1

Capitolo G48
forme bilineari e variazioni

Contenuti delle sezioni

18 pagine

G480.01 Questo capitolo è dedicato alla introduzione delle forme bilineari, funzioni bivariate definite su uno o due spazi vettoriali le quali possono vedersi come generalizzazioni del prodotto scalare negli spazi della forma $\mathbb{R}^{\times d}$.

Qui ci limitiamo alle forme bilineari definite sul quadrato cartesiano di uno spazio finitodimensionale.

Scelta una base per lo spazio vettoriale, queste forme, come gli omomorfismi lineari, sono rappresentate da matrici quadrate.
Si tratta tuttavia di strutture diverse, in quanto il passaggio ad una nuova base comporta per forme e omomorfismi trasformazioni ben diverse.

Le forme bilineari, come le loro varianti chiamate forme sesquilineari, si affiancano agli omomorfismi come strumenti che permettono di analizzare le possibili strutture degli spazi vettoriali finitodimensionali.
In effetti sia le forme che gli omomorfismi risultano strutture utili sia per affrontare questioni algebriche che per esaminare problemi di natura geometrica.

Come vedremo le forme bilineari, in particolare, consentono di facilitare la classificazione delle coniche e delle quadriche.
Successivamente vedremo anche che esse aiutano lo studio dei gruppi lineari e la teoria delle rappresentazioni lineari dei gruppi.
Grazie a tali meriti esse possono giustamente considerarsi un importante strumento per lo sviluppo della geometria.

G48 a. forme bilineari [1]

G48a.01 Consideriamo un campo F e uno spazio vettoriale V su F. Si dice **forma bilineare sullo spazio V** una funzione B del genere $\lceil \mathsf{V} \times \mathsf{V} \longmapsto \mathsf{F} \rceil$ che soddisfa i seguenti **assiomi di bilinearità**:

$\forall \mathsf{v}, \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, \mathsf{w}, \mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2 \in \mathsf{V} \quad , \quad \forall \alpha \in \mathsf{F} \quad :$

[Bln 1] $\qquad B(\mathsf{v}_1 + \mathsf{v}_2, \mathsf{w}) = B(\mathsf{v}_1, \mathsf{w}) + B(\mathsf{v}_2, \mathsf{w})$,

[Bln 2] $\qquad B(\alpha\, \mathsf{v}, \mathsf{w}) = \alpha\, B(\mathsf{v}, \mathsf{w})$,

[Bln 3] $\qquad B(\mathsf{v}, \mathsf{w}_1 + \mathsf{w}_2) = B(\mathsf{v}, \mathsf{w}_1) + B(\mathsf{v}, \mathsf{w}_2)$,

[Bln 4] $\qquad B(\mathsf{v}, \alpha\, \mathsf{w}) = \alpha\, B(\mathsf{v}, \mathsf{w})$.

Denotiamo con ***Blin*** la classe delle forme bilineari e con $\boldsymbol{Blin}_{\mathsf{V}}$ l'insieme delle forme bilineari sullo spazio vetoriale V.

Una $B \in \boldsymbol{Blin}_{\mathsf{V}}$ si dice **forma bilineare simmetrica** sse
[Bln 5] $\qquad \forall\, \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \mathsf{V} \;:\; B(\mathsf{v}, \mathsf{w}) = B(\mathsf{w}, \mathsf{v})$.

Si dice **forma bilineare antisimmetrica**, quando F non abbia caratteristica 2, sse
[Bln 6] $\qquad \forall\, \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \mathsf{V} \;:\; B(\mathsf{v}, \mathsf{w}) = -\, B(\mathsf{w}, \mathsf{v})$;
La definizione dell'antisimmetrica per campi di caratteristica 2 verrà data in seguito.

Denoteremo, risp., con ***BlinSym*** e con ***BlinAsym*** le classi delle forme bilineari simmetriche e antisimmetriche; conseguentemente denoteremo, risp., e con $\boldsymbol{BlinSym}_{\mathsf{V}}$ e con $\boldsymbol{BlinAsym}_{\mathsf{V}}$ l'insieme delle forme bilineari simmetriche e antisimmetriche su V.

Si osserva che per le forme simmetriche e antisimmetriche la bilinearità nella seconda variabile segue dalla bilinearità nella prima; formalmente possiamo affermare:

[Bln 1],[Bln 2], [Bln 5] $\Longrightarrow$ [Bln 3], [Bln 4] $\qquad$ e $\qquad$ [Bln 1],[Bln 2], [Bln 6] $\Longrightarrow$ [Bln 3], [Bln 4] .

G48a.02 Nel seguito di questo capitolo ci occuperemo solo di forme bilineari su spazi con un numero d di dimensioni.

Quando si esamina una sola forma bilineare viene spesso utilizzata per tale funzione una notazione a parentesi come quella talora usata per il prodotto scalare (v, w). Qui, per segnalare la generalità delle considerazioni, ci serviremo di notazioni della forma $\langle \mathsf{v}, \mathsf{w} \rangle$.
Questa forma la chiamiamo **notazione** $\langle *, * \rangle$.

G48a.03 Gli esempi basilari di forma bilineare riguardano spazi di sequenze di d elementi del campo F; queste sequenze è comodo considerarli vettori colonna, ossia matrici di profilo $d \times 1$ su F. A ciascuno di questi vettori v è associato il vettore trasposto v^{T} da considerare vettore riga ossia matrice di profilo $1 \times d$.

Ad una qualsiasi matrice M di profilo $d \times d$ si associa la forma bilineare per la quale

$$\langle \mathsf{v}, \mathsf{w} \rangle \;:=\; \mathsf{v}^{\mathsf{T}}\, \mathsf{M}\, \mathsf{w} \;;$$

per evitare formule troppo pesanti abbiamo trascurato di inserire i segni di prodotto righe per colonne di matrici.
Per la forma bilineare associata alla matrice M usiamo anche la notazione $\mathsf{M}^{\mathsf{BlinY}}$.
Tra queste funzioni bilineari è incluso l'usuale prodotto scalare: esso si ottiene servendosi della matrice unità $\mathbf{1}_d$; quindi possiamo scrivere

$$\left(\mathbf{1}_d{}^{\mathsf{BlinY}}\right)(\mathsf{v},\mathsf{w}) = \langle \mathsf{v},\mathsf{w}\rangle \ .$$

G48a.04 Più generale si hanno forme bilineari associate a matrici simmetriche. Si trova che alcune proprietà delle matrici si rispecchiano in proprietà delle forme associate.

(1) Prop.: Consideriamo una $\mathsf{M} = [i,j = 1,...,d :| M_{i,j}] \in \mathsf{Mat}_{d,d}$.
M^{Blin} è una forma simmetrica $\iff$ M è una matrice simmetrica.

Dim.: "$\Longrightarrow$": Consideriamo una base canonica per V $\left\langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, ..., \mathsf{e}_d \right\rangle$; per $i,j = 1,2,...,d$ abbiamo $\left\langle \mathsf{e}_i, \mathsf{e}_j \right\rangle = \mathsf{e}_i{}^{\mathsf{T}}\mathsf{M}\mathsf{e}_j = M_{i,j}$; la simmetria della forma implica che sia $\forall i,j = 1,2,...,d \ \vdots\ M_{i,j} = M_{j,i}$, ovvero la simmetria della M.

"$\Longleftarrow$": Sia M una matrice simmetrica e siano y,x due vettori arbitrari di V. L'espressione $\mathsf{y}^{\mathsf{T}}\,\mathsf{M}\,\mathsf{x}$ individua uno scalare che può considerarsi un matrice 1×1 che coincide con la propria trasposta $\left(\mathsf{y}^{\mathsf{T}}\,\mathsf{M}\,\mathsf{x}\right)^{\mathsf{T}} = \mathsf{x}^{\mathsf{T}}\,\mathsf{M}^{\mathsf{T}}\,\mathsf{y} = \mathsf{x}^{\mathsf{T}}\,\mathsf{M}\,\mathsf{y}$; abbiamo quindi $\forall \mathsf{y},\mathsf{x} \in \mathsf{V} \ \vdots\ \langle \mathsf{y},\mathsf{x}\rangle = \langle \mathsf{x},\mathsf{y}\rangle$, ossia la simmetria della forma ▮

G48a.05 Le forme bilineari su uno spazio V si possono utilmente collegare alle basi dello spazio.
Siano $\mathsf{B} \in \boldsymbol{Blin}_{\mathsf{V}}$ e $\mathfrak{B} = \left\langle \mathsf{b}_1, ..., \mathsf{b}_d \right\rangle$ una base di V.
Definiamo **matrice associata alla forma** B **e alla base** $\mathfrak{B}$ la matrice

$$\mathsf{MatY}\langle \mathsf{B}, \mathfrak{B}\rangle \ := \ [i,j = 1,...,d :| \ \mathsf{B}(\mathsf{b}_i, \mathsf{b}_j)] \ .$$

Si osserva che, in conseguenza di a04(1), a una forma bilineare simmetrica sopra un dato spazio, le matrici a essa associate in relazione alle varie basi dello spazio sono tutte simmetriche.

La matrice associata a una forma e a una base consente di valutare la forma stessa mediante le coordinate dei vettori argomento nella specifica base.

Riferiamo i due vettori generici alla base scrivendo $\mathsf{v} = \sum_{i=1}^{d} v_{\mathfrak{B},i}\,\mathsf{b}_i$ e $\mathsf{w} = \sum_{j=1}^{d} w_{\mathfrak{B},j}\,\mathsf{b}_j$; di conseguenza

$$\begin{aligned}\mathsf{B}(\mathsf{v},\mathsf{w}) \ &= \ \mathsf{B}\left(\sum_{i=1}^{d} v_{\mathfrak{B},i}\,\mathsf{B}_i \ , \ \sum_{j=1}^{d} w_{\mathfrak{B},j}\,\mathsf{B}_j\right) \ = \ \sum_{1,j=1}^{d} \ v_{\mathfrak{B},i}\,w_{BEf,j}\,\mathsf{B}(\mathsf{B}_i, \mathsf{B}_j) \\ &= \ \sum_{1,j=1}^{d} \ v_{\mathfrak{B},i}\,\left(\langle \mathsf{B}, \mathfrak{B}\rangle^{\mathsf{MatY}}\right)\,w_{\mathfrak{B},j}\end{aligned} \ .$$

Se denotiamo, risp., con $\mathsf{v}_{\mathfrak{B}}$ e $\mathsf{v}_{\mathfrak{B}}$ i vettori colonna delle componenti di v e w nella base $\mathfrak{B}$ e se usiamo anche la notazione $\langle *, *\rangle$ per i valori della forma, otteniamo l'espressione matriciale

$$\mathsf{B}(\mathsf{v},\mathsf{w}) \ = \ \langle \mathsf{v},\mathsf{w}\rangle \ = \ \mathsf{v}_{\mathfrak{B}}{}^{\mathsf{T}}\,\left(\langle \mathsf{B}, \mathfrak{B}\rangle^{\mathsf{MatY}}\right)\,\mathsf{w}_{\mathfrak{B}} \ .$$

G48a.06 Riveste notevole interesse il collegamento tra le espressioni matriciali di una forma lineare riferite a due diverse basi.
Questo problema si riconduce all'effetto del cambiamento della base per le matrici che rappresentano l'operatore lineare.

Tra le basi di V, accanto alla base $\mathfrak{B} = \left\langle \mathsf{b}_1, ..., \mathsf{b}_d \right\rangle$ consideriamo la base $\mathfrak{C} = \left\langle \mathsf{c}_1, ..., \mathsf{c}_d \right\rangle$.
Si è visto che le due basi sono collegate da una relazione della forma $\mathfrak{B} = \mathfrak{B} \cdot P$ dove P denota una matrice $d \times d$ invertibile. Più dettagliatamente abbiamo

$$\forall j = 1,...,d \ \vdots\ \mathsf{b}_j \ = \ \sum_{i=1}^{d} \mathsf{c}_i\,P_{i,j} \ .$$

G48a.07 Conviene segnalare anche che la definizione di forma bilineare si può estendere notevolmente.

Innanzi tutto le forme possono definirsi in relazione a un modulo M sopra un anello commutativo R come funzioni del genere $\lceil \mathsf{M} \times \mathsf{M} \longmapsto \mathsf{R} \rceil$; per questa accezione nele argomentazioni e negli enunciati delle loro proprietà le applicazioni lineari vanno sostituite con gli omomorfismi tra moduli.

Le funzioni bilineari si definiscono anche sugli spazi normati e sugli spazi di Hilbert infinitodimensionali [B46 e T34].

Va inoltre segnalato che nel caso il campo sia il campo dei numeri complessi hanno prevalente interesse le forme sesquilineari, funzioni del genere $S \in \lceil \mathsf{V} \times \mathsf{V} \longmapsto \mathbb{C} \rceil$ tali che $S(\alpha\mathbf{v}, \beta\mathbf{w}) = \alpha^* \beta S(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Le presentiamo in :d .

G48 b. forme bilineari simmetriche

G48b.01 In questa sezione esaminiamo uno spazio vettoriale sui reali V finitodimensionale sul quale è data una forma bilineare $\mathsf{B}(*,*)$ per la quale lasciamo cadere la richiesta che sia definita positiva come nella sezione precedente.

Una forma bilineare B tale che al variare di v sullo spazio nel quale è definita $\mathsf{B}(\mathsf{v},\mathsf{v})$ assume valori sia positivi che negativi viene detta **forma bilineare indefinita**.
Classica forma di questo tipo è la **forma bilineare di Lorentz**, funzione riguardante lo spazio di Minkowski, cioè definita su $\mathbb{R}^{\times 4} \times \mathbb{R}^{\times 4}$ che in una opportuna base $\mathfrak{B}$ si può definire con $\mathsf{Lrnz}(\mathsf{v},\mathsf{w}) := v_1\,w_1 + v_2\,w_2 + v_3\,w_3 - v_4\,w_4$.

Si osservi che abbiamo dato l'espressione omogenea, la più semplice, nella quale per la velocità della luce si è assunto $c = 1$, ovvero nella quale le distanze si riferiscono allo spazio percorso dalla luce in un secondo e il tempo si esprime con questo spazio. La matrice che rappresenta la forma riferita alla base data è

(1)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Ci poniamo il problema di caratterizzare il complesso delle forme bilineari simmetriche sopra uno spazio sui reali a d dimensioni. Ancora ci serviamo della relazione di ortogonalità che dobbiamo trattare con cura, in quanto si possono avere vettori a autoortogonali, cioè tali che $\mathsf{B}(\mathsf{a},\mathsf{a}) = 0$.
Esempi di vettori autoortogonali riguardano la forma di Lorentz e sono $\langle 1,0,0,1\rangle$, $\langle 0,1,0,1\rangle$ e $\langle 0,0,1,1\rangle$.
Nello studio delle forme indefinite l'usuale intuizione geometrica può rivelarsi insufficiente.

G48b.02 **(1) Prop.**: Consideriamo una forma simmetrica B che assume valori diversi da 0. In V si trova un vettore v nonautoortogonale, ossia tale che $\mathsf{B}(\mathsf{v},\mathsf{v}) \neq 0$.

Dim.: Siano v e w due vettori tali che $\mathsf{B}(\mathsf{v},\mathsf{w}) \neq 0$. Se $\mathsf{B}(\mathsf{v},\mathsf{v}) \neq 0$ oppure $\mathsf{B}(\mathsf{w},\mathsf{w}) \neq 0$ la proprietà è soddisfatta.
Resta da esaminare il caso in cui $\mathsf{B}(\mathsf{v},\mathsf{v}) = \mathsf{B}(\mathsf{w},\mathsf{w}) = 0$; per questo, posto $\mathsf{x} := \mathsf{v} + \mathsf{w}$, si analizza

$\mathsf{B}(\mathsf{x},\mathsf{x}) = \mathsf{B}(\mathsf{v}+\mathsf{w},\mathsf{v}+\mathsf{w}) = \mathsf{B}(\mathsf{v},\mathsf{v}) + \mathsf{B}(\mathsf{v},\mathsf{w}) + \mathsf{B}(\mathsf{w},\mathsf{v}) + \mathsf{B}(\mathsf{w},\mathsf{w}) \;=\; 2\,\mathsf{B}(\mathsf{v},\mathsf{w}) \neq 0.$

Quindi $\mathsf{B}(\mathsf{x},\mathsf{x}) \neq 0$ ∎

G48b.03 Sia W un sottospazio di V; diciamo **complemento ortogonale del sottospazio** W in V e denotiamo con $\mathsf{W}^\perp$ o con ***cmplosp***(W) l'insieme dei vettori di V che sono ortogonali a tutti i vettori di W, cioè

(1)
$$\mathsf{W}^\perp \;:=\; \{\mathsf{p} \in \mathsf{V} \quad ST \quad \forall \mathsf{w} \in \mathsf{W} \;\;\vdots\;\; \mathsf{B}(\mathsf{p},\mathsf{W}) = 0 \;.$$

(2) Prop.: Consideriamo un particolare $\mathsf{w} \in \mathsf{V}$ nonautoortogonale e l'insieme dei vettori nonnulli proporzionali a w che denotiamo con $\mathbb{R}_{nz} \cdot \mathsf{w}$. Allora lo spazio ambiente V si può decomporre come segue

$$\mathsf{V} \;=\; \mathbb{R}\cdot\mathsf{w} \oplus (\mathbb{R}\cdot\mathsf{w})^\perp \;.$$

Dim.: Per la definizione di somma diretta, introdotto $\mathsf{W} := \mathbb{R}\cdot\mathsf{w}$, dobbiamo dimostrare:
(a) $\mathsf{W} \cap (\mathsf{W}^\perp) = \{\mathbf{0}_{d,d}\}$;
(b) ogni vettore $\mathsf{v} \in \mathsf{V}$ si può scrivere come $\alpha\,\mathsf{w} + \mathsf{v}^\perp$, dove $\mathsf{v}^\perp \in \mathsf{W}^\perp$.

(a): Dato che $c \neq 0$ e $\mathsf{B}(\mathsf{w},\mathsf{w}) \neq 0$, il vettore $c\,\mathsf{w}$ non è ortogonale a w, in quanto

$$\mathsf{B}(c\,\mathsf{w},\mathsf{w}) = c\,\mathsf{B}(\mathsf{w},\mathsf{w}) \neq 0\ .$$

(b): Consideriamo le relazione richiesta $\mathsf{B}(\mathsf{v}-\alpha\,\mathsf{w},\mathsf{w}) = 0$ come equazione nell'incognita α; deve essere $\mathsf{B}(\mathsf{v},\mathsf{w}) - \alpha\,\mathsf{B}(\mathsf{w},\mathsf{w}) = 0$ e quindi $\alpha = \dfrac{\mathsf{B}(\mathsf{v},\mathsf{w})}{\mathsf{B}(\mathsf{w},\mathsf{w})}$.
Basta assumere $\mathsf{v}^\perp := \mathsf{v} - \alpha\,\mathsf{w}$ e si soddisfa la richiesta (b) ▮

G48b.04 Facendo sempre riferimento allo spazio sui reali V e alla forma simmetrica B per tale spazio, chiamiamo **vettore nullo-ort** ogni vettore n tale che $\forall \mathsf{w} \in \mathsf{V}\ :\ \mathsf{B}(\mathsf{n},\mathsf{w}) = 0$, cioè ogni vettore ortogonale all'intero spazio.
Diciamo poi **spazio nullo-ort** l'insieme dei vettori nulli-ort. Si osserva che tale insieme è sottospazio di V.
Questo sottospazio lo denotiamo con

(1) $$\mathsf{nullortsp}_{\mathsf{B}}(\mathsf{V}) \ :=\ \mathsf{V}^\perp \ =\ \{\mathsf{n} \in \mathsf{V}\ \ ST\ \ \forall \mathsf{v} \in \mathsf{V} : B(\mathsf{n},\mathsf{v}) = 0\}\ .$$

Diciamo poi **forma simmetrica nondegenere** ogni forma simmetrica B per la quale sia

$$\mathsf{nullortsp}_{\mathsf{B}}(\mathsf{V}) = \{\mathbf{0}\}\ .$$

Inoltre diciamo **forma identicamente nulla** una forma bilineare B tale che per ogni vettore v dello spazio su cui è definita sia $\mathsf{B}(\mathsf{v},\mathsf{v}) = 0$.

(2) Prop.: Sia M una matrice $d \times d$ che rappresenta in una certa base $\mathfrak{B}$ una forma simmetrica B.

(a) Lo spazio $\mathsf{nullortsp}_{\mathsf{B}}(\mathsf{V})$ è lo spazio dei vettori n che sono rappresentati nella base $\mathfrak{B}$ da vettori colonna n_{e} tali da essere soluzioni del sistema lineare omogeneo della forma $\mathsf{M} \cdot \mathsf{n}_{\mathsf{e}} = \mathbf{0}$.

(b) La forma B è nondegenere sse la matrice M è nonsingolare ▮

(3) Prop.: Sia W un sottospazio di V e sia B' la restrizione della B a W.
Se questa B' è nondegenere, allora $\mathsf{V} = \mathsf{W} \oplus \mathsf{W}^\perp$ ▮

G48b.05 Si dice **base ortonormale** di V rispetto a una forma simmetrica B una d-upla di versori, cioè di vettori di lunghezza 1, $\mathfrak{B} = \langle \mathsf{n}_1, ..., \mathsf{n}_d \rangle$ tali che $\forall i = 1, ..., d\ ,\ j < i\ :\ \mathsf{n}_i \perp \mathsf{n}_j$.
Dato che le entrate della matrice $\mathsf{B}_{\mathfrak{B}}$ che rappresenta la forma B in una base $\langle \mathsf{e}_1, ..., \mathsf{e}_d \rangle$ sono date dai valori $\mathsf{B}(\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_j)$ per $i, j = 1, ..., d$, si può affermare che una base per l'ambiente V è ortogonale sse la corrispondente matrice che rappresenta la forma è diagonale ▮

Va osservato che se la forma simmetrica B è nondegenere e se $\mathfrak{B} = \langle \mathsf{n}_1, ..., \mathsf{n}_d \rangle$ è una base ortogonale, allora $\forall i = 1, ..., d\ :\ \mathsf{B}(\mathsf{n}_i, \mathsf{n}_i) \neq 0$, ossia la matrice rappresentativa presenta tutte le entrate diagonali diverse da 0.

G48b.06 **(1) Teorema** Sia $\mathsf{B}(*,*)$ una forma bilineare simmetrica sopra uno spazio vettoriale sui reali V.
Allora esiste una base $\mathfrak{N} = \langle \mathsf{n}_1, ..., \mathsf{n}_d \rangle$ tale che $\forall i, j \in (\mathrm{d}\,] \wedge i \neq j\ :\ \mathsf{B}(\mathsf{n}_i, \mathsf{n}_j) = 0$ e tale che sia $\forall i = 1, ..., d\ :\ \mathsf{B}(\mathsf{n}_i, \mathsf{n}_i) \in \{-1, 0, 1\}$.

Dim.: Se la forma è identicamente nulla ogni sua matrice rappresentativa è la matrice nulla $\mathbf{0}_{d,d}$, matrice che soddisfa l'asserto.

Supponiamo dunque che B non sia identicamente nulla e procediamo per induzione sul numero d delle dimensioni dei possibili V.
Quando $d = 1$ l'enunciato è ovvio; quindi supponiamolo vero per spazi a $d - 1$ dimensioni e relative forme bilineari simmetriche.

Nel caso $\dim(\mathsf{V}) = d$ sia n_1 un vettore tale che $\mathsf{B}(\mathsf{n}_1, \mathsf{n}_1) \neq 0$, vettore la cui esistenza è garantita dab03(1).
Grazie a b03(2) si ha $\mathsf{V} = \mathbb{R} \cdot \mathsf{n}_1 \oplus \mathsf{V}_1$ con $\mathsf{V}_1 := (\mathbb{R} \cdot \mathsf{n}_1)^\perp$; quindi si può ottenere una base di V costituita da n_1 e dai vettori di una qualunque base di V_1.
Restringiamo la forma B a V_1 e osserviamo che questo spazio ha $d-1$ dimensioni; si può quindi applicare l'ipotesi induttiva a V_1 e alla forma ridotta e si può individuare una base ortogonale di V_1 $\mathfrak{N}_1 = \langle \mathsf{n}_2, ..., \mathsf{n}_d \rangle$.
La sequenza $\langle \mathsf{v}_1, \mathsf{n}_2, ..., \mathsf{n}_d \rangle$ costituisce una base di V. Si osserva poi che, dato che $\mathsf{n}_1 \perp \mathsf{V}_1$, $\forall j = 2, ..., d \;:\; \mathsf{B}(\mathsf{n}_1, nSd_j) = 0$. di conseguenza $\langle \mathsf{n}_1, ..., \mathsf{n}_d \rangle$ è base ortogonale di V.

Resta solo da normalizzare tale base: questo si ottiene modificando ogni n_i tale che $\mathsf{B}(\mathsf{n}_i, \mathsf{n}_i) \neq 0$ moltiplicandolo per $\dfrac{\pm 1}{\sqrt{\mathsf{B}(\mathsf{n}_i, \mathsf{n}_i)}}$ ▮

Di (1) si può dare un enunciato suo corrispondente matriciale.

(2) Coroll.: Sia M una matrice reale simmetrica $d \times d$. Allora esiste una matrice $\mathsf{Q} \in \mathsf{GL}_d(\mathbb{R}$ tale che la trasformata per similarità della M, cioè $Q \cdot \mathsf{M} \cdot \mathsf{Q}$ è una matrice diagonale con le entrate sulla diagonale appartengono a $\{-1, 0, 1\}$.

Dim.: Segue da (1) e dalla considerazione che ogni matrice simmetrica $d \times d$ è la matrice che rappresenta una forma simmetrica ▮

Si osserva che la base ortogonale $\mathfrak{N}$ che concerne i fatti precedenti si può permutare in modo che la matrice diagonale cui si perviene, che ora scriviamo D, assuma la seguente forma

(3) $$\mathsf{D} = \begin{bmatrix} \mathsf{I}_{p,p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathsf{I}_{m,m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{z,z} \end{bmatrix} \qquad \text{ove} \qquad p + m + z = d \,.$$

G48b.07 La coppia $\langle p, m \rangle$ trovata per una matrice diagonale rappresentante la forma B viene detta **segnatura della forma bilineare** e si denota con $\mathrm{sign}(\mathsf{B})$.
Per giustificare la definizione dimostriamo che gli interi m e p (e il conseguente z) non dipendono dalla base con cui si è operato.

(1) Teorema (**legge di Sylvester**) I numeri interi p, m e z che compaiono nella matrice in b06(3) sono determinati unicamente dalla forma B.

Dim.: Prendiamo in considerazione una base ortogonale $\mathfrak{V} = \langle v_1, ..., v_d \rangle$ di V rispetto alla quale la forma è rappresentata dalla D. Chiaramente il rango della matrice D è dato da $r := p + m$.

In una prima parte della dimostrazione ci proponiamo di mostrare che l'intero z si ottiene come cardinale di una base $\mathfrak{N} := \langle v_{r+1}, ..., v_d \rangle$ del sottospazio $\mathsf{N} := \mathsf{V}^\perp$, ovvero come $z = \dim(NSs)$ e quindi come parametro indipendente dalla base.
Un vettore $\mathsf{n} \in \mathsf{V}$ appartiene ad N sse è ortogonale a ciascuno dei vettori di $\mathfrak{N}$; scritto $\mathsf{n} = c_1 \mathsf{v}_1 + \cdots + c_d \mathsf{v}_d$, dato che $i \neq j \implies \mathsf{B}(\mathsf{v}_i, \mathsf{v}_j) = 0$, deve essere $\mathsf{B}(\mathsf{n}, \mathsf{v}_i) = c_i \mathsf{B}(\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_i)$.
Essendo $\mathsf{B}(\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_i) = 0$ sse $r < i$, per avere n ortogonale ad ogni v_i deve essere $\forall i = 1, ..., r \;:\; c_i = 0$. Questo assicura che $\mathfrak{N}$ sottende l'intero N ed essendo un insieme di vettori linearmente indipendenti di V esso costituisce una base per N, come annunciato.

Dato che $p + m = d - z$, abbiamo che anche $r := p + m$ è determinato indipendentemente dalla base $\mathfrak{V}$.

Resta da dimostrare che uno dei due parametri p ed m è determinato indipendentemente da $\mathfrak{V}$. A questo proposito occorre osservare che l'azione della funzione *span*, ad esempio sopra $\langle \mathsf{v}_1, ..., \mathsf{V}_p \rangle$, sia univocamente determinato dalla forma B.
Supponiamo allora di avere una seconda base per V, $\mathfrak{W} = \langle w_1, ..., w_d \rangle$ che conduca alla segnatura $\langle q, n \rangle$. Per quanto trovato per il parametro z, si deve avere $q+n=r$. Ci proponiamo di mostrare che l'insieme di $p+(d-q)$ vettori $\{\mathsf{v}_1, ..., \mathsf{v}_p, \mathsf{w}_{q+1}, ..., \mathsf{w}_d\}$ è costituito da vettori linearmente indipendenti. Dato che $\dim(\mathsf{V}) = d$, deve essere $p+(d-q) \leq d$, e quindi $p \leq q$. Ma si possono scambiare i ruoli di p e q in modo da ottenere $q \leq p$, cioè $p = q$, come si voleva.

Supponiamo ora di avere una relazione lineare tra i vettori $\mathsf{v}_1, ..., \mathsf{v}_p, \mathsf{w}_{p+1}, ..., \mathsf{w}_d$. Possiamo darle la forma

$$c_1 \, \mathsf{v}_1 + \cdots + c_p \, \mathsf{v}_p \ = \ b_{p+1} \, \mathsf{w}_{p+1} + \cdots + b_d \, \mathsf{w}_d \ . \tag{2}$$

Se denotiamo con u il vettore dato da entrambe le espressioni considerate uguali nella (2) possiamo calcolare $\mathsf{B}(\mathsf{u}, \mathsf{u})$ in due modi. Dal primo membro ricaviamo, grazie all'ortonormalità dei vettori $\mathsf{v}_1, ..., \mathsf{v}_p$,

$$B(\mathsf{u}, \mathsf{u}) \ = \ {c_1}^2 \, \mathsf{B}(\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_1) + \cdots + {c_p}^2 \, \mathsf{B}(\mathsf{v}_d, \mathsf{v}_d) \ = \ {c_1}^2 + \cdots + {c_p}^2 \ \geq 0 \ .$$

Dal secondo ricaviamo

$$B(\mathsf{u}, \mathsf{u}) \ = \ {b_1}^2 \, \mathsf{B}(\mathsf{w}_{p+1}, \mathsf{w}_{p+1} + \cdots + -{b_d}^2 - \cdots - {b_d}^2 \ \leq 0 \ .$$

Da queste si ottengono ${c_1}^2 + \cdots + {c_p}^2 = 0$ e ${b_{p+1}}^2 + \cdots + {b_d}^2 = 0$ e in definitiva

$$c_1 = \cdots = c_p = b_{d+1} = \cdots = b_d = 0$$

Quindi una relazione lineare tra i vettori v_1, ..., v_p, w_{p+1}, ... e w_d esprime solo il banale annullamento della loro combinazione lineare con coefficienti nulli.
Di conseguenza abbiamo che gli insiemi di vettori considerati riguardano vettori linearmente indipendenti, ossia una base ▮

G48 c. forme bilineari positive

G48c.01 Riprendiamo a esaminare una forma bilineare definita positiva, per la quale useremo la notazione $\langle *, * \rangle$, sopra uno spazio vettoriale a d dimensioni sui reali $\mathbb{E}^d$, in particolare su $\mathbb{R}^{\times d}$, spazio che viene spesso chiamato **spazio euclideo a d dimensioni**.

È ragionevole definire come lunghezza di un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{E}^d$, il valore dell'espressione

$$|\mathbf{v}| \ := \ \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

in sintonia con quanto si fa per $\mathbb{R}^{\times d}$.

Dato che la forma adottata è definita positiva, abbiamo la possibilità di decidere se un vettore $\mathbf{v}$ è nullo con il calcolo della sua lunghezza e basandosi sulla doppia implicazione

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}_d \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \ .$$

Tante elaborazioni vengono presentate in forme standardizzate che fanno riferimento a una sola base ortonormale $\mathfrak{B} = \langle \mathbf{n}_1, ...\mathbf{n}_d \rangle$ di cui $\mathbb{E}_d$ è sicuramente dotato.
Con tale riferimento due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si possono esprimere mediante vettori colonna di $\mathbb{R}^{\times d}$ come $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathfrak{B}}$ e come $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\mathfrak{B}}$. Con queste sequenze di d componenti reali si può calcolare il valore della forma $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ come prodotto interno su $\mathbb{R}^{\times d}$, cioè con l'espressione

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \ = \ \mathbf{v}_{\mathfrak{B}} \cdot \mathbf{w}_{\mathfrak{B}} \ .$$

Mediante la corrispondenza tra vettori di V e d-uple di numeri reali si può trasferire la geometria di $\mathbb{R}^{\times d}$ su V, ovvero su $\mathbb{R}^{\times d}$.

Quando si pone un problema sopra uno spazio V una modalità standard per affrontarlo consiste nel scegliere una conveniente base ortonormale di V e quindi proseguendo a trattare il problema servendosi del prodotto interno su $\mathbb{R}^{\times d}$.

G48c.02 Quando si deve trattare un sottospazio W di V conviene tenere conto di due operazioni. La prima consiste nel restringere la portata della forma $\langle *, * \rangle$ al sottospazio, cioè definendo la forma

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathsf{W} \ : \ \langle_{\mathsf{W}} \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \ := \ \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \ .$$

Si trova facilmente che questa restrizione della forma bilineare su V alla forma su W è anch'essa una forma bilineare e più precisamente che la restrizione di una forma bilineare simmetrica e definita positiva a W è anch'essa bilineare simmetrica e definita positiva.
Si può anche cercare di definire una base su W che si colleghi ad una base su $\mathbf{V}$.

Le restrizioni sopra accennate possono essere utilizzate per definire un angolo senza segno tra due vettori su V.
Per questo si utilizza la formula

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \ = \ |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos(\theta)$$

La stessa modalità della restrizione su due dimensioni può essere seguita per dimostrare altri fatti ampiamente utilizzati. In particolare si dimostrano la **disuguaglianza di Schwarz**

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \ ;$$

e la **disuguaglianza triangolare**

$$|\mathbf{v} + \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| + |\mathbf{w}| \ .$$

G48c.03 La seconda restrizione concernente un sottospazio W di V di una forma che è utile esaminare è la proiezione di V su W.
Dato che la restrizione di una forma B al sottospazio è definita positiva, essa è anche nondegenere e quindi $\mathsf{V} = \mathsf{W} \oplus \mathsf{W}^{\perp}$ [b03] ed ogni $\mathbf{v} \in \mathsf{V}$ ha una unica decomposizione $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$ con $\mathbf{w} \in \mathsf{W}$ e $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle = 0$.

Si definisce **proiezione ortogonale** di V su W la trasformazione lineare $\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{W}} := \left\lceil \mathbf{v} \in VSs \mapsto \mathbf{w} \right\rceil$ con il vettore $\mathbf{w}$ definito in precedenza.
Ogni vettore proiettato $\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{W}}(\mathbf{v})$ si calcola agevolmente servendosi di una base ortonormale di V che opportunamente ridotta fornisce una base anche per W.

(1) Prop.: Se $\langle \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_r \rangle$ è una base ortonormale per W, per ogni $\mathbf{v} \in \mathsf{V}$ abbiamo

$$\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{W}}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_r \rangle \mathbf{v}_r \ .$$

Quindi se la precedente espressione la consideriamo la definizione di $\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{W}}(\mathbf{v})$, abbiamo che il vettore $\mathbf{v} - \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{W}}(\mathbf{v})$ è ortogonale a W.

Dim.: Se il membro a destra della precedente uguaglianza lo denotiamo con $\overline{\mathbf{w}}$, si trova

$$\forall i = 1, ..., r \quad : \quad \langle \overline{\mathbf{w}}, \mathbf{w}_i \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_i \rangle \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_i \rangle \ .$$

Di conseguenza $\mathbf{v} - \overline{\mathbf{w}} \in \mathsf{W}^{\perp}$; dato che la decomposizione $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$ è unica si conclude che $\mathbf{w} = \overline{\mathbf{w}}$ e $\mathbf{w}' = \mathbf{v} - \overline{\mathbf{w}}$ ▮

Il risultato precedente chiarisce il significato geometrico della procedura di Gram-Schmidt per la determinazione di una base ortogonale [G41b09].

Le considerazioni precedenti valgono in particolare per $\mathsf{W} = \mathsf{V}$.

(2) Coroll.: Se $\mathfrak{N} = \langle \mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_d \rangle$ è una base ortonormale per uno spazio euclideo V, allora si ha la decomposizione

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_1 \rangle \mathbf{n}_1 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_r \rangle \mathbf{n}_d \ ▮$$

Possiamo anche affermare che la sequenza delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base ortonormale $\mathfrak{N}$ è

$$\mathbf{v}_{\mathfrak{N}} = \left(\left\langle \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_1 \rangle, ..., \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_d \rangle \right\rangle \right)^{\mathsf{T}} \ .$$

G48 d. forme hermitiane

G48d.01 In questa sezione consideriamo il caso in cui il campo è quello dei numeri complessi e ci si muove nello spazio a d dimensioni sui complessi $\mathbb{C}^{\times d}$. Per i suoi elementi (vettori bidimensionali) qui denotiamo la coniugazione complessa con la barra sovrapposta: $\overline{\mathsf{v}} := \overline{a + \mathrm{i}b} = a - \mathrm{i}b$, e non come in altri punti con l'esponente "*" .

Per il generico vettore usiamo notazioni come $\mathsf{v} = \langle v_1, v_2, ..., v_d \rangle = \langle a_1 + \mathrm{i}b_1, a_2 + \mathrm{i}b_2, ..., a_d + \mathrm{i}b_d \rangle$.
Se identifichiamo $\mathbb{C}^{\times d}$ con $\mathbb{R}^{\times 2\,d}$ siamo indotti a definire come lunghezza del vettore v l'espressione

$$|\mathsf{v}| \;:=\; \sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {a_d}^2 + {b_d}^2} = \sqrt{\overline{v_1}\, v_1 + \overline{v_2}\, v_2 + \cdots + \overline{v_d}\, v_d} \;.$$

Conseguentemente siamo indotti a definire per il prodotto scalare l'espressione

$$\mathsf{v} \cdot \mathsf{w} := \overline{v_1}\, v_1 + \overline{v_2}\, v_2 + \cdots + \overline{v_d}\, v_d \;.$$

Questa composizione viene detta **prodotto interno hermitiano** per lo spazio finitodimensionale sui complessi. Talora viene detto anche prodotto hermitiano standard. Si osserva che esso ha la proprietà della definitezza positiva, cioè $\forall \mathsf{v} \in \mathbb{C}^{\times d} \setminus \{\mathsf{0}_d\} \;:\; \mathsf{v} \cdot \mathsf{v} > 0$.

Il prodotto interno hermitiano ha le seguenti proprietà:

(1) $\forall \mathsf{v}, \mathsf{w}, \mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2 \in \mathbb{C}^{\times d}\;,\; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \;:\; \langle \mathsf{v}, \alpha \mathsf{w}_1 + \beta \mathsf{w}_2 \rangle = \alpha \langle \mathsf{v}, \mathsf{w}_1 \rangle + \beta \langle \mathsf{v}, \mathsf{w}_2 \rangle$
linearità nella seconda variabile;

(2) $\forall \mathsf{v}, \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, \mathsf{w} \in \mathbb{C}^{\times d}\;,\; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \;:\; \langle \alpha \mathsf{v}_1 + \beta \mathsf{v}_2, \mathsf{w} \rangle = \overline{\alpha} \langle \mathsf{v}_1, \mathsf{w} \rangle + \overline{\beta} \langle \mathsf{v}_2, \mathsf{w} \rangle$
linearità coniugata nella prima variabile;

(3) $\forall \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \mathbb{C}^{\times d} \;:\; \langle \mathsf{w}, \mathsf{v} \rangle = \overline{\langle \mathsf{v}, \mathsf{w} \rangle}$ **simmetria hermitiana** .

Lo spazio sui complessi munito del prodotto interno hermitiano può essere trattato come spazio metrico con tutti i vantaggi computazionali ed applicativi delle strutture di questa specie.

G48d.02 Sia V uno spazio vettoriale sui complessi; si dice **forma hermitiana** su V ogni H funzione di due variabili su V che goda delle proprietà d01(1)(2)(3).
Sia $\mathfrak{B} = \langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, ..., \mathsf{e}_d \rangle$ una base di $\mathbb{C}^{\times d}$; si definisce matrice per la base $\mathfrak{B}$ della forma hermitiana H la matrice

(1) $$\mathsf{H}_{\mathfrak{B}} \;:=\; \big[i, j = 1, .., d :|\; h_{i,j}\big] := \big[i, j = 1, .., d :|\; \mathsf{H}(\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_j)\big] \;.$$

In effetti la forma si può esprimere mediante le componenti dei due vettori argomento in ogni base $\mathfrak{B}$.
Se per i due argomenti generici scriviamo $\mathsf{v} = \sum_{i=1}^{d} v_{\mathsf{e},i}\, \mathsf{e}_i$ e $\mathsf{w} = \sum_{j=1}^{d} w_{\mathsf{e},j}\, \mathsf{e}_j$ e se per i vettori colonna delle loro componenti scriviamo, risp., $\mathsf{v}_{\mathfrak{B}}$ e $\mathsf{w}_{\mathfrak{B}}$ si ottiene l'espressione matriciale

(2) $$\mathsf{H}_{on\mathfrak{B}}(\mathsf{v}, \mathsf{w}) \;:=\; \overline{\mathsf{v}_{\mathfrak{B}}}^{\mathsf{T}} \cdot \mathsf{H}_{\mathfrak{B}} \cdot \mathsf{w}_{\mathfrak{B}} \;.$$

Le matrici delle forme hermitiane sono decisamente condizionate dalla proprietà di simmetria hermitiana d01(3):

(3) $$\forall i, j = 1, ..., d \;‘ :\;\; h_{i,j} \;:=\; \mathsf{H}(\mathsf{e}_i, \mathsf{e}_j) \;=\; \overline{\mathsf{H}(\mathsf{e}_j, \mathsf{e}_i)} \;=\; \overline{h_{j,i}} \;.$$

In termini più sintetici, per le matrici delle forme hermitiane abbiamo

(4) $$\mathsf{H}_{\mathfrak{B}} = \overline{\mathsf{H}_{\mathfrak{B}}}^{\mathsf{T}} = \overline{\mathsf{H}_{\mathfrak{B}}^{\mathsf{T}}} \;.$$

G48d.03 Conviene chiamare **aggiunta hermitiana di una matrice** generica $M \in \mathsf{Mat}_{d,e}$ la matrice trasposta della coniugata complessa della M, evidentemente uguale alla complessa coniugata della trasposta; per tale matrice usiamo la notazione

(1) $$M^\dagger \;:=\; \overline{M^\top} \;=\; \overline{M}^\top \in \mathsf{Mat}_{e,d}\ .$$

Per l'operazione di passaggio all'aggiunta hermitiana si trovano facilmente le seguenti uguaglianze.

(2) $$\forall M, N \in \mathsf{Mat}_d \;:\; (M+N)^\dagger \;=\; M^\dagger + N^\dagger\ ;$$

(3) $$\forall M, N \in \mathsf{Mat}_d \;:\; (M \cdot N)^\dagger \;=\; N^\dagger \cdot M^\dagger\ ;$$

(4) $$\forall M \in \mathsf{Mat}_d \;:\; (M^\dagger)^{-\mathbf{1}} \;= (M^{-\mathbf{1}})^\dagger\ ;$$

(5) $$\forall M \in \mathsf{Mat}_d \;:\; ((M^\dagger)^\dagger \;= M\ .$$

Osserviamo esplicitamente che si possono considerare anche gli aggiunti dei vettori riga o colonna.
Di conseguenza l'espressione d02(2) si può riscrivere

(6) $$\mathsf{H}(\mathsf{v},\mathsf{w}) \;=\; \mathsf{v}_{\mathfrak{B}}{}^\dagger \cdot \mathsf{H}_{\mathfrak{B}} \cdot \mathsf{w}_{\mathfrak{B}}\ .$$

Inoltre il prodotto interno hermitiano tra vettori di $\mathbb{C}^{\times d}$ si può riscrivere

(7) $$\langle \mathsf{v}, \mathsf{w}\rangle = \mathsf{v}_{\mathfrak{B}}{}^\dagger \cdot \mathsf{w}_{\mathfrak{B}}\ .$$

G48d.04 Una matrice quadrata H si dice **matrice hermitiana** o **matrice autoaggiunta** sse coincide con la propria aggiunta, cioè sse $H = H^\dagger$.
Le matrici hermitiane sono le matrici delle forme hermitiane.
La relazione caratteristica delle loro componenti, $h_{i,j} = \overline{h_{j,i}}$, implica che le entrate della diagonale sono numeri reali e che le entrate delle caselle al di sotto della diagonale si ottengono dalle simmetriche al di sopra della diagonale cambiando il loro segno. Esempi di matrici hermitiane sono

$$\begin{bmatrix} 2 & \mathsf{i} \\ -\mathsf{i} & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} -K & 1-2\mathsf{i} & 5\mathsf{i} \\ 1+2\mathsf{i} & 0 & 2+\mathsf{i}K \\ -5\mathsf{i} & 2-\mathsf{i}K & 2K \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{2} & 1-2\pi\mathsf{i} & \frac{1+\mathsf{i}}{\pi} & \sqrt{2\pi} \\ 1+2\pi\mathsf{i} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\mathsf{i}}{4}4 \\ \frac{1-\mathsf{i}}{\pi} & 0 & \frac{1}{2} & \alpha\,\mathsf{i} \\ \sqrt{2\pi} & \frac{\mathsf{i}}{4} & -\alpha\,\mathsf{i} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\ .$$

Si osserva che le matrici hermitiane a entrate reali sono caratterizzate dalla relazione $h_{i,j} = h_{j,i}$ e quindi sono le matrici reali simmetriche.

G48d.05 Il problema del cambiamento delle matrici che rappresentano una forma hermitiana in una qualsiasi base in conseguenza di un cambiamento della base si tratta in modo simile a quello visto in a06.

Consideriamo ancora per $\mathbb{C}^{\times d}$ due vettori v e w, due basi di $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ e sia P la matrice del loro collegamento. Usiamo inoltre le stesse scritture per le componenti omologhe e consideriamo la forma hermitiana H. Si giunge alla relazione

(1) $$\mathsf{v}_{\mathfrak{C}}{}^\dagger \cdot \mathsf{H}_{\mathfrak{C}} \cdot \mathsf{w}_{\mathfrak{C}} \;=\; (P\,\mathsf{v}_{\mathfrak{B}})^\dagger \cdot \mathsf{H}_{\mathfrak{C}} \cdot P\,\mathsf{w}_{\mathfrak{B}} \;=\; \mathsf{v}_{\mathfrak{B}}{}^\dagger \cdot P^\dagger \cdot \mathsf{H}_{\mathfrak{C}} \cdot P \cdot \mathsf{w}_{\mathfrak{B}}\ .$$

Quindi per il collegamento tra le matrici nelle due basi

(2) $$\mathsf{H}_{\mathfrak{B}} \;=\; P^\dagger \cdot \mathsf{H}_{\mathfrak{C}} \cdot P \quad \text{dove} \quad \mathsf{H}_{\mathfrak{C}} \;=\; (P^\dagger)^{-\mathbf{1}} \cdot \mathsf{H}_{\mathfrak{B}} \cdot P^{-\mathbf{1}}\ .$$

Per l'arbitrarietà di P nell'ambito delle matrici $d \times d$ invertibili, possiamo scrivere anche

(3) $$\mathsf{H}_{\mathfrak{C}} \;=\; Q \cdot \mathsf{H}_{\mathfrak{B}} \cdot Q^{\dagger} \;,$$

dove Q denota una arbitraria matrice invertibile.

G48d.06 Una matrice U di profilo $d \times d$ sui complessi si dice **matrice unitaria** sse per essa vale una delle seguenti uguaglianze evidentemente equivalenti

(1) $$\mathsf{U}^{\dagger} \cdot \mathsf{U} = \mathbf{1}_{d,d} \iff \mathsf{U} \cdot \mathsf{U}^{\dagger} = \mathbf{1}_{d,d} \iff \mathsf{U}^{\dagger} = \mathsf{U}^{-\mathbf{1}} \;.$$

Denotiamo con MatUn_d l'insieme delle matrici unitarie di profilo $d \times d$ e denotiamo con MatUn l'insieme delle matrici unitarie delle varie estensioni.

Esempi di matrici unitarie sono:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \mathsf{i} \\ 1 & -\mathsf{i} \end{bmatrix} \qquad , \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathsf{i}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathsf{i} \end{bmatrix} .$$

Si dimostrano facilmente i fatti che seguono riguardanti $\mathbb{C}^{\times d}$.

$$\mathsf{U}^{\dagger} \cdot \mathsf{U} = \mathbf{1}_{d,d} \iff \mathsf{U} \cdot \mathsf{U}^{\dagger} = \mathbf{1}_{d,d} \;\blacksquare$$

$$\forall\, d \in \mathbb{P} \;\;:\;\; \mathbf{1}_{d,d} \in \mathsf{MatUn} \;\blacksquare$$

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R} \;\;:\;\; \mathsf{U} \in \mathsf{MatUn} \implies \mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\theta}\, \mathsf{U} \in \mathsf{MatUn} \;\blacksquare$$

Per le matrici unitarie reali l'equazione caratteristica diviene $\mathsf{U}^{\top} \cdot \mathsf{U} = \mathbf{1}_{d,d}$; quindi le matrici unitarie reali sono le matrici reali ortogonali.
È opportuno sottolineare che le matrici unitarie svolgono per le forme hermitiane il ruolo che le matrici ortogonali svolgono per le forme bilineari.

G48d.07 Si osserva che il prodotto di due matrici unitarie è una matrice unitaria; infatti

$$\mathsf{U}, \mathsf{V} \in \mathsf{MatUn}_d \implies \mathsf{V}^{\dagger} \cdot \mathsf{U}^{\dagger} \cdot \mathsf{U} \cdot \mathsf{V} = \mathsf{V}^{\dagger} \cdot \mathbf{1}_{d,d} \cdot \mathsf{V} = \mathsf{V}^{\dagger} \cdot \mathsf{V} = \mathbf{1}_{d,d} \;\text{ ossia }\; (\mathsf{U} \cdot \mathsf{V})^{\dagger} \cdot \mathsf{U} \cdot \mathsf{V} = \mathbf{1}_{d,d} \;.$$

Dato che l'inversa di una matrice unitaria è unitaria e che la matrice unità è unitaria, si può affermare che le matrici unitarie di un dato profilo $d \times d$ munite del prodotto tra matrici, del passaggio all'inversa e della matrice unità costituiscono un gruppo; esso è chiamato **gruppo unitario** $d \times d$ e lo denotiamo con $\mathsf{Untr}_d(\mathbb{C})$.
Si tratta di un sottogruppo del gruppo delle matrici $d \times d$ sui complessi invertibili $\mathsf{GLFyRm}\ \mathrm{Grp}_d(\mathbb{C})$ di grande importanza per le sue varie applicazioni.
In effetti da d05(3) e d03(7) segue che le matrici unitarie rappresentano cambiamenti di base che lasciano invariato il prodotto interno hermitiano.

(2) Prop.: Consideriamo un cambiamento di base esprimibile come $\mathfrak{B} \cdot P = \mathfrak{C}$. Esso lascia invariato il prodotto interno hermitiano sse P è una matrice unitaria.

Dim.: Consideriamo due vettori arbitrari $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, il primo espresso nei due sistemi dai vettori colonna $\mathbf{v}_{\mathfrak{B}}$ e $\mathbf{v}_{\mathfrak{C}}$, il secondo rappresentato da $\mathbf{w}_{\mathfrak{B}}$ e $\mathbf{w}_{\mathfrak{C}}$.
Possiamo scrivere $\mathbf{v}_{\mathfrak{C}} = P \cdot \mathbf{v}_{\mathfrak{B}}$ e $\mathbf{w}_{\mathfrak{C}} = P \cdot \mathbf{w}_{\mathfrak{B}}$.
Se P lascia invariato il prodotto hermitiano $\mathbf{v}_{\mathfrak{C}}{}^{\dagger} \cdot \mathbf{w}_{\mathfrak{C}} = \mathbf{v}_{\mathfrak{B}}{}^{\dagger} \cdot P^{\dagger} \cdot P \cdot \mathbf{w}_{\mathfrak{B}}$ deve essere $P^{\dagger} \cdot P = \mathbf{1}_{d,d}$.
Viceversa se P è una matrice unitaria, cioè $P^{\dagger} \cdot P = \mathbf{1}_{d,d}$, allora per la catena di uguaglianze precedente il prodotto hermitiano viene lasciato invariato $\blacksquare$

Un cambiamento di base qualsiasi è invece esprimibile come $\mathfrak{B} \cdot Q = \mathfrak{C}$ con $Q \in \mathsf{GL}$FyRm Grp$_d(\mathbb{C})$ e per il generico prodotto interno hermitiano abbiamo

$$\mathbf{v}_{\mathfrak{B}}{}^{\dagger} \cdot \mathbf{w}_{\mathfrak{B}} \;=\; \mathbf{v}_{\mathfrak{C}}{}^{\dagger} \cdot Q^{\dagger}\ cdot Q \cdot \mathbf{w}_{\mathfrak{C}} \ .$$

G48d.08 Anche per le forme hermitiane si dice che i vettori **V** e **w** sono **vettori ortogonali per la forma hermitiana** sse $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$. Dato che $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}$, anche questa relazione di ortogonalità è simmetrica.

Si può quindi ripetere con modifiche ben comprensibili lo sviluppo precedente [b07] fino a giungere a una legge di Sylvester sulla segnatura della forma.

In particolare possiamo parlare di forma definita positiva sse $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{\times d}{}_{nz} \ :\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}_+$.

Inoltre una base di $\mathbb{C}^{\times d}$ $\mathfrak{N} = \langle \mathbf{n}_1, ..., \mathbf{n}_d \rangle$ va considerata **base ortonormale** sse

$$\forall i, j = 1, ..., d \ :\ \langle \mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j \rangle = \delta_{i,j} \ .$$

G48d.09 Chiameremo **spazio hermitiano** uno spazio sui numeri complessi che può essere munito di una forma hermitiana definita positiva. Qui prendiamo in esame solo spazi hermitiani finitodimensionali. Tra questi spazi si collocano quelli della forma $\mathbb{C}^{\times d}$ per ogni d intero positivo.
Ora ci limitiamo a enunciare due proprietà di questi spazi.

(1) Teorema Sia $\mathsf{H}(*, *)$ una forma hermitiana per uno spazio hermitiano V.
Esiste una base ortonormale per V sse **H** è una forma definita positiva.

(2) Prop.: Consideriamo come sopra uno spazio hermitiano V e una sua forma hermitiana **H**; inoltre sia W un sottospazio proprio di V.
Se la restrizione della **H** a $\mathsf{W} \times \mathsf{W}$ è una forma nondegenere, allora si ha la decomposizione $\mathsf{V} = \mathsf{W} \oplus \mathsf{W}^{\perp}$
.

G48 e. teorema spettrale per le forme bilineari

G48e.01 Consideriamo uno spazio hermitiano V a d dimensioni e due sue basi ortonormali $\mathfrak{M} = \langle m_1, m_2, ..., m_d \rangle$ e $\mathfrak{N} = \langle n_1, n_2, ..., n_d \rangle$.
Consideriamo inoltre una trasformazione lineare $T \in \lceil \mathsf{V} \longmapsto \mathsf{V} \rceil$ e denotiamo, risp., con $T_{\mathfrak{M}}$ e con $T_{\mathfrak{N}}$ le corrispondenti matrici nella base $\mathfrak{M}$ e nella base $\mathfrak{N}$. Inoltre scriviamo P la matrice che trasforma la $\mathfrak{M}$ nella $\mathfrak{N}$.

Stante la ortonormalità delle due basi, le matrici che esprimono il prodotto interno hermitiano nelle due basi devono ridursi alla matrice unità $\mathbf{I}_{d,d}$. Quindi deve essere $\mathbf{I} = P^\dagger \cdot \mathbf{I} \cdot P$ e pertanto $P^\dagger \cdot P = \mathbf{I}$, ovvero P deve essere matrice unitaria.

Ne consegue che per le due matrici rappresentanti T si ha

(1) $$T_{\mathfrak{N}} = P \cdot T_{\mathfrak{M}} \cdot P^\dagger \ .$$

(2) Prop.: (a) La matrice $T_{\mathfrak{M}}$ è hermitiana sse $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathsf{V} \ : \ \langle \mathbf{v}, T\mathbf{w} \rangle = \langle T\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

(b) La matrice $T_{\mathfrak{M}}$ è unitaria sse $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathsf{V} \ : \ \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle T\mathbf{v}, T\mathbf{w} \rangle$.

Nel caso (a) la funzione T viene chiamata anche **operatore hermitiano**; nel caso (b) viene chiamata anche **operatore unitario**

G48e.02 **(1) Teorema teorema spettrale in forma operatoriale**
Sia T un operatore hermitiano sullo spazio hermitiano V. Allora esiste una base ortonormale di V costituita dagli autovettori di T.

(2) Teorema teorema spettrale in forma matriciale
Sia M una matrice hermitiana di profilo $d \times d$.
Esiste una matrice unitaria U in grado di trasformarla nella matrice diagonale $\mathsf{U} \cdot \mathsf{M} \cdot (\mathsf{U}^\dagger)$.

Dim.: Si procede per induzione sul numero delle righe e delle colonne delle matrici. Ovviamente l'enunciato è vero per $d = 1$; assumiamo che valga anche per matrici $(d-1) \times (d-1)$.
Scegliamo un autovettore $\mathbf{a}$ di lunghezza 1 della M e sia a il corrispondente autovalore; si può individuare una base ortonormale per $\mathbb{C}^{\times d}$ che abbia $\mathbf{a}$ come primo versore. La trasformata M_1 della M in tale base deve avere un aspetto del tipo

$$\mathsf{M}_1 \ = \ \begin{bmatrix} a & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{d,2} & \dots & a_{d,d} \end{bmatrix} \ .$$

Dato che M_1 è matrice hermitiana, devono sussistere le uguaglianze $a_{1,2} = \cdots = a_{1,d} = 0$. Anche la sua sottomatrice relativa alle righe e colonne 2,3,...,d deve essere hermitiana e quindi diagonalizzabile per l'ipotesi induttiva. La corrispondente trasformata della matrice sarà quindi diagonale ▮

G48 f. teorema spettrale per gli operatori normali

G48f.01 Vogliamo ora individuare l'insieme delle matrici che possono essere trasformate in matrici similari diagonali, senza richiedere che queste ultime siano reali.

Una matrice M di profilo $d \times d$ si dice **matrice normale** sse commuta con la sua aggiunta, ossia sse $\mathsf{M} \cdot \mathsf{M}^\dagger = \mathsf{M}^\dagger \cdot \mathsf{M}$.

(1) Lemma: Sia M una matrice $d \times d$ e sia P una matrice unitaria $d \times d$.
M è normale $\iff$ $\mathsf{M}' := P \cdot \mathsf{M} \cdot P^\dagger$ è normale.

Dim.: "$\Longrightarrow$": Se M è normale deve essere
$\mathsf{M}' \cdot \mathsf{M}'^\dagger = P\,\mathsf{M}\,P^\dagger\,(P\,\mathsf{M}\,P^\dagger)^\dagger = P\,\mathsf{M}\,\mathsf{M}^\dagger\,P^\dagger = P\,\mathsf{M}^\dagger\,\mathsf{M}\,P^\dagger = (P\,\mathsf{M}\,P^\dagger)^\dagger\,(P\,\mathsf{M}\,P^\dagger) = \mathsf{M}'^\dagger\,\mathsf{M}'$.
di conseguenza M' è normale.
"$\Longleftarrow$": Si ottiene dalla implicazione sopra dimostrata semplicemente scambiando i ruoli di P e $P^\dagger$ ∎

G48f.02 Il lemma precedente rende lecito definire **operatore normale** sopra uno spazio hermitiano V ogni funzione lineare $T \in \lceil \mathsf{V} \longmapsto \mathsf{V} \rceil$ per la quale sia una matrice normale la sua matrice rappresentativa in una particolare base ortonormale e di conseguenza sia una matrice normale in una qualsiasi base ortonormale.

(1) Prop.: Una matrice sui complessi M è normale sse esiste una matrice unitaria P tale che $P \cdot \mathsf{M} \cdot P^\dagger$ sia diagonale ∎

Tra le matrici normali, oltre alle matrici hermitiane, si trovano le matrici unitarie.
Infatti, Se U è una matrice $d \times d$ unitaria, si ha $\mathsf{U}\,\mathsf{U}^\dagger = \mathsf{U}^\dagger \cdot \mathsf{U} = \mathbf{I}_{d,d}$, uguaglianza che mostra che U è normale.

G48 g. forme antisimmetriche

G48g.01 La teoria delle forma antisimmetriche è indipendente dal campo degli scalari.
In caratteristica 2 si ha $1+1=0$ e quindi per ogni scalare α si ha $\alpha=-\alpha$. Di conseguenza le condizioni di simmetria e quelle dell'antisimmetria risultano le stesse.

In effetti conviene modificare la definizione di antisimmetria quando il campo degli spazi vettoriali ha caratteristica 2.
Diciamo che una funzione bilineare $\mathsf{A}(*,*)$ sopra $\mathsf{V}\times\mathsf{V}$ è una **forma bilineare antisimmetrica** sse

(1) $$\forall\mathbf{v}\in\mathsf{V}\ :\ \mathsf{A}(\mathbf{v},\mathbf{v})=0\ .$$

Per una forma antisimmetrica A, esaminando lo sviluppo

$$\mathsf{A}(\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w})\ =\ 0\ =\ \mathsf{A}(\mathbf{v},\mathbf{v})+\mathsf{A}(\mathbf{v},\mathbf{w})+\mathsf{A}(\mathbf{w},\mathbf{v})+\mathsf{A}(\mathbf{w},\mathbf{w})\ =\ \mathsf{A}(\mathbf{v},\mathbf{w})+\mathsf{A}(\mathbf{w},\mathbf{v})\ ,$$

si ricava la regola

(2) $$\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathsf{V}\ :\ \langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle=-\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\ .$$

In conclusione con un campo di caratteristica uguale a 2 le forme antisimmetriche sono anche simmetriche e $\mathsf{A}(\mathbf{v},\mathbf{v})=0\iff\mathsf{A}(\mathbf{w},\mathbf{v})=-\mathsf{A}(\mathbf{v},\mathbf{w})$
Se invece il campo dello spazio ha caratteristica diversa da 2 le forme simmetriche per le quali $\mathsf{B}(\mathbf{v},\mathbf{v})=0$ costituiscono casi specifici.

G48g.02 Definiamo come matrice antisimmetrica una matrice $A=\big[i,j=1,...,d:\mid a_{i,j}\big]$ per la quale

(1) $$\forall i=1,...,d\ :\ a_{i,i}=0\qquad\text{e}\qquad\forall i,j=1,..,d\quad\text{con}\quad i\neq j\ :\ a_{i,j}=-a_{j,i}\ .$$

Se la caratteristica del campo è diversa da 2 abbiamo l'uguaglianza concisa

(2) $$A^{\mathsf{T}}=-A\ .$$

Chiaramente una forma antisimmetrica è rappresentata in una qualsiasi base da una matrice antisimmetrica e una forma che in una base viene rappresentata da una matrice antisimmetrica è una forma antisimmetrica.

G48g.03 **(1) Teorema** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione d e sia A una forma antisimmetrica nondegenere su V.
Allora d deve essere un intero pari ed esiste una base $\mathfrak{B}$ di V tale che la matrice A che rappresenta A in tale base, posto $m:=\dfrac{d}{2}$ ha la forma

(1) $$J_{2\,m}\ :=\ \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{m,m} & \mathbf{I}_{m,m}\\ \mathbf{I}_{m,m} & \mathbf{0}_{m,m}\end{bmatrix}\ ▮$$

Una base che porta alla rappresentazione precedente di una forma simplettica viene chiamata **base simplettica standard**.
Se scriviamo $\mathfrak{B}\ =\big\langle v_1,v_2,v_3,v_4,......,v_{2m-1},v_{2m}\big\rangle$ e riordiniamo i suoi vettori nella sequenza $\mathfrak{B}'\ :=\ \big\langle v_1,v_{m+1},v_2,v_{m+2},...,v_m,v_{2m}\big\rangle$, allora la matrice rappresentativa della forma diventa una matrice ottenibile mediante blocchi 2×2 della forma $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ collocati sulla diagonale principale e dalle rimanenti entrate uguali a 0.

Del teorema (1) si può dare la seguente versione matriciale.

(2) Coroll.: Sia A una matrice $d \times d$ nonsingolare antisimmetrica, allora d è pari e, posto $m := \frac{d}{2}$, esiste una matrice $Q \in \mathsf{GL}_d(\mathbb{F})$ tale che $Q \cdot A \cdot Q^\top$ è una matrice della forma J_{2m} ∎

G48g.04 Riesaminiamo il fatto che nell'ambito di uno spazio vettoriale V a d dimensioni sia le trasformazioni lineari che le forma bilineari sono rappresentabili mediante matrici $d \times d$.

Questo fatto può indurre a pensare che le teorie di questi due generi di entità siano equivalenti. In effetti si ha una differenza sostanziale che può scomparire solo in ben definite circostanze.

Se si effettua un cambiamento da una base $\mathfrak{B} = \langle \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_d \rangle$ ad una base $\mathfrak{C} = \langle \mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_d \rangle$ esprimibile come $\mathfrak{C} = \langle P\,\mathbf{b}_1, ..., P\,\mathbf{c}_d \rangle$, la matrice M, in quanto rappresentante di una forma bilineare viene cambiata nella $(P^\top)^{-1} \cdot \mathsf{M} \cdot P^{-1}$.

La stessa matrice, se ha il ruolo di rappresentante di una trasformazione lineare viene cambiata nella $P \cdot \mathsf{M} \cdot P^{-1}$.
Le due matrici sono diverse sse $(P^\top)^{-1} \neq P$.
Quando invece si applica un cambiamento di base mediante una matrice P ortogonale, allora $(P^\top)^{-1} = P$ e le matrici di forma e trasformazione lineare nella nuova base continuano a coincidere.
Da notare che questa invarianza costituisce un ulteriore vantaggio derivante dall'utilizzare basi ortonormali.