1

Capitolo G50
sezioni coniche

Contenuti delle sezioni

a. sezioni coniche [1] p. 2
b. parabola p. 3
c. ellisse p. 7
d. iperbole p. 13
e. equazioni delle coniche in coordinate polari p. 18
f. coniche definite da fuoco, direttrice ed eccentricità p. 20
g. sezioni piane di un cono p. 22
h. sfere di Dandelin p. 27
i. coniche come soluzioni di equazioni quadratiche p. 30
j. tangenti e diametri delle coniche p. 39
k. altri risultati sulle coniche p. 42
l. coniche: applicazioni p. 43
m. equazioni per le sezioni di un cono p. 44

47 pagine

G500.01 Le sezioni coniche sono curve piane che si possono definire in molti modi e che, quasi di onseguenza, posseggono numerose proprietà. Queste fanno sì che esse posseggano rilevanti applicazioni, che presentino molti motivi di interesse e che siano state ampiamente studiate, a partire da Apollonio e da alcuni altri grandi matematici greco-ellenistici.

In queste pagine sono introdotte le sezioni coniche seguendo diversi sistemi di definizioni che successivamente sono dimostrati equivalenti.

Dopo la prima sezione che parla di coni e fornisce una panoramica della presentazione di queste curve, sono introdotte le tre famiglie principali, le ellissi, le parabole e le iperboli, come luoghi di punti del piano euclideo che soddisfano richieste metriche.

La sezione che segue le presenta ponendosi nello spazio tridimensionale come sezioni di un cono circolare retto e la sezione successiva dimostra l'equivalenza di queste definizioni tridimensionali con quelle metriche.

Vengono poi definite le coniche a partire da fuoco, direttrice ed eccentricità e si dimostra la equivalenza di questa definizione con le precedenti.

L'ultima definizione data e dimostrata equivalente è prettamente analitico-algebrica e vede le coniche come soluzioni di equazioni quadratiche.

Successivamente sono presentate altre proprietà riguardanti espressioni mediante coordinate polari, tangenti, e polarità.
Nella parte finale vengono accennate alcune loro applicazioni.

G50 a. sezioni coniche [1]

G50a.01 Cominciamo con il definire **sezione conica**, termine spesso abbrevviato con **conica**, una curva piana costituita dai punti ottenibili intersecando la superficie di un cono circolare retto con un piano. I tre tipi fondamentali di sezioni coniche sono curve ben note: le ellissi, le parabole e le iperboli; inoltre le curve meglio conosciute, cioè le circonferenze, sono casi particolari di ellissi.

Esse sono state studiate accuratamente in epoca ellenistica, in particolare da Apollonio di Perga che intorno al 200 a.C. scrisse un libro intitolato *Coniká*, uno dei capolavori della scienza antica; in esso sono introdotti anche i nomi tuttora in uso per i tre tipi fondamentali di sezioni coniche.

G50a.02 Iniziamo la presentazione delle coniche introducendo separatamente i loro tre tipi fondamentali attraverso tre caratterizzazioni metriche peculiari. Queste consentono di stabilire che certi rappresentanti di ciascuna di queste famiglie di curve si possono caratterizzare come luoghi dei punti del piano che soddisfano equazioni di forme particolarmente semplici, note come equazioni canoniche.

Successivamente ci poniamo nello spazio tridimensionale e introduciamo in generale le coniche come sezioni piane di un cono circolare retto: anche da questo punto di vista son ben distinte le tre famiglie delle ellissi, delle parabole e delle iperboli.
Si ottiene quindi l'equivalenza delle due definizioni generali, la metrica e la tridimensionale,

Dopo aver verificata per ogni tipo di curva l'equivalenza tra definizioni metriche bidimensionali e definizioni tridimensionali servendosi delle due sfere tangenti del cono chiamate sfere di Dandelin, vediamo che delle coniche si può dare una definizione generale di tipo metrico come luogo di punti del piano cartesiano determinati da un punto (fuoco), da una retta (direttrice) e da un parametro numerico (l'eccentricità).

Tutte le equazioni analitiche delle coniche si possono unificare e generalizzare trovando che ogni conica può essere definita come insieme dei punti del piano che soddisfano un'equazione quadratica in due variabili. Le equazioni quadratiche sono le equazioni polinomiali che si collocano al livello immediatamente superiore a quello delle equazioni lineari, così come le le coniche possono considerarsi come le curve algebriche immediatamente più elaborate delle rette.

L'analisi delle equazioni quadratiche in due variabili conduce a considerare le coniche come curve nell'insieme $\mathbb{C}^2$, lo spazio bidimensionale sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

In effetti lo studio delle coniche costituisce un primo argomento basilare del vasto capitolo della matematica noto come `heometria algebrica (wi)`.

G50a.03 Altre considerazioni che si incontrano nelle pagine che seguono riguardano le simmetrie che sussistono tra gli insiemi di punti costituenti una conica e tra le intere famiglie delle coniche. Queste considerazioni portano a individuare trasformazioni che consentono di correlare numerose proprietà delle sezioni coniche.

Le coniche quindi, costituiscono una famiglia di entità matematiche che possono essere analizzate in modo esauriente e che permettono di mostrare come si possa sviluppare una trattazione matematica molto efficace (anche ai fini applicativi) alternando strumenti concettuali che a prima vista si presentano di natura diversa (geometria euclidea, geometria analitica, geometria proiettiva, gruppi di simmetrie e trasformazioni), ma che possono essere collegati in una visione unitaria attraverso connessioni logico-deduttive che riguardano sia oggetti geometrici concretamente visualizzabili che proprietà definibili a un certo livello di astrazione.

G50 b. parabola

G50b.01 Una **parabola** è una curva piana che viene determinata da un punto F detto **fuoco della parabola** e da una retta $\boldsymbol{d}$ che non passa per F chiamata **direttrice della parabola**.
Si definisce come **parabola** associata ad F e $\boldsymbol{d}$ il luogo geometrico dei punti equidistanti da F e da $\boldsymbol{d}$, cioè l'insieme dei punti P del piano cartesiano tali che, denotato con P_d la `proiezione ortogonale (wi)` di P sulla direttrice $\boldsymbol{d}$, vale l'uguaglianza tra lunghezze di segmenti $PF = PR$. Questa curva si può denotare con $Parab[F, \boldsymbol{d}]$.

Consideriamo il segmento FF_d delimitato dal fuoco e dalla sua proiezione ortogonale F_d sulla direttrice; il punto medio V di tale segmento appartiene alla parabola e viene detto **vertice della parabola**.
La retta $\boldsymbol{a}$ passante per F e F_d, ortogonale alla direttrice, costituisce l'**asse di simmetria della parabola**; infatti la riflessione rispetto a questa retta lascia invariati F e $\boldsymbol{d}$ e quindi manda ogni punto della parabola in un altro punto equidistante da F e $\boldsymbol{d}$ e quindi appartenente alla parabola.

Dalla definizione segue un procedimento per tracciare a grandi linee una parabola servendosi di riga e compasso. Si procede a tracciare alcune parallele alla direttrice (limitandosi al semipiano contenente F e delimitato dalla parallela passante per V) sulle quali si vogliono individuare coppie di punti della parabola e per ciascuna di tali rette $\boldsymbol{r}$ con un compasso con centro nel fuoco e apertura uguale alla distanza tra direttrice ed $\boldsymbol{r}$ si determinano due punti della parabola simmetrici rispetto all'asse.

//input pG50b01

G50b.02 Dato che la definizione della parabola si serve solo delle distanze da un punto (fuoco) e da una retta (direttrice), tutte le isometrie del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ossia tutte le traslazioni, le rotazioni e le riflessioni) trasformano parabole in parabole.
Con una espressione insiemistica possiamo affermare che l'isometria $\mathcal{M}$ manda $Parab[F, \boldsymbol{d}]$ in $Parab[\mathcal{M}(F), \mathcal{M}(\boldsymbol{d})]$.

Anche le omotetie trasformano parabole in parabole: infatti se applichiamo al piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'omotetia $\boldsymbol{Hmtt}_\omega$ di centro qualsiasi e rapporto ω, vengono moltiplicati per tale reale positivo sia la distanza tra F e $\boldsymbol{d}$ che le distanze tra P e la sua proiezione su $\boldsymbol{d}$ $P_{\boldsymbol{d}}$ per ciascuno dei diversi punti P di $Parab[F, \boldsymbol{d}]$.

Si può quindi affermare che tutte le parabole del piano appartengono a una unica classe di similitudine.

Inoltre si è indotti a individuare parabole particolarmente semplici che costituiscano rappresentanti facilmente maneggevoli delle diverse classi di congruenza delle parabole.

G50b.03 Prendiamo in considerazione le cosiddette **parabole canoniche**, parabole che hanno il vertice nell'origine e l'asse di simmetria verticale coincidente con Oy.
Per esse denotiamo con p la distanza fuoco-direttrice, variabile che viene chiamata **parametro della parabola** e che può assumere tutti i valori reali positivi. Questa distanza consente di distinguere le parabole canoniche delle varie classi di omotetia.

Denotiamo con $\mathsf{Parab}[p]$ la parabola canonica caratterizzata dal parametro p e con $Parab[p]$ la classe di congruenza rappresentata dalla parabola canonica $\mathsf{Parab}[p]$. Evidentemente ogni parabola a essa congruente P si ottiene applicandole la traslazione che porta il suo fuoco nel fuoco della PSs e la rotazione che porta la traslata della sua direttrice nella direttrice della PSs.

È anche evidente che l'omotetia di centro in V e fattore ω trasforma la parabola canonica **Parab**$[p]$ nella **Parab**$[\omega\, p]$.

Esaminiamo qualitativamente la curva **Parab**$[p]$ limitandoci ai punti con ascissa positiva, i restanti ottenibili per riflessione rispetto all'asse.
Al crescere dell'ascissa del punto generico $P = \langle x, y\rangle$ deve crescere anche PF e quindi anche la sua ordinata y. Quindi ogni parabola è una curva illimitatamente estesa.

Troviamo l'espressione analitica in coordinate cartesiane ortogonali della parabola canonica **Parab**$[p]$.
Per la sua definizione essa ha il vertice V nell'origine, il fuoco $F = \langle 0, p/2\rangle$ e come direttrice la retta $y \;=\; -\dfrac{p}{2}$.
Per le distanze di un generico punto del piano $P = \langle x, y\rangle$ dal fuoco e dalla direttrice si trova

$$PP_d \;=\; y + \frac{p}{2} \qquad PF = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}\ .$$

Si osserva che la prima di queste espressioni vale solo per $y > 0$, condizione rispettata dalle parabole canoniche.
Il punto P appartiene alla parabola sse è equidistante da F e $\boldsymbol{d}$, ovvero sse

$$y + \frac{p}{2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}\ .$$

Elevando al quadrato entrambi i membri si ricava $y\,p = x^2 - y\,p$, ovvero

(1) $$y \;=\; \frac{1}{2\,p}\,x^2\ .$$

Questa equazione viene soddisfatta solo dai punti della parabola, in quanto implica che sia $y \ge 0$ e sostituendo x^2 con $2\,p\,y$ nella equazione precedente si ottiene $y + p/2 \;=\; \sqrt{(y + p/2)^2}$, uguaglianza evidentemente soddisfatta per ogni $y \ge 0$.

La (1) viene detta **equazione canonica della parabola** con asse verticale e parametro, cioè distanza fuoco-direttrice, pari a p.

In essa si possono leggere chiaramente varie proprietà della parabola: la curva espressa è simmetrica per la riflessione rispetto all'asse Oy (la y è data da un'espressione pari nella x), passa per l'origine, ha tutti i suoi punti nei quadranti I e II.

Si osserva anche che applicando al piano l'omotetia di centro nell'origin e fattore ω reale positivo $\lceil\ \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \langle \omega\,\overline{x}\ ,\ \omega\,\overline{y}\rangle\ \rceil$ la (1) fornisce

(2) $$\overline{y} = \frac{1}{2\omega p}\overline{x}^2\ ,$$

equazione di una parabola con parametro $\omega\,p$, cioè **Parab**$(omg\,p)$.

G50b.04 Applicando alla parabola precedente la rotazione di $-90°$ si ottiene l'equazione della parabola avente fuoco in $\left\langle \dfrac{p}{2}, 0\right\rangle$, direttrice di equazione $x = -\dfrac{p}{2}$ (ed Ox come asse di simmetria):

(1) $$2\,p\,x \;=\; y^2\ .$$

Sono semplici e spesso utili le parabole ottenute dalle precedenti per riflessione rispetto a Ox, $y \;=\; -\dfrac{1}{2\,p}\,x^2$, e rispetto ad Oy, $x \;=\; -\dfrac{1}{2\,p}\,y^2$.

Traslando vertice e direttrice si ottengono espressioni piuttosto semplici delle parabole con assi orizzontali e verticali che diciamo **espressioni binomiali**. L'equazione generale per le parabole con asse verticale è

$$y \;=\; a\,x^2 + b\,x + c\;,\quad \text{con}\;\; a \in \mathbb{R}_{nz}\;\; \text{e}\;\; b, c \in \mathbb{R}\;.$$

I numeri a, b e c sono detti **coefficienti della parabola**. L'equazione generale per le parabole con asse parallela all'asse delle ascisse assume invece la forma:

(2) $$x = \alpha\,y^2 + \beta\,y + \gamma\;,\quad \text{con}\;\; a \in \mathbb{R}_{nz}\;\; \text{e}\;\; \beta, \gamma \in \mathbb{R}\;.$$

Applicando rotazioni alle espressioni precedenti si trova come equazione generale di una parabola una equazione quadratica, cioè una equazione della forma :

(3) $$a\,x^2 + 2\,h\,x\,y + b\,y^2 + 2\,g\,x + 2\,f\,y + c = 0\;,\quad \text{con}\quad h^2 := a\,b\;.$$

G50b.05 Presentiamo le caratteristiche di una parabola con asse verticale retta dall'equazione $y \;=\; P(x) \;:=\; a\,x^2 + b\,x + c$.

Il vertice $V = \langle x_V, y_V \rangle$ è punto di minimo della $P(x)$, quindi tale che

$$2\,a\,x_V + b \;=\; 0 \quad \text{e} \quad y_V \;=\; a\left(-\frac{b}{2\,a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{a}\right) + c \;=\; -\frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a}\;.$$

Definiamo come discriminante della parabola: $\Delta \;:=\; b^2 - 4\,a\,c$.

Quindi abbiamo: per le coordinate del vertice: $\left\langle -\frac{b}{2\,a}, -\frac{\Delta}{4\,a}\right\rangle$;

come equazione dell'asse di simmetria: $x = -\frac{b}{2\,a}$;

per le coordinate del fuoco: $\left\langle -\frac{b}{2\,a}, \frac{1-\Delta}{4\,a}\right\rangle$;

e per l'aquazione della direttrice: $y = -\frac{1+\Delta}{4\,a}$.

Per una parabola con asse orizzontale di equazione $x \;=\; \alpha\,y^2 + \beta\,y + \gamma$ consideriamo invece:

discriminante: $\Delta \;:=\; \beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma$;

equazione dell'asse di simmetria: $y \;=\; -\frac{\beta}{2\,\alpha}$;

coordinate del vertice: $\left\langle -\frac{\Delta}{4\,\alpha}, -\frac{\beta}{2\,alf}\right\rangle$;

coordinate del fuoco: $\left\langle \frac{1-\Delta}{4\,\alpha}, -\frac{\beta}{2\,\alpha}\right\rangle$;

equazione della direttrice: $x \;=\; -\frac{1+\Delta}{4\,\alpha}$

G50b.06 Ciascuno dei coefficienti nella espressione binomiale della parabola $y \;=\; a\,x^2 + b\,x + c$ ha un ruolo ben preciso.

Il coefficiente a determina la `convessità (wi)` della parabola:

- $a > 0$: convessità, vertice in basso
- $a < 0$: concavità, vertice in alto
- $a = 0$: parabola degenere (una retta)

Il suo significato risulta evidente nel caso particolare relativo a $b = c = 0$, in cui l'espressione binomiale si riduce alla canonica

$$y \;=\; a \cdot x^2\;.$$

Il coefficiente c determina il punto di intersezione della parabola con l'asse delle ordinate, sul quale $x = 0$: inoltre il parametro c è nullo sse la parabola passa per l'origine degli assi.

Il coefficiente b è legato alla posizione dell'asse della parabola; essa è la retta verticale passante per il punto che ha l'ascissa data da

$$x \;=\; -\frac{b}{2\,a} \;.$$

Da notare che, restando fisso il coefficiente c, che determina l'intersezione con l'asse delle ordinate, e facendo variare valore di b, la parabola passa sempre per quel punto.

In particolare, la retta tangente alla parabola nel punto di incontro con l'asse delle ordinate, ha pendenza pari a b. Questo significa che se b vale zero, l'asse della parabola coincide con l'asse delle ordinate.

Mentre la `derivata (wi)` prima, potrà essere facilmente individuata, in quanto il suo punto di incontro con l'asse delle ascisse sarà pari all'ascissa del vertice, $-\dfrac{b}{2\,a}$, l'ascissa del punto di incontro con l'asse delle ordinate è b.

G50b.07 Dalla definizione e dalla considerazione della differenza $\delta := QQ_d - QF$, ove Q denota un generico punto del piano, si ricava che ogni parabola tripartisce l'intero del piano nell'insieme dei punti della parabola stessa con $\delta = 0$, nell'insieme dei punti raggiunti dal fuoco con un segmento che non tocca la parabola con $\delta > 0$ e nell'insieme dei punti rimanenti con $\delta < 0$.

Dall'equazione canonica si deduce che in ogni punto la parabola presenta la convessità rivolta verso i punti con $\delta > 0$.
Infatti considerati per $i = -1, 0, +1$ tre punti della parabola $P_i :=\big\langle x_i, y_i\big\rangle$ con $x_i := x_2 + i\,h$ con $h > 0$ si ricava che

$$(y_1 - y_0) - (y_0 - y_{-1}) \;=\; \frac{1}{2\,p}\big((2\,h\,x + h^2) - (2\,h\,x - h^2)\big) \;>\; 0 \;.$$

La precedente disuguaglianza per h tendente a zero dice anche che in ogni punto una parabola possiede una tangente costituita dal punto di tangenza e da punti del piano con $\delta < 0$.

//input pG50b07

Consideriamo la tangente alla parabola τ in un suo punto qualsiasi $P = \langle x, y\rangle$ e le due rette $\overline{FQ}$ e $\overline{QQ_{\boldsymbol{d}}}$.
Quindi gli angoli acuti $\widehat{\tau, \overline{QQ_{\boldsymbol{d}}}}$ e $\widehat{\tau, [\,x = x_p\,]}$ coincidono.

Concludiamo la sezione con una definizione inutile quando si considerano singole parabole, ma discriminante quando si considerano tutte le coniche piane. Diciamo eccentricità delle parabole il rapporto $FP/PP_{\boldsymbol{d}}$, rapporto ovviamente uguale ad 1.

G50 c. ellisse

G50c.01 Diamo ora una definizione metrica dell'ellisse, la figura chiusa del piano cartesiano che può descriversi come una circonferenza allungata uniformemente in una direzione.

Consideriamo due punti del piano cartesiano F_1 ed F_2 la cui distanza denotiamo con $2\,c$, e un numero reale positivo a che deve essere maggiore di c (o in caso di degenerazione uguale a c) .
Si definisce come **ellisse** avente come **fuochi** F_1 ed F_2 e avente a come **lunghezza del semiasse maggiore** il luogo dei punti P del piano, la cui somma delle distanze dai fuochi, al variare di P mantiene il valore costante $2\,a$.
Questa curva piana si può denotare con $\mathsf{Ellps}[F_1, F_2, a]$.

Diciamo **centro dell'ellisse** il punto medio tra i fuochi che scriviamo $C := F_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{F_1\,F_2}$.

Se i due fuochi coincidono si ha la circonferenza di centro $F_1 = F_2 = C$ e raggio a: $\mathsf{Ellps}[C, C, a] = \mathit{Circf}[C, a]$; quindi le circonferenze sono casi particolari di ellissi.

G50c.02 Dato che la definizione di ellisse si serve solo di distanze tra punti, tutte le isometrie (ossia tutte le traslazioni, le rotazioni e le riflessioni) trasformano ellissi in ellissi: più precisamente l'isometria $\mathcal{M}$ manda $\mathsf{Ellps}[F_1, F_2, a]$ nella $\mathsf{Ellps}[\mathcal{M}(F_1), \mathcal{M}(F_2), a]$.

Inoltre anche ogni omotetia di fattore ω trasforma un'ellisse in un'altra ellisse, in quanto modifica tutte le distanze secondo una stessa proporzione.
L'omotetia $\Omega = \boldsymbol{Hmtt}(C, \omega)$ trasforma $\mathsf{Ellps}[F_1, F_2, a]$ nella $\mathsf{Ellps}[\Omega(F_1), \Omega(F_2), \omega a]$.

Consideriamo la retta che passa per i due fuochi $\overline{F_1F_2}$ e la retta ortogonale a essa e passante per il punto medio dei fuochi C.
Denotiamo la distanza tra i fuochi con $2\,b$ e troviamo che $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; questo numero reale positivo possiamo quindi chiamarlo **lunghezza del semiasse minore dell'ellisse**.
Segnaliamo che spesso il contesto consente la semplificazione che chiama a semiasse maggiore dell'ellisse e chiama c semiasse minore dell'ellisse.

Consideriamo ora l'ellisse che ha il centro nell'origine delle coordinate, la retta $\overline{F_1F_2}$ coincidente con l'asse orizzontale e di conseguenza ha la sua ortogonale verticale coincidente con l'asse Oy. Questa curva la chiamiamo **ellisse canonica** avente a come asse maggiore e b come asse minore e la denotiamo con $\mathsf{EllpsK}[a, b]$.

//input pG50c02

La riflessione rispetto all'asse orizzontale passante per i fuochi non cambia gli elementi che definiscono la curva, mentre la retta verticale per il suo centro (l'origine) è il luogo dei punti equidistanti dai fuochi e quindi la riflessione rispetto a essa manda F_1 in $\overline{F}_1 = F_2$, F_2 in $\overline{F}_2 = F_1$ e un punto P dell'ellisse in un punto $\overline{P}$ per il quale $\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = PF_2 + PF_1 = 2\,a$; dunque questa riflessione lascia l'ellisse invariata.
In altre parole le due rette sono assi di simmetria delle ellissi canoniche.

Inoltre il loro punto comune C è il centro di una simmetria centrale dell'ellisse; questo giustifica il suo nome di centro dell'ellisse.

Si constata facilmente che i punti $\langle \pm a, 0\rangle$ appartengono all'ellisse; inoltre, introdotto il parametro $b := \sqrt{a^2 - c^2}$, si constata che anche i punti $\langle 0, \pm b\rangle$ appartengono all'ellisse.

Si osserva anche che l'omotetia di centro O e rapporto ω manda $\mathsf{EllpsK}[a, b]$ nella $\mathsf{EllpsK}[\omega\, a, \omega\, b]$.

G50c.03 Consideriamo il rettangolo $\boldsymbol{R}_{a,b}$ che ha il centro C nell'origine e i quattro vertici nei punti esprimibili come $V_{\pm,\pm} := \langle \pm a, \pm b\rangle$.
I suoi lati sono paralleli agli assi di riferimento ed hanno come punti medi i punti $A_\pm := \langle \pm a, 0\rangle$ e $B_\pm := \langle 0, \pm b\rangle$ nei quali il rettangolo interseca i due assi di simmetria; i suoi lati orizzontali hanno lunghezza $2\,a$, mentre i lati verticali hanno lunghezza $2\,b$, che assumiamo inferiore alla precedente.
I quattro punti medi appartengono chiaramente all'ellisse e per tutti gli altri punti Q del perimetro del rettangolo $\boldsymbol{R}$ evidentemente per la somma delle distanze dai fuochi si ha $F_1Q + QF_2 > 2\,a$.

Inoltre se consideriamo le semirette con estremo in C e un punto Q che si muove allontanandosi da C si constata facilmente che la quantità $QF_1 + QF_2$ cresce da 0 a $+\infty$.
Quindi ciascuna di queste semirette incontra l'ellisse in uno e un solo punto e tutti i punti dell'eclisse diversi dei punti medi sono punti interni al rettangolo.
Dunque ciascuna delle ellissi $\mathsf{EllpsK}[a, b]$ e ciascuna delle ellissi della classe di isometria $\mathsf{Ellps}[a, b]$ è una curva chiusa semplice che delimita una regione di punti interni che, unita ai punti della curva stessa, costituisce la figura convessa chiamata **regione ellittica interna**.
La cosa è particolarmente evidente quando in particolare i fuochi coincidono e la regione ellittica si riduce a un cerchio di centro C.

//input pG50c03

Denotiamo con $\boldsymbol{Q}$ la quarta parte del rettangolo ritagliato dagli assi nella sua parte superiore destra e concentriamo su di essa l'attenzione, in quanto da questa regione si può ottenere l'intero $\boldsymbol{R}_{a,b}$ mediante le riflessioni rispetto agli assi.

Esaminiamo i segmenti in $\boldsymbol{Q}$ paralleli al semiasse maggiore e chiamiamo Q un punto variabile su un tale segmento della retta orizzontale $\mathsf{Rtlin}[y = y_Q]$ che chiamiamo S e $\overline{Q}$ il punto di intersezione tra segmento ed ellisse .
La somma delle distanze di Q dai fuochi alsuo allontanarsi dall'asse maggiore cresce e passa da un valore minore a un valore maggiore di $2\,a$. Infatti se $0 \le x_Q < x_{\overline{Q}} \le c$ è evidente che $F_1Q + F_2Q < F_1\overline{Q} + F_2\overline{Q}$; si trova senza difficoltà che questa catena di disuguaglianze vale anche se $c < x_Q < x_{\overline{Q}} \le a$. Quindi un solo punto dell'ellisse interseca ogni segmento S.

Considerazioni analoghe per i punti dei segmenti paralleli al semiasse minore: ciascuno di essi interseca un solo punto dell'ellisse.
Dunque I punti dell'ellisse appartenenti a $\boldsymbol{Q}$, punti $P = \langle x, y\rangle$ con $x \ge 0$ e $y \ge 0$, forniscono una funzione della forma $y = f(x)$ decrescente.

G50c.04 Il segmento appartenente alla regione ellittica (con centro in C) della retta che passa dai due fuochi è detto **asse maggiore dell'ellisse**; esso è anche il diametro dell'ellisse, cioè il più lungo segmento contenuto nella regione ellittica interna.
Il segmento ortogonale all'asse maggiore e passante per il centro (insieme dei punti della regione interna equidistante dai fuochi), è chiamato **asse minore dell'ellisse**.

Ricordiamo che abbiamo definito **semiasse maggiore dell'ellisse** ciascuna delle metà dell'asse maggiore; un tale segmento si può percorrere partendo dal centro, toccando un fuoco e finendo con il toccare un punto della curva.
Analogamente per **semiasse minore dell'ellisse** abbiamo definito la metà dell'asse minore.

Dato che $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, la dimensione e la forma di un'ellisse sono quindi determinate dalle due costanti a e b, la prima esprimente la lunghezza del semiasse maggiore, la seconda la lunghezza del semiasse minore.

Va segnalato che quando il contesto rende lecita la semplificazione i termini semiasse maggiore e semiasse minore sono usati per individuare le lunghezze dei rispettivi segmenti.

Se si considerano due punti qualsiasi dell'ellisse P_1 e P_2 si vede che per tutti i punti q interni al segmento P_1P_2 la somma delle distanze dai fuochi è $F_Q + QF_2 < 2\,a$; quindi ogni ellisse è una curva piana convessa e continua.
Come per tutte queste curve ciascuno dei loro punti posseggono una retta tangente e percorrendo l'intero perimetro di una ellisse si individuano tangenti di tutte le direzioni, ciascuna direzione essendo incontrata due volte in due punti opposti rispetto al centro dell'ellisse.

Considerazione analoga si può svolgere per rette orientate tangenti determinate daun punto che si muove sull'ellisse nel verso positivo (o nel verso opposto).

G50c.05 L'equazione di una generica ellisse si trova eguagliando a $2\,a$ la somma delle distanze tra un punto generico $P = \langle x, y\rangle$ e ciascuno dei due fuochi $F_1 = \big\langle x_1, y_1\big\rangle$ ed $F_2 = \big\langle x_2, y_2\big\rangle$:

$$PF_1 + PF_2 \;=\; 2\,a$$

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \;=\; 2\,a$$

Si dice **equazione canonica dell'ellisse** l'equazione che individua l'ellisse canonica $\mathsf{EllpsK}[a,b]$. La si trova imponendo $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $x_1 = -c$, $x_2 = c$ e introducendo $b := \sqrt{a^2 - c^2}$; in tal modo si ottiene che l'ellisse è individuata dall'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1\ .$$

Si definisce **eccentricità dell'ellisse** $\mathsf{EllpsK}[a,b]$ il quoziente

$$\mathsf{ecntr}_{a,b} \;:=\; \frac{c}{a} \;=\; \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\ .$$

Evidentemente questo parametro di natura metrica è invariante per ogni isometria ed è anche invariante rispetto ad ogni omotetia in quanto rapporto tra parametri che le omotetie moltiplicano per lo stesso fattore.

Inoltre è evidente che per ogni ellisse con $0 < b, c < a$ si ha $0 < \mathsf{ecntr} < 1$, mentre si ha $e = 0$ solo per le circonferenze, per la quali $a = b$ e $c = 0$.
Si osserva anche che al crescere di e da zero verso 1 si hanno ellissi sempre più allungate.
Si osserva anche che le ellissi con la stessa eccentricità appartengono alla stessa classe di similitudine; quindi questo parametro della curva fornisce una caratterizzazione della sua forma complessiva.
In parole povere l'eccentricità dice quanto la forma dell'ellisse si discosta dalla forma della circonferenza.
Tutte le ellissi di una classe di similitudine sono ottenibili applicando ad una particolare di esse le varie trasformazioni di isometria e di omotetia.

Considerando ellissi con un fuoco fisso e l'altro via via più distante la eccentricità tende ad 1 ed a tende a c. La forma dell'ellisse nella parte vicina al fuoco tenuto fisso tende ad avvicinarsi a quella della parabola con lo stesso fuoco e asse coincidente con l'asse maggiore.

Questo è coerente con l'attribuzione alla parabola della eccentricità 1. Al limite la ellissi tende a confondersi con la retta dell'asse maggiore .

G50c.06 Limitatamente al I quadrante i punti dell'ellisse sono forniti dall'equazione $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Associamo a ogni punto $P = \langle x, y\rangle$ dell'arco di ellisse il punto $\hat{P} := \langle x, \hat{y}\rangle$ con $\hat{y} := \dfrac{a}{b}\,y = \sqrt{a^2-x^2}$; evidentemente $x^2+\hat{y}^2 = a^2$ e quindi al variare di P sull'arco dell'ellisse, ma per simmetria, su tutta l'ellisse $\mathsf{Ellps}[a,b]$, $\hat{P}$ descrive la circonferenza *Circf*$[O,a]$ di centro nell'origine e raggio a.

Da questo segue che l'ellisse $\mathsf{Ellps}[a,b]$ si può ottenere dalla suddetta circonferenza canonica con la contrazione di rapporto $\dfrac{b}{a}$ secondo la direzione verticale con Ox fisso.

Quindi la ellissi $\mathsf{Ellps}[a,b]$ si può esprimere con le equazioni parametriche:

$$x \;=\; a\cos t \qquad y \;=\; b\sin t \qquad \text{per} \quad 0 \le t < 2\pi \ ,$$

derivate dalle equazioni parametriche delle circonferenze.

Si può anche affermare che l'ellisse canonica si può ottenere dalla circonferenza con centro nell'origine e raggio b applicando una dilatazione di un fattore a/b alle ascisse dei suoi punti.

Da questa trasformazione si deduce anche che l'area della regione ellittica interna è espressa da

$$\boldsymbol{Area}(\mathsf{Ellps}[a,b]) \;=\; \pi\, a\, b \ .$$

G50c.07 Ogni ellisse $\mathsf{Ellps}[a,b]$ può vedersi ottenuta operando nello spazio tridimensionale cartesiano riferito alle coordinate cartesiane x, y e ζ come proiezione ortogonale sul piano "orizzontale" $\Pi_{\mathsf{Oxy}} := [\,\zeta = 0\,]$ di una circonferenza di centro O e raggio a tracciata sul piano (non ortogonale a Π_{Oxy}) che denotiamo con $\Pi_{Ox\overline{y}}$ il quale con Π_{Oxy} condivide l'asse Ox e l'origine e il cui secondo asse $O\overline{y}$ forma con Oy un angolo ϕ minore di 90°, tale che sia $\dfrac{b}{a} \;=\; \cos\phi$.

La proiezione verticale lascia invariate le ascisse dei punti delle curve, mentre riduce di un fattore $\cos\phi$ le ordinate di tali punti. Essa quindi fornisce un'ellisse di eccentricità $\sqrt{1-\dfrac{(b\cos\phi)^2}{b^2}} = \sin\phi = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi\right) = \cos\beta$.

Poco più in generale ogni ellisse E del piano Π_{Oxy} si può ottenere come proiezione ortogonale di una circonferenza tracciata su un piano non ortogonale a Π_{Oxy} che interseca questo nella retta dell'asse maggiore di E che ha come centro il centro di E e raggio pari al semiasse maggiore di E.

G50c.08 La forma di un'ellisse si può fare dipendere completamente, invece che dalla eccentricità $\dfrac{c}{a}$, dal numero reale $\dfrac{b}{a}$ oppure da $\dfrac{b}{c}$; tutti questi rapporti non cambiano quando si applica una omotetia.

Introdotto il parametro angolare $\phi := \arccos(b/a)$, l'eccentricità è esprimibile nei modi seguenti

$$e \;:=\; \mathsf{ecntr}[a,b] \;=\; \frac{c}{a} \;=\; \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \;=\; \sqrt{\frac{c^2}{b^2+c^2}} \;=\; \sqrt{1-\cos^2\phi} \;=\; \sin\phi \ .$$

È utile avere presenti anche le relazioni seguenti:

$$a \;=\; \frac{c}{e} \quad , \quad c \;=\; a\,e \quad , \quad b \;=\; a(1-e) \ .$$

Chiaramente quanto maggiore è il rapporto tra a e b, tanto più l'ellisse è allungata, ovvero schiacciata.

Può risultare utile anche esprimere la distanza tra i due fuochi con la formula

$$2\,c \;=\; 2\sqrt{a^2-b^2} \;=\; 2\,a\,e\;.$$

Può risultare utile anche esprimere la distanza tra i due fuochi con la formula

$$2\,c \;=\; 2\sqrt{a^2-b^2} \;=\; 2\,a\,e\;.$$

Il **semilato retto** di un'ellisse, solitamente denotato con la lettera l, è definito come la distanza tra un fuoco dell'ellisse e il punto K della stessa ellisse incontrato dalla semiretta verticale che ha un estremo nel fuoco $\langle c, 0\rangle$.
Vediamo come esprimere questo parametro mediante a e b e altri parametri noti.
Si osservi il triangolo rettangolo $\triangle(F_1, F_2, K)$; la lunghezza del suo lato F_1K, appartenendo K all'ellisse, è $2\,a - l$ e il corrispondente teorema di Pitagora implica $(2\,a - l)^2 \;=\; l^2 + 4\,c^2$, cioè $4(a^2 - c^2) \;=\; 4\,a\,l$, da cui

$$a\,l \;=\; b^2 \;\text{ ossia }\; \frac{l}{b} = \frac{b}{a}\;.$$

G50c.09 Le intersezioni di una ellisse con una retta del piano possono essere al più due.
Infatti queste intersezioni sono le soluzioni di un sistema formato dalla equazione quadratica della ellisse e dalla equazione lineare della retta.
Relativamente a una ellisse le rette del piano si ripartiscono tra

- rette esterne, che non intersecano l'ellisse;
- rette tangenti in un suo punto;
- rette secanti in due punti.

Si osserva che le conclusioni sulle tangenti valgono per ogni curva piana esprimibile con un'equazione di secondo grado nelle coordinate cartesiane; quindi valgono anche per le parabole e vedremo valgono anche per le iperboli.

G50c.10 Consideriamo un punto qualsiasi P e la retta tangente alla ellissi in tale punto. Ciascuna delle due rette che passano per P e un suo fuoco formano con la tangente in P due angoli uguali.

//input pG50c09

Questa proprietà discende dal seguente enunciato classico.

Data una retta $\boldsymbol{t}$ e due punti ed essa esterni Q ed R, il punto P della retta che minimizza la somma $PQ + PR$ è il punto tale che i segmenti PQ e PR formano angoli uguali con la retta stessa.

Consideriamo quindi un'ellisse di fuochi F_1 ed F_2 e ricordiamo che essa è il luogo dei punti P tali che la somma delle distanze $PF_1 + PF_2$ è uguale a un valore determinato $2\,a$.
Consideriamo una retta passante per un punto P dell'ellisse tale che formi angoli uguali con i segmenti PQ e PR. Per l'enunciato precedente il punto P è il punto della retta che rende minima la somma $PQ + PR$; questo implica che la retta deve essere tangente all'ellisse: infatti se non fosse tangente la retta entrerebbe nell'interno dell'ellisse, quindi ci sarebbe un punto P della retta per il quale sarebbe $\overline{P}Q + \overline{P}R < d$ e non sarebbe più vero che il minimo è realizzato in P.

Si osserva che per ogni ellisse e ogni fascio di rette parallele del piano vi sono due punti dell'ellisse le cui tangenti appartengono al fascio.

G50c.11 Come conseguenza della precedente **proprietà tangenziale delle ellissi** si ha che in un biliardo a forma di ellisse una palla lanciata da uno dei due fuochi F_1 ed F_2 verrà rimbalzata dal bordo in modo tale da passare necessariamente per il secondo fuoco.
Similmente in uno specchio concavo a forma di ellisse tutti i raggi luminosi emessi da una sorgente posta in uno dei due fuochi sono riflessi in modo da giungere necessariamente all'altro fuoco, quali che siano le direzioni di emissione. Questa proprietà spiega perché ai fuochi dell'ellisse è stato attribuito tale nome.

Consideriamo una palla che procede a rimbalzare sul bordo ellittico e a passare alternatamente sui due fuochi. Già il primo rimbalzo avviene in un punto del bordo con la proiezione sull'asse maggiore posta tra un fuoco e il vertice a lui più vicino. Osservando due successivi segmenti percorsi tra un rimbalzo e il successivo accade che le successivi pendenze in valore assoluto vanno progressivamente riducendosi. Quindi la palla tenderà a muoversi sempre più vicina al segmento tra i due vertici maggiori comprendente i due fuochi, cioè al suo asse maggiore.

Analogamente in una camera con le pareti a forma di ellisse (idealmente una camera costituente un tronco di cilindro ellittico retto) le `onde sonore (wi)` che partono da uno dei due fuochi arrivano all'altro lungo tutte le direzioni e, dato che la distanza percorsa nel tragitto da un fuoco all'altro è sempre la stessa, le onde arriveranno tutte in sincronizzazione di fase.
Di conseguenza due persone poste nei due fuochi di un tale ambiente potrebbero comunicare facilmente anche se questi fuochi fossero molto distant; viceversa altre persone, anche notevolmente più vicine a chi parla sentirebbero ben poco.
Queste considerazioni dovrebbero essere tenute ben presenti da chi progetta ambienti destinati a riunioni o a spettacoli.

G50c.12 Cerchiamo ora la cosiddetta **equazione generale dell'ellisse**, equazione esprimente i punti dell'ellisse avente come fuochi $F_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ e $F_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$ e con la lunghezza del semiasse maggiore pari ad a.
Tale equazione ha la forma

$$A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F \;=\; 0$$

i cui parametri sono dati da

$$\begin{gathered}
A = 16a^2 - 4(x_{F_1} - x_{F_2})^2 \ , \\
B = -8(y_{F_1} - y_{F_2}) \ , \\
C = 16a^2 - 4(y_{F_1} - y_{F_2})^2 \ , \\
D = 4(x_{F_1} - x_{F_2})^3 - 16a^2(x_{F_1} - x_{F_2}) \ , \\
E = 4(y_{F_1} - y_{F_2})(4a^2 - (y_{F_1})^2 + (y_{F_2})^2 - (x_{F_1})^2 + (x_{F_2})^2) \ , \\
F = -16a^4 + 8a^2((y_{F_1})^2 + (y_{F_2})^2 + (x_{F_1})^2 + (x_{F_2})^2) - (y_{F_1})^2 + (y_{F_2})^2 - (x_{F_1})^2 + (x_{F_2})^2 \ .
\end{gathered}$$

G50 d. iperbole

G50d.01 L'**iperbole** è una curva piana che, come l'ellisse, è determinata da due punti F_1 ed F_2 diversi detti **fuochi dell'iperbole** e da un numero reale positivo a detto **parametro dell'iperbole**. Essa si definisce come il luogo geometrico dei punti del piano euclideo per i quali è costante e uguale a $2\,a$ il valore assoluto della differenza tra le loro distanze dai fuochi.
Tale curva la denotiamo con $\mathit{Hprbl}[F_1, F_2, a]$

La definizione consente di individuare facilmente alcune proprietà di simmetria delle iperboli che aiutano notevolmente il loro studio.

Consideriamo l'iperbole $H := \mathit{Hprbl}[F_1, F_2, a]$, il segmento $\overline{F_1F_2}$ che collega i suoi fuochi, il punto medio C di tale segmento, la retta $\mathcal{F} := \overline{\;F_1F_2\;}$ passante per i fuochi e la retta ortogonale a essa e passante per C $\mathcal{T} := \mathsf{Ortlin}(\mathcal{F}, C)$.
Evidentemente la riflessione del piano rispetto a ciascuna delle due rette $\mathcal{F}$ e $\mathcal{T}$ trasforma la H in se stessa, cioè queste rette sono assi di simmetria della H. La retta per i fuochi si dice **asse focale dell'iperbole** e la sua ortogonale si chiama **asse trasversale dell'iperbole**. Il punto comune ai due assi si dice **centro dell'iperbole**, in accordo con il fatto che è centro di simmetria per la curva.

Dalla definizione che si basa solo su misure di distanza e su un unico parametro esprimente lunghezza, si ricava subito che ogni isometria trasforma una iperbole in una iperbole (congruente) e che ogni omotetia trasforma una iperbole in una iperbole (simile).

Quindi lo studio delle iperboli del piano si può basare sullo studio delle classi di isometria e delle classi di similitudine delle iperboli e molte considerazioni si possono limitare ai punti della curva compresi della regione delimitata da due semiassi.

G50d.02 Consideriamo il segmento F_1F_2, il suo punto medio C e denotiamo con $2\,c$ la distanza tra i due fuochi.
Denotiamo il generico punto del piano lcon $Q = \langle \xi, \eta \rangle$ e per la differenza delle sue distanze dai due fuochi scriviamo $D_{F_1,F_2}(Q) \;:=\; |F_1Q - QF_2|$.

//input pG50d02

Evidentemente muovendo Q sul semiasse focale da C verso F_2 la D cresce linearmente da 0 al valore $F_2F_1 - F_2F_2 \;=\; 2\,c$ e proseguendo per maggiori distanze dai fuochi e da C rimane costantemente uguale a $2\,c$.
Quindi si trova un punto V_2 del segmento CF_2 per il quale $D_{F_1,F_2}(A_2) = 0$ e la sua distanza da C la poniamo uguale ad a.
Denotiamo con V_1 il riflesso di V_2 rispetto all'asse trasverso e osserviamo che l'asse focale contiene questi due punti in quanto i soli appartenenti all'iperbole.
È anche evidente che per tutti i punti Q dell'asse trasverso $D_{F_1,F_2}(Q) = 0$.

Esaminiamo la funzione $D_{F_1,F_2}(Q)$ con $Q = \langle \xi, \eta \rangle$. Si tratta di una funzione continua nella Q e quindi di una funzione-RR continua per ogni $\langle \xi, \eta \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Questo implica anche in particolare che ogni iperbole costituisce curva continua.

Si constata facilmente che la funzione $D_{F_1,F_2}(Q)$ rimane invariata in seguito alla riflessione rispetto all'asse focale e cambia di segno in seguito alla riflessione rispetto all'asse trasverso.

G50d.03 Si osserva poi che ogni retta $\mathcal{R}$ parallela all'asse trasverso che incontra l'asse focale in un punto I non appartenente a $V_1\,V_2$ incontra l'iperbole in due punti simmetrici rispetto all'asse focale.
Per questo basta osservare il quadrante compreso tra il semiasse focale destro e il semiasse trasverso superiore: l'andamento della $D_{F_1,F_2}(Q)$ quando Q si sposta su $\mathcal{R}$ da I allontanandosi illimitatamente da tale punto assume valori che vanno da $2\,c$ a valori sempre più vicini a 0 (inferiori a $F_1\,I\,\sin\alpha$ con $F_1\,I$ fisso e α piccolo a piacere).

Si osserva anche che ogni $\mathcal{S}$ retta parallela all'asse focale incontra l'iperbole in due punti simmetrici rispetto all'asse trasverso. Anche per questo basta osservare il suddetto quadrante: l'andamento della $D_{F_1,F_2}(Q)$ quando Q si sposta su $\mathcal{S}$ dal punto J in cui questa retta incontra l'asse trasverso allontanandosi illimitatamente da tale punto assume valori che vanno crescendo da 0 a valori sempre più vicini a $2\,c\,\cos\beta$ con β piccolo a piacere, cioè a valori sicuramente superiori a $2\,a$.

Queste considerazioni complessive consentono di affermare che ogni iperbole è costituita da due insiemi di punti ciascuno dei quali connesso evidentemente simmetrici rispetto agli assi che vengono chiamati **rami dell'iperbole**.

G50d.04 Anche l'equazione generale dell'iperbole, grazie alle simmetrie sopra individuate, può assumere una forma molto semplice.

Consideriamo per questo le iperboli con centro nell'origine e i fuochi sull'asse orizzontale e ancora denotiamo con $2\,c$ la distanza tra di essi; i suoi fuochi sono quindi $F_1 =: \langle -c, 0\rangle$ e $F_2 = \langle c, 0\rangle$.
Introduciamo poi il valore reale positivo $b := \sqrt{c^2 - a^2}$ definito a partire dalla semidistanza interfocale c e dalla metà a della differenza delle distanze dai fuochi dei punti $P = \langle x, y\rangle$ dell'iperbole,

$$D_{F_1,F_2}(P) \;=\; 2\,a \;=\; |P\,F_1 - P\,F_2| \;=\; \left| sqrt(x+c)^2 + y^2 - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| \;.$$

Introdotto $b := \sqrt{c^2 - a^2}$, chiamiamo **iperbole canonica** relativa alla semidistanza interfocale c; tale iperbole $Hprbl[F_1, F_2, a]$ la denotiamo anche con $\mathsf{\textbf{Hprbl}}[a, b]$.
Inoltre è chiaro che applicando l'omotetia di centro in $C = O$ e fattore ω si trasforma la $\mathsf{\textbf{Hprbl}}[a, b]$ nella iperbole canonica simile $\mathsf{\textbf{Hprbl}}[\omega\,a, \omega\,b]$.
Dunque tutte le iperboli del piano si possono ottenere applicando isometrie e omotetie a una qualsiasi iperbole canonica.

G50d.05 Riprendiamo le precedenti considerazioni sull'iperbole canonica $H := \mathsf{\textbf{Hprbl}}[a, b]$ usando argomentazioni analitiche.

Per ciascuno dei punti $P = \langle x, y\rangle$ della H la definizione implica $F_1P + PF_2 = 2\,a$ e la disuguaglianza triangolare per il triangolo avente i vertici nei fuochi e in P implica

$$|F_1\,P - F_2\,P| \leq F_1\,F_2 \quad \text{ossia ancora} \quad a < c\;.$$

Consideriamo i due punti sull'asse orizzontale $V_1 := \langle -a, 0\rangle$ appartenente al segmento F_1C ed $V_2 := \langle a, 0\rangle$ appartenente a CF_2. Essi devono appartenere alla H, in quanto $F_1V_2 = V_1F_2 = c + a$ e $F_1V_1 = V_2F_2 = c - a$ e quindi $F_1V_2 - F1V_1 = V\_1F_1 - V_2F_2 = 2a$. Nessun altro punto Q dell'asse Ox può appartenere alla H: infatti la differenza $D(Q) = |F_1Q - QF_2|$ per i punti Q interni a V_1V_2 è minore di $2\,a$ e per i punti Q è maggiore di $2\,a$. I due punti V_1 e V_2 sono detti **vertici dell'iperbole**.

Si osserva anche che per tutti i punti dell'asse Oy $D(Q) = 0$, Più in generale consideriamo l'andamento di $D(Q)$ al variare di Q su una retta verticale $\xi = \overline{\xi}$: è geometricamente evidente che allontanandosi Q dalla Ox $D(Q)$ decresce con continuità verso 0. Quindi le rette verticali che intersecano Ox in un punto interno a V_1V_2 non possono intersecare l'iperbole, mentre le rette $\xi = \overline{\xi}$ per $\overline{\xi} < -c$ e $\overline{\xi} > c$ la intersecano in due soli punti evidentemente simmetrici rispetto alla Ox.

È quindi evidente che l'iperbole H è costituita da due curve continue separate, curve chiamate **rami dell'iperbole** o anche nappe dell'iperbole.

G50d.06 Sviluppiamo ora l'equazione delle iperboli canoniche $H := \mathsf{Hprbl}[a,b]$.

Il punto $P = \langle x, y\rangle$ appartiene alla H sse

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| \;=\; 2\,a\;.$$

Elevando al quadrato abbiamo

$$(x+c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2-4a^2 \;=\; -2\,\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,\sqrt{(x-c)^2+y^2}\;.$$

Elevando ancora al quadrato e semplificando troviamo

$$(x^2+y^2+c^2-2a^2)^2 \;=\; \big((x+c)^2+y^2\big)\,\big((x-c)^2+y^2\big)\;.$$

Questa equivale alla equazione

$$(a^2-c^2)x^2+a^2\,y^2 \;=\; a^2(a^2-c^2)\;.$$

Introdotto il numero reale positivo b, tale che $b^2 = c^2 - a^2$ si ottiene l'**equazione canonica per le iperboli**

(1) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \;=\; 1 \quad \text{ove} \quad 0 < a, b < c\;.$$

Similmente per l'equazione dell'iperbole con centro nell'origine e con i fuochi sull'asse Oy, cioè con $F_1 = \langle 0, -c\rangle$ ed $F_2 = \langle 0, c\rangle$ si ha l'equazione

(2) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = -1\;.$$

Questa iperbole si ottiene dalla canonica effettuando la riflessione del piano rispetto alla retta $y = x$.

In questo caso gli asintoti dell'iperbole sono dati dalle espressioni

(3) $$y \;=\; \pm\frac{b}{a}\,x\;.$$

G50d.07 Anche l'iperbole canonica si può caratterizzare con utili equazioni parametriche.

Per questo ricordiamo le definizioni delle funzioni a valori reali coseno iperbolico e seno iperbolico:

$$\cosh\,t \;:=\; \frac{\mathsf{e}^t+\mathsf{e}^{-t}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sinh\,t \;:=\; \frac{\mathsf{e}^t-\mathsf{e}^{-t}}{2} \qquad \text{per ogni} \quad t\in\mathbb{R}\;.$$

La prima è una funzione di $\lceil\,\mathbb{R} \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright \mathbb{R}\,\rceil$ crescente, dispari e invertibile e la seconda appartiene a $\lceil\,\mathbb{R} \longmapsto [1,+\infty)\,\rceil$ è pari e crescente per ogni $t \in [0, +\infty$.

Ricordiamo anche che si trova facilmente che

$$(\cos\,t)^2 - (\sinh\,t)^2 \;=\; 1$$

e che, posto $t \;:=\; \ln\Big(y/b+\sqrt{1+(y/b)^2}\Big)$, si trova $\sinh\,t \;=\; y/b$.

Quindi per i punti $\langle x, y\rangle$ appartenenti all'iperbole retta dalla equazione $(x/a)^2-(y/b)^2 = 1$, introdotta la variabile reale

(1) $$t \;:=\; \ln\left(\frac{y}{b}+\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}\right)\;,$$

si trova $\sinh t = \dfrac{y}{b}$ (si ricorre alla funzione inversa della funzione coseno iperbolico) e conseguentemente si ottiene

(2) $$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} .$$

Tenendo conto anche del fatto che la nostra iperbole presenta due rami ottenibili l'uno dall'altro per riflessione rispetto ad Oy e che ogni ramo è costituita dai punti di una funzione a valori nonnegativi e dai punti della funzione riflessa dalla precedente rispetto all'asse Ox, si può concludere affermando che i punti $\langle x, y\rangle$ dell'iperbole sono tutti e soli i punti della forma $\langle \pm\cosh t, \sinh t\rangle$ per $t \in \mathbb{R}$.
Questo equivale a dire che l'iperbole è individuata dalle due equazioni parametriche

(3) $$x = -a \cosh t \,,\; y = b \sinh t \qquad \text{e} \qquad x = a \cosh t \,,\; y = b \sinh \quad ,$$

riguardanti, risp., il ramo a sinistra e il ramo a destra dell'asse Oy.

G50d.08 Le equazioni parametriche implicano che per i punti dell'iperbole

(1) $$\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a}\,\frac{\mathsf{e}^t - \mathsf{e}^{-t}}{\mathsf{e}^t + \mathsf{e}^{-t}} = \pm\frac{b}{a}\,\frac{\mathsf{e}^{2t} - 1}{\mathsf{e}^{2t} + 1} .$$

Questa funzione di $\boldsymbol{t}$ per $t \to \pm\infty$ tende a $\pm\, b/a$; questo significa che i punti dell'iperbole quando ci si allontana dal suo centro si avvicinano sempre di più a punti delle rette $y = \pm\dfrac{b}{a}\,x$, rette chiamate asintoti dell'iperbole.

//input pG50d08

Se gli asintoti di una iperbole sono perpendicolari, e quindi se $a = b = \dfrac{c}{\sqrt{2}}$, la curva si dice **iperbole equilatera**.

Le iperboli equilatere riferite ai propri asintoti, ovvero se gli asintoti dell'iperbole si assumono come assi cartesiani $O\hat{x}$ e $O\hat{y}$, allora la sua equazione assume una forma ancor più semplice:

$$\hat{x}\,\hat{y} = \hat{c} .$$

Assunto $\hat{c}$ diverso da 0 a tale curva è associata la **funzione della proporzionalità inversa**

(2) $$\hat{y} = \frac{\hat{k}}{\hat{c}} .$$

Se $\hat{c}$ tende a 0 la curva degenera nell'insieme dei due assi cartesiani, caratterizzato dall'equazione $\hat{x}\,\hat{y} = 0$.

G50d.09 Gli elementi associati a una iperbole più rilevanti sono:

i fuochi, due punti fissi da cui tutti i punti dell'iperbole hanno differenza costante;

i vertici, intersezioni del segmento che unisce i fuochi con i due rami dell'iperbole;

il centro, punto medio del segmento che unisce i due fuochi (o i due vertici);

gli asintoti, due rette che si definiscono "tangenti all'infinito dell'iperbole", ovvero due rette incidenti nel centro a cui i rami dell'iperbole quando ci si allontana dal centro (o dai fuochi) si avvicinano sempre più senza però mai intersecarle.

G50d.10 Raccogliamo le equazioni che si possono utilizzare per esprimere le iperboli

Equazioni cartesiane

L'iperbole avente assi paralleli agli assi cartesiani e centro nel punto $C = (x_c, y_c)$ ha equazione

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} \; = \; 1 \; .$$

Se si applica una rotazione degli assi di 90°, si ottiene l'equazione

$$\frac{(y - y_c)^2}{a^2} - \frac{(x - x_c)^2}{b^2} = 1,$$

In entrambe le formule a è detto **semiasse maggiore** e corrisponde alla metà della distanza tra i due rami; b è invece chiamato **semiasse minore**. Si noti che b può essere maggiore di a; questa incongruenza viene risolta da alcuni testi scambiando i significati di a e b. In questo caso l'equazione dell'iperbole che interseca l'asse delle y viene scritta nella forma

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} \; = \; -1 \; .$$

L'eccentricità dell'iperbole può essere definita dall'espressione

$$\mathsf{ecntr}(H) \; := \; \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \; = \; \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} \; = \; e \; = \; \frac{c}{a} \; .$$

equazioni polari dell'iperbole

$$\begin{aligned} r^2 &= \; a \sec 2\,t \\ r^2 &= -a \sec 2\,t \\ r^2 &= \; a \csc\; 2t \\ r^2 &= -a \csc\; 2\,t \end{aligned}$$

equazioni parametriche dell'iperbole

$$x \; = \; a\,\cosh\,\theta \; ; \; y = b\,\sinh\,\theta$$

$$x \; = \; a\,\tan\,\theta \; ; \; \; y = b \sec \theta$$

L'iperbole viene introdotta anche analiticamente come la curva del piano cartesiano che soddisfa un'equazione della forma

(1) $$A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F \; = \; 0 \; ,$$

avente tutti i coefficienti reali, tale che $B^2 > 4\,A\,C$ e tale che esista più di una soluzione che definisce una coppia $\langle x, y\rangle$ di punti della curva.

G50 e. equazioni delle coniche in coordinate polari

G50e.01 In questo paragrafo studiamo in termini analitici le coniche, la generica delle quali denotiamo con $\gamma = \mathsf{Conic}_{plr}[F, \boldsymbol{d}, e]$, definite come luogo dei punti P che presentano costante il rapporto, che denotiamo con e, tra distanza dal punto F chiamato fuoco e distanza dalla retta $\boldsymbol{d}$ chiamata direttrice.

Per operare con i punti P espressi attraverso le coordinate polari ϱ e ϑ ci serviamo del sistema di riferimento che ha come origine il fuoco F e come asse polare la retta $\mathcal{P}$ per F ortogonale alla direttrice $\boldsymbol{d}$ orientata da F al suo piede F_d sulla $\boldsymbol{d}$.
Denotiamo inoltre con p la distanza tra fuoco e direttrice $F\,F_d$, con $P = \langle\varrho, \vartheta\rangle$ il generico punto della conica γ e con P_d il piede di P sulla direttrice.

Visualizziamo le configurazioni da analizzare con la direttrice verticale posta a sinistra del fuoco; in tal modo i due semipiani delimitati dalla direttrice si possono chiamare semipiano sinistro e semipiano destro (comprendente F).

//input pG50h01

Per avere le equazioni delle coniche in tali coordinate occorre distinguere il caso (E+P) caratterizzato da $e \leq 1$ nel quale si distinguono i sottocasi (E) e (P), relativi, risp., ad $e < 1$ ed $e = 1$, dal caso (H) relativo ad $e > 1$. Nel caso (E+P) la curva γ appartiene interamente al semipiano destro, nel caso (H) la γ presenta due rami, uno appartenente al semipiano sinistro ed uno al semipiano destro.

Nel caso (E)+(P) $P\,P_d = p - \varrho\cos\vartheta$; nel caso (H) vanno distinti i punti P del semipiano sinistro per i quali $PP_d \; = \; p - \varrho\,\cos\vartheta$ dai punti $\overline{P}$ del semipiano sinistro per i quali $\overline{P}P_d \; = \; \overline{\varrho}\,\cos\overline{\vartheta} - p$.

G50e.02 Nel caso (E)+(P) si ha

$$\mathsf{Conic}_{plr}[F, \boldsymbol{d}, e] \; = \; \left\{ P = \langle\varrho, \vartheta\rangle \;\; ¶ \;\; \frac{\rho}{p - \varrho\,\cos\vartheta} = e \right\}$$

e da qui l'equazione

(1)
$$\rho = \frac{e\,p}{1 + e\cos\theta} \; .$$

Nel caso (H) si ha

$$\mathsf{Conic}_{plr}[F, \boldsymbol{d}, e] \; = \; \left\{ P = \langle\varrho, \vartheta\rangle \;\; ¶ \;\; \frac{\varrho}{\pm(p - \varrho\,\cos\vartheta)} \; = \; e \right\}$$

e da qui le due equazioni

(2)
$$\varrho \; = \; \frac{e\,p}{1 + e\,\cos\vartheta} \qquad , \qquad \varrho \; = \; \frac{e\,p}{e\,\cos\vartheta - 1} \; ,$$

la prima per il ramo a sinistra della direttrice la seconda per quello a destra.

Da queste equazioni si ricava la seguente, ottenibile da $PF^2 = e^2\,(PP_d)^2$, valida per entrambi i casi (E+P) ed (H):

(3)
$$\varrho^2 \; = \; e^2(p - \varrho\,\cos\vartheta)^2 \; .$$

Osserviamo che in tutte queste equazioni risulta evidente la simmetria della conica per la riflessione rispetto all'asse orizzontale $\overline{FF_d}$; questa retta viene chiamata **asse maggiore della conica**. Risulta chiaro anche il fatto che modificando la distanza $p = FG$ ogni conica viene trasformata in una curva simile.

G50e.03 È significativo riprendere in considerazione le diverse coniche relative ad F e $\boldsymbol{d}$ fissati per diversi valori dell'eccentricità e. Ciascuna di queste diverse curve $\mathcal{C}$ interseca il segmento FF_d esattamente in un punto Q, il quale quindi è in grado di caratterizzare univocamente la $\mathcal{C}$. Questo Q è tale che $FQ = e\,QQ_d$; essendo $FQ + QF_d = p$ si ha $FQ = e(p - QF_d)$ e quindi $FQ = \dfrac{p}{1+e}$.
Se $e = 1$ Q è il punto medio di FF_d e la curva è una parabola.
Facendo diminuire e da 1 a 0 P_d si sposta verso il fuoco e si hanno ellissi sempre più piccole e di forme meno allungate, sempre più vicine a quella della circonferenza.
Facendo crescere e al di sopra di 1 Q si sposta verso F_d e si hanno iperboli sempre più allargate.

G50e.04 Passiamo ora alle coordinate cartesiane per ritrovare le equazioni canoniche dei tre tipi di coniche. Con un primo passo consideriamo il sistema di riferimento $\overline{O}\overline{x}y$ con l'origine nel fuoco $\overline{O} = F$ l'asse $\overline{O}\overline{x}$ orizzontale, l'asse $\overline{O}y$ verticale e la direttrice data da $\overline{x} = p$.
L'equazione f02(3) è equivalente alla

(1) $$\overline{x}^2 + y^2 \;=\; e^2(p - \overline{x})^2 \qquad \text{ovvero} \qquad (1-e^2)\overline{x}^2 + 2\,p\,e^2\overline{x} + y^2 - e^1\,p^2 \;=\; 0\ .$$

A questo punto occorre distinguere i tre tipi di coniche e cercare tre equazioni canoniche in tre diversi sistemi di riferimento, ciascuno adatto a presentare semplicemente le proprietà delle curve di un solo tipo.

G50e.05 Per le ellissi conviene riferirsi alla coppia di coordinate $\langle x, y\rangle$ con $x = \overline{x} + \dfrac{e^2\,p}{1-e^2}$, ovvero di traslare l'origine nel punto $\left\langle -\dfrac{e^2\,p}{1-e^2}\ \text{‘},\ 0\right\rangle$. Dalla equazione x04(1) si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con} \qquad a^2 \;:=\; \frac{e^2\,p^2}{(1-e^2)^2} \quad , \quad b^2 \;:=\; \frac{e^2\,p^2}{|1-e|}$$

G50e.06 Nel caso $e = 1$ riguardante le parabole l'equazione x04(1) si riduce alla $2p\overline{x} + y^2 - p^2 = 0$; conviene quindi riferirsi alla coppia di coordinate $\langle x, y\rangle$ con $x = -\overline{x} + \dfrac{p}{2}$ e si ottiene

$$y^2 - 2\,p\,x \;=\; 0\ .$$

G50e.07 Nel caso $e > 1$ relativo alle iperboli ....

G50e.08 Si definisce **semilato retto della conica** $\mathcal{C}$ un segmento ortogonale al suo asse maggiore che ha una estremità nel suo fuoco singolo o in uno dei suoi due fuochi e l'altra in un punto della $\mathcal{C}$; denotiamo con l la lunghezza di tale segmento. Questa grandezza è collegata alle lunghezze dei semiassi a e b dall'uguaglianza $al = b^2$.
In coordinate polari, una sezione conica con un fuoco nell'origine e, se dotata di un secondo fuoco, con questo sul semiasse positivo delle x, è espressa dall'equazione

(1) $$\varrho\,(1 - e\,\cos\vartheta) \;=\; l\ .$$

G50 f. coniche definite da fuoco, direttrice ed eccentricità

G50f.01 Delle coniche si può dare una definizione metrica che ricorre solo al piano euclideo e che le include tutte a eccezione delle circonferenze da considerare come curva limite.

Nel piano si considerano un punto F che viene chiamato **fuoco della conica**, una retta $\boldsymbol{d}$ non contenente F che viene detta **direttrice della conica** e un numero reale nonnegativo e che viene chiamato **eccentricità della conica**.

Definiamo provvisoriamente **conica-fde** associata alla terna $\langle F, \boldsymbol{d}, e\rangle$ il luogo dei punti $P = \langle x, y\rangle$ del piano la cui distanza da F è uguale al prodotto di e per la rispettiva distanza da $\boldsymbol{d}$. Questa curva la denotiamo con $\mathsf{Conic}_{fde}[F, \boldsymbol{d}, e]$.
Se denotiamo con D_P il punto proiezione ortogonale su $\boldsymbol{d}$ di P si ha l'equazione

$$\frac{PF}{PD} = e \ .$$

Evidentemente quando $e = 1$ si ritrova la definizione metrica della parabola.

Ovviamente queste curve presentano un asse di simmetria costituito dalla rette passante per il fuoco e ortogonale alla direttrice $\mathsf{Ortlin}[\boldsymbol{d}, F]$: infatti la configurazione fuoco-direttrice su cui si basa la definizione è simmetrica rispetto a tale retta.

È anche chiaro che le isometrie trasformano una conica-fde in una conica-fde congruente e che le omotetie trasformano una di queste figure in una figura simile. Più precisamente l'omotetia Ω trasforma la conica $\mathsf{Conic}_{fde}[F, \overline{AB}, e]$ nella $\mathsf{Conic}_{fde}[\Omega(F), \overline{\Omega(A)\Omega(B)}, e]$

Dunque lo studio delle coniche-fde si può essenzialmente limitare allo studio dalle coniche-fde che condividono un fuoco F e una direttrice $\boldsymbol{d}$ scelti a =d arbitrio e che si distinguono per i diversi valori reali positivi della eccentricità.

G50f.02 Si trova facilmente una netta distinzione tra le coniche con $0 < e < 1$ e le coniche con $1 < e$: le prime sono curve chiuse i cui punti si trovano tutti nel semipiano delimitato dalla direttrice e contenente il fuoco, le seconde sono curve illimitate costituite da due rami, ciascuno dei quali confinato in uno dei semipiani separati dalla direttrice.

//input G50e02

Si dimostrerà che per $0 < e < 1$ si ottiene un'ellisse, per $e = 1$ una parabola e per $e > 1$ un'iperbole.

G50f.03 Per una ellisse e una iperbole si possono assumere due coppie fuoco + direttrice, ciascuna in grado di fornire la stessa intera curva. La distanza del centro di tale conica dalla direttrice è $\frac{a}{e}$, dove a denota il `semiasse maggiore (wi)` dell'ellisse, oppure la distanza del centro da ciascuno dei punti di distanza minima dell'iperbole.
La distanza del centro da un fuoco è data in ogni caso da $a\,e$.

Il caso della circonferenza si può pensare come limite delle ellissi per e tendente a 0 con la direttrice che tende a disporsi a distanza infinita dal fuoco (retta all'infinito del piano).
Per questo caso bisogna ricorrere al caso limite delle ellissi, in quanto non si può trattare quantitativamente a partire dalla richiesta di una curva luogo dei punti la cui distanza dal centro sia e volte la

distanza da D, in quanto per questo prodotto si avrebbe una `forma indeterminata` `(wi)` del genere zero per infinito.
Intuitivamente si può dunque dire che l'eccentricità di una conica-fde fornisce una misura di quanto essa si allontani dall'essere circolare.
Considerando le ellissi con una data lunghezza a del semiasse maggiore accade che quanto più e si avvicina ad 1, tanto più piccolo è il semiasse minore.

G50f.04 Consideriamo la sezione conica $\Sigma := \mathsf{Conic}_{fde}[F, \boldsymbol{d}, e]$.
Ci proponiamo di mostrare che i punti F_i rappresentano i due fuochi, della sezione conica Σ con $e \neq 1$e che è una conica e che la retta $\boldsymbol{d}$ è la sua direttrice. Più specificamente dimostriamo che per ogni punto P della Σ vale la seguente proprietà:

$$\frac{PF}{PD} = e ,$$

dove PD denota la lunghezza della perpendicolare alla retta $\boldsymbol{d}$ passante per P, cioè la distanza del punto P dalla retta $\boldsymbol{d}$, ed e è una costante (che rappresenta l'eccentricità della conica).
Di conseguenza l'insieme Σ dei punti P costituisce una sezione conica. La dimostrazione che vediamo ora vale per tutti e tre i tipi di coniche.

G50f.05 Denotiamo con H il punto di intersezione con il piano Π della retta passante per P e parallela all'asse del cono; denotiamo con A il punto di intersezione con la circonferenza γ della generatrice passante per P.

PA e PF riguardano due segmenti tangenti alla sfera, condotti dallo stesso punto P, e quindi hanno la stessa lunghezza:

$$PA = PF .$$

Nel triangolo rettangolo PHA abbiamo:

$$PH = PA \cos\alpha ,$$

mentre nel triangolo rettangolo PHD

$$PH = PD \cos\beta .$$

Combinando le precedenti tre equazioni e semplificando, otteniamo:

$$PA \cos\alpha = PD \cos\beta \quad , \quad PF \cos\alpha = PD \cos\beta$$

e perciò

$$\frac{PF}{PD} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} =: e .$$

Questa coincide proprio con la definizione di conica come luogo di punti di un piano per cui il rapporto tra la distanza di un suo generico punto dal fuoco e dalla direttrice è costante e coincide con la sua eccentricità.

G50 g. sezioni piane di un cono

G50g.01 Ricordiamo che per **cono** si intende una superficie nello spazio euclideo determinata da una curva piana semplice chiusa γ e da un punto V che non le appartiene chiamato **vertice del cono**.

Chiamiamo Γ il piano contenente la curva γ, G un punto della curva che consideriamo mobile e K il cono che intendiamo definire.
Chiamiamo **generatrice del cono** passante per G la retta $\overline{VG}$. Definiamo quindi **cono** determinato da V e γ l'insieme dei punti delle generatrici al variare di G su γ e quindi scriviamo

$$(1) \qquad \mathsf{Kon}[V,\gamma] \ := \bigcup_{G\in\gamma} \overline{VG} \ .$$

Si osserva che se $V \in \Gamma$ si hanno i cosiddetti coni degeneri; se V è punto interno a γ il cono coincide con Γ, mentre se appartiene a γ o è a esso esterno il cono determinato è un sottoinsieme di Γ contenente γ e delimitato da due semirette con estremità in V.

Più in particolare si dice **cono circolare retto** un cono determinato dal suo vertice V e da una circonferenza γ appartenente a un piano Γ non contenente V ed avente il centro Z nel piede di V su Γ.
Se ρ denota il raggio della γ per questo cono scriviamo $K \ := \ \mathsf{KonCR}[V,Z,\rho]$.

Consideriamo la retta $\overline{VG}$; questa è ortogonale a Γ e viene chiamata **asse del cono** K. Denotiamo inoltre con h la distanza tra V e Γ.
Chiamiamo **angolo di semiapertura del cono** l'angolo acuto formato da ciascuna delle sue generatrici con il suo asse; tale angolo lo denotiamo con α. Chiaramente $\rho \ = h \tan\alpha$.
Questa superficie viene individuata anche da V.

Si osserva che un cono circolare retto può essere individuato da due rette incidenti in un punto che ha il ruolo di vertice, una delle due rette con il ruolo di asse e l'altra con il ruolo di generatrice; in tal caso il cono si definisce come la superficie di rotazione intorno all'asse tracciata dalla sua generatrice.

Dalla definizione si deduce che applicando a un cono una isometria si ottiene un cono a lui congruente e che applicando a un cono una qualsiasi omotetia si ottiene un cono a lui simile.
Quindi si può ricondurre gran parte dello studio dei coni allo studio di classi di congruenza e a classi di similitudine di tali figure tridimensionali.

Vedremo anche che molte costruzioni di coniche, ma non tutte, sono indipendenti dall'ampiezza della semiapertura. In effetti si trova che l'insieme di tutte le sezioni coniche si ottiene servendosi dei coni con semiaperture tali che $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$.
Chiaramente per $\alpha = 0$ il cono degenera in una retta e per $\alpha = \pi/2$ degenera in un piano.

G50g.02 Ci proponiamo ora di esaminare le curve ottenute sezionando un cono con un piano e per le considerazioni precedenti possiamo limitarci ai coni riferiti a una terna monometrica di assi ortogonali, cono avente il vertice V nell'origine della terna e l'asse di simmetria corrispondente all'asse verticale Oz.
Per le coordinate riferite a questa terna usiamo le lettere ξ, η e ζ, mentre riserviamo le lettere x e y alle variabili del piano sul quale collochiamo la sezione conica e la lettera O per l'origine di questo piano.

Per controllare tutte le sezioni coniche è necessario considerare l'intera famiglia dei coni con vertice V e asse $\overrightarrow{V\zeta}$ indicizzata dalla semiampiezza α variabile da $0°$ a $90°$. Chiamiamo **cono canonico** di semiampiezza α e denotiamo con $\mathsf{KonC}[\alpha]$ il cono con vertice V, asse $\overrightarrow{V\zeta}$ e semiampiezza α.

Vedremo che ciascuno di questi coni è in grado di definire un suo insieme di sezioni coniche distinte da opportuni parametri e vedremo che l'insieme di queste curve contiene i rappresentanti di tutte le classi di congruenza dell'insieme delle sezioni coniche.

I punti $G = \langle \xi, \eta, \zeta \rangle$ del cono $\mathsf{KonC}[\alpha]$ sono caratterizzati dal fatto che $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = |\zeta| \tan\alpha$ e quindi l'equazione di $\mathsf{KonC}[\alpha]$ è $\zeta^2 = \dfrac{\xi^2 + \eta^2}{(\tan\alpha)^2}$.

Per $\alpha = 0°$ il cono degenera nell'asse $\overrightarrow{V\zeta}$, mentre per $\alpha = 90°$ degenera nel piano $V\xi\eta$.

Ricordiamo che le parentesi $\big[$ e $\big]$ delimitano equazioni, disequazioni o sistemi di equazioni e disequazioni (da separare con il connettivo "$\wedge$") concernenti variabili desumibili dal contesto (qui in particolare le coordinate variabili ξ, η, ζ, x, y) al fine di individuare gli insiemi (qui figure geometriche, alias luoghi geometrici) costituiti da tutti e soli gli elementi che soddifano le equazioni e disequazioni.

Per esempio il piano di riferimento orizzontale si individua con $\big[\, \zeta = 0 \,\big] = V\xi\eta$, per l'asse del cono abbiamo $\big[\, \xi = 0 \ \wedge \ \eta = 0 \,\big]$ e per il cono $\mathsf{KonC}[\alpha]$ scriviamo

$$\mathsf{KonC}[\alpha] = \left[\, \zeta^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\tan\alpha)^2} \,\right] := \left\{ \langle \xi, \eta, \zeta \rangle \in \mathbb{R}^3 \ ¶ \ \zeta^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\tan\alpha)^2} \right\} .$$

Queste parentesi risultano utili nelle espressioni nelle quali un insieme della forma $\big[$ *equazione* $\big]$ o di forma analoga compare in una formula insiemistica come operando di operatori quali unione, intersezione, eliminazione o prodotto cartesiano.
Tuttavia spesso quando si individua un solo insieme espresso da una equazione conviene adottare la abbreviazione che sostituisce la scrittura $\big[$ *equazione* $\big]$ con la semplice *equazione*.

G50g.03 Fissiamo l'attenzione sul cono canonico $\mathsf{KonC}[\alpha]$ che identifichiamo abbreviatamente con K e su un piano Σ cui attribuiamo il ruolo di **piano secante del cono**; questo, in forza dell'invarianza del cono rispetto alle rotazioni intorno a $\overrightarrow{V\zeta}$, essendo interessati a classi di congruenza, possiamo limitarci a considerare fornito da equazioni della forma $\hat{x}\xi + \hat{z}\zeta + \hat{w} = 0$, ovvero che sia un piano costituito da rette parallele all'asse $\overrightarrow{V\eta}$.

Questo facilita la presentazioni di importanti configurazioni attraverso le loro proiezioni ortogonali sul piano $V\xi\zeta$ con l'asse $\overrightarrow{V\xi}$ disposto orizzontalmente e orientato verso destra, pensando che l'asse $\overrightarrow{V\eta}$ sia ortogonale al piano del disegno e sia orientato nella direzione opposta al lettore.

Il piano Γ contenente la circonferenza γ che determina il carattere circolare del cono conveniamo soddisfi l'equazione $\zeta = \hat{h}$ con $\hat{h} > 0$.

Denotiamo con Σ il piano secante, con σ la curva intersezione di K con Σ, con G il generico punto della σ e con g la generatrice $\overline{VG}$.

Si osserva che ogni generatrice g viene tripartita da V nel singoletto $\{V\}$ e in due semirette, una al di sopra e l'altra al di sotto di V, che chiamiamo, risp., **semigeneratrice superiore del cono** e **semigeneratrice inferiore del cono**. Di conseguenza anche i punti del cono si ripartiscono in tre sottoinsiemi: uno costituito solo dal suo vertice e i due sottoinsiemi separatamente connessi costituiti, risp., dalle semirette superiori e dalle inferiori: questi sono detti **falde del cono** o anche **nappe del cono**.

G50g.04 Pensiamo di disporre di un piano Σ al quale attribuiamo il ruolo di **piano settore del cono** K e che possiamo collocare in posizioni diverse per ottenere diverse intersezioni con K; Questi insiemi piani esprimibili come $\Sigma \cap K$ sono curve dette **sezioni coniche**.

Per fissare le immagini supponiamo che il punto $S := \Sigma \cap \overrightarrow{V\zeta}$ si trovi al di sopra del vertice V.

Data la simmetria circolare del cono, si può scegliere ad arbitrio la direzione di massima pendenza del piano Σ; quando questo è ortogonale all'asse $\overrightarrow{V\zeta}$ la curva σ è una semplice circonferenza).

Supponiamo anche che le linee di massima pendenza siano parallele alla retta $\Sigma \cap V\eta\zeta$, ossia scegliamo Σ in modo che si possa considerare costituito dall'unione disgiunta di rette parallele all'asse $\overrightarrow{V\eta}$.
Nelle proiezioni ortogonali su $V\xi\zeta$ queste rette sono rappresentate da semplici punti e il piano Σ da una retta passante per S.

Si osserva anche che la configurazione data da cono e piano settore è invariante per riflessione rispetto al piano $V\xi\zeta$; da questo segue che tutte le coniche presentano una simmetria per riflessione rispetto alla retta $\Sigma \cap V\xi\zeta$.

Si osserva poi che se si sottopone la configurazione all'omotetia $\boldsymbol{Hmtt}[V,\omega]$ di centro nel vertice V con fattore $\omega > 0$, il cono K resta invariato, mentre la distanza VS e le distanze tra coppie di punti sulla sezione conica sono moltiplicate per ω.
Risulta quindi evidente che l'insieme delle coniche ottenibili da K sottoponendo a traslazioni il piano settore Σ, accanto a una conica particolare σ si trovano tutte le coniche a essa simili, curve ottenibili della stessa σ come trasformate per omotetia nel piano Σ.

G50g.05 Procediamo ora a considerare diverse collocazioni del piano settore rispetto al cono $\mathsf{KonC}[\alpha]$.
Innanzi tutto, a causa della simmetria di rotazione intorno all'asse $\overrightarrow{V\zeta}$ del cono circolare retto, della posizione di Σ rispetto alla ζ conta solo l'angolo acuto formato da questi due oggetti lineari che denotiamo con β; sottoponendo Σ a rotazioni con asse di rotazione $\overrightarrow{V\zeta}$ la curva $K\cap\Sigma$ rimane congruente con se stessa.

Se si trasla verticalmente il piano Σ mantenendo fisso β, la sezione conica viene trasformata dalla omotetia relativa al fattore uguale al rapporto tra le distanze dal vertice del punto $\Sigma \cap \overrightarrow{V\zeta}$.
Per le coordinate di questo punto S scriviamo $S = \langle 0, 0, h\rangle$.

Per determinare le caratteristiche salienti delle coniche non occorre distinguere i membri di una classe di similitudine; quindi possiamo tenere fisso il punto S in cui l'asse $\overrightarrow{V\zeta}$ interseca Σ, ovvero possiamo tenere fissa la retta $\big[\,\zeta = h\,\big] \ \wedge\ \Sigma$.

Distingueremo i diversi angoli β che il piano secante forma con $\overrightarrow{V\zeta}$ e quindi denoteremo questo piano variabile con Σ_β.
Introduciamo anche $\theta := \dfrac{\pi}{2} - \beta$, cioè l'angolo acuto formato dall'asse $\overrightarrow{V\zeta}$ con la retta ortogonale a Σ e passante per S.
Per il piano Σ_β abbiamo l'equazione

$$\zeta \ = \ \eta_0 + (\eta - \eta_0)\cot\beta \ = \ \eta_0 + (\eta - \eta_0)\tan\theta\ ,$$

dove chiaramente la retta $\Sigma_\beta \ \cap\ V\xi\zeta)$ è la retta passante per il punto $B\ = \big\langle \xi_0, 0, 0\big\rangle$ e per S .

Si osserva che il piano $\zeta = h$ coincide con $\Sigma_{\pi/2}$. Con questo piano settore evidentemente la sezione conica è una circonferenza; questa curva appartenente interamente alla falda superiore di K se $h > 0$, viceversa appartiene interamente alla falda inferiore sse $h < 0$.
Evidentemente questa constatazione non è che un richiamo della definizione di cono circolare retto.

G50g.06 Supponiamo ora per fissare le immagini che sia $h > 0$ e ruotiamo "leggermente" Σ_β in modo che l'angolo β rimanga superiore alla semiampiezza del cono α.
In tal caso la sezione $\sigma_\beta \ := \ \Sigma_\beta \cap K$ continua ad appartenere tutta alla falda superiore del cono e continua a essere una curva chiusa ottenibile allungando "leggermente" la circonferenza σ_{90° nella direzione della retta $\big[\,\eta = 0\,\big] \cap \Sigma_\beta$.

Ruotando ulteriormente Σ_β, sempre mantenendo $\beta > \alpha$, si ottiene una curva chiusa ancor più allungata.

Le curve σ_β per $\alpha < \beta \leq \pi/2$ le chiamiamo provvisoriamente ellissi-K. Vedremo che queste curve sono le ellissi studiate nella sezione :c.

Se si interseca il cono con un piano parallelo a una sua retta generatrice, ovvero con il piano che forma con ζ un angolo di ampiezza $\beta = \alpha$, ovvero con il piano la cui ortogonale ν che forma con ζ un angolo di ampiezza $\theta = \pi/2 - \beta$, si ottiene una conica che chiamiamo provvisoriamente parabola-K. Vedremo infatti che queste curve sono le parabole studiate in :b.

Ogni parabola-K appartiene ad una sola delle falde del cono (per la visualizzazione sopra adottata appartiene solo alla falda superiore), ma non è una curva chiusa.
Essa infatti non è limitata: possiede punti che si collocano in alto tanto quanto si vuole, cioè punti caratterizzati da coordinate ζ arbitrariamente grandi.

Infine intersecando il cono con piani Σ_β che continuano a contenere S e formano con $\overrightarrow{V\zeta}$ angoli β positivi ma inferiori ad α, si determinano curve σ con i punti appartenenti ad entrambe le falde che provvisoriamente chiamiamo iperboli-K. Vedremo infatti che queste curve sono le iperboli studiate in :d.

Si osserva che nel piano $\eta = 0$ il punto B rimane a sinistra di V ma gli si avvicina quanto si vuole e che la retta $\Sigma \cap \left[\eta = 0\right]$ interseca sicuramente la generatrice $\zeta = \xi \cdot \cot\alpha$.

Quindi una iperbole-K non è una curva chiusa, in quanto contiene punti con valori di ζ illimitatamente vicini a $+\infty$ o a $-\infty$ ed inoltre si bipartisce in due sottoinsiemi separatamente connessi i quali sono detti **rami della curva**.
Tenendo conto della visualizzazione scelta, possiamo parlare di un ramo superiore e di uno inferiore.

G50g.07 Le curve sopra introdotte passano per un punto dell'asse, S, diverso dal vertice e sono dette **coniche nondegeneri**.
Vi sono poi le cosiddette **coniche degeneri** ottenute servendosi di piani Σ che passano per il vertice del cono. Per queste si distinguono i tre casi che seguono.

(1) Se si interseca il cono con un piano che con l'asse $\overrightarrow{V\zeta}$ forma un angolo β superiore ad α, si ottiene un semplice punto, lo stesso vertice del cono.
(2) Se si interseca il cono con un piano che con l'asse del cono forma un angolo $\beta = \alpha$, si ottiene una linea retta, una generatrice del cono.
(3) Se si interseca il cono con un piano che con l'asse $\overrightarrow{V\zeta}$ forma un angolo β inferiore ad α, si ottiene una coppia di rette che sono due generatrici del cono.

Sempre pensando che Σ_β sia ottenuto come unione disgiunta di rette parallele all'asse di riferimento $\overrightarrow{V\eta}$, esso si può anche ottenibile come unione disgiunta di rette parallele alla retta che appartiene al piano $V\xi\zeta$ ed ha come equazione $\zeta = \cot\alpha \cdot \eta$.
Nel caso (2) la conica degenere si riduce alla retta generatrice $\left[\xi = 0 \land \zeta = \cot\beta \cdot \eta\right]$.
Nel caso (3) le due generatrici hanno come bisettrice la retta $\left[\xi = 0 \land \zeta = \cot\alpha \cdot \eta\right]$.

G50g.08 Si osserva che con un cono avente un dato angolo di semiapertura α si possono ottenere solo coppie di rette degeneri che ridotte alle semirette al di sopra del vertice V formano solo angoli non superiori a $2\,\alpha$.
Corrispondentemente si possono avere solo iperboli che hanno asintoti con angoli comprendenti i rami dell'iperbole inferiori a $2\,\alpha$.
Quindi per avere la totalità delle coniche si devono utilizzare coni con tutte le possibili aperture $2\,\alpha$.

Questa richiesta non va considerata eccessiva. Infatti il ruolo del cono nella definizione delle coniche riguarda la sua capacità di proiettare su un piano una curva particolare, una circonferenza. I coni con diverse aperture aventi in comune l'asse si ottengono l'uno dall'altro mediante omotetie unidirezionali relative alla direzione dell'asse Ox. Il valore preciso della semiapertura del cono utilizzato per definire delle coniche serve solo come valore discriminante per l'angolo formato dal piano settore con il suo asse.

Osserviamo anche che il cono degenera in una retta per α tendente a 0 e in un piano per $\alpha \to \frac{\pi}{2}$. Nel primo caso può individuare solo dei punti, nel secondo solo delle rette o lo stesso intero piano come degenerazione di una circonferenza.

G50 h. sfere di Dandelin

G50h.01 L'equivalenza delle definizioni delle coniche dotate di centro, le ellissi e le iperboli come intersezioni di un piano con un cono circolare retto e come luoghi dei punti che hanno costanti le somme (per le ellissi) o le differenze (per le iperboli) da due punti dati (i fuochi) si dimostra in modo elegante e abbastanza semplice facendo riferimento alle cosiddette `sfere di Dandelin` (`wi`).

Come vedremo queste sfere consentono anche di dimostrare l'equivalenza delle definizioni delle coniche come sezioni piane di un cono circolare retto e come luoghi dei punti del piano che presentano un dato rapporto tra le distanze da un punto con il ruolo di fuoco e da una retta che fa da direttrice introdotto in :e.

G50h.02 Consideriamo ancora il cono circolare retto canonico $K = \mathsf{KonC}(\alpha)$ di semiapertura α riferito al sistema di riferimento cartesiano con origine nel vertice del cono $V = \langle 0,0,0\rangle$ e coordinate cartesiane variabili ξ, η e ζ.
Ogni punto del suo asse può essere il centro di una sfera tangente interna al cono nei punti di una delle sue falde, punti costituenti una circonferenza. Denotiamo questa circonferenza con δ e denotiamo con Δ il piano che la contiene, piano parallelo al piano $\zeta = 0$.

Nella rappresentazione fornita dal piano $V\xi\zeta$ le sfere con centro sull'asse del cono sono individuate dalle circonferenze tangenti a entrambe le generatrici costituenti $K \cap \big[\eta = 0\big]$. Queste rette sono generatrici del cono e soddisfano le equazioni $\zeta = \cot\alpha \cdot \xi$ e $\zeta = -\cot\alpha \cdot \xi$; denotiamo la prima con $\boldsymbol{g}_+$ e la seconda con $\boldsymbol{g}_-$.
Le sfere e le circonferenze tangenti interne di una falda del cono $\mathsf{KonC}(\alpha)$ sono facilmente individuabili: le due circonferenze/sfere il cui centro è esprimibile con $\langle 0,0,h\rangle$ hanno raggio uguale a $|h|\cos\alpha$.

Nel seguito ci serviremo di coppie di sfere e per $i = 1,2$ denoteremo con Φ_i una di queste sfere, con ϕ_i la relativa circonferenza verticale $\Phi_i \cap V\xi\zeta$, con $Z_i :=: \big\langle 0,0,h_i\big\rangle$ il suo centro, con ρ_i il suo raggio, con δ_i la circonferenza orizzontale $K \cap \Phi_i$, con U_i il suo centro e con Γ_i il piano che la contiene.
Denotiamo inoltre con W_i e on $\overline{W}_{i\pm}$ i due punti di $\gamma_i \cap g_\pm$ e con U_i il loro punto medio.
Chiaramente se $h_i := VZ_i$ abbiamo $VW_i = |h_i|\cos\alpha$ e $VU_i = |h_i|(\cos\alpha)^2$.

G50h.03 Una coppia $\langle\Phi_1,\Phi_2\rangle$ di sfere tangenti interne al cono K che non si toccano si dice **coppia di sfere di Dandelin** per il cono.
La coppia $\phi_1,\phi_2\rangle$ delle circonferenze ottenute intersecando le suddette sfere con il piano $V\xi\zeta$ si dice **coppia di circonferenze di Dandelin**.
Le due sfere sono prive di punti comuni e ciascuna di esse è tangente a entrambe le rette generatrici $g_\pm$.
L'invarianza del cono nei confronti delle riflessioni rispetto al piano $\zeta = 0$ e ai piani contenenti l'asse del cono consentono di limitarci ad esaminare le situazioni nelle quali $\rho_1 < \rho_2$.
In tutte queste configurazioni si individua facilmente la unica retta $\boldsymbol{t}$ del piano $\eta = 0$ che non sia generatrice del cono, abbia pendenza positiva e sia tangente a entrambe le circonferenze.

Se entrambe le circonferenze si trovano nel semipiano $\xi > 0$, con ϕ_2 al di sopra di ϕ_1, la retta $\boldsymbol{t}$ passa sopra la ϕ_1 e sotto la ϕ_2 e interseca $\boldsymbol{g}_-$ in un punto A_1 al di sotto del punto di tangenza $F_1 := \phi_1 \cap t$ e $\boldsymbol{g}_+$ in un punto A_2 al di sopra del punto di tangenza $F_2 := \phi_2 \cap t$.
Si osserva che su $\boldsymbol{g}_+$ A_2 si trova più vicino al vertice V del corrispondente punto di tangenza $\overline{W}_2 := \phi_2 \cap \boldsymbol{g}_+$ e che su $\boldsymbol{g}_-$ A_1 si trova più lontano dal vertice V del corrispondente punto di tangenza $W_1 := \phi_1 \cap \boldsymbol{g}_-$.

Se la ϕ_1 si trova nel semipiano $\zeta < 0E$ e la ϕ_2 nel semipiano complementare $\zeta > 0$, la retta unica $\boldsymbol{t}$ si trova al fianco delle due circonferenze, interseca $\boldsymbol{g}_+$ nel punto A_2 al di sopra del punto di tangenza $F_2 := \phi_2 \cap t$ e interseca $\boldsymbol{g}_-$ nel punto A_1 al di sotto del punto di tangenza $F_1 := \phi_1 \cap t$.
Si osserva che su $\boldsymbol{g}_+$ A_2 si trova più lontano dal vertice V del corrispondente punto di tangenza $\overline{W}_2 := \phi_2 \cap \boldsymbol{g}_+$ o $\overline{W}_i$ e che su $\boldsymbol{g}_-$ A_1 si trova più lontano dal vertice V del corrispondente punto di tangenza $W_1 := \phi_1 \cap \boldsymbol{g}_-$.

G50h.04 Tornando alle coppie di sfere di Dandelin abbiamo che ciascuna di esse individua univocamente un piano ortogonale al piano $\eta = 0$ tangente a entrambe le sfere e che forma con il piano $\zeta = 0$ un angolo $\overline{\beta}$ di ampiezza compresa tra 0 e $\pi/2$.

Abbiamo individuato un procedimento che a ogni coppia di circonferenze di Dandelin non intersecantisi associa una retta tangente a entrambe. Ora individuiamo il procedimento inverso in modo da poter affermare la corrispondenza biunivoca tra rette che secano entrambe le generatrici $\boldsymbol{g}_+$ e $\boldsymbol{g}_-$ e le coppie di circonferenze di Dandelin.

Accade anche che per ogni retta $\boldsymbol{t}$ nel piano $\eta = 0$ che intersechi entrambe le rette $\boldsymbol{g}_-$ e $\boldsymbol{g}_+$ esiste una unica coppia di circonferenze di Dandelin $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle$ che siano tangenti anche a tale retta.
Nel caso in cui la $\boldsymbol{t}$ intersechi ciascuna delle generatrici in due punti di una falda del cono la individuazione della circonferenza inferiore ϕ_1 non è che la individuazione dell'incentro del triangolo $\mathsf{trng}(V, A_1, A_2)$ e la individuazione della circonferenza superiore ϕ_2 corrisponde alla individuazione dell'excentro tangente al lato A_1A_2 del suddetto triangolo.
Se la $\boldsymbol{t}$ interseca le generatrici in due punti appartenenti a falde diverse la individuazione della ϕ_1 e della ϕ_2 corrisponde alla individuazione di due excerchi del triangolo espresso ancora da $\mathsf{trng}(V, A_1, A_2)$ ma esterno al cono, l'excerchio tangente a VA_1 e l'excerchio tangente a VA_2.
Tutte queste costruzioni si possono effettuare trovando centri di circonferenze come punti in comune di coppie di bisettrici.
Si ha quindi una corrispondenza biunivoca tra rette intersecanti le due generatrici e coppie di circonferenze di Dandelin.
In tre dimensioni si ha quindi una corrispondenza biunivoca tra coppie di sfere di Dandelin e piani secanti del cono ortogonali al piano $\eta = 0$.

G50h.05 Nel seguito precisiamo alcune costruzioni e formule analitiche riguardanti sezioni coniche; per queste può essere conveniente servirsi dei due angoli complementari

$$\overline{\alpha} := \pi/2 - \alpha \;\text{ e }\; \overline{\beta} := \pi/2 - \beta \ .$$

Per esempio le circonferenze ϕ_i hanno raggi espressi da

$$\rho\_i \sin\overline{\alpha} \;=\; \rho_i \cos\alpha \ .$$

Riprendiamo le considerazioni sopra il piano settore Σ_β non passante per V, ove β è l'angolo acuto che esso forma con l'asse del cono e riprendiamo i tre casi che occorre distinguere.

(P) Se $\beta = \alpha$, Σ è parallelo ad una generatrice g di K e interseca una sola delle sue falde in una curva illimitata (parabola); basta limitarsi al caso che sia la falda superiore.
(E) Se $\beta > \alpha$, Σ interseca una sola delle falde di K in una curva chiusa e limitata σ (ellisse); ancora basta limitarsi al caso che sia la falda superiore.
(H) Se $\beta < \alpha$, Σ interseca entrambe le falde di K in una curva illimitata e con due rami (iperbole), ci limitiamo a considerare che Σ intersechi l'asse di K all'interno della falda superiore.

G50h.06 Anche nel caso (P) delle parabole conviene prendere in considerazione una sfera Φ tangente interna al cono e tangente della Σ, nonché la relativa circonferenza ϕ.
Oa ϕ si può considerare la figura limite delle circonferenze ϕ_1 relative al caso (E) al tendere dell'angolo β caratterizzante la t_β all'angolo α, ossia all'avvicinarsi della t_β ad essere parallela della generatrice $\boldsymbol{g}_+$ del cono.
Il centro Z della ϕ si trova come intersezione dell'asse del cono con la retta parallela e intermedia della $\boldsymbol{t}$ e della $\boldsymbol{g}_+$. Il diametro della ϕ è uguale alla distanza della $\boldsymbol{t}$ dalla $\boldsymbol{g}_+$.

G50h.07 Chiamiamo F_i il punto in cui la sfera Φ_i è tangente al piano settore Σ e denotiamo con $\boldsymbol{d}_i$ la retta $\Sigma \cap \Gamma_i$ e con D_i il punto in cui la $\boldsymbol{d}_i$ interseca il piano $\eta = 0$.

Si veda anche la terza figura in `Teorema di Dandelin (wi)` che, nella fattispecie, riguarda il caso di un'ellisse.
Ci proponiamo di mostrare che i punti F_i rappresentano i due fuochi, della sezione conica σ e che o l'unico fuoco, o della σ

Nel caso σ sia una curva chiusa consideriamo un suo punto generico P e sia P la sua proiezione ortogonale sul piano $\eta = 0$. Intendiamo dimostrare che la somma delle distanze $F_1\mathsf{P} + F_2\mathsf{P}$ è una costante e più precisamente che vale A_1A_2. Il segmento $F_1\mathsf{P}$ è tangente alla sfera Φ_1 e tale è anche il segmento PG_1 facente parte della generatrice del cono passnte per P; quindi $F_1\mathsf{P} = PG_1$.

L'analoga considerazione per la sfera Φ_2 porta all'uguaglianza $F_2\mathsf{P} = PG_2$.
Di conseguenza $F_1\mathsf{P} + F_2\mathsf{P} = G_1G_2 = Z_1Z_2 \cdot \cos\alpha$ e la curva chiusa σ è una ellisse avente i fuochi in F_1 e F_2.
Inoltre il suo asse maggiore è A_1A_2.

Dalla uguaglianza $A_1A_2 = Z_1Z_2$ si ricavano formule che collegano i parametri delle sfere e delle circonferenze di Dandelin ambientati nel piano $\eta = 0$, ai parametri dell'ellisse ambientati nel piano Σ dotato del sistema di riferimento con origine nel punto medio O dell'asse maggiore A_1A_2, con asse orizzontale coincidente con $\boldsymbol{t}$ e asse verticale passante per O e parallelo all'asse $\overrightarrow{V\eta}$.
Parametri nel piano $\eta = 0$ sono α, β, $h_i = VZ_i$, le coordinate ξ e ζ dei punti F_i, A_i, W_i, U_i, D_i e le distanze come A_iF_i, OF_i e A_iD_i, dove $i = 1, 2$.

Considerazioni analoghe valgono per il caso in cui Σ interseca entrambe le falde del cono, caso in cui la sezione conica è una iperbole.

Considerazioni simili si svolgono per il caso del piano secante parallelo ad una delle generatrici $g_\pm$.
In questo caso la sezione conica è una parabola e si dimostra che la direttrice dista dal vertice della parabola quanto questo dista dal fuoco.

G50 i. coniche come soluzioni di equazioni quadratiche

G50i.01 Le equazioni canoniche delle parabole, delle ellissi e delle iperboli sono evidentemente equazioni di secondo grado nelle due variabili reali x e y. Le equazioni delle parabole, ellissi e iperboli generiche si possono ottenere dalle equazioni canoniche attraverso cambiamenti del sistema di riferimento cartesiano, cioè sottoponendo le variabili x e y a trasformazioni lineari non necessariamente omogenee, trasformazioni che conducono ad altre equazioni di secondo grado.

Anche le coniche degeneri si possono considerare soluzioni, al limite, di equazioni polinomiali di secondo grado. Infatti l'insieme dei punti costituenti due rette generiche aventi come equazioni $a_1\,x+b_1\,y+c_1 = 0$ e $a_2\,x+b_2\,y+c_2 = 0$ è caratterizzato dall'equazione $(a_1\,x+b_1\,y+c_1)(a_2\,x+b_2\,y+c_2) = 0$.
L'insieme dei punti di una retta caratterizzata dall'equazione $a_1\,x+b_1\,y+c_1 = 0$ si può caratterizzare anche con l'equazione di secondo grado $(a_1\,x+b_1\,y+c_1)^2 = 0$ e la conica degenere costituita solo da un punto $\langle x_0, y_0\rangle$ si può caratterizzare con l'equazione $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = 0$.

Le curve caratterizzate da equazioni di secondo grado sono chiamate **curve di secondo grado** o curve del secondo ordine; le coniche sono dunque curve di secondo grado.

Si pone a questo punto la questione di quale sia l'insieme di tutte le curve di secondo grado. A questa domanda diamo risposta nella presente sezione attraverso un esame della casistica per le equazioni di secondo grado.

G50i.02 Introduciamo l'entità formale **equazione polinomiale di secondo grado**

$$(1)\qquad \begin{aligned}&\mathsf{EqnD2}(x, y; a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2}, a_{1,3}, a_{2,3}, a_{3,3}) \;:=\\ &\qquad\Big[\, a_{1,1}\,x^2 + 2\,a_{1,2}\,x\,y + a_{2,2}\,y^2 + 2\,a_{1,3}\,x + 2\,a_{2,3}\,y + a_{3,3} \;=\; 0 \,\Big]\end{aligned} ,$$

nella quale x e y sono variabili nel campo complesso $\mathbb{C}$ e i coefficienti $a_{i,j}$ denotano parametri appartenenti allo stesso $\mathbb{C}$.

Qui in particolare interessa prevalentemente interpretare le variabili x e y come coordinate reali in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e i coefficienti si considerano anch'essi reali, ma con la possibilità di assumere in qualche circostanza valore complesso.

I coefficienti dei termini di secondo grado della (1) $a_{1,1}$, $a_{2,2}$ e $a_{1,2}$ si dicono **coefficienti dominanti della equazione**.

Si presume che almeno uno dei coefficienti dominanti sia diverso da 0, ovvero che valga la disuguaglianza ${a_{1,1}}^2 + {a_{1,2}}^2 + {a_{2,2}}^2 > 0$. In effetti in caso contrario l'equazione si ridurrebbe ad una equazione di primo grado e le curve a un duetto di linee rette, ad una retta o a un punto.

Conveniamo ora di considerare la variabile x_1 come omonima della x, la x_2 omonima della y, il parametro $a_{2,1}$ omonimo di $a_{1,2}$, $a_{1,3}$ omonimo di $a_{3,1}$ e $a_{2,3}$ omonimo di $a_{3,2}$. Introduciamo anche il simbolo x_3 da assimilare a una variabile ma riservandoci la possibilità di assegnargli il valore fisso 1.

Introduciamo anche il vettore 3×1 e la matrice 3×3 simmetrica che seguono

$$(2)\qquad \mathsf{x} \;:=\; \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \quad , \quad \overline{A} \;:=\; \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{bmatrix} .$$

Queste entità consentono di dare alla (1) la seguente forma matriciale

$$(3)\qquad [\,x_1 \quad x_2 \quad x_3\,] \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \;=\; 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \mathsf{x}^{\mathsf{T}}\,\overline{A}\,\mathsf{x} = 0\ ;$$

Queste espressioni e altre relazioni matriciali loro collegate consentono espressioni concise che in taluni sviluppi risultano convenienti e significative.

G50i.03 Risulta evidente che la forma dell'equazione i02(1) schematizzata dalla versione matriciale i02(3) non cambia quando si passa a un altro sistema di riferimento ortogonale, cioè quando si passa a variabili $\overline{x}$ e $\overline{y}$ definite come funzioni lineari (non necessariamente omogenee) nella x e nella y.

Ha quindi interesse cercare dei sistemi di riferimento nei quali alcuni particolari sottoinsiemi delle curve di secondo grado siano caratterizzati da equazioni tendenzialmente semplici e significative. In effetti procedendo in questo modo si riescono a classificare tutti i tipi di curve algebriche del secondo ordine associandoli alle diverse possibili scelte delle 6 componenti della matrice $\overline{A}$.

G50i.04 Vediamo come si possono trattare le trasformazioni da un sistema di coordinate cartesiane ortogonali a un altro. Una generica transizione si può ottenere effettuando in una prima fase una traslazione e in una seconda una rotazione.

Conviene osservare esplicitamente che le riflessioni rispetto a una retta $\boldsymbol{r}$ collocata in un piano Π si possono considerare rotazioni di ampiezza angolare π intorno a tale retta collocata in uno spazio tridimensionale contenente Π.

Quando si passa dal sistema di riferimento Oxy al sistema traslato $\overline{Oxy}$ con $x = \overline{x}+t_x$, $y = \overline{y}+t_y$ e $O = \overline{O}+\langle t_x, t_y\rangle$ l'equazione i02(1) assume la forma

(1) $$a_{1,1}\,\overline{x}^2 + 2\,a_{1,2}\,\overline{x}\,\overline{y} + a_{2,2}\,\overline{y}^2 + 2\,\overline{a}_{1,3}\,\overline{x} + 2\,\overline{a}_{2,3}\,\overline{y} + \overline{a}_{3,3} \;=\; 0\ ,$$

nella quale i coefficienti di secondo grado non cambiano, mentre per i rimanenti abbiamo

(2) $$\begin{cases} \overline{a}_{1,3} \;;= a_{1,1}\,t_x + a_{1,2}\,t_y + a_{1,3} \\ \overline{a}_{2,3} \;:= a_{1,2}\,t_x + a_{2,2}\,t_y + a_{2,3} \\ \overline{a}_{3,3} \;:= a_{1,1}\,{t_x}^2 + 2\,a_{1,2}\,t_x\,t_y + a_{2,2}\,{t_y}^2 + 2\,a_{1,3}\,t_x + 2\,a_{2,3}\,t_y + a_{3,3} \end{cases} .$$

L'ultima espressione, servendosi delle prime due si può riscrivere

(3) $$\overline{a}_{3,3} \;=\; (\overline{a}_{1,3} + a_{1,3})t_x + (\overline{a}_{2,3} + a_{2,3})bt_y + a_{3,3}\ .$$

G50i.05 Vediamo ora come si trasforma l'equazione i02(1) quando si passa dal sistema destrorso Oxy al sistema destrorso Ox"y" ottenuto con una rotazione di un angolo ϕ con centro nell'origine. Il collegamento tra le coordinate dei due sistemi di riferimento è dato dal seguente sistema di relazioni:

(1) $$\begin{cases} x \;= x''\,\cos\phi - y''\,\sin\phi \\ y \;= x''\,\sin\phi + y''\,\cos\phi \end{cases} .$$

Sostituendo queste espressioni nella i02(1) si ottiene l'equazione

(2) $$a''_{1,1}\,x''^2 + 2\,a''_{1,2}\,x''\,y'' + a''_{2,2}\,y''^2 + 2\,a''_{1,3}\,x'' + 2\,a''_{2,3}\,y'' + a''_{3,3} \;=\; 0\ ,$$

dove, tenuto conto che $\sin\phi\cos\phi = \dfrac{\sin 2\phi}{2}$, $\sin^2\phi = \dfrac{1-\cos 2\phi}{2}$ e $\cos^2\phi = \dfrac{1+\cos 2\phi}{2}$, si ha

$$(3)\qquad \begin{cases} a''_{1,1} := a_{1,2}\sin 2\phi + \dfrac{a_{1,1}-a_{2,2}}{2}\cos 2\phi + \dfrac{a_{1,1}+a_{2,2}}{2} \\ a''_{1,2} := a_{1,2}\cos 2\phi - \dfrac{a_{1,1}-a_{2,2}}{2}\sin 2\phi \\ a''_{2,2} := -a_{1,2}\sin 2\phi - \dfrac{a_{1,1}-a_{2,2}}{2}\cos 2\phi + \dfrac{a_{1,1}+a_{2,2}}{2} \\ a''_{1,3} := a_{1,3}\cos\phi + a_{2,3}\sin\phi \\ a''_{2,3} := a_{2,3}\cos\phi - a_{1,3}\sin\phi \\ a''_{3,3} := a_{3,3} \end{cases} .$$

Si osservano tre conseguenze di una rotazione del sistema di riferimento:

(a) i nuovi coefficienti dei termini dominanti dipendono solo dall'angolo di rotazione ϕ e dai vecchi coefficienti dei termini dominanti;
(b) i nuovi coefficienti dei termini lineari dipendono solo dai vecchi coefficienti dei termini lineari e dall'angolo ϕ;
(c) il termine costante non cambia.

G50i.06 Le espressioni in (3) si possono riscrivere in forma più concisa servendosi dei seguenti parametri:

$$A := \sqrt{{a_{1,2}}^2 + \left(\frac{a_{1,1}-a_{2,2}}{2}\right)^2} \quad ; \quad B := \frac{a_{1,1}+a_{2,2}}{2} \quad ; \quad C := \sqrt{(a''_{1,3})^2 + (a''_{2,3})^2} \quad ;$$

l'angolo α uguale a 0 se $A = 0$ e tale che $\cos\alpha = \dfrac{a_{1,2}}{A}$ e $\sin\alpha = \dfrac{a_{1,1}-a_{1,2}}{2A}$ se $A \neq 0$;
l'angolo β uguale a 0 se $C = 0$ e tale che $\cos\beta = \dfrac{a''_{2,3}}{C}$ e $\sin\beta = \dfrac{a''_{1,3}}{C}$ se $A \neq 0$.

Alle (3) si può quindi dare la forma

$$(4)\qquad \begin{cases} a''_{1,1} = A\sin(2\phi+\alpha) + B \\ a''_{1,2} = A\cos(2\phi+\alpha) \\ a''_{2,2} = -A\sin(2\phi+\alpha) + B \\ a''_{1,3} = C\sin(\phi+\beta) \\ a''_{2,3} = C\cos(\phi+\beta) \\ a''_{3,3} = a_{3,3} \end{cases} .$$

Va segnalato che A, B, C, α e β non dipendono dall'angolo di rotazione ϕ.

G50i.07 Riprendiamo la definizione di invariante in una forma ad un buon livello di generalità e di effettività.

Essa richiede di prendere in considerazione diverse entità:

- un insieme ambiente $\mathbf{E}$ e un sistema di riferimento $\mathcal{R}$ per i suoi elementi;
- un gruppo G di permutazioni di $\mathbf{E}$, ossia di sue simmetrie, esprimibili in particolare come trasformazioni di $\mathcal{R}$ in sistemi di riferimento equivalenti $g(\mathcal{R})$ per ogni $g \in \mathbb{G}$;
- una struttura S definita su $\mathbf{E}$; la S in particolare potrebbe essere una relazione entro $\mathbf{E}$ oppure un sottoinsieme di $\mathbf{E}$; naturalmente anche S possiede diverse rappresentazioni che si possono esprimere nei diversi sistemi di riferimento;

- una sequenza di procedimenti $\langle \mathsf{P}_1, ..., \mathsf{P}_r \rangle$ che consentono di associare alla **S**, risp., i parametri P_1, ..., P_r; si suppone per ogni j che la determinazione del parametro P_j da parte della procedura $\mathcal{P}_j$ si sappia effettuare in ciascuno dei sistemi di riferimento;
- una costruzione traducibile in una funzione avente come argomenti i parametri P_1, ...,P_r fornita da un'espressione esplicita o da un algoritmo $\mathcal{I}(P_1, ..., P_r)$ per ogni riferimento $\mathcal{R}$.

La funzione esprimibile con $\mathcal{I}$ si qualifica **invariante per il gruppo G di simmetrie dell'ambiente E** sse per ogni $g \in \mathsf{G}$ passando dal sistema $\mathcal{R}$ al sistema $\overline{\mathcal{R}} := g(\mathcal{R})$ e di conseguenza dai parametri P_j ai parametri $\overline{P}_j := g(P_j)$ accade che

(1) $$\mathcal{I}(P_1, ..., P_r) \;=\; \mathcal{I}(\overline{P}_1, ..., \overline{P}_r) \;.$$

G50i.08 Consideriamo le seguenti funzioni dei coefficienti dell'equazione delle curve di secondo grado $\boldsymbol{E} := \mathsf{EqnD2}(x, y; a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2}, a_{1,3}, a_{2,3}, a_{3,3})$ che denotiamo con

(1) $$\mathsf{Iqe}_1(\boldsymbol{E}) \;:=\; a_{1,1} + a_{2,2} \quad , \quad \mathsf{Iqe}_2(\boldsymbol{E}) \;:=\; \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \quad , \quad \mathsf{Iqe}_3(\boldsymbol{E}) \;:=\; \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \;.$$

Ciascuna di queste funzioni dipende solo da una parte dei coefficienti della $\boldsymbol{E}$, ma complessivamente conviene attribuirle alla forma $\mathcal{I}_x(a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{3,3})$.

Vogliamo ora occuparci di invarianti per il gruppo dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^{\times 3}$ da rappresentare nei sistemi di riferimento cartesiani ortogonali.

Questo problema ricade sotto lo schema delineato in i07: il ruolo della struttura, o meglio della relazione **S** è svolto dall'equazione quadratica generale, i parametri P_j sono i coefficienti $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{1,2}$, $a_{1,3}$, $a_{2,3}$ e $a_{3,3}$, le procedure P_j sono le semplici estrazioni dei coefficienti dall'equazione.

A questo punto occorre procedere nell'analisi delle espressioni dei tre invarianti.

G50i.09 **(1) Teorema** Le funzioni Iqe_1, Iqe_2 e Iqe_3 sono invarianti per il gruppo dei movimenti rigidi di $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Dim.: Le proprietà di invarianza si dimostrano considerando separatamente le traslazioni e le rotazioni Per gli effetti delle traslazioni, abbiamo osservato che i coefficienti dei termini di secondo grado non cambiano e quindi sono invarianti Iqe_1 e Iqe_2.
Si considera poi l'espressione $\overline{\mathcal{I}}$ di $\mathcal{I}_3$ per il sistema di riferimento ottenuto applicando all'originale Oxy la traslazione $\boldsymbol{Trsl}_{t_x,t_y}$:

$$\overline{\mathcal{I}}_3 \;:=\; \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a''_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \overline{a}_{2,3} \\ \overline{a}_{1,3} & \overline{a}_{2,3} & \overline{a}_{3,3} \end{vmatrix} \;.$$

Sottraiamo dalla terza riga della matrice la prima riga moltiplicata per t_x e la seconda moltiplicata per t_y tenendo conto di i04(2):

$$\overline{\mathcal{I}}_3 \;:=\; \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \overline{a}_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \overline{a}_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{1,3}\, t_x + a_{2,3}\, t_y + a_{3,3} \end{vmatrix} \;.$$

Se alla terza colonna di questo determinante si sottrae la prima colonna moltiplicata per t_x e la seconda moltiplicata per t_y lo si trova coincidente con $\mathcal{I}_3(a_{1,1}, ..., a_{3,3})$.
Questo stabilisce l'invarianza di $\mathcal{I}_3$ per le traslazioni.

G50i.10 Procediamo a esaminare gli effetti su Iqe_1, Iqe_2 e Iqe_3 della rotazione i05(1).

Grazie alle $\mathsf{i06}(4)$ abbiamo

$$I''_1 \;:=\; \mathsf{lqe}_1(a''_{1,1},...,a''_{3,3}) \;=\; a''_{1,1}+a''_{2,2} \;=\; 2\,B \;=\; a_{1,1}+a_{2,2}=\mathsf{lqe}_1$$

$$I''_2 \;:=\; a''_{1,1}\,a''_{2,2}-{a''_{1,2}}^2 \;=\; B^2-A^2 \;=\; a_{1,1}a_{2,2}-{a_{1,2}}^2 \;=\; \mathsf{lqe}_2\;.$$

Queste dimostrano l'invarianza di lqe_1 e lqe_2.

Per la funzione lqe_3 va calcolato il determinante

$$I''_3 \;:=\; \begin{vmatrix} a''_{1,1} & a''_{1,2} & a''_{1,3} \\ a''_{1,2} & a''_{2,2} & a''_{2,3} \\ a''_{1,3} & a''_{2,3} & a''_{3,3} \end{vmatrix}\;.$$

Sviluppiamo tale determinante assumendo come fattori gli elementi dell'ultima colonna tenendo conto che $I''_2=\mathsf{lqe}_2$ e $a''_{3,3}=a_{3,3}$ e otteniamo

$$I''_3 \;=\; a''_{1,3}\begin{vmatrix} a''_{1,2} & a''_{2,2} \\ a''_{1,3} & a''_{2,3}\end{vmatrix} + a''_{2,3}\begin{vmatrix} a''_{1,1} & a''_{1,2} \\ a''_{1,3} & a''_{2,3}\end{vmatrix} + a_{3,3}\,\mathsf{lqe}_2\;.$$

Sempre grazie alle $\mathsf{i06}(4)$ si ottiene

$$a''_{1,3}\begin{vmatrix} a''_{1,2} & a''_{2,2} \\ a''_{1,3} & a''_{2,3}\end{vmatrix} \;=\; C\,\sin(\phi+\beta)\begin{vmatrix} A\cos(2\phi+\alpha) & -A\,\sin(2\phi+\alpha)+B \\ C\,\sin(\phi+\beta) & C\,\cos(\phi+\beta)\end{vmatrix}$$
$$= C^2\,\sin(\phi+\beta)\,[A\,\cos(\phi+\alpha-\beta)-B\,\sin(\phi+\beta)]\;\;;$$

analogamente troviamo

$$a''_{2,3}\begin{vmatrix} a''_{1,1} & a''_{1,2} \\ a''_{1,3} & a''_{2,3}\end{vmatrix} \;=\; C^2\,\cos(\phi+\beta)\;[A\,\sin(\phi+\alpha-\beta)+B\,\cos(\phi+\beta)]\;\;.$$

Raccogliendo gli ultimi risultati abbiamo

$$I''_3 \;=\; A\,C^2\,\sin(2\beta-\alpha)-B\,C^2+a_{3,3}\,\mathsf{lqe}_2\;.$$

Si osserva che A, B, C, α, β e lqe_2 non dipendono dall'angolo ϕ; di conseguenza I''_3 non dipende dall'angolo della rotazione $\mathsf{i05}(1)$ della quale si stanno esaminando gli effetti. Se consideriamo $\phi=0$ per ogni i e j abbiamo $a''_{i,j}=a_{i,j}$ e quindi $I''_3=\mathsf{lqe}_3$.
Questo conclude la dimostrazione ▮

G50i.11 Ci proponiamo ora di dimostrare che le caratteristiche geometriche delle curve del secondo ordine sono completamente determinate dai valori dei tre invarianti.

A questo punto è opportuno osservare che i coefficienti delle equazioni delle curve del secondo ordine sono definiti a meno di un fattore moltiplicativo diverso da 0: infatti moltiplicando tutti i coefficienti $a_{i,j}$ della $\mathsf{i08}(1)$ per un $k\neq 0$ si ottiene una equazione del tutto equivalente. In particolare questi coefficienti si possono cambiare di segno.

Come conseguenza della moltiplicazione per k dei coefficienti della $\mathsf{i02}(1)$ risultano moltiplicati per k anche i coefficienti delle equazioni $\mathsf{i04}(1)$ e $\mathsf{I05}(2)$, mentre per quanto riguarda le quantità derivate in $\mathsf{i06}$ B ed lqe_1 sono moltiplicati per k, A e C per $|k|$, lqe_2 per k^2 e lqe_3 per k^3.

Cominciamo con l'introduzione dei tre seguenti tipi di curve caratterizzati dal segno di lqe_2, segno che non cambia quando si moltiplicano per k i coefficienti $a_{i,j}$:

- curve di tipo ellittico sse $\mathsf{lqe}_2<0$, cioè sse $a_{1,1}\,a_{2,2}<{a_{1,2}}^2$;
- curve di tipo parabolico sse $\mathsf{lqe}_2=0$, cioè sse $a_{1,1}\,a_{2,2}={a_{1,2}}^2$;
- curve di tipo iperbolico sse $\mathsf{lqe}_2>0$, cioè sse $a_{1,1}\,a_{2,2}>{a_{1,2}}^2$.

Questi tipi non cambiano con un cambiamento di sistema di riferimento cartesiano ortogonale e per ciascuno di essi otterremo una completa classificazione delle curve.

G50i.12 Abbiamo visto che una traslazione modifica solo i coefficienti dei termini lineari dell'equazione delle curve del secondo ordine. Cerchiamo quindi una traslazione che porti a una equazione nella quale i coefficienti lineari siano nulli, equazione più semplice in quanto priva dei termini del primo ordine e auspicabilmente dal significato più trasparente.

Questa richiesta conduce a ricercare una particolare coppia di valori $\langle x_C, y_C \rangle$ per la coppia dei parametri della traslazione $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$, cioè per le coordinate della nuova origine $\overline{O}$; questi valori particolari, a causa di :10.d(2), soddisfino il sistema di equazioni lineari

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{1,1}\, x_C + a_{1,2}\, y_C \;=\; -\, a_{1,3} \\ a_{2,1}\, x_C + a_{2,2}\, y_C \;=\; -\, a_{2,3} \end{cases} .$$

Queste sono chiamate **equazioni del centro di una curva del secondo ordine**. Esse portano a una ben determinata soluzione sse è diverso da zero il relativo determinante, cioè sse $\mathsf{lqe}_2 \neq 0$, cioè sse si tratta di una curva di tipo ellittico o iperbolico.

Per queste curve il punto $C = \overline{O} = \langle x_C, y_C \rangle$ viene chiamato **centro della curva** e le curve di tipo ellittico o iperbolico sono dette **curve di secondo grado dotate di centro**.

Nel sistema di riferimento $C\overline{xy}$ l'equazione assume la forma

$$(2) \qquad a_{1,1}\, \overline{x}^2 + 2\, a_{1,2}\, \overline{x}\, \overline{y} + a_{2,2}\, \overline{y}^2 + \overline{a}_{3,3} \;=\; 0 \,.$$

Questa equazione è invariante rispetto alla simmetria centrale di centro C, cioè rispetto alla trasformazione $\overline{x} \to -\overline{x}$, $\overline{y} \to -\overline{y}$; quindi le curve dotate di centro sono trasformate in se stesse da questa trasformazione, ovvero se $P = \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ appartiene alla curva, anche $\langle -\overline{x}, -\overline{y} \rangle$ le appartiene.

Nel sistema di riferimento $C\overline{xy}$ il terzo invariante assume la forma

$$(3) \qquad \mathsf{lqe}_3 \;=\; \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{a}_{3,3} \end{vmatrix} \;=\; \mathsf{lqe}_2\, \overline{a}_{3,3} \,.$$

Quindi l'equazione della curva si può porre sotto la forma

$$(4) \qquad a_{1,1}\, \overline{x}^2 + 2\, a_{1,2}\, \overline{x}\, \overline{y} + a_{2,2}\, \overline{y}^2 + \frac{\mathsf{lqe}_3}{\mathsf{lqe}_2} \;=\; 0 \,.$$

G50i.13 Un'altra semplificazione dell'equazione delle curve del secondo ordine che è applicabile in ogni caso, consiste in una cosiddetta **rotazione standard intorno all'origine corrente** di un particolare angolo ϕ che permette di eliminare dalla i12(2)il termine $2\, a''_{1,2}\, x''\, y''$, supposto che sia $a''_{1,2} \neq 0$. Chiaramente si tratta di scegliere per l'angolo di rotazione il valore ϕ_s tale che la seconda espressione della i12(3) dia

$$(1) \qquad a_{1,2} \cos 2\phi_s - \frac{a_{1,1} - a_{2,2}}{2} \sin 2\phi_s \;=\; 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \cot 2\phi_s \;=\; \frac{a_{1,1} - a_{2,2}}{2\, a_{1,2}} \,.$$

Con tale scelta l'equazione i12(2) assume la forma

$$(2) \qquad a''_{1,1}\, x''^2 + a''_{2,2}\, y''^2 + 2\, a''_{1,3}\, x'' + 2\, a''_{2,3}\, y'' + a_{3,3} \;=\; 0 \,.$$

Per le curve del secondo ordine dotate di centro, effettuando una traslazione che porti l'origine nel centro C e quindi una rotazione standard, se resa necessaria da un valore $\overline{a}_{1,2} \neq 0$, si ottiene un sistema di

riferimento che denotiamo con CXY, nel quale le ascisse e le ordinate variabili sono denotate, risp., con X e Y.
In tale riferimento si giunge all'equazione

(3) $$a''_{1,1}\,X^2 + a''_{2,2}\,Y^2 + \frac{\mathsf{Iqe}_3}{\mathsf{Iqe}_2} \;=\; 0\;,$$

nella quale i coefficienti $a''_{i,i}$ sono ottenibili dagli $a_{i,j}$ di partenza servendosi delle espressioni in :10.e, con $\phi = \phi_s$.
A partire da questa equazione siamo in grado di giungere a una classificazione esauriente delle curve del secondo ordine dotate di centro.

G50i.14 Consideriamo le curve di tipo ellittico; per esse $\mathsf{Iqe}_2 = a''_{1,1}\,a''_{2,2} > 0$, ovvero $a''_{1,1}$ ed $a''_{2,2}$ hanno lo stesso segno di Iqe_1; per la possibilità di moltiplicare i coefficienti per il fattore -1 possiamo limitarci a esaminare il caso in cui sono positivi, oltre a Iqe_1 e Iqe_2, anche $a''_{1,1}$ e $a''_{2,2}$.

In corrispondenza dei possibili segni di Iqe_3 si distinguono tre tipi di curve ellittiche relativi a tre forme che può assumere l'equazione i12(3)

(1) $$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{-\mathsf{Iqe}_3}{\mathsf{Iqe}_2\;a''_{1,1}}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{-\mathsf{Iqe}_3}{\mathsf{Iqe}_2\;a''_{2,2}}}\right)^2} \;=\; 1 \quad \text{per} \quad \mathsf{Iqe}_3 < 0\;,$$

(2) $$\frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{a''_{1,1}}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{a''_{2,2}}}\right)^2} \;=\; 1 \quad \text{per} \quad \mathsf{Iqe}_3 = 0\;,$$

(3) $$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{\mathsf{Iqe}_3}{\mathsf{Iqe}_2\;a''_{1,1}}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{\mathsf{Iqe}_3}{\mathsf{Iqe}_2\;a''_{2,2}}}\right)^2} \;=\; -1 \quad \text{per} \quad \mathsf{Iqe}_3 > 0\;.$$

L'equazione (1) è l'equazione canonica dell'ellisse avente come semiassi $\sqrt{\frac{-\mathsf{Iqe}_3}{\mathsf{Iqe}_2 a''_{1,1}}}$ e $\sqrt{\frac{-\mathsf{Iqe}_3}{\mathsf{Iqe}_2 a''_{2,2}}}$; se in particolare $a''_{1,1} = a''_{2,2}$ si ha una circonferenza.

L'equazione (2) è l'equazione del solo punto $C = \langle 0, 0\rangle$, da considerare come **ellisse degenere**.

L'equazione (3) non è soddisfatta da alcun punto del piano reale; essa si può però interpretare, nell'ambito della geometria sul campo complesso, come insieme di punti del piano $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ costituenti una cosiddetta **ellissi immaginaria**.

G50i.15 Consideriamo le curve di tipo iperbolico; per esse $\mathsf{Iqe}_2 = a''_{1,1}a''_{2,2} < 0$, ovvero $a''_{1,1}$ ed $a''_{2,2}$ hanno segni opposti per la possibilità di moltiplicare i coefficienti per il fattore -1 possiamo assumere che sia $a''_{1,1} > 0$ e $a''_{2,2} < 0$ (il caso opposto potendosi trattare del tutto similmente).
In corrispondenza dei possibili segni di Iqe_3 si distinguono tre tipi di curve iperboliche relativi a tre forme che può assumere l'equazione i13(3)

(1) $$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{\mathsf{Iqe}_3}{\mathsf{Iqe}_2\;a''_{1,1}}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{\mathsf{Iqe}_3}{\mathsf{Iqe}_2(-a''_{2,2})}}\right)^2} \;=\; -1 \quad \text{per} \quad \mathsf{Iqe}_3 < 0\;,$$

(2) $$\frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{a''_{1,1}}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{-a''_{2,2}}}\right)^2} \;=\; 0 \quad \text{per} \quad \mathsf{lqe}_3 = 0 \;,$$

(3) $$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{-\mathsf{lqe}_3}{\mathsf{lqe}_2\; a''_{1,1}}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{-\mathsf{lqe}_3}{\mathsf{lqe}_2(-a''_{2,2})}}\right)^2} \;=\; 1 \quad \text{per} \quad \mathsf{lqe}_3 > 0 \;,$$

L'equazione (1) è l'equazione canonica di un'iperbole avente l'asse CY come asse trasverso e l'asse CX come asse coniugato con il semiasse trasverso dato da $\sqrt{\dfrac{\mathsf{lqe}_3}{\mathsf{lqe}_2\; a''_{1,1}}}$ ed il semiasse coniugato da $\sqrt{\dfrac{\mathsf{lqe}_3}{\mathsf{lqe}_2(-a''_{2,2})}}$. Se in particolare $a''_{2,2} = -a''_{1,1}$, l'equazione rappresenta una iperbole rettangolare.

L'equazione (2) si può porre sotto la forma

$$\left(\frac{X}{\frac{1}{\sqrt{a''_{1,1}}}} + \frac{Y}{\frac{1}{\sqrt{-a''_{2,2}}}}\right)\left(\frac{X}{\frac{1}{\sqrt{a''_{1,1}}}} - \frac{Y}{\frac{1}{\sqrt{-a''_{2,2}}}}\right) \;=\; 0 \;;$$

Questa è l'equazione che caratterizza l'insieme delle due rette date dalle equazioni

$$\frac{X}{\frac{1}{\sqrt{a''_{1,1}}}} + \frac{Y}{\frac{1}{\sqrt{-a''_{2,2}}}} \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{X}{\frac{1}{\sqrt{a''_{1,1}}}} - \frac{Y}{\frac{1}{\sqrt{-a''_{2,2}}}} \;=\; 0 \;;$$

L'equazione (3) è invece l'equazione canonica di un'iperbole avente l'asse CX come asse trasverso e l'asse CY come asse coniugato con il semiasse trasverso dato da $\sqrt{\dfrac{-\mathsf{lqe}_3}{\mathsf{lqe}_2(-a''_{2,2})}}$ ed il semiasse coniugato da $\sqrt{\dfrac{-\mathsf{lqe}_3}{\mathsf{lqe}_2\; a''_{1,1}}}$. Ancora se $a''_{2,2} = -a''_{1,1}$ si ha una iperbole rettangolare.

G50i.16 Procediamo ora alla semplificazione dell'equazione per le curve di tipo parabolico e alla loro classificazione.

Osserviamo preliminarmente che per queste equazioni l'invariante lqe_1 è diverso da 0; infatti se fosse $\mathsf{lqe}_1 = a_{1,1}+a_{2,2} = 0$ si avrebbe $a_{1,1}a_{2,2} \;=\; -\dfrac{{a_{1,1}}^2}{2} - \dfrac{{a_{2,2}}^2}{2}$ e quindi, dato che $\mathsf{lqe}_2 = a_{1,1}\, a_{2,2} - {a_{1,2}}^2 = 0$, sarebbe ${a_{1,2}}^2 = -\dfrac{{a_{1,1}}^2}{2} - \dfrac{{a_{2,2}}^2}{2}$, uguaglianza che implica $a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = 0$, uguaglianze che fanno uscire dall'ambito delle curve del secondo ordine.

Alla equazione :10.b(1) si può applicare la rotazione standard, effettiva solo se $a_{1,2} \neq 0$, ottenendo l'equazione :10.i(2)

(1) $$a''_{1,1}\, {x''}^2 + a''_{2,2}\, {y''}^2 + 2\, a''_{1,3}\, x'' + 2\, a''_{2,3}\, y'' + a_{3,3} \;=\; 0 \;.$$

Dato che deve essere $\mathsf{lqe}_2 \;=\; a''_{1,1}\, a''_{2,2} = 0$ con $\mathsf{lqe}_1 \;=\; a''1,1 + a''_{2,2} \neq 0$, si deduce che dei due coefficienti $a''_{1,1}$ e $a''_{2,2}$ uno è nullo e l'altro diverso da 0.

Supponiamo che sia $a''1,1 = 0$ e $a''_{2,2} \neq 0$ (il caso opposto potendosi trattare in modo del tutto analogo). Avendosi $\mathsf{lqe}_1 = a''_{2,2}$, l'equazione delle curve in esame si può scrivere nella forma

(2) $$\mathsf{lqe}_1\, {y''}^2 + 2\, a''_{1,3}\, x'' + 2\, a''_{2,2}\, y'' + a_{3,3} \;=\; 0 \;.$$

Una ulteriore semplificazione si ottiene con la traslazione

$$\begin{cases} X &= x'' \\ Y &= y'' + \dfrac{a''_{3,3}}{\mathsf{lqe}_1} \end{cases}$$

e con l'introduzione dei due parametri

$$\alpha_{1,3} \ := \ a''_{1,3} \quad , \quad \alpha_{3,3} \ := \ \frac{{a''_{2,3}}^2}{\mathsf{lqe}_2} \ .$$

Si ottiene quindi l'equazione

(3) $$\mathsf{lqe}_1\, Y^2 + 2\,\alpha_{1,3}\, X + \alpha_{3,3} \ = \ 0 \ .$$

G50i.17 Per classificare le curve di tipo parabolico occorre esplicitare il terzo invariante nel modo seguente:

$$\mathsf{lqe}_3 \ = \ \begin{vmatrix} \alpha_{3,3} & \alpha_{1,3} & 0 \\ \alpha_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{lqe}_1 \end{vmatrix} \ = \ -\mathsf{lqe}_1\, {\alpha_{1,3}}^2 \ .$$

Dato che $\mathsf{lqe}_1 = 0$, si danno due situazioni: se $\mathsf{lqe}_3 \neq 0$, allora $\alpha_{1,3} \neq 0$; se $\mathsf{lqe}_3 = 0$, allora $\alpha_{1,3} = 0$. Vanno quindi considerate due equazioni:

(1) $$\mathsf{lqe}_1\, Y^2 + 2\,\alpha_{1,3} \left(X + \frac{\alpha_{3,3}}{2\,\alpha_{1,3}} \right) \ = \ 0 \qquad \text{se} \qquad \mathsf{lqe}_3 \neq 0 \quad \text{ovvero} \quad \alpha_{1,3} \neq 0 \ ;$$

(2) $$\mathsf{lqe}_1\, Y^2 + \alpha_{3,3} \ = \ 0 \qquad \text{se} \qquad \mathsf{lqe}_3 = 0 \quad \text{ovvero} \quad \alpha_{1,3} = 0 \ .$$

L'equazione (1), applicando la traslazione $X' = X + \dfrac{\alpha_{3,3}}{2\,\alpha_{1,3}}$ e introducendo il parametro $p \ := \ \left|\dfrac{\alpha_{1,3}}{\mathsf{lqe}_1}\right|$ porta a una delle equazioni

$$Y'^2 = 2\,p\,X \qquad \text{oppure} \qquad Y'^2 = -2\,p\,X \ ,$$

cioè a equazioni canoniche di parabole [b03].

L'equazione (2) si può riscrivere nella forma

$$Y^2 = -\frac{\alpha_{3,3}}{\mathsf{lqe}_1} \ .$$

Nel caso sia $-\dfrac{\alpha_{3,3}}{\mathsf{lqe}_1} > 0$ essa caratterizza le due rette parallele $Y = \sqrt{-\dfrac{\alpha_{3,3}}{\mathsf{lqe}_1}}$ e $Y = -\sqrt{-\dfrac{\alpha_{3,3}}{\mathsf{lqe}_1}}$.
Nel caso sia $-\dfrac{\alpha_{3,3}}{\mathsf{lqe}_1} < 0$ l'equazione non è soddisfatta da alcun punto del piano reale e si dice che descrive le due rette parallele immaginarie $Y = \mathrm{i}\sqrt{\dfrac{-\alpha_{3,3}}{-\mathsf{lqe}_1}}$ e $Y = -\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{-\alpha_{3,3}}{-\mathsf{lqe}_1}}$.

G50i.18 Una curva del secondo ordine si dice **curva del secondo ordine riducibile** sse viene caratterizzata da un'equazione che presenta il prodotto di due polinomi di primo grado uguagliato a 0.
Evidentemente questa proprietà è invariante rispetto al passaggio da un sistema di riferimento cartesiano ad un altro dello stesso genere, trasformazione che porta un polinomio di primo grado in un altro polinomio dello stesso grado.

(1) Prop.: Una curva del secondo ordine è riducibile sse per il suo terzo invariante si ha $\mathsf{lqe}_3 = 0$.

Dim.: La proprietà si deduce dalle equazioni :10.j(1-3), :10.k(1-3) e :10.l(1-2) ▮

G50 j. tangenti e diametri delle coniche

G50j.01 Ricordiamo che si definisce **tangente di una curva** $\mathcal{C}$ in un suo punto P la posizione limite (se esiste) della retta secante di $\mathcal{C}$ in P e in un secondo punto Q al tendere di Q a P.
Per questa retta, se esiste, adottiamo la notazione $\mathsf{tanlin}(\mathcal{C}, P)$.

Consideriamo una curva piana $\mathcal{C}$ data dalla funzione $y = f(x)$ e un suo punto $P = \langle x_P, y_P \rangle$; assumiamo che la $f(x)$ sia derivabile rispetto a x in un intorno di x_P. L'equazione della tangente alla $\mathcal{C}$ in P per il cui punto variabile usiamo la notazione $P = \langle X, Y \rangle$ è

(1) $$\mathsf{tanlin}\left(\left[y = f(x) \right], P \right) \;=\; \left[Y - y_P = f'(x_P)(X - x_P) \right] \;.$$

Similmente per una curva piana individuata dalla funzione $x = \phi(y)$ l'equazione della tangente in P, in breve è espressa da

(2) $$X - x_P = \phi'(x_P)(Y - y_P).$$

G50j.02 Consideriamo ora la parabola avente come asse la Ox espressa dalla equazione

(1) $$x \;=\; \frac{y^2}{2p} \;.$$

Secondo la j01(1) la tangente in P è data dall'equazione

(2) $$X - x_P \;=\; \frac{y_P}{p}(Y - y_P) \qquad \text{ovvero} \qquad Y\,y_P - {y_P}^2 + p\,x_P - p\,X \;=\; 0 \;.$$

Dato che $\langle x_P, y_P \rangle$ giace sulla parabola si ha ${y_P}^2 \;=\; 2\,p\,x_P$ e quindi all'equazione della tangente si può dare la forma

(3) $$Y\,y_P - p\,(X + x_P) \;=\; 0 \;.$$

G50j.03 Consideriamo il caso dell'ellisse canonica $E := \mathsf{EllpsK}[a, b]$ e la sua equazione

(1) $$y \;=\; b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \;.$$

Per i punti $\langle X, Y \rangle$ della tangente in un qualsiasi punto di E $P = \langle x_P, y_P \rangle$ con $y_p \neq 0$ si ha

(2) $$\frac{X\,x_P}{a^2} + \frac{Y\,y_P}{b^2} \;=\; 1 \;.$$

Per ogni punto $\langle x, y \rangle \in E$ che si trova in prossimità di $P = \langle x_P, y_P \rangle$ con $x_P \neq 0$ vale l'uguaglianza

$$x \;=\; a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \;.$$

Da questa con passaggi simili ai precedenti si trova la stessa equazione (2). Questa equazione deve quindi valere per ogni punto $P = \langle x_P, y_P \rangle$ dell'ellisse, in quanto non possono mai essere contemporaneamente nulli x_P e y_P.

G50j.04 Similmente a sopra per i punti $\langle X, Y \rangle$ della tangente all'iperbole in $P = \langle x_P, y_P \rangle$ si trova l'equazione

(1) $$\frac{X\,x_P}{a^2} - \frac{Y\,y_P}{b^2} \;=\; 1 \;.$$

G50j.05 Dimostriamo che ogni tangente a una conica non ha in comune con la curva alcun punto diverso da quello di tangenza.

Vediamo come si trova la tangente a una conica che sia parallela a una retta data.
. . . .

G50j.06 Per **diametro di una conica dotata di centro**, cioè di un'ellisse o di una iperbole, si intende una retta passante per il centro di tale curva.
Si osserva che questa definizione per le ellissi particolari che sono le circonferenze questa definizione è in accordo con la definizione elementare di diametro.

Si definisce invece **diametro di una parabola** ogni retta parallela al suo asse. Anche queste rette possono considerarsi rette passanti per un punto privilegiato della conica, il suo punto all'infinito.

Si osserva che ogni asse di simmetria di una conica si può annoverare tra i suoi diametri.

Consideriamo una conica C che non sia degenere, cioè che non sia ridotta a una coppia di rette. Una qualsiasi retta $\mathcal{R}$ interseca la C in al più due punti: infatti queste intersezioni si ottengono da un sistema costituito da un'equazione quadratica e da un'equazione lineare e quindi dipendono dalle soluzioni reali di un'equazione di secondo grado.

Se una qalsiasi retta $\mathcal{R}$ interseca la C in due punti distinti P_1 e P_2, il segmento P_1P_2 si dice **corda della conica** C.

Interessano particolarmente le famiglie di corde di una conica individuate dalle rette appartenenti a fasci di rette parallele. Ciascuno di tali insiemi di segmenti è indicizzabile con un parametro reale e verrà detto **famiglia [monodimensionale] di corde parallele**.

Per ogni conica vi sono famiglie di corde parallele molto evidenti, gli insiemi dei segmenti individuati dalle rette ortogonali a un asse di simmetria.

Per ciascuna di queste corde parallele è evidente che i corrispondenti punti medi appartengono a un asse di simmetria della conica e quindi a un diametro della conica.
Questa proprietà si può generalizzare.

G50j.07 **(1) Prop.**: Per una qualsiasi conica C l'insieme dei punti medi delle corde di una sua famiglia di corde parallele appartiene ad un diametro di tale C.

Dim.: Un fascio di linee parallele nonorientate come un asse di simmetria, nel caso dell'ellissi e dell'iperbole si può controllare con la famiglia di equazioni

$$(1) \qquad y = k\,x + b \qquad \text{per un dato } k \neq 0 \quad \text{e} \quad \text{per } b \text{ variabile in } \mathbb{R}\ .$$

Le equazioni canoniche per ellissi e iperbole possono essere espresse nella seguente formula

$$(2) \qquad \alpha\,x^2 + \beta\,y^2 - 1 = 0\ .$$

Le estremità delle corde $P_i = \langle x_i, y_i \rangle$ per $i = 1, 2$ devono soddisfare contemporaneamente (1) e (2). Sostituendo nella (2) y data dalla (1) si ottiene

$$(3) \qquad (\alpha + \beta\,k^2)\,x^2 + 2\,\beta\,k\,b\,x + \beta\,b^2 - 1 = 0\ .$$

Per le proprietà delle soluzioni dell'equazione di secondo grado, per le ascisse delle estremità deve essere

$$x_1 + x_2 = -\frac{2\,\beta\,k\,b}{\alpha + \beta\,k^2}\ ;$$

quindi per l'ascissa del punto medio $M = \langle x_M, y_M \rangle$ si ha

$$(4) \qquad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\beta\, k\, b}{\alpha + \beta\, k^2} .$$

Per l'ordinata

$$(5) \qquad y_M = k\, x_M + b = -\frac{\beta\, k^2\, b}{\alpha + \beta\, k^2} + b = \frac{\alpha\, b}{\alpha + \beta\, k^2} = -\frac{\alpha}{\beta\, k}\, x_M .$$

In conclusione i punti medi giacciono su una retta passante per l'origine, cioè per il centro dell'ellisse o dell'iperbole. Tale retta ha inclinazione

$$k' = \frac{\alpha}{\beta\, k} .$$

Il diametro $y = k'\, x$ viene chiamato **diametro coniugato del dato diametro** del diametro $y = k\, x$ che è parallelo alle corde considerate. Per una evidente simmetria per lo scambio tra k e k' il coniugato del diametro $y = k'\, x$ è il diametro $y = k\, x$. La coniugazione tra diametri è dunque un'involuzione ▮

G50j.08 Prendiamo in esame il caso della parabola $x = \dfrac{y^2}{2\, p}$.
Le coordinate delle estremità delle corde aventi inclinazione k (che possiamo supporre $\neq 0$) si ottengono dal sistema delle equazioni

$$(6) \qquad y^2 - 2\, p\, x = 0 \quad \wedge \quad y = k\, x + b .$$

Eliminando la x si ha l'equazione per le ordinate delle estremità

$$(7) \qquad y^2 - \frac{2\, p\, y}{k} + \frac{2\, p\, b}{k} = 0 .$$

Da qui segue l'uguaglianza $y_1 + y_2 = \dfrac{2p}{k}$ e quindi la relazione

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{k} .$$

Dunque i punti medi delle corde considerate giacciono sopra una retta orizzontale, parallela all'asse Ox della parabola ▮

G50j.09 **(1) Prop.**: Consideriamo un diametro di una conica C che intersechi questa curva in due punti; le due tangenti alla C in questi punti intersezioni sono parallele al diametro coniugato.

Dim.: Osserviamo che l'enunciato riguarda solo le coniche a centro e che risulta evidente per i diametri ortogonali agli assi focali della conica stessa.

Sia $P_i = \langle x_i, y_i \rangle$ un punto di intersezione del diametro $y = k\, x$ con la conica che consideriamo individuata dall'equazione $\alpha\, x^2 + \beta\, y^2 = 1$. La tangente nel punto P_i è espressa dalla equazione

$$(2) \qquad \alpha\, x\, x_i + \beta\, y\, y_i - 1 = 0 .$$

L'inclinazione di tale retta è $k' = -\dfrac{\alpha\, x_i}{\beta\, y_i}$, mentre P_i, appartenendo al diametro $y = kx$, deve avere $y_i = k\, x_i$.
Di conseguenza $k' = -\dfrac{\alpha}{\beta\, k}$ ▮

Si osserva che anche questo enunciato per le circonferenze equivale al teorema di geometria elementare secondo il quale i punti medi delle corde di un insieme di corde parallele giacciono sul diametro ortogonale alle corde stesse.

G50 k. altri risultati sulle coniche

G50k.01 In `geometria proiettiva (wi)` [G17] le sezioni coniche sono considerate curve nel piano proiettivo equivalenti, cioè come curve che possono essere trasformate l'una nell'altra mediante una `trasformazione proiettiva (wi)`.

G50k.02 In `geometria descrittiva (wi)` una parabola può essere definita anche come luogo geometrico dei centri delle ellissi (e in particolare di una circonferenza) tangenti una retta r e a un'ellisse Θ assegnate. La retta r viene detta direttrice e la retta `polare (wi)` del `punto improprio (wi)` corrispondente alla direzione di r viene detta asse della parabola.

Nel caso in cui uno degli assi di simmetria di Θ è perpendicolare ad r, si ha una parabola con lo stesso asse di simmetria.

G50k.03 Segnaliamo che il perimetro di un'ellisse caratterizzata dal semiasse maggiore a e dall'eccentricità e è data da un'espressione della forma $P_{a,e} = 4aE(e)$ nella quale compare la funzione di variabile reale E chiamata `integrale ellittico (wi)` completo di seconda specie.

Per questa espressione si trova il seguente sviluppo in serie:

$$P_{a,e} \;=\; 2\,\pi\,a\,\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{e^4}{3}-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{e^6}{5}-\ldots\right]\;.$$

Una buona approssimazione è quella dovuta al grande matematico indiano Srinivasa Ramanujan:

$$P_{a,e} \;\approx\; \pi\left[3(a+b)-\sqrt{(3\,a+b)(a+3\,b)}\right]\;,$$

la quale può anche essere scritta come:

$$P_{a,e} \;\approx\; \pi\,a\,\left[3(1+\sqrt{1-e^2})-\sqrt{(3+\sqrt{1-e^2})(1+3\sqrt{1-e^2})}\right]\;.$$

Più in generale, la lunghezza dell'arco di una porzione di ellisse, come funzione dell'angolo sotteso, è data da un cosiddetto `integrale ellittico (wi)` incompleto.

Anche la `funzione inversa (wi)`, cioè la funzione che fornisce l'angolo sotteso a partire dalla lunghezza dell'arco, è data da una `funzione ellittica (wi)`.

G50 I. coniche: applicazioni

G50I.01 In epoca ellenistica la conoscenza delle coniche permise la costruzioni di specchi parabolici che furono applicati in attività belliche [`Specchi ustori (wi)`] e nella costruzioni di fari di grande portata [`Faro di Alessandria (wi)`].

Le sezioni coniche sono importanti nella meccanica celeste e nell'astronomia. Le orbite di due corpi celesti (aventi masse elevate) che interagiscono secondo secondo la `legge di gravitazione universale (wi)` sono sezioni coniche rispetto al loro comune `centro di massa (wi)` considerato a riposo.

Se tra di essi si esercita una attrazione sufficiente, entrambi percorrono un'ellisse; in particolare secondo le `leggi di Keplero (wi)`, l'orbita di un pianeta è un'ellisse avente il Sole in uno dei due fuochi.

Se l'attrazione reciproca tra due corpi celesti è insufficiente, essi si muovono con la possibilità di allontanarsi illimitatamente percorrendo entrambi parabole o iperboli. Si veda in proposito il `problema dei 2 corpi (wi)`.

La conoscenza delle coniche consente di sviluppare la dinamica bidimensionale, utile per lo studio di dispositivi meccanici come le viti e gli ingranaggi.

G50 m. equazioni per le sezioni di un cono

G50 m.01 Riprendiamo la definizione delle sezioni coniche e scegliamo come sistema di riferimento per il piano Π il sistema che ha l'origine nel vertice del cono K e l'asse Oz coincidente con l'asse del cono. La superficie del cono è determinata dall'equazione

$$x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 0 \tag{1}$$

dove $a := \tan\alpha > 0$ e al solito α denota la semiampiezza del cono. Si noti che questa equazione individua le due falde una posta al di sopra e l'altra al di sotto del piano Oxy. (nel parlare comune ciascuna di queste superfici viene detta cono)

Consideriamo un piano Π che interseca il piano Oxy in una retta parallela all'asse delle y e che interseca il piano Oxz in una retta con una certa pendenza; la sua equazione abbia la forma

$$z = mx + b \tag{2}$$

dove $m = \tan\phi > 0$ e ϕ è l'ampiezza dell'angolo che Π forma con il piano Oxy.

G50 m.02 Ci proponiamo di individuare l'intersezione del cono con il piano Π: questo richiede la combinazione delle due equazioni (1) e (2). Queste si possono risolvere nella variabile z e le espressioni trovate si possono uguagliare. L'equazione (1) per la z fornisce

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}}\ ;$$

di conseguenza

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}} = mx + b\ .$$

Elevati al quadrato i due membri e sviluppato il binomio del secondo membro si ottiene

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = m^2 x^2 + 2mbx + b^2\ .$$

Raggruppando le variabili si giunge alla

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} - m^2\right) + \frac{y^2}{a^2} - 2mbx - b^2 = 0\ . \tag{3}$$

Si noti che questa è l'equazione della proiezione della sezione conica sul piano Oxy; quindi questa equazione fornisce una figura ottenuta dalla sezione conica mediante una contrazione nella direzione dell'asse delle x.

G50 m.03 Deriviamo ora l'equazione della parabola.

Si ottiene una parabola quando la pendenza del piano P è uguale alla pendenza delle generatrici del cono. In questo caso gli angoli θ ϕ sono complementari. Questo implica che $\tan\theta = \cot\phi$; di conseguenza

$$m = \frac{1}{a}\ , \tag{4}$$

Sostituendo l'equazione (4) nell'equazione (3) si fa scomparire il primo termine nell'equazione (3) e rimane l'equazione

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{2}{a} bx - b^2 = 0\ .$$

Moltiplicando entrambi i membri per a^2,

$$y^2 - 2abx - a^2b^2 = 0 \;;$$

a questo punto si può trovare un'espressione per la x:

$$x = \frac{1}{2ab}y^2 - \frac{ab}{2} \tag{5}$$

Questa equazione descrive una parabola il cui asse è parallelo all'asse delle x. Altre versioni della equazione (5) si possono ottenere ruotando il piano intorno all'asse delle z.

G50 m.04 Deriviamo ora l'equazione dell'ellisse.
Si individua un'ellisse quando la somma degli angoli θ e ϕ è inferiore a un angolo retto:

$$\theta + \phi < \frac{\pi}{2} \qquad \text{(ellisse)} \;.$$

In tal caso la tangente della somma dei due angoli è positiva.

$$\tan(\theta + \phi) > 0 \;.$$

Ricordiamo ora la `identità trigonometrica (wi)`

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi} \;;$$

questa implica

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{m + a}{1 - ma} > 0 \;; \tag{6}$$

ma $m + a$ è positivo, in quanto somma di due numeri positivi; quindi la disuguaglianza (6) è positiva se anche il denominatore è positivo:

$$1 - ma > 0 \tag{7}$$

Dalla disuguaglianza (7) si deducono:
$ma < 1$,
$m^2a^2 < 1$,
$1 - m^2a^2 > 0$, $\frac{1}{m^2a^2} > 1$, $\frac{1}{m^2a^2} - 1 > 0$,

$$\frac{1}{a^2} - m^2 > 0 \qquad \text{(ellisse)} \;.$$

Riprendiamo ancora l'equazione (3),

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - m^2\right) + \frac{y^2}{a^2} - 2mbx - b^2 = 0 \;, \tag{3}$$

ma questa volta assumiamo che il coefficiente di x^2 non si annulli ma sia invece positivo. Risolviamo per la y:

$$y = a\sqrt{b^2 + 2mbx - x^2\left(\frac{1}{a^2} - m^2\right)} \;. \tag{8}$$

Questa equazione descriverebbe chiaramente un'ellisse, se non fosse presente il secondo termine sotto il segno di radice, $2\ m\ b\ x$: sarebbe l'equazione di una circonferenza dilatata proporzionalmente secondo le direzioni dell'asse delle x e dell'asse delle y. L'equazione (8) in effetti individua un'ellisse, ma in modo non evidente; quindi occorre manipolarla ulteriormente per convincersi di questo fatto. Completiamo il quadrato sotto il segno di radice:

$$y = a\sqrt{b^2 - \left[x\sqrt{\frac{1}{a^2} - m^2} - \frac{b}{\sqrt{\frac{1}{a^2m^2} - 1}}\right]^2 + \left(\frac{b^2}{\frac{1}{a^2m^2} - 1}\right)}\ .$$

Raccogliamo i termini in b^2:

$$y = a\sqrt{b^2\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a^2m^2} - 1}\right) - \left[x\sqrt{\frac{1}{a^2} - m^2} - \frac{b}{\sqrt{\frac{1}{a^2m^2} - 1}}\right]^2}\ .$$

Dividiamo per a ed eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$\frac{y^2}{a^2} + \left(x\sqrt{\frac{1}{a^2} - m^2} - \frac{b}{\sqrt{\frac{1}{a^2m^2} - 1}}\right)^2 = b^2\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a^2m^2} - 1}\right)\ .$$

La x presenta un coefficiente, mentre è opportuno far scomparire tale componente raccogliendolo a fattore fuori del secondo termine che è un quadrato:

$$\frac{y^2}{a^2} + \left(\frac{1}{a^2} - m^2\right)\left(x - \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2m^2} - 1\right)\left(\frac{1}{a^2} - m^2\right)}}\right)^2 = b^2\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a^2m^2} - 1}\right)\ .$$

Un'ulteriore manipolazione delle costanti finalmente conduce a

$$\frac{y^2}{1 - a^2m^2} + \left(x - \frac{mb}{\frac{1}{a^2} - m^2}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{(1 - a^2m^2)^2}\ .$$

Il coefficiente del termine in y è positivo (per un'ellisse). Cambiando i nomi dei coefficienti e delle costanti ci conduce a

$$\frac{y^2}{A} + (x - C)^2 = R^2\ , \tag{9}$$

che è chiaramente l'equazione di un'ellisse. In altri termini, l'equazione (9) descrive una circonferenza di raggio R e centro $(C, 0)$ che viene poi dilatata verticalmente per un fattore $\sqrt{A}$. Il secondo termine del membro a sinistra (il termine nella x) non ha coefficiente ma è un quadrato, quindi deve essere positivo. Il raggio è un prodotto di quadrati e quindi deve essere anch'esso positivo. Il primo termine del membro a sinistra (il termine in y) ha un coefficiente positivo, e dunque l'equazione descrive un'ellisse.

G50 m.05 Deriviamo infine l'equazione dell'iperbole.
L'intersezione del cono con il piano P fornisce un'iperbole quando la somma degli angoli θ e ϕ è un angolo ottuso. La tangente di un angolo ottuso è negativa e tutte le disuguaglianze trovate per l'ellisse vengono cambiate nelle loro opposte. Quindi si ottiene

$$1 - a^2m^2 < 0 \qquad\qquad \text{(iperbole)}\ .$$

Di conseguenza per l'iperbole si trova l'equazione che differisce da quella trovata per l'ellisse solo per avere negativo il coefficiente A del termine in y. Questo cambiamento di segno fa passare da un'ellisse ad un'iperbole. Il collegamento tra ellissi e iperbole può descriversi anche osservando che l'equazione di un'ellisse con coordinate reali può interpretarsi come l'equazione di un'iperbole con una coordinata immaginaria e, simmetricamente, che l'equazione di un'iperbole con coordinate reali può interpretarsi come l'equazione di un'ellisse con una coordinata immaginaria [`numero immaginario (wi)`]. Il cambiamento di segno del coefficiente A equivale allo scambio tra valori reali e immaginari della funzione della forma $y = f(x)$ che si legge nell'equazione (9). ex G50(f.03) Si osserva che, data una sfera di Dandelin R, è determinato un unico piano Σ tangente alla sfera e costituito da rette parallele a $\overrightarrow{V\xi}$ (e ortogonale al piano $[\,\xi = 0\,]$); esso interseca il cono nella falda tangente ad R corrispondente al caso (P).

Date invece due sfere di Dandelin non intersecantisi ed entrambe tangenti a una falda di K (diciamo quella superiore) è determinato un solo piano tangente a entrambe le sfere e costituito da rette parallele a $\overrightarrow{V\xi}$; esso interseca il cono in una curva chiusa che corrisponde al caso (E).

Date infine due sfere di Dandelin una tangente alla falda superiore del cono e l'altra tangente alla falda inferiore è determinato un solo piano tangente a entrambe le sfere e costituito da rette parallele a $\overrightarrow{V\xi}$; esso interseca entrambe le falde del cono in una curva di due rami che corrisponde al caso (E).

`L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php`