficie del settore e l'area della superficie dell'intera sfera è

$$\frac{\boldsymbol{Area}(\Sigma)}{\boldsymbol{Area}(\mathsf{sphr}_{Z,r})} \;=\; \frac{\theta}{2\,\pi} \qquad \text{e quindi} \qquad \boldsymbol{Area}(\Sigma) \;=\; 2\,r^2\,\theta\ .$$

Torniamo al triangolo $\mathsf{sphtr}(A,B,C)$ e osserviamo che ciascuno dei tre punti A, B e C individua un settore della sfera del quale è vertice; denotiamoli, risp., con $sect_A$, $sect_B$ e $sect_C$. Inoltre denotiamo con H_C l'emisfera delimitata dal cerchio contenente $A\frown B$ e contenente C e osserviamo che essa contiene sia $sect_A$ che $sect_B$ ma solo una parte di $sect_C$.
Conveniamo anche di abbreviare con $AT(PQR)$ l'espressione $\boldsymbol{Area}(\mathsf{sphtr}(P,Q,R))$ per ogni trio di punti sulla superficie sferica P, Q ed R.

Si trovano le seguenti relazioni tra aree di regioni della superficie della sfera ambiente.

$$\boldsymbol{Area}(H_C) = AT(ABC) + AT((-A)BC) + AT(A(-B)C) + AT((-A)(-B)C)$$

$$\boldsymbol{Area}(sect_A) = AT(ABC) + AT((-A)BC) \qquad , \qquad \boldsymbol{Area}(sect_B) = AT(ABC) + AT(A(-B)C) \qquad ,$$

$$\boldsymbol{Area}(sect_C) = AT(ABC) + AT(AB(-C))\ .$$

Consideriamo anche la simmetria centrale $\mathcal{C}$ della sfera rispetto al suo centro: essa è un'isometria e manda ogni punto P della superficie nel suo opposto $-P$.
Quindi valgono uguaglianze come $\mathcal{C}(\mathsf{sphtr}(PQR) = \mathsf{sphtr}((-p)(-Q)(-r))$ e di conseguenza uguaglianze come $AP(\mathcal{C}(AB(-C))) = AP((-A)(-B)C)$. In particolare

$$\boldsymbol{Area}(sect_C) = AP(ABC) + AP((-A)(-B)C)\ .$$

Dalle uguaglianze precedenti si ricava

$$\boldsymbol{Area}(sect_A) + \boldsymbol{Area}(sect_B) + \boldsymbol{Area}(sect_C) = \boldsymbol{Area}(H_C) + 2\,AP(ABC)\ .$$

Dato che valgono le uguaglianze

$$\boldsymbol{Area}(sect_A) = 2\,r^2\,\angle A \qquad , \qquad \boldsymbol{Area}(sect_B) = 2\,r^2\,\angle B \qquad , \qquad \boldsymbol{Area}(sect_C) = 2\,r^2\,\angle C$$

e ovviamente per la semisfera $\boldsymbol{Area}(H_C) = 2\,\pi\,r^2$, si ottiene

$$2\,r^2\,\angle A + 2\,r^2\,\angle B + 2\,r^2\,\angle C \;=\; 2\,\pi\,r^2 + 2\,AP(ABC)\ .$$

Questa uguaglianza equivale all'enunciato ▮

G53c.04 Conseguenze importanti sono i seguenti diretti corollari.

(1) Coroll.: $\angle A + \angle B + \angle C > 180°$ ▮

(2) Coroll.: Non esiste alcuna isometria tra una regione su una sfera ed una regione del piano

Dim.: Infatti in ogni regione sopra una sfera è incluso un triangolo sferico con tutti i suoi punti interni. Ogni isometria preserva le distanze e quindi trasforma una curva di lunghezza minima in una curva di lunghezza minima e di conseguenza trasforma un triangolo geodetico sulla sfera in un triangolo geodetico sul piano. Ma una isometria deve anche mantenere le ampiezze degli angoli.
Quindi la somma degli angoli interni del triangolo sferico dovrebbe coincidere con 180°, la somma degli angoli interni di un triangolo piano, contro il teorema c03 ▮

G53c.05 Consideriamo ancora la sfera e il triangolo $\mathsf{sphtr}(A, B, C)$ esaminati in precedenza.

(1) Prop.: (**legge dei coseni per i lati sferici**) $\cos\angle a \;=\; \cos\angle b\,\cos\angle c + \sin\angle b\,\sin\angle c\,\cos\angle A$.

Dim.: Dato che $\angle A = \angle(\vec{A}\wedge\vec{B}, \vec{A}\wedge\vec{C})$, abbiamo

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot(\vec{A}\wedge\vec{C}) \;=\; |\vec{A}\wedge\vec{B}|\,|\vec{A}\wedge\vec{C}|\,\cos\angle A\ .$$

Essendo $\angle(\vec{A}, \vec{B}) = \angle c$ ed $\angle(\vec{A}, \vec{C}) = \angle b$, abbiamo

$$|\vec{A}\wedge\vec{B}| \;=\; |\vec{A}|\,|\vec{B}|\,\sin\angle c \qquad \text{e} \qquad |\vec{A}\wedge\vec{C}| \;=\; |\vec{A}|\,|\vec{C}|\,\sin\angle b\ .$$

Ne segue, dato che $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = r$,

$$(4)\qquad (\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot(\vec{A}\wedge\vec{C}) \;=\; (|\vec{A}|\,|\vec{B}|\,\sin\angle c)\,(|\vec{A}|\,|\vec{C}|\,\sin\angle b \;=\; r^4\,\sin\angle b\,\sin\angle c\,\cos\angle A\ .$$

L'identità del calcolo vettoriale $(\vec{v}\wedge\vec{w})\cdot(\vec{x}\wedge\vec{y}) \;=\; (\vec{v}\cdot\vec{x})\,(\vec{w}\cdot\vec{y}) - (\vec{v}\cdot\vec{y})\,(\vec{w}\cdot\vec{x})$, consente di semplificare il primo membro della uguaglianza precedente ottenendo

$$(5)\qquad \begin{aligned}(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot(\vec{A}\wedge\vec{C}) \;&=\; \det\begin{pmatrix}\vec{A}\cdot\vec{A} & \vec{A}\cdot\vec{C}\\ \vec{B}\cdot\vec{A} & \vec{B}\cdot\vec{C}\end{pmatrix} \;=\; \det\begin{pmatrix}|\vec{A}|^2 & |\vec{A}|\,|\vec{C}|\,\cos\angle b\\ |\vec{B}|^2\,|\vec{A}|\,\cos\angle c & |\vec{B}|\,|\vec{C}|\,\cos\angle a\end{pmatrix}\\ &=\; \det\begin{pmatrix}r^2 & r^2\,\cos\angle b\\ r^2\,\cos\angle c & r^2\,\cos\angle a\end{pmatrix} \;=\; r^4\,\cos\angle a - r^4\,\cos\angle b\,\cos\angle c\end{aligned}\ .$$

Combinando questa espressione e la (4) si ottiene

$$r^4\,\cos\angle a - r^4\,\cos\angle b\,\cos\angle c \;=\; r^4\,\sin\angle b\,\sin\angle c\,cos\angle A\ .$$

Dividendo per r^4 Modifichiamo entrambi i membri dividendoli per r^4 e aggiungendo loro $\cos\angle b\,\cos\angle c$ si ottiene l'uguaglianza enunciata ▮

Va segnalato che se si usa la formula (1) per risolvere un triangolo sferico si devono effettuare calcoli di elevata precisione, 5 o 6 cifre decimali e con l'accortezza di usare gli stessi valori per ciascuna delle sottoespressioni critiche.

G53 d. dualità tra triangoli sferici

G53d.01 Ad ogni triangolo sferico $\mathsf{T} = \mathsf{sphtr}_{\mathsf{sphr}_{z,r}}(A, B, C)$ si può associare un triangolo sferico i cui vertici sono ottenuti dai lati a, b e c di T ed i cui lati sono ricavati dai vertici A, B e C.
Questo triangolo viene detto duale di T e consente di definire una relazione di dualità tra triangoli sferici che apre la possibilità di trattare più sistematicamente ed economicamente le proprietà della trigonometria sferica consentendo di ricavare in modo automatico dalle proprietà di un triangolo sferico proprietà dei triangoli duali.

Definiamo come **triangolo sferici duale del triangolo sferico**, ovvero come **triangolo sferico polare del triangolo sferico** $\mathsf{T} = \mathsf{sphtr}_{\mathsf{sphr}_{z,r}}(A, B, C)$ il triangolo denotato con T^* i cui vertici sono definiti da

(1) $$\overrightarrow{A^*} := \frac{\vec{B} \wedge \vec{C}}{r \sin \angle a} \quad , \quad \overrightarrow{B^*} := \frac{\vec{C} \wedge \vec{A}}{r \sin \angle b} \quad , \quad \overrightarrow{C^*} := \frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{r \sin \angle c} .$$

Si osservi che i denominatori delle formule precedenti hanno lo scopo di modificare ("normalizzare") i vertici del triangolo duale in modo che (ricordando che per due qualsiasi vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ si ha $|\vec{v} \wedge \vec{w}| = |\vec{v}|\,|\vec{w}| \sin \angle(\vec{v}, \vec{w})$) valgano le relazioni

(2) $$|\overrightarrow{A^*}| = \frac{|\vec{B}|\,|\vec{C}| \sin \angle a}{r \sin \angle a} = r \quad , \quad |\overrightarrow{B^*}| = r \quad , \quad |\overrightarrow{C^*}| = r .$$

Si osserva che $\overrightarrow{A^*}$ è perpendicolare a $\mathsf{Plan}(BCZ)$ contenente il lato a e, ciclicamente, $\overrightarrow{B^*}$ è perpendicolare al piano contenente b e $\overrightarrow{C^*}$ è perpendicolare al piano contenente c. In questo senso i vertici di T^* sono in corrispondenza con i lati di T.
Intendiamo anche mostrare che i lati di T^* sono in corrispondenza con i vertici di T.

G53d.02 Riferendoci ai precedenti triangoli T e T^*, denotiamo con a^* il lato opposto al vertice $\overrightarrow{A^*}$, con b^* il lato opposto al vertice $\overrightarrow{B^*}$ e con c^* il lato opposto al vertice $\overrightarrow{C^*}$.

(1) Prop.: $\vec{A} \;=\; s\left(\dfrac{\overrightarrow{B^*} \wedge \overrightarrow{C^*}}{r \sin \angle a^*}\right) \;,\; \vec{B} \;=\; s\left(\dfrac{\overrightarrow{C^*} \wedge \overrightarrow{A^*}}{r \sin \angle b^*}\right) \;,\; \vec{C} \;=\; s\left(\dfrac{\overrightarrow{A^*} \wedge \overrightarrow{B^*}}{r \sin \angle c^*}\right) \;,$

dove $s \in \{+1, -1\}$ denota il segno di $\det(\vec{A}, \vec{B}\vec{C})$.

Dim.: Dimostriamo la prima uguaglianza a partire dalle definizioni.

$$\overrightarrow{B^*} \wedge \overrightarrow{C^*} \;=\; \left(\frac{\vec{C} \wedge \vec{A}}{\sin \angle b}\right) \wedge \left(\frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{\sin \angle c}\right) \;=\; \frac{(\vec{C} \wedge \vec{A}) \;\wedge\; (\vec{A} \wedge \vec{B})}{\sin \angle b \, \sin \angle c} .$$

Ricordando l'identità del calcolo vettoriale $\vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{x}) \;=\; (\vec{v} \cdot \vec{x})\,\vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{x}$, si ottiene

$$(\vec{C} \wedge \vec{A}) \;\wedge\; (\vec{A} \wedge \vec{B}) \;=\; \left((\vec{C} \wedge \vec{A} \cdot \vec{B}\right) \vec{A} - \left((\vec{C} \wedge \vec{A} \cdot \vec{A}\right) \vec{B} \;=\; \vec{A}\, \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) + 0 .$$

Di conseguenza si ottiene

$$\overrightarrow{B^*} \wedge \overrightarrow{C^*} \;=\; \vec{A} \cdot \left(\frac{\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})}{\sin \angle b \, \sin \angle c}\right) \qquad \text{e quindi} \qquad \vec{A} \;=\; (\overrightarrow{B^*} \wedge \overrightarrow{C^*}) \left(\frac{\sin \angle b \, \sin \angle c}{\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})}\right) .$$

Accade dunque che $\vec{A}$ ha la stessa direzione di $s\left(\dfrac{\overrightarrow{B^*} \wedge \overrightarrow{C^*}}{\sin \angle a^*}\right)$ dato che $\sin \angle a^*,\ \sin \angle b,\ \sin \angle\ c > 0$, in quanto $0 < \angle a^*,\ \angle b,\ \angle c < 180°$. Inoltre, essendo $|\overrightarrow{B^*}| = |\overrightarrow{C^*}| = r$ e $|\angle(\overrightarrow{B^*} \wedge \overrightarrow{C^*}|$, si ha

$$r \;=\; |\vec{A}| \qquad \text{e} \qquad r = \frac{\overrightarrow{B^*} \wedge \overrightarrow{C^*}}{r \sin \angle a^*} .$$

In conclusione

$$\vec{A} \;=\; s\,\left(\frac{\overrightarrow{B^*} \wedge \overrightarrow{C^*}}{\sin \angle a^*}\right)\;.$$

Le altre uguaglianze si ottengono con due permutazioni cicliche delle notazioni ▮

G53d.03 **(1) Coroll.:** (**duale del triangolo sferico duale**) Per il triangolo sferico duale del triangolo duale di uno dato si ha

$$\left[(\Delta(ABC))^*\right]^* \;=\; \begin{cases} \Delta(ABC) \text{ sse } & \det(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) \geq 0 \\ \Delta((-A)(-B)(-C)) \text{ sse } & \det(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) \leq 0 \end{cases}$$ ▮

(2) Coroll.: Un triangolo sferico $\Delta(ABC)$ e i suo duale $\left[(\Delta(ABC))^*\right]^*$ sono congruenti.

Dim.: Per il corollario precedente $\left[(\Delta(ABC))^*\right]^*$ aut uguaglia $\Delta(ABC)$, aut uguaglia il suo riflesso rispetto al centro della sfera ambiente ▮

G53d.04 **(3) Coroll.:** Consideriamo un triangolo $\Delta(ABC)$ e il duale del suo duale $\left[(\Delta(ABC))^*\right]^*$ per le cui componenti usiamo le notazioni usate finora.

$$\angle A + \angle a^* \;=\; \angle A^* + \angle a \;=\; 180^\circ\;,\;\; \angle B + \angle b^* \;=\; \angle B^* + \angle b \;=\; 180^\circ\;,\;\; \angle C + \angle c^* \;=\; \angle c^* + \angle c \;=\; 180^\circ\;.$$

Dim.: La definizione d01(1) e il teorema c03(1) implicano

$$\angle a^* \;=\; \angle\left(\overrightarrow{B^*}, \overrightarrow{C^*}\right) \;=\; \angle\left(\vec{C}\wedge\vec{A}, \vec{A}\wedge\vec{B}\right) \;=$$

$$\angle\left(-\vec{A}\wedge\vec{C}, \vec{A}\wedge\vec{B}\right) \;=\; 180^\circ - \angle\left(\vec{A}\wedge\vec{C}, \vec{A}\wedge\vec{B}\right) \;+= 180^\circ - \angle A\;,$$

cioè la prima delle sei uguaglianze enunciate.

Trasformando questo risultato per il triangolo $\Delta\,(A^{**}\,,\,B^{**}\,,\,C^{**})$, otteniamo

$$\angle A^* + \angle a^{**} \;=\; 180^\circ\;,$$

dove il doppi asterisco a esponente serve a esprimere il duale del duale. Per la congruenza affermata dal corollario (2) si ha che $\angle a^{**}$ è congruente ad $\angle a$ e quindi segue la seconda uguaglianza enunciata. Le rimanenti due coppie di uguaglianze seguono per rotazione ciclica delle componenti ▮

G53d.05 Ora si può fare riferimento alla dualità per ottenere direttamente formule corrispondenti ad alcune precedenti.

(4) Coroll.: (**legge dei coseni per gli angoli sferici**) Per il triangolo sferico $\Delta(ABC)$ con i lati a opposto di A, b opposto di B e c opposto di C vale la formula

(5) $$\cos\angle A = -\cos\angle B\,\cos\angle C \;+\; \sin\angle B\,\sin\angle C\,\cos\angle a\;.$$

Dim.: Applichiamo la legge dei coseni per i lati [c05(1)] al triangolo $[\Delta(ABC)]^* \;=\; \Delta(A^*\,B^*\,C^*)$e otteniamo

$$\cos\angle a^* \;=\; \cos\angle b^*\,\cos\angle c^* + \sin\angle b^*\,\sin\angle c^*\,\cos\angle A^*\;.$$

Per il corollario :d04(3) $\angle a^* = 180^\circ - \angle A$, $\angle b^* = 180^\circ - \angle B$ e $\angle b^* = 180^\circ - \angle C$. Queste uguaglianze insieme alle relazioni

$$\forall\theta\;:\;\; \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta \;\text{ e }\; \sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta\;,$$

trasformano la (5) nell'uguaglianza enunciata ▮

G53d.06 **(1) Prop.**: (**legge dei seni per i triangoli sferici**) Consideriamo un triangolo sferico ΔABC e il suo duale $\Delta(A^* B^* C^*$ e adottiamo per essi le notazioni usuali. Valgono le uguaglianze che seguono.

$$\frac{\sin\angle a}{\sin\angle A} = \frac{\sin\angle b}{\sin\angle B} = \frac{\sin\angle c}{\sin\angle C} = s\cdot\left(\frac{\det[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]}{\det\left[\overrightarrow{A^*},\overrightarrow{B^*}\overrightarrow{C^*}\right]}\right) \qquad \text{ove} \qquad s := \mathrm{sign}\left(\det[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]\right) .$$

Dim.: Sia r il raggio della sfera ambiente. Per :d01(1) e :d02(1) abbiamo

$$\det\left[\overrightarrow{A^*},\overrightarrow{B^*}\overrightarrow{C^*}\right] = \overrightarrow{A^*}\cdot\left(\overrightarrow{B^*}\wedge\overrightarrow{C^*}\right) = \left(\frac{\vec{B}\wedge\vec{C}}{r\sin\angle a}\right)\cdot\left(\vec{A}\,\frac{\sin\angle a^*}{s}\right) =$$

$$\left(\frac{\sin\angle a^*}{\sin\angle a}\right)\left(\frac{\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})}{s}\right) = \left(\frac{\sin\angle a^*}{\sin\angle a}\right)\left(\frac{\det\left[\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right]}{s}\right) .$$

Dato che $\angle A + \angle a^*$ e quindi $\sin\angle a^* = \sin\angle A$, l'equazione precedente conduce a

$$\frac{\sin\angle a}{\sin\angle A} = \frac{\det[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]}{s\ \det\left[\overrightarrow{A^*},\overrightarrow{B^*}\overrightarrow{C^*}\right]} ,$$

cioè all'uguaglianza tra primo e quarto membro della relazione enunciata.
Le altre due uguaglianze si ottengono per permutazione ciclica dei componenti ▮

G53 e. latitudine, longitudine e rilevamenti con la bussola

G53e.01 La trigonometria sferica è usata ampiamente per affrontare problemi di navigazione sulla superficie terrestre e problemi di astronomia. In questa sezione ci occupiamo dei primi.

Un primo modello della superficie terrestre la approssima con una sfera avente raggio di circa 6 371 Km.
Un modello un poco più raffinato tratta la superficie del nostro pianeta mediante un cosiddetto **ellissoide di riferimento**, superficie che denotiamo con **E**. Si tratta di un ellissoide, o sferoide, di rotazione oblato, cioè ottenuto ruotando una ellisse **e** intorno al suo asse minore; in effetti la Terra presenta un appiattimento ai poli causato dalla rotazione terrestre.

L'ellissoide **E** è definito dai due semiassi dell'ellisse **e**; il semiasse maggiore, che denotiamo con a, rappresenta il raggio equatoriale medio terrestre, mentre il semiasse minore, che denotiamo con b rappresenta il raggio polare medio.

Nella pratica vengono utilizzati diversi ellissoidi di riferimento per modellizzare la superficie terrestre limitatamente a diverse regioni terrestri. Questi ellissoidi sono assunti come riferimenti per vari calcoli per la geodesia e il GPS (Global Positioning System), [`Sistema di Posizionamento Globale (wi)`], cioè per varie misurazioni su posizioni della superficie terrestre (località, manufatti, punti costieri, cime di rilievi, mezzi di trasporto, ...). Per operare sopra una data regione terrestre mediante calcoli di precisione adeguata, ossia per approssimare meglio una data porzione del geoide terrestre [:b] con una ellissoide è opportuno servirsi di una particolare ellissoide locale.
In particolare per l'Italia e l'Europa si è utilizzato ampiamente uno standard "International Ellipsoid" fissato nel 1924 che presenta $a = 6\,378\,388$ m e $b = 6\,356\,911.946$ m.
L'ellissoide di riferimento che oggi è il più usato complessivamente è quello chiamato **World Geodetic System 84**, in sigla WGS84; si tratta di un ellissoide avente il centro nel centro di massa della Terra (a meno di 2 cm), semiasse maggiore 6 378 137 m, semiasse minore 6 356 752.3142 m e quindi con schiacciamento (flattening) pari a $1/258,257\,223\,563$.

Per un ellissoide generico **E** abbiamo una eccentricità angolare pari a

$$\epsilon_a \;=\; \arccos\left(\frac{b}{a}\right) \;=\; 2\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right) \;.$$

L'appiattimento di **E** è definito come

$$f \;:=\; ver(\epsilon_a) \;=\; 2\sin\left(\frac{\epsilon_a}{2}\right)^2 \;=\; 1-\cos(\epsilon_a) \;=\; \frac{a-b}{a}\;.$$

Per il sistema WGS84 abbiamo $f = 1/298.257\,223\,563$.
L'ellisse **e** la cui rotazione determina **E** è caratterizzata dall'eccentricità e tale che

$$e^2 \;=\; \sin(\epsilon_a)^2 \;=\; f\,(2-f) \;=\; \frac{a^2-b^2}{a^2}\;.$$

Segnaliamo anche che un ellissoide di riferimento generico viene caratterizzato anche dal raggio di curvatura equatoriale $r_e := \dfrac{b^2}{a}$ e dal raggio di curvatura polare $r_p := \dfrac{a^2}{b}$.

G53e.02 Un modello della superficie terrestre di grande interesse è il **geoide**. Questa superficie di riferimento viene utilizzata per determinare le altitudini, cioè le quote sul livello del mare, delle diverse località.

Il geoide è una superficie equipotenziale che riguarda il potenziale gravitazionale del pianeta Terra; più in particolare esso fa riferimento al potenziale gravitazionale che si eserciterebbe al livello del mare. A causa della diversa distribuzione delle masse nel nucleo e nel mantello della Terra, i punti che presentano la stessa forza di gravità (al netto della forza delle maree, degli effetti delle correnti e dei fenomeni meteorologici) si possono attribuire ad una superficie sferica solo molto approssimativamente.

Tendenzialmente la superficie del geoide si allontana dal centro della Terra nelle regioni montuose, mentre si avvicina nelle zone occupate dal mare. Conseguentemente il campo vettoriale che esprime la forza di gravità e che per definizione è perpendicolare al geoide, presenta direzioni che approssima soltanto il campo dei vettori che puntano al centro della Terra.

Il geoide è definibile con formule matematiche che presentano dettagli molto articolati in quanto dipende dalla distribuzione della densità nelle diverse zone interne del nostro pianeta, distribuzione che può trattarsi solo in modo empirico. Solo per dare un'idea riportiamo la formula usata per il potenziale terrestre non ruotante adottata dal sistema EGM96, Earth Gravity model 1996 [`Geoid (we)`]:

$$V \;=\; \frac{G\,M}{r}\,\left(1+\sum_{n=2}^{n_m ax}\left(\frac{a}{r}\right)^n\;\sum_{m=0}^{n}\overline{P}_{n,m}\,(\sin\,\phi)\,\left[\overline{C}_{n,m}\,\cos\,m\,\lambda+\overline{S}_{n,m}\,\sin\,m\,\lambda\right]\right)\;;$$

Qui G denota la costante di gravitazione universale, M la massa della Terra, r il sua raggio medio, $\overline{P}_{n,m}$ i polinomi associati di Legendre normalizzati n_{max}, i $\overline{C}_{n,m}$ e gli $\overline{S}_{n,m}$ parametri numerici ottenuti da misurazioni. Vogliamo semplicemente concludere sottolineando la onerosità di un modello come il suddetto e la sua utilizzabilità limitata a calcoli sistematici entro progetti impegnativi.

Va inoltre osservato che la distribuzione della densità cambia, se pur lentamente, con l'andare del tempo e conseguentemente subisce dei cambiamenti il geoide stesso. Questi cambiamenti sono imputabili a imponenti fenomeni naturali come la viscosità del mantello terrestre, le modifiche delle grandi riserve idriche, la variabilità delle grandi superfici ghiacciate (principalmente Antartide e Groenlandia) e gli innalzamenti delle terre che nel tempo sono meno coperte dai ghiacci.

G53e.03 Ogni punto della superficie terrestre può essere caratterizzato da tre **coordinate geografiche**, latitudine, longitudine e altitudine. Mentre, come si è detto, l'altitudine fa riferimento al geoide, latitudine e longitudine sono relative a un ellissoide di riferimento complessivo che denotiamo ancora con **E** ed il cui centro, coincidente con il centro di massa della Terra, che denotiamo con C_E.
In **E** si individuano i due poli Nord e Sud definibili come intersezioni con l'asse di rotazione terrestre; evidentemente i due poli sono un duetto antipodale; la distanza tra i poli coincide con il doppio del semiasse minore di **E**. Si individua inoltre l'**equatore terrestre**, circonferenza ottenuta intersecando con **E** il piano passante per il centro della Terra, punto che denotiamo con C_E, ed ortogonale all'asse di rotazione; il raggio dell'equatore coincide con il semiasse maggiore di **E**.

Sull'ellissoide **E** si individuano un sistema di **paralleli terrestri** ed un sistema di **meridiani terrestri**.
I primi sono definiti come le intersezioni con **E** di piani paralleli al piano dell'equatore e traggono il loro nome per essere paralleli all'equatore, limitatamente ale vicinanze di un meridiano. I meridiani sono invece definiti come semicirconferenze ottenute intersecando **E** con i semipiani delimitati dalla retta dell'asse terrestre; il termine meridiano denota il semicerchio ideale che collega i due poli terrestri e che unisce tutti i punti del pianeta nei quali si raggiunge il mezzogiorno nel medesimo istante.
Il meridiano che complementa la circonferenza massima (approssimata) determinata da un dato meridiano si dice **antimeridiano del meridiano dato**

G53e.04 Ciascuno dei diversi paralleli è caratterizzato dalla **latitudine terrestre**, l'angolo formato con il piano dell'equatore dalla retta che unisce un punto qualsiasi del parallelo con il centro della Terra.

I valori di questo angolo sono spesso espressi in gradi e andrebbero da $-90°$, valore del polo Sud a $+90°$, valore per il polo Nord. Va notato che in entrambi i poli i i meridiani degenerano in un punto.
Nei documenti geografici le latitudini per l'emisfero settentrionale sono presentate anche come latitudini Nord e le latitudini dell'emisfero meridionale sono presentate come latitudini Sud. In queste scritture la lettera iniziale S o N viene seguita dalla segnalazione di un angolo compreso tra 0 e $90°$ ed espresso in gradi e sottomultipli.
Per le espressioni degli angoli delle latitudini, come per le longitudini, va segnalato che un grado d'arco, cioè la 360-esima parte di un angolo giro, secondo lo schema sessagesimale viene diviso in 60 primi e ciascuno di questi in 60 secondi. Ogni secondo corrisponde, all'incirca, a un miglio marino, cioè a 1852 m. [v.a. G53e05].
Le latitudini nel passato venivano determinate mediante un sestante, mentre attualmente si usano procedimenti di tecniche di localizzazione satellitare.

G53e.05 Ciascuno dei diversi meridiani è caratterizzato dalla **longitudine terrestre**, angolo formato da due piani contenenti l'asse terrestre, quello del punto da individuare e un piano convenzionale che si assume come contenente il meridiano di riferimento al quale attribuire la longitudine 0.

Il sistema delle coordinate di gran lunga più usato considera come meridiano di lungitudine 0 il meridiano di Greenwich, località presso Londra e sede di un osservatorio con grandi meriti per la determinazione delle longitudini.

Per finalità locali o per motivi storico-identitari si utilizzano anche sistemi di longitudini che attribuiscono longitudine 0 a particolari meridiani; ad esempio in Italia si utilizzano anche le longitudini riferite a Monte Mario, Roma; il meridiano di Monte Mario rispetto al meridiano di Greenwich ha la posizione E $12°\ 27'\ 08.4''$.

La superficie terrestre è divisa da 24 meridiani in 24 **fusi orari** ciascuno dei quali presenta ampiezza longitudinale di $15°$. A causa della apparente rotazione del sole intorno alla Terra i due istanti nei quali si raggiunge il mezzogiorno nei due meridiani che delimitano un fuso orario differiscono di un'ora.
L'antimeridiano del meridiano di Greenwich è stato assunto come **linea di cambiamento della data giornaliera**.

Per molte ragioni pratiche gli spicchi di superficie terrestre nei quali si adotta una determinata ora sono delimitate da linee che spesso si allontanano dai semicerchi che definiscono i meridiani. Infatti è evidente opportuno derogare dai meridiani per rispettare vari confini nazionali e la compattezza di vari arcipelaghi.

G53 f. sfera celeste

G53f.01 Quando si guardano le stelle in una notte limpida e buia, cioè priva di inquinamento luminoso, si ha la netta impressione che si tratti di fonti luminose in posizioni fisse dell'emisfero che sta sopra di noi (quando si tenga conto del moto di rotazione e del moto di rivoluzione della Terra).

In effetti le stelle sono corpi luminosi che si trovano a distanze enormi rispetto alle distanze sulla Terra o nel sistema solare. Mentre la distanza media tra Terra e Sole ammonta a una cosiddetta unità astronomica (au), pari a 149.6 milioni di kilometri (che la luce percorre in 8 minuti e 19 secondi), la stella più vicina, la Proxima Centauri, si trova alla distanza di un cosiddetto parsec (pc) pari a 206 265 au, ossia a 4.24 anni luce.

Queste distanze inducono ad adottare il modello della **sfera celeste**, sfera immaginaria avente il centro nella Terra (o anche in altro corpo materiale nello spazio che si proponga come sede di osservazioni astronomiche) e di raggio indefinito ma da definire come molto grande. Nei punti della sfera celeste (per la quale si usa anche il termine "volta celeste" e per la quale usiamo l'abbreviazione S_C) le stelle ed eventuali altri oggetti di interesse astronomico occupano posizioni fisse.

In realtà vengono osservati anche movimenti delle stelle rispetto alla sfera celeste e altri loro fenomeni evolutivi [`variable star (we)`], ma questi sono rilevanti per durate elevate, come secoli o milioni di anni, e per alcuni problemi astronomici possono essere trascurati in modo che le stelle si possono assumere come fisse.

Un osservatore sulla Terra si trova davanti un emisfero e percepisce ogni oggetto che gli invia luce o altra radiazione elettromagnetica come se fosse collocato sulla superficie interna della sfera celeste.

Questa oggi va considerata un modello utilizzato dalla **astronomia sferica**, la branca dell'astronomia che si propone di determinare la posizione sulla S_C degli oggetti osservati in un dato istante da un dato punto di osservazione. L'astronomia sferica serve alla navigazione e alle misure sul tempo; naturalmente a essa ricorrono ampiamente anche varie pratiche astrologiche.

G53f.02 Elementi basilari per l'astronomia sferica sono i sistemi di coordinate e le determinazioni dei tempi.
I tempi sono espressi come tempi atomici.
Il sistema di coordinate utilizzato viene detto **sistema di coordinate equatoriale**, basato sul cosiddetto **equatore celeste**, proiezione dell'equatore terrestre sulla sfera celeste.
La posizione di una stella determinata dalla radiazone che essa invia all'osservatore si esprime mediante due coordinate: l'**ascensione retta**, sostanzialmente l'angolo formato dalla posizione assegnata alla stella rispetto all'equatore celeste, e la **declinazione**.
Ascensione retta e declinazione si possono considerare corrispondenti, risp., alla longitudine e alla latitudine prioettate sulla sfera celeste.

Sulla sfera celeste vanno identificati vari elementi. I due poli celesti, il nord e il sud, sono le intersezioni dell'asse terrestre con la S_C.

L'eclittica è un cerchio massimo della S_C che riguarda il percorso apparente che il Sole compie in un anno proiettato sulla S_C; geometricamente è definita come l'intersezione con S_C del piano eclittico, piano sul quale giace l'orbita terrestre. Dato che l'asse di rotazione terrestre è tutt'altro che ortogonale al piano orbitale, questo e il piano eclittico formano un angolo di $23^\circ\,27'$ detto **inclinazione dell'eclittica**.

La retta comune ai due piani interseca S_C in due punti antipodali chiamati **punto vernale**, o primo punto dell'Ariete, e **punto autunnale**, o primo punto della Bilancia.

Per i poli celesti e per i punti equinoziali passa un altro cerchio massimo della S_C **coluro equinoziale**; tale cerchio è detto anche **meridiano celeste fondamentale**. Il meridiano celeste che passa per i poli e i punti solstiziali viene invece detto **coluro solstiziale**.

L'ascensione retta, in sigla RA acronimo di *right ascension*, viene definita come distanza angolare tra il meridiano fondamentale ...

La declinazione è l'angolo formato dalla radiazione emessa dalla stella rispetto al piano equatoriale.

G53 g. cartografia

G53g.01 La **cartografia** è la disciplina che si si occupa della raffigurazione su supporti piani (carte geografiche, mappe topografiche e simili) o sferici (globi) di informazioni geografiche o di altra natura (statistica, demografica, antropologica, economica, politica, storica, geologica, geodinamica, botanica o altro) che sono da riferire alla zona geografica nella quale si riscontrano.
Per la realizzazione di carte geografiche e globi, stante la varietà delle possibili finalità di questi prodotti e delle caratteristiche dei loro contenuti, si devono risolvere svariati problemi di natura geometrica, tecnica ed estetica e conseguentemente si devono sviluppare molteplici attività.

Si possono individuare le seguenti problematiche principali.

- Scegliere gli aspetti salienti degli oggetti che si intendono raffigurare; questi aspetti possono essere fisici, come zone del territorio, catene montuose, fiumi o strade, oppure simbolici come i toponimi dei vari tipi, oppure socio-politici, come i confini statali e amministrativi. Per le relative attività si usa il termine *map editing.*
- In relazione alle scelte della scala e del tipo di proiezione del geoide, rappresentare i punti e le curve principali delle zone da raffigurare su supporti piani (questo non riguarda i globi).
- Decidere quali caratteristiche degli oggetti da mappare possono essere considerati superflui per le finalità della mappa. Questa attività afferisce alla cosiddetta generalizzazione cartografica.
- Ridurre la complessità delle caratteristiche degli oggetti da mappare. Anche le relative operazioni contribuiscono alla generalizzazione cartografica.
- Armonizzare le componenti della mappa per riuscire a trasmettere le informazioni al futuro lettore nel modo migliore.

Qui ci occuperemo soprattutto dei problemi del terzo dei punti precedenti.

G53g.02 Occorre inoltre segnalare che le attività cartografiche nel passato sono state svolte in ambienti piuttosto circoscritti e con strumenti che oggi possiamo considerare artigianali. Le prestazioni dei moderni dispositivi e sistemi informatici e telematici hanno condotto a una cartografia attuale con caratteristiche notevolmente diverse e che risulta sempre più integrata con le attività riguardanti i cosiddetti `geografic information systems (we)`, in sigla GIS.
In particolare le attività di calcolo e raffigurazione richieste per la rapresentazione piana di zone della superficie terrestre viene sviluppata mediante algoritmi, sistemi di calcolo, archivi di dati geografici e sistemi di telerilevamento gestiti da organizzazioni di vasta portata con scopi molteplici.
La presentazione delle basi geometriche, tuttavia, conviene sia effettuata facendo riferimento a entità semplici come punti, rette, superfici matematicamente rappresentabili e disegni in buona parte eseguibili manualmente.

G53g.03 Come si desume dalle considerazioni sui triangoli sferici in :c e in particolare da c03(1), è impossibile tracciare una mappa di una regione della superficie terrestre sopra un foglio piano senza introdurre qualche tipo di distorsione. Questa proprietà geometrica fu ottenuta anche da Gauss nell'ambito della geometria differenziale con il suo cosiddetto `Theorema egregium (wi)`.
Da questo punto di vista si può dire che compito primario dei cartografi è quello di raffigurare le informazioni che intendono presentare in una mappa nel modo più leggibile ed accurato tenendo sotto controllo le distorsioni che non possono evitare di introdurre.

Si possono avere distorsioni sulle distanze, sulle ampiezze angolari, sulle aree delle regioni e altro. Come vedremo le distorsioni possibili sono in conflitto tra di loro: ad esempio si possono eliminare le distorsioni delle ampiezze angolari consentendo distorsioni maggiori sulle distanze.
A seconda delle finalità della mappa che intende disegnare il cartografo deve decidere quali distorsioni eliminare o tenere il più possibile contenute e quali consentire possibilmente in misura contenuta.
Talora dunque le scelte del cartografo possono descriversi come scelte di compromesso.

G53g.04 Le mappe piane presentano rilevanti vantaggi rispetto ai globi:

- sono più facili da maneggiare e archiviare;
- sono relativamente poco costose da produrre e replicare;
- possono trattare moltissime scale e quindi moltissime scelte per la regione da raffigurare;
- sono gestibili sugli schermi di computers, videotelefoni, tablets e simili;
- consentono di ricavare misure di estensioni, di distanze, di direzioni, di forme, di aree e delle entità delle stesse distorsioni.

Le mappature meglio definite in termini geometrici sono quelle basate su proiezioni sul piano di regioni della superficie terrestre.
Vediamo a grandi linee i tipi di proiezioni che vengono adottate.
La proiezione centrale prevede che le linee geodetiche siano rappresentate da segmenti di rette.
Le proiezioni cilindriche servono per rendere fedelmente le aree delle regioni.
La proiezione di Mercatore consentono di rispettare le ampiezze angolari.
Stessa finalità hanno le proiezioni stereografiche.

Va aggiunto che, oltre alle proiezioni, si possono avere mappe che si servono di qualsiasi altra funzione che trasforma i punti del geoide in punti dell'area piana; naturalmente una tale funzione, per dare immagini leggibili ed efficaci, deve essere sufficientemente regolare e biunivoca a esclusione al più di pochi punti trasformati.

G53 h. proiezioni sul piano di superfici

G53h.01 Esaminiamo una **proiezione centrale** che mappa un emisfero H sopra il piano.
Denotiamo con $\overline{\mathsf{H}}$ la sfera di cui H è la metà; visualizziamo l'emisfera come parte inferiore della sfera e con il cerchio massimo C della sfera che la delimita collocato orizzontalmente. Inoltre chiamiamo O il centro della sfera e del suddetto cerchio masssimo, equatore della sfera.
Come piano M della mappa assumiamo il piano parallelo al cerchio massimo C e tangente alla sfera $\overline{\mathsf{H}}$. Denotiamo inoltre con T il punto di tangenza $T := \mathsf{H} \cap \mathsf{M}$.
Assumiamo O come centro della proiezione; questa dunque si serve delle semirette che hanno l'estremità nel centro O della sfera e che intersecano il piano M.

Se P denota il generico punto di H, scriviamo $f(P)$ il punto nel quale la semiretta $\overrightarrow{OP-}$ interseca M; sia cioè $f(P) := \overrightarrow{OP-} \cap \mathsf{M}$.
Evidentemente questa proiezione rappresenta gli archi di semicerchi appartenenti a cerchi massimi di mediante segmenti di rette passanti per T.
Essa invece distorce le distanze: in particolare se T, P_1, P_2 e P_3 si susseguono nell'ordine su un quarto di cerchio massimo di H avente una estremità in T e l'altra sul cerchio C, evidentemente $\overline{f(P_1)\, f(P_2)} < \overline{f(P_2)\, f(P_3)}$.
Questa distorsione delle distanze è ridotta in vicinanza di T mentre cresce illimitatamente per le zone che si avvicinano al cerchio C.

G53h.02 **(1) Prop.**: Sia Γ una curva su H; la curva proiettata $f(\Gamma)$ è un segmento di retta sse Γ appartiene ad un cerchio massimo di $\overline{\mathsf{H}}$.

Dim.: Se $f(\Gamma)$ è un segmento, questo e il centro O individuano un piano e il fatto che esso passi per O comporta che la sua intersezione su $\overline{\mathsf{H}}$ sia un cerchio massimo.
Viceversa se la curva Γ appartiene a un cerchio massimo di $\overline{\mathsf{H}}$ si individua il piano che contiene questa curva; l'intersezione di questo piano con il piano M è una retta la quale contiene $f(\Gamma)$ e quindi questa curva deve essere un segmento rettilineo ▮

Dall'enunciato precedente segue che per tracciare l'immagine di un un percorso di cerchio massimo sopra una mappa ottenuta per proiezione centrale basta individuare i punti ottenuti per proiezione di due punti qualsiasi sul cerchio massimo e tracciare la porzione che può interessare della retta passante per questi due punti.

G53h.03 Per **proiezione cilindrica** si intende la proiezione di una sfera, in particolare della sfera terrestre, sopra una superficie cilindrica che successivamente potrà essere svolta per condurre a una mappa piana.

Consideriamo dunque una sfera S di centro O e raggio r, un suo cerchio massimo e la superficie cilindrica K tangente alla sfera nei punti del detto cerchio. Consideriamo anche l'asse A del cilindro, retta che passa da O e interseca la sfera in due punti Q_1 e Q_2.
La proiezione cilindrica agisce su tutti i punti P della sfera ad esclusione di Q_1 e Q_2 associando a P come punto $f(P)$ l'intersezione con il cilindro dalla semiretta con l'estremità sull'asse e passante per P. Dalla raffigurazione sul cilindro si ottiene la mappa considerando solo la superficie cilindrica comprendente il cerchio massimo e avente le basi ottenute dal cerchio applicando loro due traslazioni di spostamento r secondo l'orientazione dell'asse una verso il basso e l'altra verso l'alto.
La superficie cilindrica ottenuta viene tagliata lungo un opportuno segmento di lunghezza $2\,r$ parallelo all'asse. Essa viene quindi distesa in modo di fornire una raffigurazione rettangolare di altezza $2\,r$ e di

larghezza $2\pi r$. Il taglio viene scelto in modo di avere una mappa che nella parte centrale mostri una parte significativa della superficie sferica raffigurata.

G53h.04 **(1) Prop.**: La proiezione di una sfera sopra un cilindro avente lo stesso raggio preserva le aree. Più formalmente, se $\boldsymbol{R}$ è una regione della sfera S ed f denota la funzione della proiezione cilindrica, si ha

$$\boldsymbol{Area}(\boldsymbol{R}) \;=\; \boldsymbol{Area}(f(\boldsymbol{R}))\ .$$

Dim.: Ci proponiamo di dimostrare la conservazione dell'area di un opportuno rettangolo infinitesimale ritagliato sulla sfera i cui vertici chiamiamo A, B, C e D. Di questi vertici consideriamo le coordinate sferiche r, raggio della sfera S e del cerchio $\boldsymbol{R}$, ϕ latitudine compresa tra $-90°$ e $+90°$ e θ longitudine compresa tra $-180°$ e $180°$. La r è la stessa per tutti i punti di S e interessa poco; al punto A assegnamo le coordinate ϕ e θ, B lo prendiamo sullo stesso parallelo e scriviamo $B = \langle\phi, \theta+\Delta\theta\rangle$, C lo prendiamo sullo stesso meridiano e scriviamo $C = \langle\phi+\Delta\phi, \theta\theta\rangle$, e assumiamo $D :=\big\langle\phi+\Delta\phi, \theta+\Delta\theta\big\rangle$.
Denotiamo infine il quadrilatero come $\mathsf{qdltr}(A, B, C, D) =: Q$.
Assumiamo che $\Delta\phi$ e $\Delta\theta$ molto piccoli, infinitesimi, in modo che per la sua area si possa scrivere

$$\boldsymbol{Area}(Q) \;\approx\; f(A^\frown B)\cdot \mathsf{len}(A^\frown C) \;\approx\; r\,\Delta\phi\, r\,\Delta\theta \;=\; r^2\,\Delta\phi\,\Delta\theta\ ;$$

qui le uguaglianze approssimate diventando uguaglianze al limite per $\Delta\phi$ e $\Delta\theta$ tendenti a 0.
Consideriamo i trasformati per la f dei vertici e degli archi di Q. Chiaramente $f(A)^\frown f(B)$ è un arco di un cerchio di raggio r che sottende un angolo $\Delta\theta$ e quindi

$$\mathsf{len}(f(A)^\frown f(B)) \;=\; r\,\Delta\theta \;=\; \frac{\mathsf{len}(A^\frown B)}{\cos\,\phi}\ .$$

D'altra parte

$$\frac{\mathsf{len}(f(A^\frown C))}{\mathsf{len}((A^\frown C)} \;=\; \cos\phi.$$

Di conseguenza

$$\boldsymbol{Area}(f(\mathsf{Q})) = ... = \boldsymbol{Area}(\mathsf{Q})\ .$$

Per quanto riguarda l'area di una regione arbitraria di S questa si può considerare ottenuta come unione delle aree di quadrilateri infinitesimi come Q e quindi avere area data dalla somma di areole che non sono cambiate dalla trasformazione f ▮

G53h.05 Una conseguenza del mantenimento delle aree della proiezione cilindrica consiste nella possibilità di valutare con precisione le aree di regioni sopra le mappe cilindriche servendosi di un planimetro ed ovviamente del fattore di scala per le lunghezze rappresentate.

Ricordiamo che i planimetri sono strumenti finalizzati alla valutazione delle aree di regioni dai confini anche poco regolari a partire da loro rappresentazioni piane in scala servendosi di un braccio articolato che procede a seguire il contorno della figura stessa.

A grandi linee si distinguono planimetri geometrici e planimetri integratori. Questi ultimi fanno riferimento al teorema di Gauss-Green [44g] che consente di esprimere un integrale di regione piana con la circolazione relativa al suo contorno.

Sono stati costruiti planimetri meccanici a partire dall'inizio del XIX secolo; successivamente sono stati prodotti anche planimetri elettronico-digitali. attualmente il loro utilizzo è andato diminuendo con il crescere delle procedure di valutazione delle aree che si servono di figure digitalizzate.

I planimetri dei vari tipo sono stati adottati per molteplici applicazioni, dall'ingegneria alla biomedicina. Inoltre in ambito più strettamente matematico sono stati utilizzati per valutazioni approssimate di integrali definiti riguardanti regioni o porzioni di regioni dai contorni irregolari.

G53h.06 In generale si dice **rappresentazione conforme** una funzione del genere $\lceil \mathbb{R}^{\times d} \longmapsto \mathbb{R}^{\times d} \rceil$ con d intero positivo che preserva gli angoli.
Qui interessano soprattutto rappresentazioni conformi che hanno come ambiente $\mathbb{R}^{\times 3}$, come dominio una sfera o una superficie con caratteristiche simili e come codominio un rettangolo piano.
In genere ancora per una rappresentazione conforme useremo le notazioni f, $f(P)$ ed $f(\boldsymbol{R})$,

Situazioni nelle quale si incontrano rappresentazioni conformi f motivate con evidenza riguardano due curve Γ_1 e Γ_2 sopra la superficie dominio le quali si incontrano formando un certo angolo α le quali vengono trasformate, risp., nelle curve $f(\Gamma_1)$ ed $f(\Gamma_2)$ che formano un angolo congruente ad α.

G53h.07 Un ovvio esempio di trasformazione conforme è la omotetia (in particolare la dilatazione) per un fattore costante $k \in \mathbb{R}_{nz}$; collocata in $\lceil \mathbb{R}^{\times d} \longmapsto \mathbb{R}^{\times d} \rceil$ ha la forma

$$\lceil \langle x_1, x_2, ..., x_d \rangle \mapsto \langle k\,x_1, k\,x_2, ..., k\,x_d \rangle \rceil \ .$$

Una tale trasformazione modifica tutte le distanze per il fattore k e trasforma ogni figura, in particolare ogni triangolo, in una figura simile.

Più in generale una rappresentazione conforme trasforma un triangolo $\Delta(A, B, C)$ in un triangolo simile $f(\Delta(A, B, C))$ e quindi deve agire come una omotetia sui triangoli infinitesimali.
Inoltre si dimostra che una trasformazione f che agisce come una omoteria sui rettangoli infinitesimali è una rappresentazione conforme.

Occorre segnalare che la definizione di rappresentazione conforme è piuttosto stringente, ma vi è una ampia gamma di tali trasformazioni: si tratta delle funzioni di variabile complessa del genere $\lceil \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C} \rceil$ che siano differenziabili.

G53h.08 La mappa conforme più diffusa è la **proiezione di Mercator**, mappa proposta nel 1569 dal fiammingo Geerd de Kremer, noto come Gerardus Mercator (la latinizzazione del suo nome); essa è stata usata come mappa standard per i rilevanti vantaggi che presenta per la navigazione.

Nelle mappe cilindriche non è facile per un navigante individuare le **linee ortodromiche**, cioè le linee geodetiche da seguire per minimizzare i percorsi. Più semplici da seguire sono le **lossodrome**, cioè le linee caratterizzate dal formare lo stesso angolo con tutti i meridiani (e lo stesso con tutti i paralleli). Queste costituiscono buone approssimazioni delle misure ottimali.

Mercator ebbe l'idea di eliminare la distorsione angolare delle proiezioni cilindriche attraverso dilatazioni del cilindro intermedio nella dirazione del suo asse.
Dalle figure e dalle notazioni in h04, si ricava che si rende conforme una proiezione cilindrica allungando il tratto $f(A\frown C)$ di un fattore $\dfrac{1}{\cos^2\phi} = \sec^2\phi$. Nelle mappe ottenute con la proiezione di Mercator le lossodrome sono segmenti di retta.
In genere nella navigazione con mappe di Mercator la rotta è costituita da successive lossodrome che bene approssimano la linea ortodromica e che possono essere facilmente seguite con successivi aggiustamenti della direzione mantenuta costante per ciascun tratto lossodromico.

G53h.09 Per chiarire la proiezione di Mercator serviamoci delle coordinate z e w per i punti sul cilindro; la prima esprime la posizione in verticale rispetto al piano equatoriale, la w fornisce la distanza lungo la circonferenza ortogonale. Quando il cilindro viene svolto sul piano w e z diventano le coordinate orizzontale e verticale della mappa rettangolare ottenuta.

Consideriamo il punto sulla sfera $P = \langle \phi, \theta \rangle$; evidentemente le coordinate per il cilindro e il piano si ha

$$w \;=\; r\,\theta \qquad \text{e} \qquad z \;=\; r\,\sin\phi\;.$$

Differenziando la seconda si ottiene $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\phi} \;=\; r\,\cos\theta$. Quindi si ha l'effetto del dilatare l'altezza di un rettangolo infinitesimale di un fattore $\sec^2\phi$ rimpiazzando la coordinata z con la variabile v la cui derivata sia la derivata della z moltiplicata per $\sec^2\phi$. Per questa

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\phi} \;=\; r\sec^2\phi\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\phi} \;=\; r\sec\phi \qquad \text{e quindi} \quad v \;=\; \int \mathrm{d}\phi\ \sec\phi \;=\; r\,\ln|\sec\phi + \tan\,\phi| + \mathtt{C}\;.$$

Assumendo per la costante $\mathtt{C} = 0$, si ottiene

$$w(\phi,\theta) \;=\; a\,\theta \qquad , \qquad w(\phi,\theta) \;=\; a\,\ln|\sec\phi + \tan\,\phi|\;,$$

con a costante da scegliersi in modo da avere per la mappa la scala voluta, senza modificare gli angoli.

G53h.10 Si dice **proiezione stereografica** di una sfera S sopra un piano Q a essa tangente in un punto T la proiezione che si serve delle semirette aventi l'estremità nel punto N antipodo di T le quali intersecano Q.
Consideriamo dunque la raffigurazione che vede la sfera al di sopra di Q con la semiretta $\overrightarrow{TN-}$ disposta verticalmente e diretta verso l'alto. Sia $\mathcal{P}$ un piano parallelo a Q che interseca la sfera nel cerchio che denotiamo con K non ridotto al solo $\{N\}$ e sia P un punto di K.
La proiezione stereografica di P è dunque

$$f(P) \;=\; \overrightarrow{\mathsf{N}P-}\;\cap\;\mathsf{Q}\;.$$

Denotiamo con r il raggio della sfera. Si osserva che l'equatore $\boldsymbol{E}$ della S parallelo al piano Q viene proiettato nella circonferenza Q di centro T e raggio $\sqrt{2}\,r$. La distorsione tende a scomparire per i punti P che si avvicinano a T e cresce con l'allontanarsi di P da T.

G53h.11 Ci proponiamo di dimostrare che la proiezione stereografica è una mappa conforme; per questo conviene avere presenti due fatti della geometria di $\mathbb{R}^{\times 3}$.

(1) Prop.: Consideriamo quattro piani di $\mathbb{R}^{\times 3}$, Q_1, Q_2, R_1 e R_2, con Q_1 e Q_2 paralleli ed R_1 e R_2 non paralleli ai primi due e non paralleli tra di loro. Le rette $\mathsf{Q}_1 \cap \mathsf{R}_1$ e $\mathsf{Q}_1 \cap \mathsf{R}_2$ sottendono gli stessi angoli delle rette $\mathsf{Q}_2 \cap \mathsf{R}_1$ e $\mathsf{Q}_2 \cap \mathsf{R}_2$.

Dim.: Denotiamo con P_1 il punto $\mathsf{Q}_1 \cap \mathsf{R}_1 \cap \mathsf{R}_2$ con P_2 il punto $\mathsf{Q}_2 \cap \mathsf{R}_1 \cap \mathsf{R}_2$.
La traslazione $\boldsymbol{Trsl}(\overrightarrow{P_2\,P_1})$ pone in corrispondenza biunivoca Q_1 con Q_2 e mantiene l'ampiezza degli angoli sottesi da $\mathsf{Q}_1 \cap \mathsf{R}_1$ e $\mathsf{Q}_1 \cap \mathsf{R}_2$ trasformati negli angoli sottesi da $\mathsf{Q}_2 \cap \mathsf{R}_1$ e $\mathsf{Q}_2 \cap \mathsf{R}_2$ ▮

(2) Prop.: Consideriamo due circonferenze Γ_1 e Γ_2 in $\mathbb{R}^{\times 3}$ le quali si intesecano in due punti A e B. Consideriamo inoltre gli angoli sottesi dalle due circonferenze in A e B. Gli angoli in A presentano le stesse ampiezze di quelli in B.

Dim.: Consideriamo il piano che biseca il segmento $\overline{AB}$. La riflessione rispetto a questo piano trasforma gli angoli in A negli angoli in B senza modificarne l'ampiezza ▮

G53h.12 **Prop.** Le proiezioni stereografiche sono mappe conformi.

Dim.: Sia P un qualsiasi punto di $\mathsf{S} \setminus \{N\}$, siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due arbitrari vettori applicati tangenti alla sfera in P e sia θ l'ampiezza dell'angolo sotteso da $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Consideriamo inoltre due piani contenenti P ed N, R_v contenente anche $\vec{v}$ ed R_w contenente anche $\vec{w}$, nonché le circonferenze $\mathsf{C}_v := \mathsf{S} \cap \mathsf{R}_v$ e $\mathsf{C}_w := \mathsf{S} \cap \mathsf{R}_w$, cerchi non massimi di S se si esclude il caso $P = T$. a .

C_v e C_w si intersecano in P sottendendo lo stesso angolo $\angle \vec{v}\,\vec{w}$ di ampiezza θ; la proiezione su Q di C_v è la retta $\mathsf{Q} \cap \mathsf{R}_v$ mentre la proiezione di C_w è la retta $\mathsf{Q} \cap \mathsf{R}_w$.

L'angolo formato da C_v e C_w in P, grazie a G53h11(2), è congruente con l'angolo formato dalle due circonferenze in N e questo ultimo angolo, grazie a h11(1), è congruente con l'angolo formato dalle proiezioni delle circonferenze su Q.

Quindi l'angolo tra due circonferenze è ongruente all'angolo delle relative proiezioni. Stante l'arbitrarietà di P e dei due vettori applicati in P è dimostrato che qualsiasi angolo sulla sfera viene proiettato in un angolo congruente ▮

G53h.13 Per la proiezione stereografica sul piano $z = -1$ relativa alla sfera canonica $\mathfrak{sphr} = \{\langle x, y, z\rangle \;⁋\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e al suo punto $N = \langle 0, 0, 1\rangle$ antipodo del punto di tangenza $T = \mathsf{sphr} \cap \mathsf{Plan}[z = -1] = \langle 0, 0, -1\rangle$ si trovano formule piuttosto semplici.

(1) Prop.: Il punto $\langle x, y, z\rangle \in \mathfrak{sphr}$ viene trasformato in

$$f(x, y, x) \;=\; \left\langle \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, -1 \right\rangle \;▮$$

(2) Prop.: Il punto su $\mathfrak{sphr}$ che viene proiettato nel punto $\langle u, v, -1\rangle$ del piano $\mathsf{Plan}[z = -1]$ è dato da

$$f^{-1}(u, v, -1) = \left\langle \frac{2\,u}{u^2+v^2+1} \;,\; \frac{2\,v}{u^2+v^2+1} \;,\; \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right\rangle \;▮$$

(3) Prop.: Una curva Γ su $\mathfrak{sphr}$ passante per N è una circonferenza sse $f(\Gamma)$ è una retta su Q ▮

(4) Prop.: Una curva Γ su $\mathfrak{sphr}$ non passante per N è una circonferenza sse $f(\Gamma)$ è una circonferenza su Q ▮

G53 i. sfere in molte dimensioni

G53i.01 Varie nozioni sulla sfera nello spazio tridimensionale si possono estendere a figure dello spazio sui reali con un numero arbitrario di dimensioni; presentiamo le più basilari.

Sia d un intero uguale o maggiore di 2. Per **sfera** $(d-1)$**-dimensionale** si intende il luogo dei punti $\langle x_1, x_2, ..., x_d\rangle$ dello spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ che si trovano alla stessa distanza da un punto dello spazio.
Questo punto lo denotiamo con $C \in \mathbb{R}^{\times d}$ e lo chiamiamo **centro della sfera multidimensionale**, mentre la distanza suddetta la denotiamo con r e la chiamiamo **raggio della sfera multidimensionale**.
L'insieme delle sfere nello spazio d-dimensionale, le sfere $d-1$-dimensionali, si denota con Sphr_d.

A tale definizione si adattano sia la circonferenza per $d = 2$ che la sfera usuale per $d = 3$; inoltre per $d = 1$ potremmo chiamare sfera monodimensionale con centro in un punto x_c della retta reale e raggio r la figura costituita dal segmento $[x_c - r, x_c + r]$ (nella versione di sfera chiusa), o dal duetto $\{x_C - r, x_C + r\}$ (nella versione superficie sferica).

Le sfere in d dimensioni per $d \geq 4$ sono dette anche **ipersfere**.

In d-dimensioni per ciascuno degli interi $d = 1, 2, 3, 4, ...$ per la sfera di centro C e raggio r adottiamo la notazione $\mathsf{sphr}_d(C, r)$; inoltre scriveremo $\mathfrak{sphr}_d := \mathsf{sphr}_d(\mathbf{0}_d, 1)$ per la sfera avente centro nell'origine e raggio 1, che chiamiamo **sfera canonica**.

Anche le sfere d-dimensionali sono figure tutte simili tra di loro e gran parte delle loro proprietà sono ricavabili da quelle della $\mathfrak{sphr}_d$.

G53i.02 Svolgiamo alcune considerazioni relative a un fissato $d \geq 4$.

Se intersechiamo la sfera $\mathfrak{sphr}_d$ con un piano passante per l'origine $\mathbf{0}_d$ avente equazione $\sum_{i=1}^{d} a_i\, x_i \;=\; 0$, supposto sia $a_d \neq 0$, otteniamo il luogo dei punti che soddisfano l'equazione

$$\sum_{j=1}^{d-1} {x_j}^2 \;=\; 1 - \frac{1}{{a_d}^2}\left(\sum_{j=1}^{d-1} a_j\, x_j\right)^2 \quad .$$

Questa equazione dice che l'intersezione è una sfera $d-1$-dimensionale: queste figure hanno il ruolo dei cerchi massimi nel caso $d = 3$. Conclusioni simili valgono per tutte le sfere d-dimensionali in quanto simili alla canonica $\mathfrak{sphr}^d$.

Più in generale le sfere d-dimensionali intersecate con oggetti geometrici lineari presentano sfere p-dimensionali con il ruolo di cerchi massimi alle quali corrispondono con il ruolo di poli sfere q-dimensionali, dove $p + q = d - 2$.

G53i.03 Denotiamo con $\vec{X}$ i punti della sfera d-dimensionale $\mathsf{sphr}_d(\vec{C}, r)$. Questi punti soddisfano l'equazione

$$|\vec{X}| = r \qquad \text{ovvero} \qquad (P - C) \cdot (P - C) = r^2 \ .$$

Espandendo e riarrangiando si trova l'equazione

$$\vec{X} \cdot \vec{X} - 2\,\vec{X} \cdot \vec{C} \;=\; r^2 - \vec{C} \cdot \vec{C} \ ;$$

Passando alle coordinate cartesiane, cioè tenendo conto che $\vec{X} = \langle x_1, ..., x_d\rangle$ e $\vec{C} = \langle c_1, ..., c_d\rangle$, abbiamo

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + \cdots + (x_d - c_d)^2 \;=\; r^2 \ .$$

Consideriamo un iperpiano H il cui punto generico individuiamo con la stessa $\vec{X}$ e la cui equazione scriviamo

$$\vec{A} \cdot \vec{X} = b \ .$$

Il punto di H più vicino a $\vec{C}$ è

$$\vec{Q} \ := \ \frac{b - \vec{A} \cdot \vec{C}}{\vec{A} \cdot \vec{A}} \, \vec{A} - \vec{C} \ .$$

Se $r = \dfrac{|b - \vec{A} \cdot \vec{C}}{|\vec{A}|}$, l'iperpiano H interseca la sfera $|\vec{X} - \vec{C}| = r$ nel solo punto $\vec{Q}$ ed è l'iperpiano tangente alla sfera in $\vec{Q}$. In tali condizioni il vettore $\vec{C} - \vec{Q}$ è ortogonale all'iperpiano tangente; quindi utilizzando $\vec{X}$ come punto variabile sull'iperpiano tangente abbiamo

$$(\vec{Q} - \vec{C}) \cdot (\vec{Q} - \vec{X}) \ = \ 0 \ .$$

Eliminando $\vec{Q} \cdot \vec{Q}$ mediante l'equazione della sfera giungiamo all'equazione dell'iperpiano tangente

$$(\vec{Q} - \vec{C}) \cdot \vec{X} \ = \ r^2 + \vec{C} \cdot \vec{Q} - \vec{C} \cdot \vec{C} \ .$$

G53i.04 Per l'area della superficie della sfera d-dimensionale canonica $\mathfrak{sphr}_d$ si trova

(1) $$\frac{2\,\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \qquad \text{dove} \quad \Gamma(z) \quad \text{denota la funzione Gamma di Euler [W60d01] .}$$

Questa espressione ha due diverse particolarizzazioni corrispondenti alla diversa parità di d.

(2) $$\frac{(2\,\pi)^{d/2}\,r^d}{d!!} \quad \text{sse} \ \ d \text{ è pari} \qquad , \qquad \frac{2\,(2\,\pi)^{(d-1)/2}\,r^{d-1}}{(d-2)!!} \quad \text{sse} \ \ d \text{ è dispari .}$$

Il volume della sfera si trova essere dato dalla espressione della superficie sferica moltiplicato per $\dfrac{r}{d}$. Sono quindi praticabili le espressioni

(3) $$\frac{(2\,\pi)^{d/2}\,r^d}{d!!} \quad \text{sse} \ \ d \text{ è pari} \qquad , \qquad \frac{2\,(2\,\pi)^{(d-1)/2}\,r^{d}}{d!!} \quad \text{sse} \ \ d \text{ è dispari .}$$

Ricordiamo che se d è pari $d!! = 2 \cdot 4 \cdots d$, mentre per d dispari $d!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots d$.

G53i.05 Va segnalato che più in generale si possono definire sfere nell'ambito degli spazi metrici [B46a].
Dato uno spazio metrico $\langle \mathsf{S}, \boldsymbol{d} \rangle$, si dice sfera di centro $C \in \mathsf{S}$ e raggio $r \in \mathbb{R}_+$ l'insieme dei punti P tali che $\boldsymbol{d}(C,P) = r$.
Questa definizione vale anche per gli spazi normati. Va notato che in questi ultimi di solito si assume che il centro della sfera sia l'origine dello spazio, mentre nei più generali spazi metrici non è necessario parlare di una origine.
Si osserva che vi sono spazi metrici nei quali si hanno superfici sferiche vuote in corrispondenza sia di raggi piccoli, sia di raggi assai grandi. In particolare nello spazio metrico $\langle \mathbb{Z}^{\times d}, \mathrm{dist} \rangle$, con dist distanza pitagorica sono ridotti al solo centro le sfere di raggio inferiore ad 1 e sono vuote tutte le superfici sferiche corrispondenti a un raggio che non sia esprimibile come radice di una somma di quadrati di interi naturali.

In topologia si definisce come $(d-1)$-sfera ogni figura che sia omeomorfa a una bolla d-dimensionale [B46b]. In particolare vi sono $(d-1)$-sfere per la topologia che sono omeomorfe a $(d-1)$-sfere euclidee o, per $d = 3$, a ellissoidi o a sferoidi [G52c].

Alberto Marini

L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php