1

Capitolo G52
superfici quadriche

Contenuti delle sezioni

a. superfici di secondo grado p. 2
b. classificazione delle superfici di secondo grado p. 6
c. ellissoidi p. 9
d. iperboloidi p. 12
e. paraboloidi p. 15
f. coni e cilindri p. 17
g. rette generatrici di quadriche p. 20
h. piani diametrali delle quadriche p. 22

23 pagine

G52 0.01 Questo capitolo è dedicato alle quadriche, le superfici algebriche relativamente semplici definite come gli insiemi di punti dello spazio $\mathbb{C}^{\times 3}$ che soddisfano le equazioni polinomiali di secondo grado in tre incognite.

Delle suddette equazioni si riesce a dare una classificazione completa che porta a individuare tipi di superfici con caratteristiche ben distinte.
Dalle equazioni particolari per i diversi tipi di superfici vengono ricavate agevolmente le proprietà primarie delle superfici corrispondenti.
Alcune di queste sono risultate utili per applicazioni di interesse pratico e anche ad alcune di importanza storica.

G52 a. superfici di secondo grado

G52 a.01 Con **superficie quadrica**, o **superficie quadratica**, o **superficie di secondo grado**, o semplicemente con **quadrica**, si intende una superficie dello spazio tridimensionale definita con la richiesta di annullamento di un polinomio di secondo grado in 3 variabili. Per queste variabili talora è opportuno usare le lettere x, y e z, in altri casi le scritture rispettivamente sinonime x_1, x_2 e x_3; per talune espressioni concise conviene servirsi del vettore $\mathsf{x} := \langle x, y, z\rangle = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$.

Le variabili e i coefficienti del polinomio che individua una quadrica possono considerarsi nel campo dei complessi e la superficie vedersi come sottoinsieme di $\mathbb{C}^{\times 3}$. Qui ci occuperemo sostanzialmente solo delle quadriche individuate da polinomi di secondo grado sui reali, quelle che hanno maggiore interesse applicativo.
Non potremo tuttavia evitare di uscire dal campo dei reali per far muovere le variabili nel campo dei complessi, in quanto il trattamento sistematico delle soluzioni dell'equazione sui reali conduce anche a soluzioni immaginarie le quali per la completezza e la compattezza della spiegazione non conviene trascurare.

Qui ci proponiamo di procedere a una classificazione dei polinomi di secondo grado sui reali e delle orbite del loro insieme $\mathbb{R}_2[x, y, z]$ ottenute applicando le più semplici trasformazioni di $\mathbb{R}^{\times 3}$ fino a ottenere una classificazione esauriente delle superfici che i polinomi rappresentano.

Il loro studio si serve ampiamente dei risultati ottenuti per le sezioni coniche e per molti aspetti può vedersi come prosecuzione in 3D dello studio di queste curve di secondo grado.

In effetti la classificazione delle superfici quadriche si serve di molti risultati ottenuti con lo studio delle sezioni coniche e viceversa molte proprietà di queste curve che si possono ottenere in modo significativo considerandole come curve ottenute sezionando con dei piani determinate superfici quadriche.

Le quadriche sono studiate proficuamente anche nell'ambito della geometria proiettiva, ma questo approccio viene considerato solo in poche delle considerazioni di questo capitolo.

G52 a.02 Vediamo dunque come le quadriche, similmente alle coniche, possono essere studiate in modo sistematico e sostanzialmente completo a partire dalla equazione di secondo grado trivariata, in tre incognite.

Consideriamo l'equazione nelle variabili x_1, x_2 e x_3,

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}x_i x_j + \sum_{i=1}^{3} 2a_{i,4}x_i + a_{4,4} = 0 \quad \text{con} \quad a_{i,j} = a_{j,i} \in \mathbb{C} \quad \text{per} \quad i, j = 1, 2, 3\ . \tag{1}$$

Osserviamo che la commutatività del prodotto in $\mathbb{C}$ consente di sostituire una sottoespressione della forma $b_{i,j}\, x_i\, x_j + b_{j,i}\, x_j\, x_i$ con la $2\, a_{i,j}\, x_i\, x_j$, dove $a_{i,j} := a_{j,i} := \dfrac{1}{2}(b_{i,j} + b_{j,i})$. Quindi la precedente equazione in tre incognite è la più generale tra quelle di secondo grado in tre variabili.
La (1) viene chiamata **equazione generale delle quadriche** e denotata con $\mathsf{EqnD3}\,(x_1, x_2, x_3; a_{i,j})$.

All'espressione precedente si può dare la forma

$$\sum_{h,k=1}^{4} x_h\, a_{h,k} x_k = 0 \qquad \text{dove} \quad a_{i,j} = a_{j,i} \quad \text{per} \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad \text{con} \quad i \neq j\ . \tag{2}$$

Questa si può considerare ottenuta passando all'adozione delle coordinate omogenee, oppure, più modestamente, convenendo che x_4 rappresenti semplicemente lo scalare 1.

È utile osservare che alla (2) si può dare la forma matriciale $\overline{\mathsf{x}}^{\top}\overline{A}\overline{\mathsf{x}}$, quando si convenga che $\overline{A}$ esprima la matrice 4×4 simmetrica $\overline{A} := [i,j=1,2,3,4 :|\ a_{i,j}]$ ed $\overline{\mathsf{x}}$ esprima la matrice colonna le cui componenti sono x_i per $i=1,2,3,4$.
Dunque l'equazione delle quadriche corrisponde alla richiesta di annullamento della forma bilineare simmetrica di ordine 4.

G52 a.03 La proprietà basilare dell'equazione generale :02(1) è la invarianza della sua forma algebrica di fronte ai cambiamenti di riferimento rettangolare. È infatti evidente che ogni trasformazione lineare invertibile delle coordinate trasforma i coefficienti dell'equazione ma lascia invariata la sua struttura formale schematizzata dalla a02(2).

Questo apre un'ampia possibilità di scelta per i riferimenti rettangolari nei quali l'equazione, limitatamente a specifici campi di variabilità dei coefficienti in gioco, assuma forme particolarmente semplici. In effetti troveremo equazioni specifiche particolarmente semplici che consentono di ricavare agevolmente le proprietà dei corrispondenti tipi di quadriche.
Queste equazioni, come spesso si decide, sono qualificate come **equazioni canoniche** e le superfici corrispondenti si qualificano come **superfici canoniche**.

G52 a.04 Precisiamo alcuni termini e notazioni per le equazioni delle quadriche.
Ciascuna di queste si può considerare sotto la forma

$$Q(x,y,z) \;=\; Q^Q(x,y,z)+Q^L(x,y,z) \;=\; 0 \quad \text{dove}$$

$$Q^Q(x,y,z) \;:=\; a_{1,1}\,x^2+a_{2,2}\,y^2+a_{3,3}\,z^2+2\,a_{1,2}\,x\,y+a_{2,3}\,y\,z+a_{1,3}\,x\,z \qquad \text{e} \tag{1}$$

$$Q^L(x,y,z) \;:=\; 2\,a_{1,4}x+2\,a_{2,4}\,y+2\,a_{3,4}\,z+a_{4,4}\,x\ .$$

Mentre in Q^Q si hanno i termini di secondo grado, Q^L si dice parte lineare dell'equazione generale.
I coefficienti $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,3}$, $a_{1,2}$, $a_{2,3}$ e $a_{1,3}$ sono chiamati **coefficienti dominanti delle equazioni**, i restanti coefficienti della parte lineare ed $a_{4,4}$ sono detti termini costanti dell'equazione.

G52 a.05 Vediamo l'effetto di una traslazione del sistema di riferimento Oxyz nel sistema $Ox'y'z'$ espressa dalle relazioni

$$\begin{cases} x \;=x'+t_1 \\ y \;=y'+t_2 \\ z \;=z'+t_3 \end{cases}, \tag{1}$$

Sostituendo nella a04(1) si trova l'equazione

$$Q^Q(x',y',z')+2\,a'_{1,4}\,x'+2\,a'_{2,4}\,y'+2\,a'_{3,4}\,z'+a'_{4,4} \;=\; 0 \qquad \text{dove} \tag{2}$$

$$\begin{cases} a'_{1,4} \;=\; a_{1,4}+a_{1,1}t_1+a_{1,2}\,t_2+a_{1,3}\,t_3 \\ a'_{2,4} \;=\; a_{2,4}+a_{1,2}\,t_1+a_{2,2}\,t_2+a_{2,3}\,t_3 \\ a'_{3,4} \;=\; a_{3,4}+a_{1,3}\,t_1+a_{2,3}\,t_2+a_{3,3}\,t_3 \\ a'_{4,4} \;=\; a_{4,4}+a_{1,1}\,{t_1}^2+a_{2,2}\,{t_2}^2+a_{3,3}\,{t_3}^2 \\ \qquad\qquad +2\,a_{1,2}\,t_1\,t_2+2\,a_{2,3}\,t_2\,t_3+2\,a_{1,3}\,t_1\,t_3 \\ \qquad\qquad +2\,a_{1,4}\,t_1+a_{2,4}\,t_2+a_{3,4}\,t_3 \end{cases} \tag{3}$$

Possiamo quindi concludere che ogni traslazione del sistema di riferimento rettangolare lascia invariati i coefficienti dominanti e modifica i rimanenti secondo le espressioni lineari precedenti.

Può essere utile dare alla (1) e alla (2) le seguenti forme più concise che si servono di vettori tridimensionali e di una matrice di ordine 3:

$$\mathsf{x} \;=\; \mathsf{y}' + \mathsf{t} \qquad , \qquad \begin{cases} \mathsf{a}' &= \mathsf{a} + A\,\mathsf{t} \\ a'_{4,4} &= \mathsf{t}^{\top} A\,\mathsf{t} + \mathsf{a}\cdot\mathsf{t} \end{cases} , \tag{4}$$

G52 a.06 Vediamo l'effetto di una rotazione del sistema di riferimento Oxyz nel sistema $Ox'y'z'$ espressa dalle relazioni

$$\begin{cases} x = r_{1,1}x' + r_{1,2}y' + r_{1,3}\,z' \\ y \;= r_{2,1}\,x' + r_{2,2}\,y' + r_{2,3}\,z' \\ x \;= r_{3,1}\,x' + r_{3,2}\,y' + r_{3,3}\,z' \end{cases} , \tag{1}$$

dove per $i, j = 1, 2, 3$ il coefficiente $r_{i,j}$ esprime il coseno dell'angolo tra gli assi Ox_i e Ox'_j; in altre parole la matrice degli $r_{i,j}$ è la matrice (ortogonale) dei coseni direttori della rotazione del sistema di riferimento cambiamento .

Sostituendo nella a04(1) si trova un'equazione della forma

$$a'_{1,1}x'^2 + a'_{2,2}y'^2 + a'_{3,3}z'^2 + 2a'_{1,2}x'y' + 2a'_{2,3}y'z' + 2a'_{1,3}x'z' + 2a'_{1,4}x' + 2a'_{2,4}y' + 2a'_{3,4}z' + a'_{a,4} \; . \tag{2}$$

Con semplici calcoli si constata che

- i coefficienti dominanti della (2) dipendono solo dai coefficienti dominanti dell'equazione trasformata e dai parametri $r_{i,j}$ della rotazione;
- i coefficienti $a'_{i,4}$ $(i = 1, 2, 3)$ dipendono solo dai coefficienti $a_{i,4}$ $(i = 1, 2, 3)$ e dai parametri $r_{i,j}$ e si annullano tutti se sono tutti nulli gli omologhi dell'equazione trasformata;
- $a'_{4,4} \;=\; a_{4,4}$.

Le considerazioni sulle traslazioni e sulle rotazioni del sistema di riferimento danno chiari suggerimenti per la semplificazione dell'equazione delle quadriche. Mediante traslazioni si possono semplificare i termini lineari lasciando invariati i termini dominanti e mediante rotazioni si possono semplificare i termini dominanti.

G52 a.07 L'analisi dell'equazione delle quadriche e la classificazione che ne consegue vengono orientate dal seguente enunciato.

(1) Prop.: L'intersezione di una quadrica Q con un piano qualsiasi è una sezione conica.

Dim.: Dato che la determinazione della superficie non varia al variare del sistema di riferimento cartesiano, ci si può ridurre all'intersezione della superficie a02(1) con il piano $z = 0$. Quindi l'equazione della $\mathsf{Q} \cap [z = 0]$ ha la forma

$$a_{1,1}\,x^2 + 2\,a_{1,2}\,x\,y + a_{2,2}\,y^2 + 2\,a_{1,4}\,x + 2\,a_{2,4}\,y + a_{4,4} \;=\; 0 \; , \tag{1}$$

notoriamente equazione delle sezioni coniche [G50i01.

G52 a.08 Ricordiamo che per centro di una figura geometrica nello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ sui numeri reali intendiamo un punto-RRR che sia centro di simmetria per la figura in causa. Siricorda inoltre che il centro di una gigura geometrica deve essere unico.

Vedremo che esistono quadriche prive di centro (i paraboloidi che vedremo in :e), quadriche dotate di un unico centro (ad esempio la più semplice delle quadriche, la sfera) e quadriche degeneri aventi i centri costituenti una retta (cilindri di sezioni coniche dotate di centro) o un piano.

Sia Q una quadrica dotata di centro nel punto $C = \langle x_C, y_C, z_C \rangle \in \mathbb{R}^{\times 3}$ individuata da un'equazione della forma a02(1) in qualche sistema di riferimento.
Effettuando la traslazione ***Trsl*** $(C - \mathbf{0}_3)$ si trova per la Q un'equazione della forma a05(2).

(1) Prop.: L'equazione della forma a05(2) delle quadrica Q presenta i coefficienti $a'_{1,4}$, $a'_{1,4}$ e $a'_{1,4}$ nulli sse ha come centro l'origine del sistema di riferimento.

Dim.: La simmetria centrale con centro nell'origine trasforma la corrispondente equazione della forma a05(2) nell'equazione che differisce dall'originale solo per il segno opposto dei termini nella x, nella y e nella z. Di conseguenza $a'_{1,4} = a'_{1,4} = a'_{1,4} = 0$ implica che equazione originale ed equazione trasformata sono equivalenti.
Viceversa l'equivalenza delle due equazioni comporta l'annullarsi della parte $2\,a'_{1,4}\,x' + 2\,a'_{2,4}\,y' + 2\,a'_{3,4}\,z'$ dell'equazione ∎

Dunque una quadrica è dotata di centro sse è possibile sottoporre la sua equazione della forma a02(1) a una traslazione che la porti alla forma a05(2) con $a'_{1,4} = a'_{1,4} = a'_{1,4} = 0$.
Secondo le prime equazioni a05(3) questo è possibile sse è risolvibile il sistema lineare

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{1,1}\,x_C + a_{1,2}\,y_C + a_{1,3}\,z_C = a_{1,4} \\ a_{1,2}\,x_C + a_{2,2}\,y_C + a_{2,3}\,z_C = a_{2,4} \\ a_{1,3}\,x_C + a_{2,3}\,y_C + a_{3,3}\,z_C = a_{3,4} \end{cases}$$

Possiamo quindi enunciare quanto segue.

(2) Prop.: Una quadrica retta da un'equazione della forma a02(1) possiede centro sse è risolubile il sistema (1) ∎

Osserviamo che per la varietà dei possibili sistemi (1) si possono avere quadriche per le quali (1) non consente soluzioni, quadriche per le quali (1) ha una e una sola soluzione dotate di uno e un solo centro, quadriche con più centri costituenti una retta e quadriche con più centri costituenti un piano.

G52 a.09 Definiamo alcune composizioni polinomiali dei coefficienti dell'equazione generale delle quadriche.

$$\mathcal{I}_1 := a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} \quad , \quad \mathcal{I}_2 := \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{2,3} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{1,3} \\ a_{1,3} & a_{1,1} \end{vmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{I}_3 := \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{vmatrix} \quad \mathcal{I}_4 := \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} \end{vmatrix} \quad .$$

Si dimostra che queste composizioni sono invarianti per ogni cambiamento di riferimento rettangolare.

G52 b. classificazione delle superfici di secondo grado

G52 b.01 Una prima rilevante semplificazione dell'equazione a02(1) consente di eliminare gli addendi relativi ai prodotti di due coordinate diverse.

(1) Prop.: L'equazione delle quadriche in un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale assume la forma

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i,i}\, {x_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{3} a_i\, x_i + a \;=\; 0 \;. \tag{2}$$

Dim.: Introduciamo la funzione della variabile $\mathsf{x} = \langle x, y, z\rangle \in {\mathbb{R}^{\times 3}}_{nz}$

$$F(x,y,z) \;:=\; \frac{a_{1,1}\, x^2 + a_{2,2}\, y^2 + a_{3,3}\, z^2 + 2\, a_{1,2}\, x\, y + a_{1,3}\, x\, z + a_{2,3}\, y\, z}{x^2 + y^2 + z^2} \;. \tag{3}$$

Questa funzione sulla sfera $\mathsf{sphr}(O,1) = \mathbf{Soln}(x^2+y^2+z^2=1)$ è limitata e assume il suo valore minimo o uno dei suoi minimi in un punto M; dato che la $F(x,y,z)$ è una funzione omogenea, $F(kx,ky,kz) = F(x,y,z)$, nel punto M la F assume il suo valore minimo assoluto per il suo intero dominio.

Modifichiamo il sistema di riferimento introducendo tre nuove variabili x', y' e z' collegate alle tre variabili da una rotazione $\boldsymbol{R}$ con centro nell'origine della forma $\langle x,y,z\rangle = \boldsymbol{R}\langle x',y',z'\rangle$ tale da far coincidere la semiretta $\overline{OM}$ con il semiasse Oz positivo.

Rimpiazzando le variabili x, y e z con le espressioni date dalla rotazione si ottengono le espressioni dell'equazione delle quadriche e della F nelle nuove coordinate. Nel nuovo riferimento la forma del denominatore non cambia, in accordo con l'invarianza per rotazione della sfera $\mathsf{sphr}(O,1)$; inoltre il punto di minimo della F è dato da $x'=0$, $y'=0$ e $z'=1$.

Consideriamo la restrizione della F alla retta $Y' := \mathbf{Soln}(x'=0 \wedge z'=1)$ ottenendo la funzione della sola y'

$$F_{\big|_{Y'}} \;=\; \frac{{a'}_{2,2}\, {y'}^2 + 2\, {a'}_{2,3}\, y' + {a'}_{3,3}}{1+{y'}^2} \;.$$

Questa assume il valore minimo per $y'=0$ e di conseguenza

$$\frac{\mathrm{d}f\,(y')}{\mathrm{d}y'} = 0 \quad \text{per} \quad y' = 0 \;.$$

Esplicitando si ottiene

$$\left.\frac{\mathrm{d}f\,(y')}{\mathrm{d}y'}\right|_{y'=0} \;=\; 2\,{a'}_{2,3} \;.$$

Dunque con il nuovo sistema di riferimento nell'equazione delle quadriche manca il termine in $x'\,z'$. Con considerazioni simili sulla funzione ridotta alla retta $X' = \mathbf{Soln}(y'=0 \wedge z'=1)$ si trova che nell'equazione sulle quadriche deve mancare anche il termine in $y'\,z'$.

Dunque nelle variabili x', y' e z' si ha l'equazione

$${a'}_{1,1}\, {x'}^2 + {a'}_{2,2}\, {y'}^2 + {a'}_{3,3}\, {z'}^2 + 2\,{a'}_{1,2}\, x'\, y' + 2\,{a'}_{1,0}\, x' + 2\,{a'}_{2,0}\, y' + 2\,{a'}_{3,0}\, z' + {a'}_{0,0} = 0 \;.$$

Ma il nuovo sistema di riferimento può essere ulteriormente modificato con una rotazione per un opportuno angolo θ intorno all'asse Oz' tale da annullare anche il termine in $x'\,y'$: introduciamo quindi la terna $Ox''y''z''$ con le equazioni

$$\begin{cases} x' \;= x'' \cos\theta + y'' \sin\theta \\ y' \;= -\,x'' \sin\theta + y'' \cos\theta \\ z' \;= z'' \end{cases} \;.$$

In conclusione abbiamo la possibilità di individuare per ogni equazione delle quadriche un sistema di riferimento nel quale tale equazione ha la forma

$$a_{1,1}\,x^2 + a_{2,2}\,y^2 + a_{3,3}\,z^2 + 2\,a_1\,x + 2\,a_2\,y + 2\,a_3\,z + a \;=\; 0 \tag{4}$$

G52 b.02 Per specificare ulteriormente l'equazione delle quadriche a04(1) dobbiamo distinguere tre casi riguardanti i coefficienti delle potenze ${x_i}^2$:

(A) Tutti i coefficienti $a_{i,i}$ sono diversi da 0.

(B) Due coefficienti dei quadrati ${x_i}^2$ sono diversi da 0, mentre il rimanente è nullo.

(C) due coefficienti dei quadrati ${x_i}^2$ sono nulli ed il rimanente è diverso da 0.

G52 b.03 Caso (A) Passiamo a un nuovo sistema di riferimento con la traslazione dell'origine espressa dalle seguenti formule:

$$x' \;:=\; x + \frac{a_1}{a_{1,1}} \qquad , \qquad y' \;:=\; y + \frac{a_2}{a_{2,2}} \qquad , \qquad z' \;:=\; z + \frac{a_3}{a_{3,3}}\ . \tag{1}$$

L'equazione delle superfici assume la forma priva dei monomi di primo grado

$$\alpha\,{x'}^2 + \beta\,{y'}^2 + \gamma\,{z'}^2 + \delta \;=\; 0\ . \tag{2}$$

A questo punto occorre distinguere 4 sottocasi.

(A1) $\delta = 0$: la superficie viene detta **cono**; se α, β e γ sono reali dello stesso segno si tratta di un cono immaginario; se i tre coefficienti sono reali e di segni diversi si tratta di un cono reale.

(A2) $\delta \neq 0$ e i tre coefficienti dei termini al quadrato hanno lo stesso segno: la superficie si dice **ellissoide**; se α, β, γ e δ hanno lo stesso segno si tratta di un cono immaginario, se il segno di δ è l'opposto di quello di α, β e γ si ha un cono reale.

(A3) $\delta \neq 0$ e dei quattro coefficienti α, β, γ e δ due hanno un segno e due il segno opposto, ovvero dei coefficienti α, β e γ uno solo ha il segno di δ; in tal caso la superficie si dice **iperboloide a una falda** o iperboloide a una nappa.

(A4) $\delta \neq 0$ e dei tre coefficienti α, β e γ due hanno il segno di δ e uno ha il segno opposto; in tal caso la superficie si dice **iperboloide a due falde** o iperboloide a due nappe.

G52 b.04 Caso B Senza ledere la generalità dello studio basta supporre che all'equazione manchi il termine in z^2: gli altri due casi si ottengono con semplici scambi tra le variabili.
Ancora si passa a un nuovo sistema di riferimento mediante una traslazione dell'origine; questa ora è data dalle formule:

$$x' \;:=\; x + \frac{a_1}{a_{1,1}} \qquad , \qquad y' \;:=\; y + \frac{a_2}{a_{2,2}} \qquad , \qquad z' \;:=\; z\ . \tag{1}$$

L'equazione delle superfici assume la forma

$$\alpha\,{x'}^2 + \beta\,{y'}^2 + 2\,p\,z' + q \;=\; 0\ . \tag{2}$$

Anche a questo punto occorre distinguere 3 sottocasi.

(B1) $p = q = 0$: la superficie si decompone in due piani espressi dalla formula

$$x' \pm \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\,y' \;=\; 0\ . \tag{3}$$

Se α e β hanno lo stesso segno si tratta di piani immaginari, mentre se α e β hanno segni opposti si tratta di piani reali.

(B2) $p = 0$ e $q \neq 0$: la superficie è un cilindro, immaginario se α, β e q hanno lo stesso segno, reale se uno dei tre coefficienti ha segno diverso dagli altri due. Più precisamente se α e β hanno lo stesso segno si ha un cilindro ellittico, se hanno segni opposti si ha un cilindro iperbolico.

(B3) $p \neq 0$: in questo caso conviene effettuare un'altra traslazione dell'origine in direzione verticale

$$x'' := x' \quad , \quad y'' := y' \quad , \quad z'' := z' + \frac{a_3}{a_{3,3}} \, , \tag{4}$$

giungendo all'equazione delle superfici

$$\alpha\, x''^2 + \beta\, y''^2 + 2\, p\, z'' = 0 \, . \tag{5}$$

Queste superfici sono dette **paraboloidi**; più distintamente, se α e β hanno lo stesso segno si parla di **paraboloidi ellittici**, se hanno segni opposti si parla di **paraboliodi iperbolici**.

G52 b.05 Caso C Senza ledere la generalità basta considerare che sia $a_{3,3} \neq 0$ e $a_{1,1} = a_{2,2} = 0$. Per questo caso è opportuna la seguente traslazione dell'origine in verticale

$$x' := x \quad , \quad y' := y \quad , \quad z' := z + \frac{a_3}{a_{3,3}} \, , \tag{1}$$

trasformazione che conduce all'equazione

$$\gamma\, z'^2 + p\, x + q\, y + r = 0 \, . \tag{2}$$

Per questa relazione occorre distinguere 2 sottocasi.

(C1) $p = q = 0$: la superficie è costituita da due piani paralleli espressi dalla equazione

$$z = \pm\sqrt{-\frac{r}{\gamma}} \, . \tag{3}$$

Se γ ed r hanno lo stesso segno si hanno piani immaginari, mentre se hanno segni opposti si tratta di piani reali.

(C2) Almeno uno dei coefficienti p e q è diverso da 0: conviene effettuare un nuovo cambiamento di riferimento consistente in una rotazione intorno all'asse Oz' tale da trasformare il piano verticale $p\, x + q\, y + r = 0$ nel piano $Oy'z'$. Con tale trasformazione si giunge all'equazione della forma

$$\gamma\, z'^2 + \delta\, x' = 0 \, ; \tag{4}$$

La superficie ottenuta viene chiamata **cilindro parabolico**.

G52 c. ellissoidi

G52 c.01 L'equazione deglie ellissoidi ha la forma

$$\alpha\, x^2 + \beta\, y^2 + \gamma\, z^2 + \delta = 0 \ ; \tag{1}$$

queste figure sono dunque quadriche dotate di centro posto nell'origine.
Nel caso si abbia $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, introduciamo i reali positivi a, b e c tali che $\delta/\alpha = a^2$, $\delta/\beta = b^2$ e $\delta/\gamma = c^2$.
L'equazione degli ellissoidi assume allora la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 \ = \ 0 \ . \tag{2}$$

Evidentemente nessun punto di $\mathbb{R}^{\times 3}$ può appartenere all'insieme rappresentato: a esso appartengono solo punti di $\mathbb{C}^{\times 3}$ con le tre coordinate immaginarie e si dice di avere un **ellissoide immaginario**.

Supponiamo invece di avere $\alpha, \beta, \gamma > 0$ e $\delta < 0$; introduciamo i reali positivi a, b e c tali che $\delta/\alpha = -a^2$, $\delta/\beta = -b^2$ e $\delta/\gamma = -c^2$. Abbiamo allora la cosiddetta **equazione canonica degli ellissoidi**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \ = \ 1 \ . \tag{3}$$

I parametri a, b e c sono detti lunghezze dei semiassi dell'ellissoide o anche, confidando che il contesto eviti le ambiguità, **semiassi dell'ellissoide**.
Questa quadrica è una superficie in $\mathbb{R}^{\times 3}$ possiede anche una rilevanza applicativa.

G52 c.02 Dalla (3) si deduce subito che i piani Oxy, Oyz e Ozx sono piani di simmetria speculare per la superficie e che l'origine è il suo centro di simmetria.

È poi evidente che la superficie è completamente contenuta nel parallelepipedo retto determinato dai vertici opposti $\langle a, b, c\rangle$ e $\langle -a, -b, -c\rangle$, e quindi è una superficie limitata.

Si ha inoltre che tutte le intersezioni dell'ellissoide con un piano che le interseca sono ellissi (eventualmente degenerate in un punto): infatti devono essere sezioni coniche e le sole coniche limitate sono le ellissi.

Intersecando la quadrica con un piano $z = \overline{z}$ con $0 \le \overline{z} \le c$ sono date dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \ = \ 1 - \frac{\overline{z}^2}{c^2} \ . \tag{1}$$

Equazioni simili per le intersezioni con piani della forma $x = \overline{x}$ ed $y = \overline{y}$.

Se i tre parametri sono tutti diversi si parla di **ellissoide scaleno**

G52 c.03 Se due dei parametri coincidono si hanno gli **ellissoidi di rotazione**, superfici chiamate anche sferoidi. Infatti le intersezioni della quadrica con $a = b$ con piani $z = \overline{z}$ per la c03(1) sono circonferenze, l'asse Oz è asse di rotazione e la superficie si può generare ruotando intorno alla retta Oy l'ellisse espressa da $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \ \wedge \ 1$ e da $y = 0$.

Si parla di **ellissoide prolato** nel caso di ellissoide di rotazione a forma di pallone da rugby, cioè quando i due semiassi uguali sono minori del rimanente; per esempio nel caso dell'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \quad \text{con} \quad a>b\ . \tag{1}$$

Si parla di **ellissoide oblato** nel caso di ellissoide di rotazione a forma di lenticchia, cioè quando i due semiassi uguali sono maggiori del terzo, come per la quadrica data dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{con} \quad a>c\ . \tag{2}$$

G52 c.04 Se $a=b=c$ si ha la sfera di raggio a. Le quadriche più semplici sono le **sfere**.

$$x^2+y^2+z^2 \ = \ r^2\ . \tag{1}$$

Il volume della precedente sfera è notoriamente $\dfrac{4}{3}\,\pi\,r^3$.

Si osserva che l'ellissoide scaleno dato da c01(3) si può ottenere dalla sfera (1) sottoponendo lo spazio a tre omotetie unidirezionali esprimibili con le relazioni

$$\begin{cases} x' \ = x\dfrac{a}{r} \\ y' \ = y\dfrac{b}{r} \\ z' \ = z\dfrac{c}{r} \end{cases}\ . \tag{2}$$

Da questo fatto segue che il volume del solido delimitato da un'ellissoide con semiassi a, b e c è $\dfrac{4}{3}\,\pi\,a\,b\,c$.

G52 c.05 Gli ellissoidi hanno grande importanza applicativa in quanto servono per modellizzare molti sistemi fisici e meccanici (sistemi rigidi, nuclei atomici, molecole, microorganismi, ...). Conviene quindi segnalare altri fatti che li riguardano.

L'ellissoide esprimibile con la c01(2) si può esprimere anche mediante coordinate polari con sistemi della seguente forma

$$\begin{cases} y \ = b\,\cos\,\phi\,\sin\,\theta \\ z \ = c\,\sin\phi \end{cases} \qquad \text{dove} \quad -\,\pi/2\le\phi\le\pi/2 \ \text{ e } \ -\,\pi\le\theta\le\pi\ . \tag{1}$$

Il calcolo della superficie dell'ellissoide è piuttosto impegnativo e quando si ha $a\ge b\ge c$ è dato dalla seguente espressione dovuta a Legendre

$$2\,\pi\,c^2+\frac{2\,\pi\,a\,b}{\sin\phi}\left(E(\phi,k)\,\sin^2\,\phi+F(\phi,k)\,\cos^2\,\phi\right) \quad \text{dove} \quad \cos\,\phi:=\frac{c}{a}\ ,\ k^2:=\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)} \tag{2}$$

e dove $F(\phi,k)$ ed $E(\phi,k)$ denotano gli integrali ellittici incompleti, risp., di prima e seconda specie:

$$F(\phi,k)\ :=\ \int_0^{\sin\phi}\mathrm{d}x\,\sqrt{\frac{1-k^2\,x^2}{1-x^2}}\ , \tag{3}$$

$$E(\phi,k)\ :=\ \int_0^{\sin\phi}\mathrm{d}x\,\sqrt{\frac{1}{(1-x^2)(1-k^2\,x^2)}}\ . \tag{4}$$

Per gli ellissoidi di rotazione si hanno invece formule esprimibili elementarmente. Per l'ellissoide oblato si ha

$$2\,\pi\,a^2\,\left(1+\frac{i-e^2}{e}\,\operatorname{artanh}\,e\right)\quad\text{dove}\quad e^2\;:=\;1-\frac{c^2}{a^2}\;\;(c\le a)\;. \tag{5}$$

Per l'ellissoide prolato si trova invece

$$2\,\pi\,a^2\,\left(1+\frac{c}{a\,e}\,\arcsin\,e\right)\quad\text{dove}\quad e^2\;:=\;1-\frac{a^2}{c^2}\;\;(c\ge a)\;. \tag{6}$$

G52 d. iperboloidi

G52 d.01 Consideriamo per prima l'equazione canonica dell'**iperboloide a una falda**:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} \;=\; 1\ . \tag{1}$$

Anche questa relazione dice che per la quadrica individuata i piani Oxy, Oyz e Oxz sono piani di simmetria speculare e che l'origine è il suo centro.

Se si interseca l'iperboloide (1) con un piano $z=\overline{z}$ per qualsiasi $\overline{z}\in\mathbb{R}$ si ottiene l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2} \;=\; 1 \qquad \text{dove} \quad A \;:=\; a\sqrt{1+\frac{\overline{z}^2}{c^2}}\ ,\ B \;:=\; b\sqrt{1+\frac{\overline{z}^2}{c^2}}\ . \tag{2}$$

Queste ellissi hanno come semiassi A e B e quindi diventano sempre più estese al crescere di $|\overline{z}|$.

Tra di esse l'ellisse più piccola giace su Oxy, ha semiassi a e b e viene detta **ellissi di gola**.
Questo dice che la superficie è connessa, ovvero che presenta una sola falda.

Queste considerazioni giustificano l'adozione del nome **iperboloide ellittico** come sinonimo di iperboloide a una falda.

Le sezioni dell'iperboloide a una falda con i piani $x=\overline{x}$ sono le iperboli individuate, dalle equazioni

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{\overline{x}^2}{a^2} \quad \text{per}\ \ |\overline{x}|<|a| \quad \text{e} \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2} \;=\; \frac{\overline{x}^2}{a^2}-1 \quad \text{per}\ \ |a|<|\overline{x}|\ . \tag{3}$$

Queste per $|\overline{x}|=|a|$ degenerano nelle due rette che soddisfano l'equazione

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} \;=\; 0 \qquad \text{ovvero} \qquad y \;=\; \pm\frac{b}{c}z\ . \tag{4}$$

Situazione del tutto simile si ha scambiando la x e la a, risp., con y e b.

G52 d.02 L'iperboloide a una falda si può anche individuare con ciascuno dei seguenti sistemi di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x \;=\; a\sqrt{1+u^2}\,\cos\phi \\ y \;=\; b\sqrt{1+u^2}\,\sin\phi \\ z \;=\; c\,u \end{cases} \qquad \text{per} \qquad u\in\mathbb{R}\ ,\ 0\le\phi<2\,\pi\ . \tag{1}$$

$$\begin{cases} x \;=\; a(\cos\psi \mp u\,\sin\psi \\ y \;=\; b(\sin\psi \pm u\,\cos\psi \\ z \;=\; \pm\,c\,u \end{cases} \qquad \text{per} \qquad u\in\mathbb{R}_{0+}\ ,\ 0\le\psi<\pi\ . \tag{2}$$

$$\begin{cases} x \;=\; a\,\cosh v\,\cos\eta \\ y \;=\; b\,\sinh v\,\sin\eta \\ z \;=\; c\,\sinh v \end{cases} \qquad \text{per} \qquad v\in\mathbb{R}\ ,\ 0\le\eta<\pi\ . \tag{3}$$

G52 d.03 Si constata che se $a = b$ le sezioni con i piani orizzontali sono circonferenze; di conseguenza Oz è asse di simmetria rotazionale della quadrica e si parla di **iperboloide a una falda di rotazione** o anche di iperboloide a una falda circolare.

Caso ancor più particolare si ha con $a = b = c$.

G52 d.04 Passiamo all'**equazione canonica dell'iperboloide a due falde**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \;=\; -1 \;. \tag{1}$$

Anche questa relazione dice che per la quadrica individuata i piani Oxy, Oyz e Oxz sono piani di simmetria speculare e che l'origine è il suo centro.

Le intersezioni dell'iperboloide (1) con i piani orizzontali $z = \overline{z}$ sono ellissi di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \;=\; \frac{\overline{z}^2}{c^2} - 1 \tag{2}$$

sse $|\overline{z}| \geq c$; per $|\overline{z}| < c$ non si ha nessun punto reale della superficie.

Le intersezioni della (1) con piani $y = \overline{y}$ sono invece iperboli di equazione

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} \;=\; 1 + \frac{\overline{y}^2}{b^2} \;, \tag{3}$$

quale che sia il reale $\overline{y}$.
Similmente le intersezioni della (1) con piani $x = \overline{x}$ sono iperboli di equazione

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{a^2} \;=\; 1 + \frac{\overline{x}^2}{b^2} \;. \tag{4}$$

Iperboli sono anche le intersezioni con i piani contenenti Oz.

Queste constatazioni chiariscono la forma di queste quadriche e in particolare l'esistenza delle due falde.
Esse implicano anche che un iperboloide a due falde avente il segmento spaziale AB come asse minore può essere definito come luogo dei punti $P \in \mathbb{R}^{\times 3}$ tali che la differenza $\overline{AP} - \overline{BP}$ sia costante.

G52 d.05 L'iperboloide a due falde si può esprimere anche con le seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x \;= a \sinh v \cos \eta \\ y \;= b \sinh v \sin \eta \\ z \;= c \pm \cosh v \end{cases} \qquad \text{per} \qquad v \in \mathbb{R} \;,\; 0 \leq \eta < \pi \;. \tag{1}$$

Può essere utile anche considerare l'iperboloide a due falde orientato secondo l'asse Ox, quadrica retta dall'equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \;=\; 1 \;. \tag{2}$$

Esso può essere espresso anche dalle seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x \;= a \cosh v \cosh \eta \\ y \;= b \sinh v \cosh \eta \\ z \;= c \sinh v \end{cases} \qquad \text{per} \qquad v \in \mathbb{R} \;,\; 0 \leq \eta < \pi \;. \tag{3}$$

Queste possono essere utilmente confrontate con le d02(3).

G52 d.06 Se $a = b$, e solo in questo caso, le intersezioni con piani $z = \overline{z}$ sono circonferenze e si hanno **iperboloidi a due falde di rotazione**, chiamate anche iperboloidi a due falde circolari.
Queste superfici si possono ottenere ruotando una iperbole intorno alla retta che passa per il suo asse minore.

Chiaramente ogni iperboloide non circolare si può ottenere da uno circolare trasformato da una omotetia unidirezionale secondo una orientazione ortogonale al suo asse di simmetria circolare.

Questa quadrica si può individuare anche mediante le seguenti espressioni parametriche

$$(1) \qquad \begin{cases} x &= a\sqrt{1+u^2}\,\cos\psi \\ y &= a\sqrt{1+u^2}\,\sin\psi \\ z &= c\,u \end{cases} , \qquad \text{per} \qquad u \in \mathbb{R}\ ,\ 0 \le \eta < \pi\ .$$

G52 e. paraboloidi

G52 e.01 Un primo genere di paraboloide, il **paraboloide ellittico**, lo riferiamo all'equazione canonica

$$\frac{z}{c} \;=\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\ . \tag{1}$$

In essa assumiamo sia $c > 0$.
Da essa si ricava immediatamente che i suoi punti, a esclusione dell'origine, appartengono tutti al semispazio $z > 0$ e che i piani Oxz e Oyz sono piani di simmetria speculare.

Le sue intersezioni con i piani $z = \overline{z}$ per ogni $\overline{z} \geq 0$ sono ellissi di equazioni

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \;=\; 1 \qquad \text{dove } A \;:=\; a\sqrt{\frac{\overline{z}}{c}}\ . \tag{2}$$

Le sue intersezioni con i piani $y = \overline{y}$ e con i piani $x = \overline{x}$ sono invece, risp., le parabole

$$\frac{z}{c} \;=\; \frac{\overline{y}^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{z}{c} \;=\; \frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\ . \tag{3}$$

Chiaramente sono parabole anche le intersezioni del paraboloide (1) con ogni piano parallelo all'asse Oz, asse di simmetria per questa quadrica.

Da queste constatazioni si ricava che questi paraboloidi hanno una forma che si può descrivere come una coppa volta verso l'alto a sagoma ellittica e illimitata.

G52 e.02 Si osserva che le parabole ottenute come intersezioni del paraboloide con piani $y = \overline{y}$, curve date dalla e01(3), sono congruenti. Stessa osservazione per le intersezioni con piani $x = \overline{x}$.

Di conseguenza il paraboloide dato dalla e01(1) si può ottenere "meccanicamente" sottoponendo la parabola determinata da $\frac{z}{c} = \frac{\overline{x}^2}{a^2}$ e da $y = 0$ alla traslazione continua ottenuta muovendo il suo vertice sulla parabola individuata da $\frac{z}{c} = \frac{\overline{y}^2}{b^2}$ e da $x = 0$.

G52 e.03 Se in particolare $a = b$ le sezioni del paraboloide ellittico con i piani $z = \overline{z}$ sono circonferenze e quindi la retta Oz è un suo asse di simmetria rotazionale e si tratta di una superficie che può essere generata ruotando la parabola data da entrambe le espressioni e01(3) intorno alla retta Oz.
Questa quadrica viene chiamata **paraboloide di rotazione** o paraboloide circolare.

Secondo questa superficie sono costruiti i cosiddetti "specchi parabolici", dispositivi che sarebbe meglio chiamare riflettori paraboloidici.

Nelle antenne paraboliche si sfrutta la proprietà di concentrare i raggi riflessi dei raggi diretti come l'asse di simmetria rotazionale della figura in un unico punto, il fuoco delle parabole ottenute per intersezione con piani contenenti l'asse stesso. Viceversa i proiettori parabolici sfruttano la proprietà di inviare radiazioni provenienti dal fuoco e riflesse dalla superficie del paraboloide nella sola direzione dell'asse. Un tale proiettore costituiva la lanterna del `Faro di Alessandria (wi)`.

Si ottiene un paraboloide di rotazione anche come superficie di un liquido posto in rotazione.

Questa configurazione viene sfruttata nei telescopi a specchio liquido che utilizzano liquidi come il mercurio [`Liquid mirror telescopes (we)`].

Anche per i paraboloidi va osservato che una superficie generica data da un'equazione simile alla e01(1) si può ottenere sottoponendo un paraboloide ellittico retto da un'equazione come la $\frac{z}{c} = \frac{x^2+y^2}{a^2}$ ad una omotetia unidirezionale espressa dalla relazione $y' = \frac{a}{b}y$.

G52 e.04 Il secondo genere di paraboloide è chiamato **paraboloide iperbolico** ed è espresso dalla corrispondente **equazione canonica del paraboloide iperbolico**

$$\frac{z}{c} \;=\; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \;. \tag{1}$$

Anche in questa equazione assumiamo sia $c > 0$ e da essa si ricava immediatamente che i piani Oxz e Oyz sono piani di simmetria speculare e che si tratta di una superficie illimitata nella quale ciascuna delle coordinate assume valori illimitati.

Le sue intersezioni con i piani $z = \overline{z}$ per ogni $\overline{z}$ reale sono iperboli. L'iperbole relativa a $z = 0$ risulta degenerata nella coppia di rette fornite dalla equazione

$$\frac{x^2}{a^2} \;=\; \frac{y^2}{b^2} \;. \tag{2}$$

Per $\overline{z} > 0$ si hanno le iperboli

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} \;=\; 1 \qquad \text{dove } A \;:=\; a\sqrt{\frac{\overline{z}}{c}} \;\;,\;\; B \;:=\; b\sqrt{\frac{\overline{z}}{c}} \;. \tag{3}$$

Per $\overline{z} < 0$ si hanno le iperboli

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{x^2}{A^2} \;=\; 1 \qquad \text{dove } A \;:=\; a\sqrt{\frac{-\overline{z}}{c}} \;\;,\;\; B \;:=\; b\sqrt{\frac{-\overline{z}}{c}} \;. \tag{4}$$

Le intersezioni del paraboloide (1) con i piani $y = \overline{y}$ e con i piani $x = \overline{x}$ sono invece, risp., le parabole

$$\frac{z}{c} \;=\; \frac{x^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{z}{c} \;=\; \frac{y^2}{b^2} - \frac{\overline{x}^2}{a^2} \;. \tag{5}$$

Chiaramente sono parabole anche le intersezioni del paraboloide (1) con ogni piano parallelo all'asse Oz.

Da queste constatazioni si ricava che questi paraboloidi hanno una forma che si può descrivere come una sella illimitata

G52 e.05 Si osserva che le parabole ottenute come intersezioni del paraboloide con piani $y = \overline{y}$, curve date dalla e04(4), sono congruenti. Stessa osservazione per le intersezioni con piani $x = \overline{x}$.

Di conseguenza il paraboloide dato dalla e04(1) si può ottenere "meccanicamente" sottoponendo la parabola determinata da $\frac{z}{c} \;=\; \frac{\overline{x}^2}{a^2}$ e da $y = 0$ alla traslazione continua ottenuta muovendo il suo vertice sulla parabola individuata da $\frac{z}{c} \;=\; -\frac{\overline{y}^2}{b^2}$ e da $x = 0$.

G52 f. coni e cilindri

G52 f.01 Definiamo **cono reale di secondo grado** ogni superficie K caratterizzata dall'equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} \;=\; 0\;, \tag{1}$$

(1) Prop.: Il cono K è generato da rette che passano per l'origine.

Dim.: Sia $P_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ un generico punto del cono; vale quindi l'equazione $\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}-\frac{{z_0}^2}{c^2} \;=\; 0$. La retta passante per $\mathbf{0}_3$ e per P_0 è l'insieme dei punti $\{k\in\mathbb{R} :|\; \langle k\,x_0, k\,y_0, k\,z_0\rangle\}$ ed evidentemente ciascuno di questi punti soddisfa la relazione precedente, ossia la (1) ∎

Ricordiamo che le rette appartenenti a un cono sono dette **rette generatrici del cono** stesso e il punto in cui passano tutte le generatrici viene chiamato **vertice del cono**.
Dunque ogni cono reale è una superficie rigata e si può considerare unione disgiunta delle sue generatrici.

Le sezioni del cono K con i piani $z = z_0$ sono le ellissi che soddisfano le equazioni

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1 \qquad \text{con} \quad A := a\frac{z_0}{c}\;\;,\;\; B := b\frac{z_0}{b} \tag{2}$$

Il cono quindi si può descrivere come generato meccanicamente da una retta $\overline{OP_0}$ al muoversi del punto P_0 sull'ellisse determinata da $z = z_0$ e dalla (2).

G52 f.02 Se $a = b$ le curve -(2) sono circonferenze, la K si dice **cono circolare retto**, la retta Oz è suo asse di simmetria rotazionale e questa superficie si può pensare generata dalla rotazione intorno ad Oz di una retta come la $\textbf{Soln}\left(x=0\;\wedge\;z=y\,\frac{b}{c}\right)$.

È anche evidente che il cono espresso dalla f01(1) si può pensare ottenuto da un cono circolare retto di equazione

$$x^2+y^2 \;=\; z^2\,\left(\frac{a}{c}\right)^2\;, \tag{2}$$

applicando una omotetia unidirezionale caratterizzata dalla relazione $y' = y\,\frac{b}{a}$.

G52 f.03 Il cono f01(1) si può considerare associato significativamente agli iperboloidi ad una falda e due falde aventi come equazioni canoniche, risp.,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} \;=\; 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} \;=\; -1\;.$$

Tutti i piani passanti per Oz intersecano i due iperboloidi lungo due iperboli e il cono lungo due generatrici che sono asintoti di entrambe le suddette iperboli.
Per esempio le curve lungo le quali il piano Oxy interseca cono, iperboloide a una falda e iperboloide a due falde sono espresse, risp., da

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2} \;=\; 0 \quad\;, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2} \;=\; 1 \quad, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2} \;=\; -1\;.$$

Il cono f01(1) viene detto **cono asintotico degli iperboloidi** considerati sopra.

Dunque i coni reali di secondo grado si possono significativamente considerare quadriche degeneri.

G52 f.04 Segnaliamo che in matematica e soprattutto in molte applicazioni il termine cono viene usato con l'aggiunta di altre specificazioni con vari significati diversi da quello qui usato di cono reale di secondo grado .

Spesso viene usato il termine "cono infinito" per individuare l'unione di un insieme di semirette in $\mathbb{R}^{\times 3}$ aventi in comune una estremità e ottenute facendo variare un altro punto delle semirette in un insieme piano generico chiamato base del cono.
La variante nella quale le semirette sono sostituite dalle rette viene chiamata "cono doppiamente infinito". Nel caso l'insieme piano che intersecano le generatrici sia una sezione conica si ottiene il presente cono reale di secondo grado.
Per i coni infiniti e doppiamente infiniti aventi come base una figura bidimensionale andrebbero distinti i coni come figure solide (tridimensionali) dalle corrispondenti superfici coniche.

Nella applicazioni concrete si tratta con i coni limitati, figure tridimensionali che hanno come frontiera una superficie conica costituita da semirette e l'intersezione del solido corrispondente con un piano non passante per il vertice.

G52 f.05 Chiamiamo **cilindro reale di secondo grado** ogni superficie costituita da rette parallele che interseca un piano non parallelo a tali rette lungo una sezione conica; le rette suddette sono chiamate **rette generatrici del cilindro**.
I cilindri di secondo grado sono individuabili con equazioni canoniche nelle quali le generatrici sono parallele ad Oz e intervengono le sezioni coniche intersecate nel piano Oxy ortogonale alle generatrici.

G52 f.06 Si distinguono i **cilindri ellittici** caratterizzati dall'equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1 \;.$$

Questa equazione ha la stessa forma dell'equazione canonica delle ellissi; la assenza della coordinata z dice che l'insieme individuato è invariante rispetto a ogni traslazione nella direzione dell'asse Oz.

Se $a = b$ si parla di **cilindro circolare retto**; questo cilindro è una superficie he presenta un asse di simmetria rotazionale, l'asse Oz, ed è ottenibile ruotando intorno a tale asse una retta a esso parallela, per esempio la retta $\mathsf{Soln}(x = 0 \;\wedge\; y = a)$.

Ogni cilindro ellittico caratterizzato dai parametri a e b si può ottenere applicando a un cilindro circolare caratterizzato dal raggio a una omotetia unidirezionale secondo una direzione ortogonale al suo asse di simmetria e relativa al rapporto b/a.

G52 f.07 Si hanno poi i **cilindri iperbolici** caratterizzati dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1 \tag{1}$$

ed i **cilindri parabolici** caratterizzati dall'equazione

$$y \;=\; \frac{1}{2}\, x^2 \;. \tag{2}$$

Anche i cilindri reali di secondo grado sono considerate quadriche degeneri.

G52 f.08 Ad un cilindro iperbolico C è associato il duetto di piani individuato dal duetto delle rette asintotiche dell'iperbole che C interseca con un piano ortogonale alle sue generatrici. Per esempio al cilindro f06(1) è associato il duetto di piani contenenti la retta Oz espresso dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \;=\; 0 \;.$$

Questa superficie viene chiamata duetto di piani asintotici del cilindro C.
Essa si può considerare un cilindro iperbolico degenere e quindi una quadrica degenere.

Ancor più in particolare i due piani del suddetto duetto potrebbero coincidere. Anche questa figura costituita da due piani coincidenti si può considerare una quadrica degenere: essa può riconoscersi come retta dall'equazione a02(1) nel caso di annullamento di tutti i suoi termini dominanti.

Come altri casi di quadriche reali degeneri vanno segnalati i singoli punti $C \in \mathbb{R}^{\times 3}$, limiti di sfere di centro C per raggi tendenti a 0, e le singole rette $\mathcal{R}$ di $\mathbb{R}^{\times 3}$, limiti di cilindri circolari aventi $\mathcal{R}$ come asse per il raggio delle sezioni circolari tendente a 0.

G52 g. rette generatrici di quadriche

G52 g.01 Consideriamo il paraboloide iperbolico P individuato dall'equazione

$$z \;=\; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\ . \tag{1}$$

Ciascuna delle rette $\mathcal{R}_k$ specificate dalle equazioni

$$z \;=\; k\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \qquad , \qquad 1 \;=\; \frac{1}{k}\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \qquad \text{per} \quad k \in \mathbb{R}_{nz} \tag{2}$$

giace sulla superficie (1). Infatti moltiplicando termine a termine le due equazioni (2) si ottiene la (1).
Si osserva inoltre che due rette $\mathcal{R}_k$ ed $\mathcal{R}_h$ per $h \neq k$ non hanno punti in comune.
Si conclude che ogni paraboloide iperbolico è una superficie rigata che si può esprimere come unione disgiunta della famiglia delle rette $\mathcal{R}_k$ per $k \in \mathbb{R}_{nz}$ e su questa possibile espressione gli iperboloidi possono essere definiti.
Similmente giace sulla superficie (1) ciascuna delle rette $\mathcal{R}'_k$ specificate dalle equazioni

$$z \;=\; k\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \qquad , \qquad 1 \;=\; \frac{1}{k}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \qquad \text{per} \quad k \in \mathbb{R}_{nz}\ . \tag{3}$$

Anche queste rette sono mutuamente disgiunte e quindi P si può esprimere come

$$\mathsf{H} \;= \bigcup\nolimits^{\cdot}_{k\in\mathbb{R}_{nz}} \mathcal{R}_k \;= \bigcup\nolimits^{\cdot}_{k\in\mathbb{R}_{nz}} \mathcal{R}'_k\ . \tag{4}$$

Il paraboloide iperbolico è quindi una **superficie doppiamente rigata**.

G52 g.02 In particolare un paraboloide iperbolico circolare si può ottenere ruotando intorno a una retta $\mathcal{A}$ fissata una retta mobile $\mathcal{G}$ sghemba rispetto alla $\mathcal{A}$, cioè a essa non complanare.
La $\mathcal{A}$ sarà l'asse di simmetria rotazionale del paraboloide generato.

Da questo fatto segue che si possono costruire modelli materiali (finiti) di queste quadriche servendosi di due fasci di aste sottili corrispondenti alle due partizioni segnalate. Secondo questo genere di modelli si possono costruire strutture architettoniche notevolmente robuste ed economiche.
Esse sono effettivamente utilizzate per ottenere costruzioni di interesse pratico, in particolare torri di raffreddamento.

G52 g.03 Osservazioni simili alle precedenti valgono per gli iperboloidi ad una falda e anche queste quadriche risultano essere **superfici doppiamente rigate**.

Consideriamo l'iperboloide H individuato dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 \;=\; 0\ . \tag{1}$$

Consideriamo inoltre le due seguenti famiglie di rette.

$$\mathcal{L}_h \;:=\; \mathsf{Soln}\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = h\left(1 - \frac{y}{b}\right) \;\wedge\; \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{h}\left(1 + \frac{y}{b}\right)\right) \qquad \text{per} \quad h \in \mathbb{R}_{nz}\ , \tag{2}$$

$$\mathcal{L}'_h \;:=\; \mathsf{Soln}\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = h\left(1 + \frac{y}{b}\right) \;\wedge\; \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{h}\left(1 - \frac{y}{b}\right)\right) \qquad \text{per} \quad h \in \mathbb{R}_{nz}\ . \tag{3}$$

Ciascun membro di ciascuna di queste due famiglie di rette giace sull'iperboloide H e anche questa quadrica si può esprimere in due modi come unione di rette disgiunte e mutuamente oblique:

$$\mathsf{H} = \dot{\bigcup}_{h\in\mathbb{R}_{nz}} \mathcal{L}_h = \dot{\bigcup}_{h\in\mathbb{R}_{nz}} \mathcal{L}'_h \ . \tag{4}$$

G52 g.04 Questo fatto viene sfruttato nella costruzione di strutture architettoniche realizzabili con barre tendenzialmente sottili; in particolare vengono costruiti tetti a forma di paraboloidi iperbolici, ossia a forma di sella.

Va anche segnalato un'altro metodo costruttivo delle quadriche rigate.
Si prendano tre rette di una famiglia di rette generatrici $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ e $\mathcal{G}_3$. Ogni retta dell'altra famiglia generatrice $\mathcal{G}'$ interseca tutte le rette $\mathcal{G}_i$. Di conseguenza la superficie può considerarsi generata dalle rette che intersecano le tre generatrici date.

G52 g.05 Evidentemente sono rigate le quadriche degeneri, i coni e i cilindri; queste figure si riconoscono in molti oggetti di uso diffuso.

Limitiamoci poi a ricordare i molti cappelli a cono: quelli risalenti all'età del bronzo, i cappelli aurei per cerimonie, i capirote dei penitenti osservati in molte processioni spagnoli, i cappelli a cono largo dai contadini in vari paesi asiatici.

G52 h. piani diametrali delle quadriche

G52 h.01 L'intersezione tra una quadrica reale e una retta può essere vuota, consistere in un solo punto, consistere in due punti o coincidere con la retta. I primi tre casi sono evidenti quando si considera l'intersezione di un ellissoide con una retta; la quarta situazione riguarda le quadriche rigate.

Qui consideriamo il caso più interessante per le applicazioni, quello in cui una retta $\mathcal{R}$ interseca una quadrica Q in due punti: $\mathsf{Q} \cap \mathcal{R} = \{P_1, P_2\}$. Il segmento P_1P_2 si dice **corda della quadrica**.

G52 h.02 (1) Prop.: I punti medi delle corde di una quadrica che sono ottenute da un fascio di rette parallele giacciono sopra un piano.

Dim.: Consideriamo una quadrica Q individuata dall'equazione a02(1). Introduciamo le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &:= a_{1,1}\,x^2 + 2\,a_{1,2} + \cdots + a_{4,4}\ , \\ \Pi_1(x,y,z) &:= a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y + a_{1,3}\,z + a_{1,4}\ , \\ \Pi_2(x,y,z) &:= a_{2,1}\,x + a_{2,2}\,y + a_{2,3}\,z + a_{2,4}\ , \\ \Pi_3(x,y,z) &:= a_{3,1}\,x + a_{3,2}\,y + a_{3,3}\,z + a_{2,4}\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Le rette di cui consideriamo le corde siano parallele alla retta

$$\left\| \frac{x}{l} \;=\; \frac{y}{m} \;=\; \frac{z}{n} \right\| \ . \tag{2}$$

Il loro fascio lo denotiamo con $F(l,m,n)$.

Se con ξ, η e ζ denotiamo le coordinate del punto medio di una qualsiasi di queste corde, gli estremi P_1 e P_2 di tale corda si possono esprimere come

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi + l\,t \quad \text{e} \quad y_1 = \eta + m\,t \quad \text{e} \quad z_1 = \zeta + n\,t \quad , \\ x_2 &= \xi - l\,t \quad \text{e} \quad y_2 = \eta - m\,t \quad \text{e} \quad z_2 = \zeta - n\,t \quad . \end{aligned} \tag{3}$$

In queste il parametro t è in biiezione con l'insieme delle specifiche corde, ossia con le coppie $\langle P_1, P_2 \rangle$. Sia la terna $\langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ che la $\langle x_2, y_2, z_2 \rangle$ devono soddisfare la a02(1). Sostituendo nella a02(1) la terna $\langle x, y, z \rangle$ delle variabili prima con $\langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ poi con $\langle x_2, y_2, z_2 \rangle$ si ottengono le due equazioni espresse da

$$\begin{aligned} Q(\xi,\eta,\zeta) \pm 2\,t(l\,\Pi_1(\xi,\eta,\zeta) + m\,\Pi_2(\xi,\eta,\zeta) + n\,\Pi_3(\xi,\eta,\zeta)) \\ + t^2\big(a_{1,1}\,l^2 + a_{2,2}\,m^2 + a_{3,3}\,n^2 + 2\,a_{1,2}\,l\,m + 2\,a_{2,3}\,m\,n + 2\,a_{1,3}\,l\,n\big) \;=\; 0 \end{aligned} \ . \tag{4}$$

Sottraendo una dall'altra di queste equazioni si trova che il coefficiente di t deve essere nullo.
Si giunge quindi all'equazione

$$l\,\Pi_1(\xi,\eta,\zeta) + m\,\Pi_2(\xi,\eta,\zeta) + n\,\Pi_3(\xi,\eta,\zeta) \;=\; 0\ . \tag{5}$$

Questa equazione ha come incognite le coordinate del generico punto medio delle corde del fascio $F(l,m,n)$ ed è lineare in tali variabili, cioè esprime un piano ∎

Il piano individuato dalla (4) si dice **piano diametrale** relativo alle corde parallele alla retta (2).

G52 h.03 (1) Prop.: Ogni piano diametrale di una quadrica dotata di centro deve passare per il centro.

Dim.: Consideriamo le quadriche con centro unico.
Ad ogni piano diametrale D corrisponde una corda passante per il centro; per simmetria questo deve essere il punto medio della corda e quindi deve appartenere al piano D.

Le quadriche aventi centri costituenti una retta sono i cilindri ellittici e iperbolici e per questi il problema si riduce a quello della retta diametrale delle coniche al quale accenniamo in h04.
Stessa considerazione per le quadriche aventi centri costituenti un piano, cioè alle coppie di piani come casi limite di cilindri iperbolici ∎

Il centro di una quadrica dotata di centro si può dunque ottenere dal sistema di equazioni

$$\Pi_1 \;=\; 0 \qquad , \qquad \Pi_2 \;=\; 0 \qquad , \qquad \Pi_3 \;=\; 0 \; . \tag{1}$$

G52 h.04 Per le curve di secondo grado in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si sviluppano considerazioni del tutto simili.
Consideriamo una tale curva di equazione

$$2\,\Phi \;=\; a_{1,1}\,x^2 + 2\,a_{1,2}\,x\,y + a_{2,2}\,y^2 + 2\,a_{1,3}\,x + 2\,a_{2,3}\,y + a_{3,3} \;=\; 0 \; . \tag{1}$$

Consideriamo inoltre le rette

$$\Phi_x \;:=\; a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y + a_{1,3} \qquad \text{e} \qquad \Phi_y \;:=\; a_{2,1}\,x + a_{2,2}\,y + a_{2,3} \; . \tag{2}$$

Si dimostra che i punti medi delle corde relative alla direzione della retta

$$\left\| \frac{x}{l} \;=\; \frac{y}{m} \right\|$$

appartengono a una retta chiamata **retta diametrale**. Per tale retta si trova l'equazione

$$l\,\Phi_x + m\,\Phi_y \;=\; 0 \; . \tag{3}$$

Se la curva è dotata di centro tale punto si trova risolvendo il sistema

$$\Phi_x \;=\; 0 \qquad , \qquad \Phi_y \;=\; 0 \; . \tag{4}$$

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php