Capitolo G50:
Sezioni coniche

Contenuti delle sezioni

a. Introduzione delle sezioni coniche p.1 b. Parabola p.2 c. Ellisse p.5 d. Iperbole p.9 e. Sezioni piane di un cono p.10 f. Coniche definite da fuoco, direttrice ed eccentricità p.13 g. Sfere di Dandelin p.13 h. Equazioni delle coniche in coordinate polari ed equazioni canoniche p.15 i. Coniche come soluzioni di equazioni quadratiche p.17 j. Tangenti delle coniche p.25 k. Diametri delle coniche p.26 l. Altri risultati sulle coniche p.28 m. Cenno alle applicazioni delle coniche p.29

G50:0.01 In queste pagine sono introdotte le sezioni coniche seguendo diversi sistemi di definizioni.
Dopo la prima sezione che fornisce una panoramica della presentazione di queste curve, sono introdotte le tre famiglie principali come luoghi di punti che soddisfano richieste metriche nel piano.
La sezione che segue le presenta ponendosi nello spazio tridimensionale come sezioni di un cono e successivamente si torna a considerazioni analitiche concernenti la loro eccentricità e le loro equazioni in coordinate polari.
Viene poi esposto lo studio algebrico delle coniche considerate soluzioni di equazioni di secondo grado.
Nella parte finale viene trattata la loro polarità, vengono segnalati altri risultati che le riguardano e vengono accennate alcune loro applicazioni.

G50:a. Introduzione delle sezioni coniche

G50:a.01 Con **sezione conica**, o semplicemente **conica**, si intende una curva piana costituita dai punti ottenibili intersecando la superficie di un cono circolare retto con un piano. I tre tipi fondamentali di sezioni coniche sono curve ben note: le ellissi, le parabole e le iperboli; inoltre le curve meglio conosciute, cioè le circonferenze, sono casi particolari di ellissi.
Le sezioni coniche presentano molti motivi di interesse. Esse infatti sono dotate di numerose proprietà che fanno sì che esse posseggano un'ampia gamma di applicazioni rilevanti.
La ricchezza delle proprietà delle coniche si collega al fatto che esse possono essere definite in molti modi che si dimostrano essere equivalenti.
Esse sono state studiate accuratamente in epoca ellenistica, in particolare da [[Apollonio di Perga]] che intorno al 200 a. C. scrisse un libro intitolato [[Coniká]], uno dei capolavori della scienza antica; in esso sono introdotti anche i nomi tuttora in uso per i tre tipi fondamentali di sezioni coniche.

G50:a.02 Iniziamo la presentazione delle coniche introducendo separatamente i loro tre tipi fondamentali attraverso tre caratterizzazioni metriche peculiari; queste consentono di stabilire che certi rappresentanti di ciascuna di queste famiglie di curve si possono caratterizzare come luoghi dei punti del piano che soddisfano equazioni di forme particolarmente semplici, le cosiddette equazioni canoniche.

Successivamente ci poniamo nello spazio tridimensionale e introduciamo in generale le coniche come sezioni piane di un cono circolare retto: anche da questo punto di vista son ben distinte le tre famiglie delle ellissi, delle parabole e delle iperboli.

Dopo aver verificata per ogni tipo di curva l'equivalenza tra definizioni metriche e definizioni tridimensionali, vediamo che delle coniche si può dare una definizione generale di tipo metrico come luogo di punti del piano euclideo determinati da un punto (fuoco), da una retta (direttrice) e da un parametro numerico (l'eccentricità).

Si ottiene quindi l'equivalenza delle due definizioni generali, la metrica e la tridimensionale, servendosi delle sfere di Dandelin.

Tutte le equazioni analitiche delle coniche si possono unificare e generalizzare trovando che ogni conica può essere definita come insieme dei punti del piano che soddisfano un'equazione quadratica in due variabili. Le equazioni quadratiche sono le equazioni polinomiali che si collocano al livello immediatamente superiore a quello delle equazioni lineari. L'analisi delle equazioni quadratiche in due variabili conduce a considerare le coniche come curve nello spazio $\mathbb{C}^2$ bidimensionale sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. In effetti lo studio delle coniche costituisce un primo argomento basilare della [[geometria algebrica]].

Da ultimo verranno presentate alcune considerazioni sulle maggiori applicazioni delle coniche.

G50:a.03 Altre considerazioni che si incontrano nelle pagine che seguono riguardano le simmetrie che sussistono tra gli insiemi di punti costituenti una conica e tra le intere famiglie delle coniche. Queste considerazioni portano a individuare trasformazioni che consentono di correlare numerose proprietà delle sezioni coniche.

Le coniche quindi, costituiscono una famiglia di entità matematiche che possono essere analizzate in modo esauriente e che permettono di mostrare come si possa sviluppare una trattazione matematica molto efficace (anche per fini applicativi) alternando strumenti concettuali che a prima vista si presentano di natura diversa (geometria euclidea, geometria analitica, geometria proiettiva, gruppi di simmetrie e trasformazioni), ma che possono essere collegati in una visione unitaria attraverso connessioni logico-deduttive che riguardano oggetti concretamente visualizzabili e talora ricorrono a qualche astrazione.

G50:b. Parabola

G50:b.01 Una parabola è una curva piana che viene determinata da un punto F detto **fuoco** e da una retta δ che non passa per F chiamata **direttrice**. Si definisce come **parabola** associata ad F e δ il luogo geometrico dei punti equidistanti da F e da δ, cioè l'insieme dei punti P del piano euclideo tali che, indicato con R la [[proiezione ortogonale]] di P sulla retta δ, vale l'uguaglianza fra lunghezze di segmenti $PF = PR$. Questa curva si può denotare con $Parab(F, \delta)$.

Consideriamo il segmento FD delimitato dal fuoco e dalla sua proiezione ortogonale D sulla direttrice δ; il punto medio V di tale segmento appartiene alla parabola e viene detto **vertice** della parabola.

La retta passante per F e D, ortogonale alla direttrice, costituisce l'asse di simmetria della curva; infatti la riflessione rispetto a questa retta manda ogni punto della parabola in un altro punto equidistante da F e δ e quindi appartenente alla parabola.

Dalla definizione segue un procedimento per tracciare una parabola servendosi di riga e compasso. Si procede a tracciare le parallele alla direttrice sulle quali si vogliono individuare coppie di punti della parabola e per ciascuna di tali rette $\mathcal{R}$ con un compasso con centro nel fuoco e apertura uguale alla distanza fra direttrice ed $\mathcal{R}$ si determinano due punti della parabola simmetrici rispetto all'asse.

G50:b.02 Dato che la definizione si serve solo di distanze dal fuoco e dalla direttrice, tutte le isometrie del piano RcR (ossia tutte le traslazioni, le rotazionie le riflessioni) trasformano parabole in parabole: l'isometria $\mathcal{M}$ manda $Parab(F,\delta)$ in $Parab(\mathcal{M}(F),\mathcal{M}(\delta))$.

Anche le omotetie trasformano parabole in parabole: infatti se applichiamo al piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ l'omotetia $Omtt_\omega$ di centro qualsiasi e rapporto ω, vengono moltiplicati per tale reale positivo sia la distanza tra F e δ che le distanze PF e PR per ciascuno dei diversi punti P di $Parab(F,\delta)$. Si può quindi affermare che tutte le parabole del piano appartengono ad una unica classe di similitudine. Inoltre si è indotti ad individuare una parabola particolarmente semplice dalla quale si possono ricavare tutte le altre attraverso isometrie ed omotetie.

G50:b.03 Troviamo l'espressione analitica in coordinate cartesiane ortogonali della parabola che ha il vertice nell'origine, l'asse di simmetria verticale, cioè coincidente con Oy, come distanza fuoco-direttrice il numero $p>0$ e quindi come fuoco $F=\langle 0,p/2\rangle$ e come direttrice la retta $y=-\dfrac{p}{2}$. Per le distanze del generico punto del piano $P=\langle x,y\rangle$ dal fuoco e dalla direttrice si trova

$$PR = y+\frac{p}{2} \qquad PF=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}\ .$$

Il punto P appartiene alla parabola sse è equidistante da F e δ, ovvero sse

$$y+\frac{p}{2}=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}\ .$$

Elevando al quadrato entrambi i membri si ricava $yp=x^2-yp$, ovvero

(1) $$y=\frac{1}{2p}x^2\ .$$

Questa equazione viene soddisfatta solo dai punti della parabola, in quanto implica che sia $y\geq 0$ e sostituendo x^2 con $2py$ nella equazione precedente si ottiene $y+p/2=\sqrt{(y+p/2)^2}$, uguaglianza evidentemente soddisfatta per ogni $y\geq 0$.

La (1) viene detta **equazione canonica della parabola** con asse verticale e parametro (=distanza fuoco-direttrice) pari a p. In essa si possono leggere chiaramente varie proprietà della parabola: la curva espressa è simmetrica per la riflessione rispetto all'asse Oy (la y è data da un'espressione pari nella x), passa per l'origine, ha tutti gli altri punti con ordinata positiva. Si osserva anche che applicando al piano l'omotetia di centro nell'origine e fattore ω reale positivo ($x\longrightarrow\omega x'$, $y\longrightarrow\omega y'$) la (1) fornisce

$$y'=\frac{1}{2\omega p}x'^2\ ,$$

equazione di una parabola con parametro ωp.

G50:b.04 Applicando alla parabola precedente la rotazione di $-90°$ si ottiene l'equazione della parabola avente fuoco in $\left\langle\dfrac{p}{2},0\right\rangle$, direttrice di equazione $x=-\dfrac{p}{2}$ (ed Ox come asse di simmetria):

(1) $$2px=y^2\ .$$

Sono semplici e spesso utili le parabole ottenute dalle precedenti per riflessione rispetto a Ox, $y=-\dfrac{1}{2p}x^2$, e rispetto ad Oy, $x=-\dfrac{1}{2p}y^2$

Traslando vertice e direttrice si ottengono espressioni piuttosto semplici delle parabole con assi orizzontali e verticali che diciamo **espressioni binomiali**. L'equazione generale per le parabole con asse verticale è

$$y = ax^2 + bx + c \ , \quad \text{con} \quad a \neq 0 \ ,$$

con $a \neq 0$, b e c che sono numeri reali fissati detti **coefficienti della parabola**. L'equazione generale per le parabole con asse parallela all'asse delle ascisse assume invece la forma:

$$x = \alpha y^2 + \beta y + \gamma \ , \quad \text{con} \quad \alpha \neq 0 \ .$$

Applicando rotazioni alle espressioni precedenti si trova come equazione generale di una parabola la seguente equazione quadratica:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \ , \quad \text{con } h^2 := ab \ .$$

G50:b.05 Presentiamo le caratteristiche di una parabola con asse verticale retta dall'equazione $y = P(x) := ax^2 + bx + c$.

Il vertice $V = \langle x_V, y_V \rangle$ è punto di minimo della $P(x)$: quindi

$$2ax_V + b = 0 \text{ e } y_V = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \ = \ -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \ .$$

Definiamo come discriminante della parabola: $\Delta := b^2 - 4ac$.

Coordinate del vertice: $\left\langle -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right\rangle$

Equazione dell'asse di simmetria: $x = -\frac{b}{2a}$

Coordinate del fuoco: $\left\langle -\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a} \right\rangle$

Equazione della direttrice: $y = -\frac{1 + \Delta}{4a}$

Per una parabola con asse orizzontale di equazione $x = \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ si ha invece

Discriminante: $\Delta := \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Equazione dell'asse di simmetria: $y = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Coordinate del vertice: $\left\langle -\frac{\Delta}{4\alpha}, -\frac{\beta}{2\alpha} \right\rangle$

Coordinate del fuoco: $\left\langle \frac{1 - \Delta}{4\alpha}, -\frac{\beta}{2\alpha} \right\rangle$

Equazione della direttrice: $x = -\frac{1 + \Delta}{4\alpha}$

G50:b.06 Ciascuno dei coefficienti nelle espressioni binomiali ha un ruolo ben preciso: consideriamo la $y = ax^2 + bx + c$.

Il coefficiente a determina la [[convessità]] della parabola:

- $a > 0$: convessità, vertice in basso
- $a < 0$: concavità, vertice in alto
- $a = 0$: parabola degenere (una retta)

Il suo significato risulta evidente nel caso particolare relativo a $b = c = 0$, in cui l'espressione binomiale si riduce alla

$$y = a \cdot x^2 \ .$$

.

Il coefficiente c determina il punto di intersezione della parabola con l'asse delle ordinate: il termine c è nullo sse la parabola passa per l'origine degli assi.
Il coefficiente b è legato alla posizione dell'asse della parabola, la retta verticale passante per il punto che ha l'ascissa data da

$$x = -\frac{b}{2a}\ .$$

Da notare che, restando fisso il coefficiente c, che determina l'intersezione con l'asse delle ordinate, e facendo variare valore di b, la parabola passa sempre per quel punto. In particolare, la retta tangente alla parabola nel punto di incontro con l'asse delle ordinate, ha pendenza pari a b. Questo significa che se b vale zero, l'asse della parabola coincide con l'asse delle ordinate. Mentre la [[derivata]] prima, potrà essere facilmente individuata, in quanto il suo punto di incontro con l'asse delle ascisse sarà pari all'ascissa del vertice, $-\dfrac{b}{2a}$, mentre l'ascissa del punto di incontro con l'asse delle ordinate è b.

G50:c. Ellisse

G50:c.01 Un'ellisse è una figura piana chiusa che può descriversi come un cerchio allungato in una direzione. Tale curva è determinata da due punti del piano F_1 ed F_2 chiamati **fuochi** la cui distanza denotiamo $2c$, e da un numero reale positivo a che deve essere maggiore di c chiamato **lunghezza del semiasse maggiore** o anche, quando il contesto consente la semplificazione, **semiasse maggiore**.
Si definisce come **ellisse** associata a F_1, F_2 ed a il luogo dei punti P del piano, la cui somma delle distanze dai fuochi, al variare di P mantiene il valore costante $2a$. Questa curva piana si può denotare con $\mathsf{Ellps}(F_1, F_2, a)$.
Se i due fuochi coincidono si ha la circonferenza di centro $F_1 = F_2$ e raggio a: $\mathsf{Ellps}(C, C, a) = \mathsf{Circ}(C, a)$; quindi le circonferenze si possono considerare casi particolari di ellissi.

G50:c.02 Dato che la definizione di ellisse si serve solo di distanze tra punti, tutte le isometrie (ossia tutte le traslazioni, le rotazioni e le riflessioni) trasformano ellissi in ellissi: l'isometria $\mathcal{M}$ manda $\mathsf{Ellps}(F_1, F_2, a)$ in $\mathsf{Ellps}(\mathcal{M}(F_1), \mathcal{M}(F_2), a)$. Inoltre anche ogni una omotetia di fattore ω trasforma un'ellisse in un'altra ellisse, in quanto modifica in una stessa proporzione tutte le distanze; l'omotetia $\Omega = Omtt(C, \omega)$ trasforma $\mathsf{Ellps}(F_1, F_2, a)$ nella $\mathsf{Ellps}(\Omega(F_1), \Omega(F_2), \omega a)$.

Consideriamo la retta che passa per i due fuochi $\overline{F_1F_2}$ e la retta ortogonale ad essa e passante per il punto medio dei fuochi C; la retta $\overline{F_1F_2}$ la raffiguriamo come retta orizzontale e la seconda come verticale. La riflessione rispetto alla retta passante per i fuochi non cambia gli elementi che definiscono la curva, mentre la seconda retta è il luogo dei punti equidistanti dai fuochi e la riflessione rispetto ad essa manda F_1 in $F_1' = F_2$, F_2 in $F_2' = F_1$ e un punto P dell'ellisse in un punto P' per il quale $P'F_1' + P'F_2' = PF_2 + PF_1 = 2a$, quindi in un altro punto dell'ellissi. Dunque le due rette sono due assi di simmetria per l'ellisse. Inoltre il loro punto comune C è il centro di una simmetria centrale dell'ellisse e conseguentemente si chiama **centro dell'ellisse**.
Si constata facilmente che i punti $\langle \pm a, 0\rangle$ appartengono all'ellisse; inoltre, introdotto il parametro $b := \sqrt{a^2 - c^2}$, si constata che anche i punti $\langle 0, \pm b\rangle$ appartengono all'ellisse.

G50:c.03 Consideriamo il rettangolo $\boldsymbol{R}$ che ha il centro coincidente con il centro C ed i lati paralleli agli assi di simmetria e aventi lunghezze $2a$ e $2b$; i suoi lati hanno come punti medi i quattro punti

$\langle \pm a, 0\rangle$ e $\langle 0, \pm b\rangle$ nei quali il rettangolo interseca i due assi di simmetria; i suoi lati orizzontali hanno lunghezza $2a$, mentre i lati verticali hanno lunghezza $2b$, inferiore alla precedente.

Dei punti del perimetro di $\boldsymbol{R}$ solo i 4 punti medi dei lati appartengono all'ellisse; infatti tutti gli altri punti hanno la somma delle distanze da F_1 e F_2 maggiore di $2a$. Se consideriamo le semirette con estremo in C e un punto Q che si muove allontanandosi da C si constata facilmente che $QF_1 + QF_2$ cresce da 0 a $+\infty$. Dunque tutti i punti dell'ellisse devono essere contenuti in $\boldsymbol{R}$; inoltre l'ellisse è una curva chiusa e semplice che delimita una regione di punti interni che, unita ai punti della curva, costituisce la figura convessa chiamata **regione ellittica interna**. La cosa è del tutto evidente quando in particolare i fuochi coincidono e la regione ellittica si riduce ad un cerchio di centro C.

Denotiamo con $\boldsymbol{Q}$ la quarta parte del rettangolo ritagliato dagli assi nella sua parte superiore destra e concentriamo su di essa l'attenzione, in quanto da questa regione si può ottenere l'intero $\boldsymbol{R}$ mediante le riflessioni rispetto agli assi. Consideriamo i segmenti in $\boldsymbol{Q}$ paralleli al semiasse maggiore e chiamiamo Q un punto variabile su un tale segmento. La somma delle distanze di Q dai fuochi all'avvicinarsi del punto all'asse maggiore decresce e passa da un valore maggiore ad un valore minore di $2a$. Infatti se $0 \leq x_Q < x_{Q'} \leq c$ è evidente che $F_1Q + F_2Q < F_1Q' + F_2Q'$; si trova senza difficoltà che questa catena di disuguaglianze vale anche se $c < x_Q < x_{Q'} \leq a$. Quindi un solo punto dell'ellisse interseca un tale segmento. Considerazioni analoghe per i punti dei segmenti paralleli al semiasse minore: ciascuno di essi interseca un solo punto dell'ellisse. I punti dell'ellisse appartenenti a $\boldsymbol{Q}$, punti $\langle x, y\rangle$ con $x \geq 0$ e $y \geq 0$, forniscono una funzione della forma $y = f(x)$ decrescente.

G50:c.04 Il segmento appartenente alla regione ellittica (con centro in C) della retta che passa dai due fuochi è detto **asse maggiore**; esso è anche il diametro dell'ellisse, cioè il più lungo segmento contenuto nella regione ellittica interna. Il segmento ortogonale all'asse maggiore e passante per il centro (insieme dei punti della regione interna equidistante dai fuochi), è chiamato **asse minore** dell'ellisse.

Ricordiamo che abbiamo definito **semiasse maggiore** ciascuna delle metà dell'asse maggiore; un tale segmento si può percorrere partendo dal centro, toccando un fuoco e finendo con il toccare un punto della curva. Analogamente per **semiasse minore** abbiamo definito la metà dell'asse minore.

Dato che $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, la dimensione e la forma di un'ellisse sono quindi determinate dalle due costanti a e b, la prima esprimente la lunghezza del semiasse maggiore, la seconda la lunghezza del semiasse minore.

Va segnalato che quando il contesto rende lecita la semplificazione i termini semiasse maggiore e semiasse minore sono usati per individuare le lunghezze dei rispettivi segmenti.

G50:c.05 L'equazione di una generica ellisse si trova eguagliando a $2a$ la somma delle distanze fra un punto generico $P = \langle x, y\rangle$ e ciascuno dei due fuochi $F_1 = \langle x_1, y_1\rangle$ ed $F_2 = \langle x_2, y_2\rangle$.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = 2a$$

Si dice **equazione canonica dell'ellisse** l'equazione che individua l'ellisse con centro nell'origine e con i fuochi sull'asse delle x. La si trova imponendo $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $x_1 = -c$, $x_2 = c$ e introducendo $b := \sqrt{a^2 - c^2}$; in tal modo si ottiene che l'ellisse è individuata dall'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

G50:c.06 La precedente ellisse è rappresentata anche dalle equazioni parametriche:

$$x = a\,\cos t \qquad y = b\,\sin t \qquad 0 \le t < 2\pi$$

che fa uso delle [[funzioni trigonometriche]] seno e coseno (v. GE:7).
L'ellisse si può considerare ottenuta da una circonferenza di raggio b applicando una dilatazione di un fattore a/b delle ascisse dei suoi punti. Questa può vedersi come proiezione ortogonale al piano Σ della circonferenza su un piano Π che la interseca nel diametro che coinciderà con l'asse minore e che forma un angolo θ tale che sia $\dfrac{b}{a} = \cos\theta$

G50:c.07 Applicando al piano dell'ellisse l'omotetia di rapporto ω, questa curva si trasforma in un'altra ellisse simile. La forma di un'ellisse si può fare dipendere completamente da un numero reale come $\dfrac{c}{a}$, come $\dfrac{b}{a}$ o come $\dfrac{b}{c}$, rapporti che non cambiano quando si applica la suddetta omotetia; il rapporto più significativo è $\dfrac{c}{a}$, parametro compreso tra 0 e 1 detto **eccentricità** dell'ellisse, tradizionalmente denotato con e. L'eccentricità è esprimibile nei modi seguenti

$$e := \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{c^2}{b^2 + c^2}} = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sin\theta \ .$$

È utile avere presenti anche le relazioni seguenti:

$$a = \frac{c}{e} \quad , \quad c = ae \quad , \quad b = a(1-e) \ .$$

Chiaramente l'eccentricità di un'ellisse è un numero positivo compreso tra 1 e 0; essa è pari a 0 sse $a = b$, cioè se l'ellisse si riduce ad una circonferenza. Quanto maggiore è il rapporto tra a e b, tanto più l'ellisse è allungata. La distanza tra i due fuochi $2c$ è esprimibile come $2ae = 2\sqrt{a^2 - b^2}$.

Il **semilato retto** di un'ellisse, solitamente denotato con la lettera l, è definito come la distanza tra un fuoco dell'ellisse e il punto K l'ellisse stessa incontrato dalla semiretta verticale che ha un estremo nel fuoco. Il semilato retto è legato ad a e b dalla formula $al = b^2$; questa si deriva dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo $\triangle(F_1, F_2, K)$, cioè dall'equazione $l^2 + 4c^2 = (2a - l)^2$.

G50:c.08 In [[coordinate polari]], un'ellisse con un fuoco nell'origine e l'altro lungo la parte negativa dell'asse delle ascisse è data dall'equazione:

$$\rho(1 + e\cos\theta) = l \ .$$

G50:c.09 Un'ellisse può essere pensata anche come la proiezione verticale su un piano orizzontale Ξ di una circonferenza che appartiene ad un piano Ξ' che forma con Ξ un angolo ϕ minore di 90°, cioè su un piano Π' non verticale. Conviene assumere che i due piani si intersechino in una retta $\mathcal{R}$ alla quale appartiene un diametro della circonferenza e riferire i due piani a due coppie di assi cartesiani che hanno in comune l'origine e l'asse delle ascisse coincidente con la retta $\mathcal{R}$. La proiezione verticale lascia invariate le ascisse dei punti delle curve, mentre riduce di un fattore $\cos\phi$ le ordinate di tali punti. Essa quindi fornisce un'ellisse di eccentricità $\sqrt{1 - \dfrac{(b\cos\phi)^2}{b^2}} = \sin\phi = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \phi\right) = \cos\beta$.
Da questa costruzione si deduce anche che l'area della regione ellittica interna è espressa da πab.

G50:c.10 La tangente all'ellisse in suo punto qualsiasi P forma angoli uguali con le rette che congiungono P con i due fuochi. Per dimostrare questa proprietà si può usare il [[teorema di Erone]] che stabilisce che

Data una retta t e due punti esterni Q ed R, il punto P della retta che minimizza la somma $PQ+PR$ è il punto tale che i segmenti PQ e PR formano angoli uguali con la retta stessa.

Consideriamo quindi un'ellisse di fuochi Q ed R. Questa sarà il luogo dei punti P tale che la somma delle distanze $PQ+PR$ sarà uguale ad un valore determinato d. Consideriamo una retta passante per un punto P dell'ellisse tale che formi angoli uguali con i segmenti PQ e PR. Per il teorema di Erone il punto P è il punto della retta che rende minima la somma $PQ+PR$; questo implica che la retta deve essere tangente all'ellisse: infatti se non fosse tangente la retta entrerebbe nell'interno dell'ellisse, quindi ci sarebbe un punto P della retta per il quale sarebbe $P'Q+P'R<d$ e non sarebbe più vero che il minimo è realizzato in P.

G50:c.11 Come conseguenza della precedente **proprietà tangenziale** si ha che in un biliardo a forma di ellisse una palla lanciata da uno dei due fuochi F_1 ed F_2 verrà rimbalzata dal bordo in modo tale da passare necessariamente per il secondo fuoco. Similmente in uno specchio concavo a forma di ellisse tutti i raggi luminosi emessi da una sorgente posta in uno dei due fuochi sono riflessi in modo da giungere necessariamente all'altro fuoco, quali che siano le direzioni di emissione. Questa proprietà spiega perché ai fuochi dell'ellisse è stato attribuito tale nome.

Ancora, dopo alcuni rimbalzi sulle pareti la palla tenderà a portarsi sull'asse maggiore rimbalzando tra i punti F_1 ed F_2.

Analogamente in una camera a forma di ellisse le [[onde sonore]] che partono da uno dei due fuochi arrivano all'altro lungo tutte le direzioni e, dato che la distanza percorsa nel tragitto da un fuoco all'altro è sempre la stessa, le onde arriveranno tutte sincronizzate. Di conseguenza due persone poste nei due fuochi potrebbero comunicare facilmente anche se molto distanti, mentre altre persone, anche notevolmente più vicine a chi parla sentirebbero ben poco. Questo è il principio sul quale sono state costruiti alcuni ambienti destinati a riunioni e spettacoli.

G50:c.12 Cerchiamo ora la cosiddetta **equazione generale di un'ellisse**, equazione esprimente i punti dell'ellisse avente come fuochi $F_1=\langle x_1,y_1\rangle$ e $F_2=\langle x_2,y_2\rangle$ e con il semiasse maggiore pari ad a. Tale equazione ha la forma

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

i cui parametri sono dati da

$$A=16a^2-4(x_{F1}-x_{F2})^2$$

$$B=-8(y_{F1}-y_{F2})$$

$$C=16a^2-4(y_{F1}-y_{F2})^2$$

$$D=4(x_{F1}-x_{F2})^3-16a^2(x_{F1}-x_{F2})$$

$$E=4(y_{F1}-y_{F2})(4a^2-(y_{F1})^2+(y_{F2})^2-(x_{F1})^2+(x_{F2})^2)$$

$$F=-16a^4+8a^2((y_{F1})^2+(y_{F2})^2+(x_{F1})^2+(x_{F2})^2)-(y_{F1})^2+(y_{F2})^2-(x_{F1})^2+(x_{F2})^2\ .$$

G50:d. Iperbole

G50:d.01 L'iperbole è una curva piana che, come l'ellisse, è determinata da due punti$F$ e F' detti **fuochi** e da un numero reale positivo $2a$, con $2a < FF'$. Essa si definisce come il luogo geometrico dei punti del piano euclideo in cui è costante (e vale $2a$), il valore assoluto della differenza delle distanze dai fuochi.
Tale curva si può denotare con $Hprbl(F, F', a)$.
L'iperbole viene introdotta anche analiticamente come la curva del piano cartesiano che soddisfa un'equazione della forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ , \tag{1}$$

tale che $B^2 > 4AC$, dove tutti i coefficienti sono reali, e dove esiste più di una soluzione che definisce una coppia (x, y) di punti della curva.

G50:d.02 L'equazione generale dell'iperbole in alcuni casi particolari si specializza assumendo forme molto più semplici. Se l'iperbole ha il centro coincidente con l'origine degli assi coordinati e ha gli assi coincidenti con gli assi coordinati, allora se essa interseca l'asse delle x, l'equazione diventa

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ . \tag{1}$$

Se invece interseca l'asse delle y l'equazione è

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \ . \tag{2}$$

In questo caso gli asintoti dell'iperbole sono dati dalle espressioni

$$y = \pm\frac{b}{a}x \ . \tag{3}$$

Le relazioni precedenti sono chiamate **equazioni canoniche dell'iperbole**.

G50:d.03 Se gli asintoti sono perpendicolari (e quindi, nel caso dell'iperbole avente gli assi coincidenti con gli assi cartesiani, se $a = b$), la curva si dice **iperbole equilatera**.
Se un'iperbole equilatera viene riferita ai propri asintoti (e cioè se gli asintoti dell'iperbole coincidono con gli assi cartesiani), allora la sua equazione assume una forma ancor più semplice:

$$xy = c \ .$$

Se c è diverso da 0 a tale curva è associata la **funzione della proporzionalità inversa**

$$y = k/c \ .$$

Se $c = 0$ la curva degenera nell'insieme dei due assi cartesiani, caratterizzato dall'equazione $xy = 0$.

G50:d.04 I vari elementi associati ad una iperbole sono:
i fuochi, due punti fissi da cui tutti i punti dell'iperbole hanno differenza costante
i vertici, intersezioni del segmento che unisce i fuochi con i due rami dell'iperbole.
gli asintoti, due rette che si definiscono "tangenti all'infinito dell'iperbole", ovvero una coppia di rette incidenti a cui i rami dell'iperbole si avvicinano sempre più senza però mai intersecarle.

G50:d.05 Raccogliamo le equazioni che si possono utilizzare per esprimere delle iperboli

Equazioni cartesiane

L'iperbole avente assi paralleli agli assi cartesiani e centro nel punto $C = (x_c, y_c)$ ha equazione

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1 \ .$$

Se si applica una rotazione degli assi di 90°, si ottiene l'equazione

$$\frac{(y - y_c)^2}{a^2} - \frac{(x - x_c)^2}{b^2} = 1,$$

In entrambe le formule a è detto **semiasse maggiore** e corrisponde alla metà della distanza tra i due rami; b è invece chiamato **semiasse minore**. Si noti che b può essere maggiore di a; questa incongruenza viene risolta da alcuni testi scambiando i significati di a e b. In questo caso l'equazione dell'iperbole che interseca l'asse delle y viene scritta come

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = -1,$$

L'eccentricità dell'iperbole può essere definita dall'espressione

$$e := \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \frac{c}{a} \ .$$

Equazioni polari

$$r^2 = \quad a \sec 2t$$

$$r^2 = -a \sec 2t$$

$$r^2 = \quad a \csc 2t$$

$$r^2 = -a \csc 2t$$

Equazioni parametriche

$$x = a \ \cosh\theta; \ y = b \ \sinh\theta$$

$$x = a \ \tan\theta; \quad y = b \sec\theta$$

G50:e. Le sezioni piane di un cono

G50:e.01 Un **cono circolare retto** è una figura K dello spazio euclideo tridimensionale determinata da un punto O chiamato **vertice** del cono e da una circonferenza σ appartenente ad un piano Σ non contenente O ed avente il centro G nel [[piede]] di O su Σ. Denotiamo con ζ la retta $\overline{OG}$; questa è ortogonale a Σ e viene chiamata **asse del cono** K. Denotiamo inoltre con ρ il raggio di σ e con h la distanza fra O e Σ; chiaramente $\rho = h \tan\alpha$. Per ogni punto $Q \in \gamma$ chiamiamo **generatrice** di K per Q la retta $\overline{VQ}$. Chiamiamo **angolo di semiapertura** del cono l'angolo acuto formato da ciascuna delle sue generatrici con il suo asse ζ; tale angolo lo denotiamo con α. Vedremo che molte costruzioni di coniche, ma non tutte, sono indipendenti dall'ampiezza della semiapertura. A rigore dobbiamo dire che l'insieme di tutte le sezioni coniche si ottiene servendosi dei coni con semiaperture tali che $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Per fissare alcuni aspetti dell'esposizione, serviamoci di un riferimento cartesiano monometrico ortogonale con l'origine in O, il piano Σ dato dalla equazione $z = h$ posto al di sopra del piano orizzontale Oxy. Inoltre presenteremo molte configurazioni attraverso le loro proiezioni ortogonali sul piano Ozy con l'asse Oy disposto orizzontalmente e orientato verso destra, pensando che l'asse Ox sia ortogonale al piano del disegno e sia orientato verso il lettore.
Si definisce **cono circolare retto** definito dal vertice O e dalla circonferenza σ l'insieme dei punti delle generatrici

$$K := \bigcup_{Q\in\sigma} \overline{OQ} \ .$$

Si osserva che ogni generatrice viene tripartita da O nel singoletto $\{O\}$ e in due semirette, una al di sopra e l'altra al di sotto di Σ, che chiamiamo, risp., **semigeneratrice** superiore e inferiore. Di conseguenza anche i punti del cono si ripartiscono in tre sottoinsiemi: uno costituito solo dal suo vertice e i due sottoinsiemi separatamente connessi costituiti dalle semirette superiori e dalle inferiori: questi sono detti **falde** o **nappe** del cono.

G50:e.02 Consideriamo di disporre di un piano Π che chiamiamo **piano settore** e che possiamo muovere in posizioni diverse per ottenere diverse intersezioni con K; le diverse sezioni coniche sono esprimibili come $\Pi \cap K$.
Per fissare le immagini supponiamo che il punto $P := \Pi \cap \zeta$ si trovi al di sopra del vertice O.
Data la simmetria circolare del cono, si può scegliere ad arbitrio la direzione di massima pendenza del piano Π, quando questo non è ortogonale all'asse ζ. Per fissare le immagini supponiamo che le linee di massima pendenza siano parallele alla retta $\Pi \cap Oyz$, ossia scegliamo Π in modo che sia costituito da rette parallele ad Ox. Nelle proiezioni ortogonali a Oyz queste rette sono rappresentate da semplici punti e il piano Π da una retta passante per P. Si osserva anche che la configurazione data da cono e piano settore è invariante per riflessione rispetto al piano Oyz; da questo segue che tutte le coniche presentano una simmetria per riflessione rispetto alla retta $\Pi \cap Oyz$.
Si osserva anche che se si sottopone la configurazione all'omotetia $Omtt(O, \omega)$ di centro nel vertice O con fattore $\omega > 0$, il cono resta invariato, mentre la distanza OP e le distanze tra coppie di punti sulla sezione conica sono moltiplicate per ω. Risulta quindi evidente che l'insieme delle sezioni coniche $\Pi \cap K$ contiene intere classi di similitudine; in altre parole tra le coniche insieme a una data curva $\mathcal{C}$ si trovano tutte le curve ad essa simili, ottenibili da $\mathcal{C}$ per omotetia.

G50:e.03 Procederemo ora a considerare diverse posizioni del piano settore Π. Innanzi tutto, a causa della simmetria di rotazione intorno alla retta ζ del cono circolare retto, della posizione di Π rispetto alla ζ conta solo l'angolo acuto formato da questi due oggetti lineari che denotiamo con β; facendo ruotare Π intorno a ζ non cambia nulla della curva $K \cap \Pi$. Se si trasla verticalmente il piano Π mantenendo fisso β, la sezione conica risulta sottoposta ad una omotetia. Per determinare le caratteristiche salienti delle coniche non occorre distinguere i membri di una classe di similitudine; quindi possiamo tenere fisso il punto in cui l'asse ζ interseca Π, punto che chiameremo R. Poniamo poi $\theta := \dfrac{\pi}{2} - \beta$; questo è l'angolo acuto formato dall'asse ζ con la retta ortogonale a Π e passante per R che denotiamo con ν.
Denotiamo con Π_{or} il piano per R ortogonale a ζ, piano relativo a $\beta = \dfrac{\pi}{2}$. Con questo piano settore evidentemente si ottiene una circonferenza, curva tutta appartenente alla falda superiore di K. Osserviamo che la precedente constatazione non è che una riformulazione della definizione di cono circolare retto.
Ruotiamo "leggermente" Π mantenendo fisso il punto $R = \Pi \cap \zeta$ e supponendo, per maggiore definitezza, che la retta secondo la quale Π interseca Π_{or} sia parallela all'asse Ox, in modo che l'angolo determinato

da Π_{or} e Π sia minore di $\phi := \pi/2 - \alpha$, ovvero in modo che l'angolo acuto β formato da Π e ζ sia superiore ad α. In tal caso la sezione $\Pi \cap K$ continua ad appartenere tutta alla falda superiore del cono e la sezione continua ad essere una curva chiusa che chiamiamo **ellisse-K**. Il fatto di essere curve chiuse rende le ellissi-K facilmente visualizzabili, quasi quanto le circonferenze.

Se si interseca il cono con un piano parallelo a una sua retta generatrice, ovvero con il piano che forma con ζ un angolo di ampiezza $\beta = \alpha$, ovvero con la ortogonale ν che forma con ζ un angolo di ampiezza $\pi/2 - \alpha$, si ottiene una conica chiamata **parabola-K**. Ogni parabola-K appartiene ad una sola delle falde del cono (per noi la superiore), ma non è una curva chiusa. Essa non è limitata: possiede punti che si collocano in alto tanto quanto si vuole, cioè punti caratterizzati da coordinate z arbitrariamente grandi.

Infine intersecando il cono con piani che formano con il suo asse angoli β inferiori ad α, si determinano curve con i punti appartenenti ad entrambe le falde chiamate **iperboli-K**; ogni iperbole-K, in quanto insieme di punti, si bipartisce in due sottoinsiemi connessi i quali sono detti **rami** della curva. Tenendo conto del riferimento scelto, possiamo parlare di un ramo superiore e di uno inferiore.

G50:e.04 Le curve sopra introdotte sono dette **coniche non degeneri**. Vi sono poi le cosiddette **coniche degeneri** ottenute servendosi di piani Π che passano per il vertice del cono. Si distinguono i tre casi che seguono.

(1) Se si interseca il cono con un piano che con l'asse ζ forma un angolo β superiore ad α, si ottiene un semplice punto, lo stesso vertice del cono.
(2) Se si interseca il cono con un piano che con l'asse del cono forma un angolo $\beta = \alpha$, si ottiene una linea retta, una generatrice del cono.
(3) Se si interseca il cono con un piano che con l'asse ζ forma un angolo β inferiore ad α, si ottiene una coppia di rette: si tratta delle due generatrici del cono passanti per i due punti costituenti $\Pi \cap \gamma$.

Se per maggiore definitezza assumiamo che Π sia costituito da rette parallele all'asse di riferimento Ox, esso può anche considerarsi costituito dalle rette parallele alla retta che appartiene al piano Oyz ed ha come equazione $z = \cot\alpha\ y$. Nel caso (2) la conica degenere si riduce a questa retta generatrice, nel caso (3) le due generatrici hanno come bisettrice l'intersezione con Π del piano Vyz, piano passante per l'asse e ortogonale a Π.

G50:e.05 Si osserva che con un cono avente un dato angolo di semiapertura α si possono ottenere solo coppie di rette degeneri che ridotte alle semirette al di sopra del vertice V formano solo angoli inferiori a 2α. Corrispondentemente si possono avere iperboli che hanno asintoti con angoli comprendenti i rami dell'iperbole inferiori a 2α.

Quindi per avere la totalità delle coniche si devono utilizzare coni con tutte le possibili aperture 2α.

Questa richiesta non va considerata eccessiva. Infatti il ruolo del cono nella definizione delle coniche riguarda la sua capacità di proiettare su un piano una curva particolare, una circonferenza. I coni con diverse aperture aventi in comune l'asse si ottengono l'uno dall'altro mediante omotetie unidirezionali relative alla direzione dell'asse. Il valore preciso della semiapertura del cono utilizzato per definire delle coniche serve solo come valore discriminante per l'angolo formato dal piano settore con il suo asse.

Osserviamo anche che il cono può degenerare in una retta per $\alpha \to 0$ e in un piano per $\alpha \to \dfrac{\pi}{2}$. Nel primo caso può individuare solo dei punti, nel secondo solo delle rette o lo stesso intero piano come degenerazione di una circonferenza.

G50:f. Coniche definite da fuoco, direttrice ed eccentricità

G50:f.01 Delle coniche si può dare una definizione metrica che si limita al piano euclideo e che le include quasi tutte (sono escluse solo le circonferenze). In questo piano si considerano un punto F che viene chiamato **fuoco**, una retta δ non contenente F che viene detta **direttrice** e un numero reale non negativo e che viene chiamato **eccentricità**.
Si definisce come **conica-fde** associata alla terna $\langle F, \delta, e\rangle$ il luogo dei punti P del piano la cui distanza da F è uguale al prodotto di e per la rispettiva distanza da δ, cioè, denotato con D il punto proiezione ortogonale do P su δ,

$$\frac{PF}{PD} = e \ .$$

Evidentemente quando $e = 1$ si ritrova la definizione metrica della parabola. È anche evidente che queste curve presentano un asse di simmetria costituito dalla rette passante per il fuoco ed ortogonale alla direttrice: infatti la configurazione fuoco-direttrice su cui si basa la definizione è simmetrica rispetto a tale retta.

G50:f.02 Si trova facilmente anche una netta distinzione delle coniche con $0 < e < 1$ e le coniche con $1 < e$: le prime sono curve chiuse i cui punti si trovano tutti nel semipiano delimitato dalla direttrice contenente il fuoco, le seconde sono curve illimitate costituite da due rami, ciascuno dei quali appartiene solo ad uno dei semipiani definiti dalla direttice.
Si dimostrerà che per $0 < e < 1$ si ottiene un'ellisse, per $e = 1$ una parabola e per $e > 1$ un'iperbole.

G50:f.03 Per una ellisse e una iperbole si possono assumere due coppie fuoco + direttrice, ciascuna fornendo la stessa intera curva. La distanza del centro di tale conica dalla direttrice è $\frac{a}{e}$, dove a denota il [[semiasse maggiore]] dell'ellisse, oppure la distanza del centro da ciascuno dei punti di distanza minima dell'iperbole. La distanza del centro da un fuoco è data da ae.
Nel caso della circonferenza $e = 0$ e si potrebbe immaginare la direttrice a distanza infinita dal fuoco (retta all'infinito del piano). Questo caso non si può trattare quantitativamente a partire dalla richiesta che la circonferenza sia il luogo dei punti la cui distanza dal centro sia e volte la distanza da D, in quanto si avrebbe una [[forma indeterminata]] della forma zero per infinito; questo caso va trattato come caso limite di ellissi.
Intuitivamente si può dunque affermare che anche l'eccentricità di una conica-fde fornisce una misura di quanto essa si allontani dall'essere circolare.
Per una data lunghezza a del semiasse maggiore, quanto più e si avvicina ad 1, tanto più piccolo è il semiasse minore.

G50:g. Sfere di Dandelin

G50:g.01 L'equivalenza delle definizioni delle coniche come intersezioni di un piano con un cono circolare retto e come luoghi dei punti che presentano un dato rapporto fra le distanze da un fuoco e da una direttrice si dimostra in modo elegante e abbastanza semplice facendo riferimento alle cosiddette [[sfere di Dandelin]].
Consideriamo ancora il cono circolare retto illimitato K di vertice O e semiapertura α.

Per ogni ρ reale positivo in ciascuna delle falde di K si può inserire una sfera S di raggio ρ in modo che risulti tangente al cono stesso nei punti di una circonferenza γ di raggio $\rho\cos\alpha$; il suo centro si trova a distanza $\dfrac{\rho}{\cos\alpha}$ dal vertice O. Una di tali sfere la chiamiamo sfera tangente (internamente) a K.
I punti di $S \cap K$ costituiscono la circonferenza che denotiamo con γ avente come raggio

$$\rho \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \rho\cos\alpha \ .$$

Riprendiamo le considerazioni sopra un piano settore Π non passante per O, determinato essenzialmente dall'angolo acuto β che esso forma con l'asse del cono e riprendiamo i tre casi che occorre distinguere.

(P) Se $\beta = \alpha$, Π è parallelo ad una generatrice g di K e interseca una sola delle sue falde in una curva illimitata (parabola); basta limitarsi al caso che sia la falda superiore.
(E) Se $\beta > \alpha$, interseca una sola delle falde di K in una curva chiusa e limitata (ellisse); ancora basta limitarsi al caso che sia la falda superiore.
(H) Se $\beta < \alpha$, Π interseca entrambe le falde di K in una curva illimitata e con due rami (iperbole), ci limitiamo a considerare che Π intersechi l'asse di K all'interno della falda superiore.

In ogni caso chiamiamo $\mathcal{C}$ la curva piana $K \cap \Pi$.

G50:g.02 Una sfera tangente a K e al piano Π si dice **sfera di Dandelin** per tali superfici.
Nel caso (P), $\beta = \alpha$, esiste una sola di tali sfere collocata tra vertice e piano e avente diametro pari alla distanza di Π dalla generatrice parallela.
Nel caso (E), $\beta > \alpha$, esistono due sfere di Dandelin tangenti alla falda inferiore, una al di sopra del piano una al di sotto.
Nel caso (I), $\beta < \alpha$, esistono due sfere di Dandelin tangenti una alla falda inferiore, una alla superiore, entrambe tangenti a K in punti più vicini a V dei punti di Γ.

G50:g.03 Si osserva che, data una sfera di Dandelin S, è determinato un unico piano Π tangente alla sfera e costituito da rette parallele ad Ox; esso interseca il cono nella falda tangente ad S corrispondente al caso (P).
Date invece due sfere di Dandelin non intersecantisi ed entrambe tangenti ad una falda di K (diciamo quella superiore) è determinato un solo piano tangente ad entrambe le sfere e costituito da rette parallele ad Ox; esso interseca il cono in una curva chiusa che corrisponde al caso (E).
Date infine due sfere di Dandelin una tangente alla falda superiore del cono e l'altra tangente alla falda inferiore è determinato un solo piano tangente ad entrambe le sfere e costituito da rette parallele ad Ox; esso interseca entrambe le falde del cono in una curva di due rami che corrisponde al caso (E).

Chiamiamo F il punto in cui la sfera o una delle due sfere, che chiamiamo S, è tangente al piano settore Π, γ la circonferenza $K \cap S$ e δ la retta intersezione di Π e il piano Γ contenente γ.
Facciamo riferimento alla terza figura in [[Teorema di Dandelin]] che, nella fattispecie, riguarda il caso di un'ellisse. Per una maggior chiarezza, abbiamo evitato di visualizzare la seconda sfera di Dandelin e del cono abbiamo tracciate solo alcune generatrici.
Ci proponiamo di mostrare che F rappresenta uno dei due fuochi, o l'unico fuoco, o della $\mathcal{C}$ che è una conica e che la retta δ è la sua direttrice. Più specificamente dimostriamo che per ogni punto P della $\mathcal{C}$ vale la seguente proprietà:

$$\frac{PF}{PD} \ = \ e \ ,$$

dove PD denota la lunghezza della perpendicolare alla retta δ passante per P, cioè la distanza del punto P dalla retta δ, ed e è una costante (che rappresenta l'eccentricità della conica). Di conseguenza l'insieme $\mathcal{C}$ dei punti P costituisce una sezione conica. La dimostrazione che vediamo ora vale per tutti e tre i tipi di coniche.

G50:g.04 Denotiamo con H il punto di intersezione con il piano Γ della retta passante per P e parallela all'asse del cono; denotiamo con A il punto di intersezione con la circonferenza γ della generatrice passante per P.
PA e PF riguardano due segmenti tangenti alla sfera, condotti dallo stesso punto P, e quindi hanno la stessa lunghezza:

$$PA \;=\; PF \;.$$

Nel triangolo rettangolo PHA abbiamo:

$$PH \;=\; PA\;\cos\alpha \;,$$

mentre nel triangolo rettangolo PHD

$$PH \;=\; PD\;\cos\beta \;.$$

Combinando le precedenti tre equazioni e semplificando, otteniamo:

$$PA\;\cos\alpha \;=\; PD\;\cos\beta \qquad , \qquad PF\;\cos\alpha \;=\; PD\;\cos\beta$$

e perciò

$$\frac{PF}{PD} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} =: e \;.$$

Questa coincide proprio con la definizione di conica come luogo di punti di un piano per cui il rapporto tra la distanza di un suo generico punto dal fuoco e dalla direttrice è costante e coincide con la sua eccentricità.

G50:h. Equazioni delle coniche in coordinate polari ed equazioni canoniche

G50:h.01 In questo paragrafo studiamo in termini analitici le coniche $Conic(F, \delta, e)$ definite come luogo dei punti che presentano costante, pari ad e, il rapporto fra distanza dal fuoco e della direttice.

Le prime equazioni che conviene considerare sono espresse mediante coordinate polari. Più precisamente consideriamo le coordinate polari ρ e θ aventi come polo il fuoco F e come semiretta caratterizzata da $\theta = 0$ la semiretta che, oltre ad avere estremo nel fuoco, è ortogonale alla direttrice; chiamiamo G il punto di intersezione tra questa semiretta e la direttrice e p la distanza fra fuoco e direttrice, cioè $p := FG$. Visualizziamo le configurazioni da analizzare con la direttrice verticale posta a destra del fuoco; in tal modo i due semipiani delimitati dalla direttice si possono chiamare semipiano sinistro (comprendente F) e semipiano destro. Il punto generico della conica è $P = \langle\rho, \theta\rangle$ e denotiamo con D il suo piede sulla direttrice.

Per avere le equazioni delle coniche in tali coordinate occorre distinguere i casi (E) e (P), relativi ad $e \le 1$, della curva che appartiene interamente al semipiano sinistro, dal caso (H) relativo ad $e > 1$, della curva con un ramo appartenente al semipiano sinistro ed uno nel destro. Nel primo caso $PD = p - \rho\cos\theta$; nel secondo vanno distinti i punti P' del semipiano sinistro per i quali $P'D' = p - \rho\cos\theta$ dai punti P'' del semipiano sinistro per i quali $P''D'' = \rho\cos\theta - p$.

G50:h.02 Nei casi (E) e (P) si ha

$$Conic(F,\delta,e) = \left\{ P = \langle\rho,\theta\rangle \;\mathbb{]}\; \frac{\rho}{p-\rho\cos\theta} = e \right\}$$

e da qui l'equazione

(1) $$\rho = \frac{ep}{1+e\cos\theta} \;.$$

Nel caso (H) si ha

$$Conic(F,\delta,e) = \left\{ P = \langle\rho,\theta\rangle \;\mathbb{]}\; \frac{\rho}{\pm(p-\rho\cos\theta)} = e \right\}$$

e da qui le due equazioni

(2) $$\rho = \frac{ep}{1+e\cos\theta} \qquad , \qquad \rho = \frac{ep}{e\cos\theta - 1} \;,$$

la prima per il ramo a sinistra la seconda per quello a destra.

Da queste equazioni si ricava la seguente, ottenibile da $PF^2 = e^2PD^2$, valida per tutti i tre casi (E), (P) e (H):

$$\rho^2 = e^2(p-\rho\cos\theta)^2 \;. \Longleftrightarrow (3)$$

Osserviamo che in tutte queste equazioni risulta evidente la simmetria della conica per la riflessione rispetto all'asse orizzontale $\overline{FG}$; questa retta viene chiamata **asse maggiore** della conica. Risulta chiaro anche il fatto che modificando la distanza $p = FG$ ogni conica iene trasformata in una curva simile.

G50:h.03 È significativo prendere in considerazione le diverse coniche relative ad F e δ fissati per diversi valori dell'eccentricità e. Ciascuna di queste diverse curve $\mathcal{C}$ interseca il segmento FG esattamente in un punto Q, il quale quindi è in grado di caratterizzare univocamente la $\mathcal{C}$. Questo Q è tale che $FQ = eQD$; essendo $FQ + QG = p$ si ha $FQ = e(p - FQ)$ e quindi $FQ = \dfrac{p}{1+e}$.
Se $e = 1$ Q è il punto medio di FG e la curva è una parabola. Facendo diminuire e da 1 a 0 Q si sposta verso il fuoco e si hanno ellissi sempre più piccole e di forma meno allungata, più vicina a quella della circonferenza. Facendo crescere e al di sopra di 1 Q si sposta verso G e si hanno iperboli sepre più allargate.

G50:h.04 Passiamo ora alle coordinate cartesiane per ritrovare le equazioni canoniche dei tre tipi di coniche. Con un primo passo consideriamo il sistema di riferimento $\overline{O}\overline{x}y$ con l'origine nel fuoco $\overline{O} = F$ l'asse $\overline{O}\overline{x}$ orizzontale, l'asse $\overline{O}y$ verticale e la direttrice data da $\overline{x} = p$. L'equazione :h.02(3) è equivalente alla

(1) $$\overline{x}^2 + y^2 = e^2(p-\overline{x})^2 \qquad \text{ovvero} \qquad (1-e^2)\overline{x}^2 + 2pe^2\overline{x} + y^2 - e^1p^2 = 0 \;.$$

A questo punto occorre distinguere i tre tipi di coniche e cercare tre equazioni canoniche in tre diversi sistemi di riferimento, ciascuno adatto a presentare semplicemente le proprietà delle curve di un solo tipo.

G50:h.05 Per le ellissi conviene riferirsi alla coppia di coordinate $\langle x,y\rangle$ con $x = \overline{x} + \dfrac{e^2p}{1-e^2}$, ovvero di traslare l'origine nel punto $\left\langle -\dfrac{e^2p}{1-e^2}, 0\right\rangle$. Dalla equazione :hH.04(1) si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con} \qquad a^2 := \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2} \quad , \quad b^2 := \frac{e^2p^2}{|1-e|}$$

G50:h.06 Nel caso $e = 1$ riguardante le parabole l'equazione :H.04(1) si riduce alla $2p\overline{x} + y^2 - p^2 = 0$; conviene quindi riferirsi alla coppia di coordinate $\langle x, y\rangle$ con $x = -\overline{x} + \dfrac{p}{2}$ e si ottiene

$$y^2 - 2px = 0 \quad .$$

G50:h.07 Nel caso $e > 1$ relativo alle iperboli ...

G50:h.08 Si definisce **semilato retto** di una conica $\mathcal{C}$ un segmento ortogonale al suo asse maggiore che ha una estremità nel suo fuoco singolo o in uno dei suoi due fuochi e l'altra in un punto della $\mathcal{C}$; denotiamo con l la lunghezza di tale segmento. Questa grandezza è collegata alle lunghezze dei semiassi a e b dall'uguaglianza $al = b^2$.
In [[coordinate polari]], una sezione conica con un fuoco nell'origine e, se dotata di un secondo fuoco, con questo sul semiasse positivo delle x, è espressa dall'equazione

$$\rho(1 - e\cos\theta) = l \ .$$

G50:i. Coniche come soluzioni di equazioni quadratiche

G50:i.01 Le equazioni canoniche delle parabole, delle ellissi e delle iperboli sono evidentemente equazioni di secondo grado nelle due variabili reali x e y. Le equazioni delle parabole, ellissi e iperboli generiche si possono ottenere dalle equazioni canoniche attraverso cambiamenti del sistema di riferimento cartesiano, cioè sottoponendo le variabili x e y a trasformazioni lineari non necessariamente omogenee, trasformazioni che conducono ad altre equazioni di secondo grado.

Anche le coniche degeneri si possono considerare soluzioni di equazioni polinomiali di secondo grado. Infatti l'insieme dei punti costituenti due rette generiche aventi come equazioni $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ è caratterizzato dall'equazione $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$, l'insieme dei punti di una retta caratterizzata dall'equazione $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ si può caratterizzare anche con l'equazione di secondo grado $(a_1x + b_1y + c_1)^2 = 0$ e la conica degenere costituita solo da un punto $\langle x_0, y_0$ si può caratterizzare con l'equazione $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$.

Le curve caratterizzate da equazioni di secondo grado sono chiamate **curve di secondo grado** o **curve del secondo ordine**; quindi le coniche sono curve del secondo ordine.
Si pone a questo punto la questione di quale sia l'insieme di tutte le curve di secondo grado. A questa domanda diamo risposta nel presente paragrafo attraverso un esame della casistica per le equazioni di secondo grado.

G50:i.02 Prendiamo in esame l'equazione polinomiale di secondo grado generale nella forma

$$(1) \qquad a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2 + 2a_{1,3}x + 2a_{2,3}y + a_{3,3} = 0 \ ,$$

nella quale interpretiamo le variabili x e y come coordinate in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.
I coefficienti dei termini di secondo grado della (1) si dicono **coefficienti dominanti** di tale equazione.
Si presume inoltre che almeno uno dei coefficienti dei termini di secondo grado $a_{1,1}$, $a_{2,2}$ e $a_{1,2}$ sia diverso da 0, ovvero che sia ${a_{1,1}}^2 + {a_{1,2}}^2 + {a_{2,2}}^2 > 0$. In effetti in caso contrario l'equazione si ridurrebbe ad una equazione di primo grado e le curve a un duetto di linee rette.

Conveniamo ora di considerare la variabile x_1 come omonima della x, la x_2 omonima della y, il parametro $a_{2,1}$ omonimo di $a_{1,2}$, $a_{1,3}$ omonimo di $a_{3,1}$ e $a_{2,3}$ omonimo di $a_{3,2}$. Introduciamo anche il simbolo x_3 da assimilare ad una variabile ma riservandoci la possibilità di assegnargli il valore fisso 1. Introduciamo anche la matrice 3×3 simmetrica ed il vettore 3×1 che seguono

$$(2) \qquad \mathsf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \overline{A} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} .$$

Queste entità consentono di dare alla (1) la seguente forma matriciale

$$(3) \qquad [\, x_1 \quad x_2 \quad x_3 \,] \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \text{ovvero} \qquad \sum_{i=1}^{3} \overline{\mathsf{x}}^{\mathsf{T}}\, \overline{A}\, \overline{\mathsf{x}} = 0 \ ;$$

Questa relazione ed altre relazioni matriciali derivabili consentono espressioni concise che in taluni sviluppi risultano convenienti e significative.

G50:i.03 Risulta evidente che la forma dell'equazione :i.02(1) schematizzata dalla versione matriciale :i.02(3) non cambia quando si passa ad un altro sistema di riferimento ortogonale, cioè si introducono variabili x' e y' definite come funzioni lineari (non necessariamente omogenee) nalla x e nella y.
Ha quindi interesse cercare dei sistemi di riferimento nei quali alcuni particolari sottoinsiemi delle curve di secondo grado siano caratterizzati da equazioni tendenzialmente semplici e significative. In effetti procedendo in questo modo si riescono a classificare tutti i tipi di curve algebriche del secondo ordine associandoli alle diverse possibili scelte delle 6 componenti della matrice $\overline{A}$.

G50:i.04 Vediamo come si possono trattare le transizioni da un sistema di coordinate cartesiane ortogonali ad un altro. Una generica transizione si può ottenere effettuando in una prima fase una traslazione ed in una seconda una rotazione. Va osservato che le riflessioni rispetto ad una retta sono rotazioni di π intorno a tale retta.

Quando si passa dal sistema di riferimento Oxy al sistema traslato $O'x'y'$ con $x = x' + t_x$ e $y = y' + t_y$ e $O = O' + \langle t_x, t_y \rangle$ l'equazione :i.02(1) assume la forma

$$(1) \qquad a_{1,1}x'^2 + 2a_{1,2}x'y' + a_{2,2}y'^2 + 2a'_{1,3}x' + 2a'_{2,3}y' + a'_{3,3} = 0 \ ,$$

nella quale i coefficienti di secondo grado non cambiano, mentre per i rimanenti

$$(2) \qquad \begin{cases} a'_{1,3} = a_{1,1}t_x + a_{1,2}t_y + a_{1,3} \\ a'_{2,3} = a_{1,2}t_x + a_{2,2}t_y + a_{2,3} \\ a'_{3,3} = a_{1,1}{t_x}^2 + 2a_{1,2}t_xt_y + a_{2,2}{t_y}^2 + 2a_{1,3}t_x + 2a_{2,3}t_y + a_{3,3} \end{cases} .$$

L'ultima espressione, servendosi delle prime due si può riscrivere

$$(3) \qquad a'_{3,3} = (a'_{1,3} + a_{1,3})t_x + (a'_{2,3} + a_{2,3})bt_y + a_{3,3} \ .$$

G50:i.05 Vediamo ora come si trasforma l'equazione :i.02(1) quando si passa dal sistema destrorso Oxy al sistema destrorso $Ox"y"$ ottenuto con una rotazione di un angolo ϕ con centro nell'origine. Il collegamento tra le coordinate dei due sistemi di riferimento è dato dal seguente sistema di relazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x'' \cos\phi - y'' \sin\phi \\ y = x'' \sin\phi + y'' \cos\phi \end{cases} .$$

Sostituendo queste espressioni nella :i.02(1) si ottiene l'equazione

$$(2) \qquad a''_{1,1}\, x''^2 + 2a''_{1,2}\, x''y'' + a''_{2,2}\, y''^2 + 2a''_{1,3}\, x'' + 2a''_{2,3}\, y'' + a''_{3,3} = 0 \ ,$$

dove, tenuto conto che $\sin\phi\cos\phi = \dfrac{\sin 2\phi}{2}$, $\sin^2\phi = \dfrac{1-\cos 2\phi}{2}$ e $\cos^2\phi = \dfrac{1+\cos 2\phi}{2}$, si ha

$$(3) \qquad \begin{cases} a''_{1,1} := a_{1,2}\,\sin 2\phi + \dfrac{a_{1,1}-a_{2,2}}{2}\,\cos 2\phi + \dfrac{a_{1,1}+a_{2,2}}{2} \\ a''_{1,2} := a_{1,2}\,\cos 2\phi - \dfrac{a_{1,1}-a_{2,2}}{2}\,\sin 2\phi \\ a''_{2,2} := -\,a_{1,2}\,\sin 2\phi - \dfrac{a_{1,1}-a_{2,2}}{2}\,\cos 2\phi + \dfrac{a_{1,1}+a_{2,2}}{2} \\ a''_{1,3} := a_{1,3}\,\cos\phi + a_{2,3}\,\sin\phi \\ a''_{2,3} := a_{2,3}\,\cos\phi - a_{1,3}\,\sin\phi \\ a''_{3,3} := a_{3,3} \end{cases} .$$

Si osservano tre conseguenze di una rotazione del sistema di riferimento:
(a) i nuovi coefficienti dei termini dominanti dipendono solo dall'angolo di rotazione ϕ e dai vecchi coefficienti dei termini dominanti;
(b) i nuovi coefficienti dei termini lineari dipendono solo dai vecchi coefficienti dei termini linerai e dall'angolo ϕ;
(c) il termine costante non cambia.

G50:i.06 Le espressioni in (3) si possono riscrivere in forma più concisa servendosi dei seguenti parametri:

$$A := \sqrt{{a_{1,2}}^2 + \left(\frac{a_{1,1}-a_{2,2}}{2}\right)^2} \quad ; \quad B := \frac{a_{1,1}+a_{2,2}}{2} \quad ; \quad C := \sqrt{(a''_{1,3})^2 + (a''_{2,3})^2} \quad ;$$

l'angolo α uguale a 0 se $A = 0$ e tale che $\cos\alpha = \dfrac{a_{1,2}}{A}$ e $\sin\alpha = \dfrac{a_{1,1}-a_{1,2}}{2A}$ se $A \neq 0$; l'angolo β uguale a 0 se $C = 0$ e tale che $\cos\beta = \dfrac{a''_{2,3}}{C}$ e $\sin\beta = \dfrac{a''_{1,3}}{C}$ se $A \neq 0$. Alle (3) si può allora dare la forma

$$(4) \qquad \begin{cases} a''_{1,1} = A\,\sin(2\phi+\alpha) + B \\ a''_{1,2} = A\,\cos(2\phi+\alpha) \\ a''_{2,2} = -\,A\,\sin(2\phi+\alpha) + B \\ a''_{1,3} = C\,\sin(\phi+\beta) \\ a''_{2,3} = C\,\cos(\phi+\beta) \\ a''_{3,3} = a_{3,3} \end{cases} .$$

Si osserva che A, B, C, α e β non dipendono dall'angolo di rotazione ϕ.

G50:i.07 Riprendiamo la definizione di invariante in una forma ad un buon livello di generalità e di effettività.

Vanno considerati diverse entità:
- un insieme ambiente $\mathbf{E}$ e un sistema di riferimento $\mathcal{R}$ per i suoi elementi;
- un gruppo $\mathbb{G}$ di sue permutazioni, ossia di sue simmetrie, esprimibili in particolare come trasformazioni di $\mathcal{R}$ in sistemi di riferimento equivalenti $g(\mathcal{R})$ per $g \in \mathbb{G}$;

- una struttura $\mathbb{S}$ definita su **E** (la $\mathbb{S}$ potrebbe essere, ad esempio, una relazione entro **E** oppure un sottoinsieme di **E**; anche $\mathbb{S}$ può esprimersi nei diversi sistemi di riferimento);
- una sequenza di procedimenti $\langle \mathsf{P}_1, ..., \mathsf{P}_r\rangle$ i quali consentono a partire dalla $\mathbb{S}$ di individuare, risp., i parametri P_1, ..., P_r (la determinazione dei parametri P_j da parte delle procedure $\mathcal{P}_j$ si sappia effettuare in ogni sistemi di riferimento);
- una funzione (o composizione) avente come argomenti i parametri P_j, fornita da un'espressione esplicita o da un algoritmo $\mathcal{I}(P_1, ..., P_r)$ per ogni riferimento $\mathcal{R}$.

La funzione esprimibile con $\mathcal{I}$ si dice **invariante** per il gruppo $\mathbb{G}$ di simmetrie dell'ambiente **E** sse per ogni $g \in \mathbb{G}$ passando dal sistema $\mathcal{R}$ al sistema $\mathcal{R}' := g(\mathcal{R})$ e di conseguenza dai parametri P_j ai parametri $P'_j := g(P_j$ si ha

(1) $$\mathcal{I}(P_1, ..., P_r) = \mathcal{I}(P'_1, ..., P'_r) \ .$$

G50:i.08 Consideriamo le seguenti funzioni dei coefficienti dell'equazione delle curve di secondo grado

$$\mathcal{I}_1 := a_{1,1} + a_{2,2} \quad , \quad \mathcal{I}_2 := \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \quad , \quad \mathcal{I}_3 := \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \ .$$

Di tali funzioni della forma $\mathcal{I}a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{3,3})$ consideriamo l'invarianza per il gruppo dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^{\times 3}$ da riferire ai sistemi di riferimento cartesiani ortogonali.

Per completare il fatto che questo problema ricade sotto lo schema generale di :i.07 basta osservare che il ruolo della struttura $\mathbb{S}$ è svolto dall'equazione generale delle coniche, i parametri P_j sono i coefficienti $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{1,2}$, $a_{1,3}$, $a_{2,3}$, $a_{3,3}$, le procedure P_j sono le semplici estrazioni dei coefficienti dall'equazione.

G50:i.09 **(1) Teorema** Le funzioni $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ e $\mathcal{I}_3$ sono invarianti per il,gruppo dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Dim.: Le proprietà di invarianza si dimostrano considerando separatamente le traslazioni e le rotazioni Per gli effetti delle traslazioni, abbiamo osservato che i coefficienti dei termini di secondo grado non cambiano e quindi sono invarianti $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$. Si considera poi l'espressione $\mathcal{I}'$ di $\mathcal{I}_3$ per il sistema di riferimento che ha subito la traslazione $Trsl_{t_x,t_y}$:

$$\mathcal{I}'_3 := \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a'_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a'_{2,3} \\ a'_{1,3} & a'_{2,3} & a'_{3,3} \end{vmatrix} \ .$$

Sottraiamo dalla terza riga della matrice la prima riga moltiplicata per t_x e la seconda moltiplicata per t_y tenendo conto di :i.04(2):

$$\mathcal{I}'_3 := \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a'_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a'_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{1,3}\, t_x + a_{2,3}\, t_y + a_{3,3} \end{vmatrix} \ .$$

Per questo determinante basta sottrarre dalla terza colonna la prima moltiplicata per t_x e la seconda moltiplicata per t_y per trovarlo coincidente con $\mathcal{I}_3(a_{1,1}, ..., a_{3,3})$ e quindi per stabilire l'invarianza di $\mathcal{I}_3$ per le traslazioni.

Passiamo ad esaminare gli effetti su $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ e $\mathcal{I}_3$ della rotazione :1.05(1).

Grazie alle :i.06(4) abbiamo

$$I"_1 := \mathcal{I}_1(a''_{1,1}, ..., a''_{3,3}) = a''_{1,1} + a''_{2,2} = 2B = a_{1,1} + a_{2,2} = I_1$$

$$I"_2 := a"_{1,1}\, a"_{2,2} - a"_{1,2}2 = B^2 - A^2 = a_{1,1}a_{2,2} - {a_{1,2}}^2 = I_2 \ .$$

Queste dimostrano l'invarianza di $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$.

Per la funzione $\mathcal{I}_3$ va calcolato il determinante

$$I''_3 := \begin{vmatrix} a''_{1,1} & a''_{1,2} & a''_{1,3} \\ a''_{1,2} & a''_{2,2} & a''_{2,3} \\ a''_{1,3} & a''_{2,3} & a''_{3,3} \end{vmatrix} \ ;$$

sviluppiamo tale determinante sull'ultima colonna tenendo conto che $I''_2 = I_2$ e $a''_{3,3} = a_{3,3}$ ed otteniamo

$$I''_3 = a''_{1,3} \begin{vmatrix} a''_{1,2} & a''_{2,2} \\ a''_{1,3} & a''_{2,3} \end{vmatrix} + a''_{2,3} \begin{vmatrix} a''_{1,1} & a''_{1,2} & \\ & a''_{1,3} & a''_{2,3} \end{vmatrix} + a_{3,3}\, I_2 \ .$$

Sempre grazie alle :i.06(4) si ottiene

$$a''_{1,3} \begin{vmatrix} a''_{1,2} & a''_{2,2} \\ a''_{1,3} & a''_{2,3} \end{vmatrix} = C\ \sin(\phi+\beta) \begin{vmatrix} A\cos(2\phi+\alpha) & -A\ \sin(2\phi+\alpha)+B \\ C\ \sin(\phi+\beta) & C\ \cos(\phi+\beta) \end{vmatrix}$$

$$= C^2\ \sin(\phi+\beta)\,[A\cos(\phi+\alpha-\beta) - B\ \sin(\phi+\beta)] \ ;$$

analogamente troviamo

$$a''_{2,3} \begin{vmatrix} a''_{1,1} & a''_{1,2} \\ a''_{1,3} & a''_{2,3} \end{vmatrix} = C^2\ \cos(\phi+\beta)\,[A\sin(\phi+\alpha-\beta) + B\ \cos(\phi+\beta)] \ .$$

Raccogliendo gli ultimi risultati abbiamo

$$I''_3 = AC^2\ \sin(2\beta-\alpha) - BC^2 + a_{3,3}\, I_2 \ .$$

Si osserva che A, B, C, α, β e I_2 non dipendono dall'angolo ϕ; di conseguenza I''_3 non dipende dall'angolo della rotazione :i.05(1) della quale si stanno esaminando gli effetti. Se consideriamo $\phi = 0$ per ogni i e j abbiamo $a''_{i,j} = a_{i,j}$ e quindi $I''_3 = I_3$.
Questo conclude la dimostrazione ▮

G50:i.10 Ci proponiamo ora di dimostrare che le caratteristiche geometriche delle curve del secondo ordine sono completamente determinate dai valori dei tre invarianti.
A questo punto è opportuno osservare che i coefficienti delle equazioni delle curve del secondo ordine sono definiti a meno di un fattore moltiplicativo diverso da 0: infatti moltiplicando tutti i coefficienti $a_{i,j}$ della :10.b(1) per un $k \neq 0$ si ottiene una equazione del tutto equivalente. In particolare questi coefficienti si possono cambiare di segno.
Come conseguenza della moltiplicazione per k dei coefficienti della :10.b(1) risultano moltiplicati per k anche i coefficienti delle equazioni :10.c(1) e :10.d(2), mentre per quanto riguarda le quantità derivate B ed I_1 sono moltiplicati per k, A e C per $|k|$, I_2 per k^2 e I_3 per k^3.
Cominciamo con l'introduzione dei tre seguenti tipi di curve caratterizzati dal segno di I_2, segno che non cambia quando si moltiplicano per k i coefficienti $a_{i,j}$:

- curve di tipo ellittico sse $I_2 < 0$, cioè sse $a_{1,1}a_{2,2} < a_{1,2}^2$;
- curve di tipo parabolico sse $I_2 = 0$, cioè sse $a_{1,1}a_{2,2} = a_{1,2}^2$;
- curve di tipo iperbolico sse $I_2 > 0$, cioè sse $a_{1,1}a_{2,2} > a_{1,2}^2$.

Questi tipi non cambiano con un cambiamento di sistema di riferimento cartesiano ortogonale e per ciascuno di essi otterremo una completa classificazione delle curve.

G50:i.11 Abbiamo visto che una traslazione modifica solo i coefficienti dei termini lineari dell'equazione delle curve del secondo ordine. Cerchiamo quindi una traslazione che porti ad una equazione nella quale i coefficienti lineari siano nulli, equazione più semplice in quanto priva dei termini del primo ordine ed auspicabilmente dal significato più trasparente. Questa richiesta conduce a ricercare una particolare coppia di valori $\langle x_C, y_C\rangle$ per la coppia dei parametri della traslazione $\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle$, cioè per le coordinate della nuova origine O'; questi valori particolari, a causa di :10.d(2), soddisfino il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{1,1}x_C + a_{1,2}y_C = -\,a_{1,3} \\ a_{2,1}x_C + a_{2,2}y_C = -\,a_{2,3} \end{cases} .$$

Queste sono chiamate **equazioni del centro di una curva del secondo ordine**. Esse portano ad una ben determinata soluzione sse è diverso da zero il relativo determinante, cioè sse $I_2 \neq 0$, cioè sse si tratta di una curva di tipo ellittico o iperbolico. Per queste curve il punto $C = O' = \langle x_C, y_C\rangle$ viene chiamato **centro** della curva e le curve di tipo ellittico o iperbolico sono dette **curve del secondo ordine dotate di centro**. Nel sistema di riferimento $Cx'y'$ l'equazione assume la forma

$$a_{1,1}x'^2 + 2a_{1,2}x'y' + a_{2,2}y'^2 + a'_{3,3} = 0 \ .$$

Questa equazione è invariante rispetto alla simmetria centrale di centro C, cioè rispetto alla trasformazione $x' \to -x'$, $y' \to -y'$; quindi le curve dotate di centro sono trasformate in sé stesse da questa trasformazione, ovvero se $P = \langle x', y'\rangle$ appartiene alla curva, anche $\langle -x', -y'\rangle$ vi appartiene.
Nel sistema $Cx'y'$ il terzo invariante assume la forma

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{3,3} \end{vmatrix} = I_2 a'_{3,3} \ ;$$

Quindi l'equazione della curva si può porre sotto la forma

$$a_{1,1}x'^2 + 2a_{1,2}x'y' + a_{2,2}y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \ .$$

G50:i.12 Un'altra semplificazione dell'equazione delle curve del secondo ordine che è applicabile in ogni caso, consiste in una cosiddetta **rotazione standard** intorno all'origine corrente di un particolare angolo ϕ che permette di eliminare il termine $2a''_{1,2}x''y''$ dalla :10.d(2), supposto che sia $a''_{1,2} \neq 0$. Chiaramente si tratta di scegliere per l'angolo di rotazione il valore ϕ_s tale che la seconda espressione della :10.d(3) dia

(1) $$a_{1,2}\cos 2\phi_s - \frac{a_{1,1} - a_{2,2}}{2}\sin 2\phi_s = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \cot 2\phi_s = \frac{a_{1,1} - a_{2,2}}{2a_{1,2}} \ .$$

Con tale scelta l'equazione :10.d(2) assume la forma

(2) $$a''_{1,1}x''^2 + a''_{2,2}y''^2 + 2a''_{1,3}x'' + 2a''_{2,3}y'' + a_{3,3} = 0 \ ,$$

Per le curve del secondo ordine dotate di centro, effettuando una traslazione che porti l'origine nel centro C e quindi una rotazione standard, se resa necessaria da un valore $a'_{1,2} \neq 0$ si ottiene un sistema di riferimento che denotiamo con CXY, nel quale le ascisse e le ordinate variabili sono denotate, risp., con X e Y. In tale riferimento si giunge all'equazione

(3) $$a''_{1,1}X^2 + a''_{2,2}Y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \ ,$$

nella quale i coefficienti $a''_{i,i}$ sono ottenibili dagli $a_{i,j}$ di partenza servendosi delle espressioni in :10.e, con $\phi = \phi_s$. A partire da questa equazione siamo in grado di giungere ad una classificazione esauriente delle curve del secondo ordine dotate di centro.

G50:i.13 Consideriamo le curve di tipo ellittico; per esse $I_2 = a''_{1,1}a''_{2,2} > 0$, ovvero $a''_{1,1}$ ed $a''_{2,2}$ hanno lo stesso segno di I_1; per la possibilità di moltiplicare i coefficienti per il fattore -1 possiamo assumere che siano positivi, oltre ad I_2, anche $a''_{1,1}$, $a''_{2,2}$ ed I_1.
In corrispondenza dei possibili segni di I_3 si distinguono tre tipi di curve ellittiche relativi a tre forme che può assumere l'equazione :10.i(3):

$$(1) \qquad \frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{-I_3}{I_2 a''_{1,1}}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{-I_3}{I_2 a''_{2,2}}}\right)^2} = 1 \quad \text{per} \quad I_3 < 0 \ ,$$

$$(2) \qquad \frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{a''_{1,1}}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{\ }{\sqrt{a''_{2,2}}}\right)^2} = 1 \quad \text{per} \quad I_3 = 0 \ ,$$

$$(3) \qquad \frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_2 a''_{1,1}}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_2 a''_{2,2}}}\right)^2} = -1 \quad \text{per} \quad I_3 > 0 \ .$$

L'equazione (1) è l'equazione canonica dell'ellisse avente come semiassi $\sqrt{\dfrac{-I_3}{I_2 a''_{1,1}}}$ e $\sqrt{\dfrac{-I_3}{I_2 a''_{2,2}}}$; se in particolare $a''_{1,1} = a''_{2,2}$ si ha una circonferenza.
L'equazione (2) è l'equazione del solo punto $C = \langle 0, 0\rangle$, da considerare come **ellisse degenere**.
L'equazione (3) non è soddisfatta da alcun punto del piano reale; essa si può però interpretare, nell'ambito della geometria sul campo complesso, come insieme di punti del piano $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ costituenti una cosiddetta **ellissi immaginaria**.

G50:i.14 Consideriamo le curve di tipo iperbolico; per esse $I_2 = a''_{1,1}a''_{2,2} < 0$, ovvero $a''_{1,1}$ ed $a''_{2,2}$ hanno segni opposti per la possibilità di moltiplicare i coefficienti per il fattore -1 possiamo assumere che sia $a''_{1,1} > 0$ e $a''_{2,2} < 0$ (il caso opposto potendosi trattare del tutto similmente).
In corrispondenza dei possibili segni di I_3 si distinguono tre tipi di curve iperboliche relativi a tre forme che può assumere l'equazione :10.i(3):

$$(1) \qquad \frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_2 a''_{1,1}}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_2(-a''_{2,2})}}\right)^2} = -1 \quad \text{per} \quad I_3 < 0 \ ,$$

$$(2) \qquad \frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{a''_{1,1}}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{\ }{\sqrt{-a''_{2,2}}}\right)^2} = 0 \quad \text{per} \quad I_3 = 0 \ ,$$

$$(3) \qquad \frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{-I_3}{I_2 a''_{1,1}}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{-I_3}{I_2(-a''_{2,2})}}\right)^2} = 1 \quad \text{per} \quad I_3 > 0 \ ,$$

L'equazione (1) è l'equazione canonica di un'iperbole avente l'asse CY come asse trasverso e l'asse CX come asse coniugato con il semiasse trasverso dato da $\sqrt{\dfrac{I_3}{I_2 a''_{1,1}}}$ ed il semiasse coniugato da $\sqrt{\dfrac{I_3}{I_2(-a''_{2,2})}}$. Se in particolare $a''_{2,2} = -a''_{1,1}$, l'equazione rappresenta una iperbole rettangolare.

L'equazione (2) si può porre sotto la forma

$$\left(\frac{X}{\frac{1}{\sqrt{a''_{1,1}}}} + \frac{Y}{\frac{1}{\sqrt{-a''_{2,2}}}}\right)\left(\frac{X}{\frac{1}{\sqrt{a''_{1,1}}}} - \frac{Y}{\frac{1}{\sqrt{-a''_{2,2}}}}\right) = 0 \ ;$$

Questa è l'equazione che caratterizza l'insieme delle due rette date dalle equazioni

$$\frac{X}{\frac{1}{\sqrt{a''_{1,1}}}} + \frac{Y}{\frac{1}{\sqrt{-a''_{2,2}}}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{X}{\frac{1}{\sqrt{a''_{1,1}}}} - \frac{Y}{\frac{1}{\sqrt{-a''_{2,2}}}} = 0 \ ;$$

L'equazione (3) è invece l'equazione canonica di un'iperbole avente l'asse CX come asse trasverso e l'asse CY come asse coniugato con il semiasse trasverso dato da $\sqrt{\dfrac{-I_3}{I_2(-a''_{2,2})}}$ ed il semiasse coniugato da $\sqrt{\dfrac{-I_3}{I_2 a''_{1,1}}}$. Ancora se $a''_{2,2} = -a''_{1,1}$ si ha una iperbole rettangolare.

G50:i.15 Procediamo ora alla semplificazione dell'equazione per le curve di tipo parabolico e alla loro classificazione.
Osserviamo preliminarmente che per queste equazioni l'invariante I_1 è diverso da 0; infatti se fosse $I_1 = a_{1,1} + a_{2,2} = 0$ si avrebbe $a_{1,1}a_{2,2} = -\dfrac{{a_{1,1}}^2}{2} - \dfrac{{a_{2,2}}^2}{2}$ e quindi, dato che $I_2 = a_{1,1}a_{2,2} - {a_{1,2}}^2 = 0$, sarebbe ${a_{1,2}}^2 = -\dfrac{{a_{1,1}}^2}{2} - \dfrac{{a_{2,2}}^2}{2}$, uguaglianza che implica $a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = 0$, uguaglianze che fanno uscire dall'ambito delle curve del secondo ordine.

Alla equazione :10.b(1) si può applicare la rotazione standard, effettiva solo se $a_{1,2} \neq 0$, ottenendo l'equazione :10.i(2)

$$a''_{1,1}x''^2 + a''_{2,2}y''^2 + 2a''_{1,3}x'' + 2a''_{2,3}y'' + a_{3,3} = 0 \ .$$

Dato che deve essere $I_2 = a''1,1a''_{2,2} = 0$ con $I_1 = a''1,1 + a''_{2,2} \neq 0$, si deduce che dei due coefficienti $a''_{1,1}$ e $a''_{2,2}$ uno è nullo e l'altro diverso da 0.
Supponiamo che sia $a''1,1 = 0$ e $a''_{2,2} \neq 0$ (il caso opposto potendosi trattare in modo del tutto analogo).
Avendosi $I_1 = a''_{2,2}$, l'equazione delle curve in esame si può scrivere nella forma

$$I_1 y''^2 + 2a''_{1,3}x'' + 2a''_{2,2}y'' + a_{3,3} = 0 \ .$$

Una ulteriore semplificazione si ottiene con la traslazione

$$\begin{cases} X = x'' \\ Y = y'' + \dfrac{a''_{3,3}}{I_1} \end{cases}$$

e con l'introduzione dei due parametri

$$\alpha_{1,3} := a''_{1,3} \quad , \quad \alpha_{3,3} - \frac{{a''_{2,3}}^2}{I_2} \ .$$

Si ottiene quindi l'equazione

$$I_1 Y^2 + 2\alpha_{1,3}X + \alpha_{3,3} = 0 \ .$$

G50:i.16 Per classificare le curve di tipo parabolico occorre esplicitare il terzo invariante nel modo seguente:

$$I_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{3,3} & \alpha_{1,3} & 0 \\ \alpha_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{vmatrix} = -I_1{\alpha_{1,3}}^2 \ .$$

Dato che $I_1 = 0$, si danno due situazioni: se $I_3 \neq 0$, allora $\alpha_{1,3} \neq 0$; se $I_3 = 0$, allora $\alpha_{1,3} = 0$. Vanno quindi considerate due equazioni:

(1) $$I_1 Y^2 + 2\alpha_{1,3}\left(X + \frac{\alpha_{3,3}}{2\alpha_{1,3}}\right) = 0 \quad \text{se} \quad I_3 \neq 0 \quad \text{ovvero} \quad \alpha_{1,3} \neq 0 \;;$$

(2) $$I_1 Y^2 + \alpha_{3,3} = 0 \quad \text{se} \quad I_3 = 0 \quad \text{ovvero} \quad \alpha_{1,3} = 0 \;.$$

L'equazione (1), applicando la traslazione $X' = X + \dfrac{\alpha_{3,3}}{2\alpha_{1,3}}$ e introducendo il parametro $p := \left|\dfrac{\alpha_{1,3}}{I_1}\right|$ porta ad una delle equazioni

$$Y'^2 = 2pX \quad \text{oppure} \quad Y'^2 = -2pX \;,$$

cioè ad equazioni canoniche di parabole (v. :b.03).

L'equazione (2) si può riscrivere nella forma

$$Y^2 = -\frac{\alpha_{3,3}}{I_1} \;.$$

Nel caso sia $-\dfrac{\alpha_{3,3}}{I_1} > 0$ essa caratterizza le due rette parallele $Y = \sqrt{-\dfrac{\alpha_{3,3}}{I_1}}$ e $Y = -\sqrt{-\dfrac{\alpha_{3,3}}{I_1}}$. Nel caso sia $-\dfrac{\alpha_{3,3}}{I_1} < 0$ l'equazione non è soddisfatta da alcun punto del piano reale e si dice che descrive due rette parallele immaginarie $Y = i\sqrt{\dfrac{-\alpha_{3,3}}{-I_1}}$ e $Y = -i\sqrt{\dfrac{-\alpha_{3,3}}{-I_1}}$.

G50:i.17 Una curva del secondo ordine si dice **riducibile** sse viene caratterizzata da un'equazione che presenta il prodotto di due polinomi di primo grado uguagliato a 0. Evidentemente questa proprietà è invariante rispetto al passaggio da un sistema di riferimento cartesiano ad un altro dello stesso genere, trasformazione che porta un polinomio di primo grado in un altro polinomio dello stesso grado.

(1) Prop.: Una curva del secondo ordine è riducibile sse il suo terzo invariante è $I_3 = 0$.

Dim.: La proprietà si deduce dalle equazioni :10.j(1-3), :10.k(1-3) e :10.l(1-2) ▮

G50:j. Tangenti delle coniche

G50:j.01 Ricordiamo che si definisce **tangente di una curva** $\mathcal{C}$ in un suo punto P la posizione limite (se esiste) della retta secante di $\mathcal{C}$ in P e in un secondo punto Q al tendere di Q a P.

Consideriamo una curva piana $\mathcal{C}$ data dalla funzione $y = f(x)$ e un suo punto $P = \langle x_P, y_P\rangle$; assumiamo che la $f(x)$ sia derivabile rispetto a x in un intorno di x_P. L'equazione della tangente alla $\mathcal{C}$ in P il cui punto variabile è denotato con $\langle X, Y\rangle$ è

(1) $$Y - y_P = f'(x_P)(X - x_P) \;.$$

Similmente per una curva piana individuata dalla funzione $x = \phi(y)$ l'equazione della tangente in P è

(2) $$X - x_P = \phi'(x_P)(Y - y_P).$$

G50:j.02 Consideriamo ora la parabola espressa dalla

(1) $$x = \frac{y^2}{2p} \ .$$

Secondo la :j.01(1) la tangente in P è data dall'equazione

(2) $$X - x_P = \frac{y_P}{p}(Y - y_P) \qquad \text{ovvero} \qquad Y\,y_P - {y_P}^2 + p\,x_P - p\,X = 0 \ .$$

Dato che $\langle x_P, y_P\rangle$ giace sulla parabola si ha ${y_P}^2 = 2px_P$ e quindi all'equazione della tangente si può dare la forma

(3) $$Y\,y_P - p(X + x_P) = 0 \ .$$

G50:j.03
Consideriamo il caso dell'ellisse e un suo punto $P = \langle x_P, y_P\rangle$ con $y_p \neq 0$.

(1) $$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \ .$$

Si trova

(2) $$\frac{X\,x_P}{a^2} + \frac{Y\,y_P}{b^2} = 1 \ .$$

In prossimità di ogni $P = \langle x_P, y_P\rangle$ con $x_P \neq 0$ si ha l'espressione

$$x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \ .$$

Da questa con passaggi simili ai precedenti si trova la stessa equazione (2). Questa equazione deve quindi valere per ogni punto $P = \langle x_P, y_P\rangle$ dell'ellisse, in quanto non possono mai essere contemporaneamente nulli x_P e y_P.

G50:j.04 Similmente a sopra per l'iperbole si trova l'equazione

(1) $$\frac{X\,x_P}{a^2} - \frac{Y\,y_P}{b^2} = 1 \ .$$

G50:j.05 Dimostriamo che ogni tangente ad una conica non ha in comune con la curva alcun punto diverso da quello di tangenza.

Vediamo come si trova la tangente ad una conica che sia parallela ad una retta data.
. . . .

G50:k. Diametri delle coniche

G50:k.01 Per **diametro** di una conica a centro, cioè di un'ellisse o di una iperbole, si intende una retta passante per il centro di tale sezione conica. Si definisce invece **diametro di una parabola** una retta parallela al suo asse.
Si osserva che ogni asse di simmetria di una conica si può annoverare tra i suoi diametri.

Per le circonferenze questa definizione è in accordo con la definizione elementare di diametro.

Consideriamo una conica C che non sia una conica degenere ridotta ad una coppia di rette. Una qualsiasi retta $\mathcal{R}$ interseca la C in al più due punti: infatti queste intersezioni si ottengono dal sistema costituito da un'equazione quadratica e da un'equazione lineare e quindi come soluzione di un'equazione di secondo grado.

Se la $\mathcal{R}$ interseca la C in due punti distinti P_1 e P_2, il segmento P_1P_2 si dice **corda** della C.

Interessano particolarmente le famiglie di corde di una conica individuate dalle rette appartenenti a fasci di rette parallele. ciascuno di tali insiemi di segmenti verrà detto **insieme di corde parallele**.

Per ogni conica sono insiemi di corde parallele molto evidenti Gli insiemi dei segmenti individuati dalle rette ortogonali ad un asse di simmetria.

Per ciascuno di questi insiemi di corde parallele è evidente che i corrispondenti punti medi appartengono ad un asse di simmetria della conica e quindi ad un diametro della conica.
Questa proprietà si può generalizzare.

G50:k.02 (1) Prop.: Per una qualsiasi conica C i punti medi delle corde di un insieme di corde parallele appartengono ad un diametro di tale C.

Dim.: Un fascio di linee parallele non dirette come un asse di simmetria, nel caso dell'ellissi e dell'iperbole si può controllare con la famiglia di equazioni

$$(1) \qquad y = kx + b \qquad \text{per un dato } k \neq 0 \quad \text{e} \quad \text{per } b \text{ variabile in } \mathbb{R} \ .$$

Le equazioni canoniche per ellissi ed iperbole possono essere espresse nella seguente formula

$$(2) \qquad \alpha\, x^2 + \beta\, y^2 - 1 = 0 \ .$$

Le estremità delle corde $P_i = \langle x_i, y_i \rangle$ $(i = 1, 2)$ devono soddisfare contemporaneamente (1) e (2). Sostituendo nella (2) y data dalla (1) si ottiene

$$(3) \qquad (\alpha + \beta\, k^2)\, x^2 + 2\,\beta\, k\, b\, x + \beta\, b^2 - 1 = 0 \ .$$

Per le proprietà delle soluzioni dell'equazione di secondo grado, per le ascisse delle estremità deve essere

$$x_1 + x_2 = -\frac{2\,\beta\, k\, b}{\alpha + \beta\, k^2} \ ;$$

quindi per l'ascissa del punto medio $M = \langle x_M, y_M \rangle$ si ha

$$(4) \qquad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\beta\, k\, b}{\alpha + \beta\, k^2} \ .$$

Per l'ordinata

$$(5) \qquad y_M = kx_M + b = -\frac{\beta\, k^2\, b}{\alpha + \beta\, k^2} + b = \frac{\alpha b}{\alpha + \beta\, k^2} = -\frac{\alpha}{\beta\, k} x_M \ .$$

In conclusione i punti medi giacciono su una retta passante per l'origine, cioè per il centro dell'ellisse o dell'iperbole. Tale retta ha inclinazione

$$k' = \frac{\alpha}{\beta\, k} \ .$$

Il diametro $y = k'\, x$ viene chiamato **diametro coniugato** del diametro $y = k\, x$ che è parallelo alle corde considerate. Per una evidente simmetria per lo scambio tra k e k' il coniugato del diametro $y = k'\, x$ è il diametro $y = k\, x$. La coniugazione fra diametri è dunque un'involuzione.

Passiamo a considerare il caso della parabola $x = \frac{y^2}{2p}$. Le coordinate delle estremità delle corde aventi inclinazione k (che possiamo supporre $\neq 0$) si ottengono dal sistema delle equazioni

$$(6) \qquad y^2 - 2px = 0 \quad , \quad y = kx + b \; .$$

Eliminando la x si ha l'equazione per le ordinate delle estremità

$$(7) \qquad y^2 - \frac{2py}{k} + \frac{2pb}{k} = 0 \; .$$

Da qui segue l'uguaglianza $y_1 + y_2 = \frac{2p}{k}$ e quindi

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{k} \; .$$

Dunque i punti medi delle corde considerate giacciono sopra una retta orizzontale, parallela all'asse Ox della parabola ▮

G50:k.03 (1) Prop.: Consideriamo un diametro di una conica C che intersechi questa curva in due punti; le due tangenti alla C in questi punti intersezioni sono parallele al diametro coniugato.

Dim.: Osserviamo che l'enunciato riguarda solo le coniche a centro e che risulta evidente per i diametri ortogonali agli assi di simmetria della conica stessa.

Sia $P_i = \langle x_i, y_i \rangle$ un punto di intersezione del diametro $y = kx$ con la conica che consideriamo individuata dall'equazione $\alpha\, x^2 + \beta\, y^2 = 1$. La tangente nel punto P_i è espressa dalla equazione

$$(2) \qquad \alpha\, x\, x_i + \beta\, y\, y_i - 1 = 0 \; .$$

L'inclinazione di tale retta è $k' = -\frac{\alpha\, x_i}{\beta\, y_i}$, mentre P_i, appartenendo al diametro $y = kx$, deve avere $y_i = k\, x_i$. Quindi $k' = -\frac{\alpha}{\beta\, k}$ ▮

Si osserva che anche questo enunciato per le circonferenze equivale al teorema di geometria elementare secondo il quale i punti medi delle corde di un insieme di corde parallele giacciono sul diametro ortogonale alle corde stesse.

G50:l. Altri risultati sulle coniche

G50:l.01 In [[geometria proiettiva]] (G17:) le sezioni coniche sono considerate curve nel piano proiettivo equivalenti, cioè come curve che possono essere trasformate l'una nell'altra mediante una [[trasformazione proiettiva]].

G50:l.02 In [[geometria descrittiva]] una parabola può essere definita anche come luogo geometrico dei centri delle ellissi (e in particolare di una circonferenza) tangenti una retta r e ad un'ellisse Θ assegnate. La retta r viene detta direttrice e la retta [[polare]] del [[punto improprio]] corrispondente alla direzione di r viene detta asse della parabola.

Nel caso in cui uno degli assi di simmetria di Θ è perpendicolare ad r, si ha una parabola con lo stesso asse di simmetria.

G50:l.03 Segnaliamo che il perimetro di un'ellisse caratterizzata dal semiasse maggiore a e dall'eccentricità e è data da un'espressione della forma $P_{a,e} = 4aE(e)$ nella quale compare la funzione di variabile reale E chiamata [[integrale ellittico]] completo di seconda specie.

Per questa espressione si trova il seguente sviluppo in serie:

$$P_{a,e} = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \ldots\right] .$$

Una buona approssimazione è quella dovuta al grande matematico indiano [[Srinivasa Ramanujan]]:

$$P_{a,e} \approx \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right] ,$$

la quale può anche essere scritta come:

$$P_{a,e} \approx \pi a \left[3(1 + \sqrt{1-e^2}) - \sqrt{(3 + \sqrt{1-e^2})(1 + 3\sqrt{1-e^2})}\right] .$$

Più in generale, la lunghezza dell'arco di una porzione di ellisse, come funzione dell'angolo sotteso, è data da un [[integrale ellittico]] incompleto. La [[funzione inversa]], l'angolo sotteso come funzione della lunghezza dell'arco, è data da una [[funzione ellittica]].

G50:m. Cenno alle applicazioni delle coniche

G50:m.01 In epoca ellenistica la conoscenza delle coniche permise la costruzioni di specchi parabolici che furono applicati in attività belliche (v. [[Specchi ustori]]) e nella costruzioni di fari di grande portata (v. [[Faro di Alessandria]]).

Le sezioni coniche sono importanti nella meccanica celeste e nell'astronomia. Le orbite di due corpi celesti (aventi masse elevate) che interagiscono secondo secondo la [[legge di gravitazione universale]] sono sezioni coniche rispetto al loro comune [[centro di massa]] considerato a riposo.
Se tra di loro si esercita una attrazione sufficiente, entrambi percorrono un'ellisse; in particolare secondo le [[leggi di Keplero]], l'orbita di un pianeta è un'ellisse avente il Sole in uno dei due fuochi.
Se l'attrazione reciproca tra due corpi celesti è insufficiente, essi si muovono con la possibilità di allontanarsi illimitatamente percorrendo entrambi parabole o iperboli. Si veda in proposito il [[problema dei 2 corpi]].

La conoscenza delle coniche consente di sviluppare la dinamica bidimensionale, utile per lo studio di dispositivi meccanici come le viti.

`Le varie componenti di questo testo sono accessibili in http://www.mi.imati.cnr.it/∼alberto`