Capitolo G45:
Sistemi di equazioni lineari

Contenuti delle sezioni

G45:0.01 La soluzione dei sistemi di equazioni lineari costituisce una attività computazionale con moltissime applicazioni e quindi ampiamente studiata, sia sul piano delle proprietà generali, sia sul piano dell'efficienza e della versatilità degli algoritmi implementabili.
Questo capitolo intende presentare con una certa completezza i procedimenti risolutivi di base. Il discorso fa ampio riferimento al capitolo dedicato agli spazi vettoriali (G40:) e a quello che tratta matrici e determinanti (G42:) e per avere maggiore autonomia richiama vari loro risultati.

Tutte le considerazioni che seguono fanno riferimento ad un campo al quale si richiede solo di contenere il campo dei razionali. Spesso ci concentreremo sul campo $\mathbb{R}$ per la sua valenza geometrica e fisica; tuttavia per gran parte delle applicazioni computazionali e delle esemplificazioni risulta sufficiente il campo dei razionali $\mathbb{Q}$.. Dal lato opposto, molte finalità generali e molte applicazioni richiedono di servirsi del campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$, struttura con una portata operativa notevolmente superiore a quella del campo dei reali.

G45:a. Equazioni lineari e polinomiali

G45:a.01 Qui e nel seguito denotiamo con d ed e due interi maggiori o uguali a 2 e con $\mathbb{F}$ un campo che contiene il campo dei razionali $\mathbb{Q}$; come spesso accade, per un elemento di $\mathbb{F}$ si useranno il termine "scalare" (in contrapposizione con vettore) ed il termine "costante" (in contepposizione con variabile).

Denotiamo con x_1, x_2, ..., x_d d variabili nel campo $\mathbb{F}$. Si dice **equazione lineare** in tali variabili un'equazione che si può porre sotto la forma

(1) $$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_d\,x_d = b\ ,$$

dove a_1, a_2, ..., a_d e b sono dei determinati elementi di $\mathbb{F}$. Le x_i sono dette **incognite dell'equazione**; per ogni $i = 1, 2, ..., d$ la a_i si dice **coefficiente dell'incognita** x_i, mentre b si dice **termine noto** dell'equazione.

Si dice **soluzione** della precedente equazione ogni d-upla di scalari del campo $\langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_d\rangle \in \mathbb{F}^{\times d}$ tale che sia

(2) $$a_1\overline{x}_1 + a_2\overline{x}_2 + \cdots + a_d\overline{x}_d = b\ ;$$

si dice anche che una tale sequenza di valori **soddisfa l'equazione** data.

L'insieme $\mathcal{E}$ di tutte le soluzioni di un'equazione come la (1) (come per ogni altro genere di equazioni) viene chiamato **insieme soluzione** dell'equazione o anche **soluzione generale** dell'equazione. In genere esso si denota con $\mathsf{Soln}(\mathcal{E})$; solo in pochi contesti può essere opportuno far comparire l'ambiente $S = \mathbb{F}^{\times d}$ nel quale le soluzioni si trovano attraverso la scrittura $\mathsf{Soln}_S(\mathcal{E})$: ad esempio può essere opportuno distinguere se le soluzioni di un sistema di equazioni lineari in d incognite si collocano o si cercano in $\mathbb{R}^{\times d}$ o in $\mathbb{C}^{\times d}$.

Per trattare specifiche equazioni con un numero di incognite non superiore a 5 può risultare conveniente per la concisione e la chiarezza usare le incognite x, y, z, w e t invece, risp., di x_1, x_2, ... e x_5.

G45:a.02 Le equazioni lineari in una incognita hanno la semplice forma $a\,x = b$ e la loro soluzione si analizza facilmente. Si danno tre casi

(a) Se $a \neq 0$ si ha una sola soluzione data da $\overline{x} = b/a$.
(b) Se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'equazione non ha alcuna soluzione.
(c) Se $a = 0$ e $b = 0$, allora ogni scalare $\overline{x}$ costituisce una soluzione; in altre parole l'insieme delle soluzioni è $\mathbb{F}$.

Il caso (a) è il più utile nella pratica; va rilevato che, sostanzialmente, la soluzione corrisponde alla definizione della divisione di due elementi del campo.

Nel caso del campo dei razionali le soluzioni si trovano in modo particolarmente semplice servendosi di frazioni; in proposito si considerino i seguenti esempi:

$$3\,x = 5 \iff x = \frac{5}{3} \quad , \quad 12x = -39 \iff x = -\frac{13}{4} = 3.25 \quad .$$

In modo quasi altrettanto facile si risolvono le equazioni lineari nelle quali compaiono dei parametri come operandi di espressioni razionali:

$$\frac{p}{q}\,x = \frac{r}{s} \iff x = \frac{r\,q}{s\,p} \quad , \quad \frac{15}{2\,a\,b^2\,c}\,x = \frac{35}{6\,a^2\,c^4} \iff x = \frac{7\,a\,b^2}{18\,c^3}$$

Si osservi che l'esistenza di una e una sola soluzione equivale alla possibilità di collegare gli enunciati con il connettivo di equivalenza logica "$\iff$".

G45:a.03 La forma data in :a.01 per l'equazione lineare nelle incognite $x_1, ..., x_d$ viene detta **forma canonica** e riguarda le incognite considerate nell'ordine determinato dai relativi indici.

Spesso però si incontrano equazioni lineari, cioè equazioni nelle quali ciascuna incognita compare solo alla prima potenza, in forme diverse dalla canonica. Servendosi delle proprietà della somma e del prodotto (associatività, commutatività e distributività) esse si possono sempre condurre alla forma canonica.

Una relazione come la $3\,x - 2 = 5 + x$ va considerata equazione lineare in una incognita; si constata subito che essa equivale alla $2\,x = 3$, equazione attribuibile alla forma canonica $a\,x = b$.

Una relazione come la $3\,x - 2\,y + 7 = 6 - x$va considerata equazione lineare in due incognite; si constata subito che essa equivale alla $4x - 2y = -3$, equazione attribuibile alla forma canonica $a\,x + b\,y = c\,b$.

Anche quando si è fissato un ordine per le incognite, la forma canonica non è unica: insieme alla

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_d\,x_d \;=\; b$$

va considerata come equazione equivalente in forma canonica anche ogni equazione

$$\alpha\,a_1\,x_1 + \alpha\,a_2\,x_2 + \cdots + \alpha\,a_d\,x_d \;=\; b \quad ,$$

quale che sia $\alpha \in \mathbb{F}_{nz}$. Infatti ogni soluzione della prima equazione soddisfa anche la seconda e viceversa.

G45:a.04 Un'equazione lineare si dice **degenere** quando si può ricondurre alla forma

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + \cdots + 0\,x_d \;=\; b$$

Di questa classe di equazioni si analizzano subito le soluzioni. Se $b \neq 0$ non si ha alcuna soluzione; se $b = 0$ ogni d-upla di $\mathbb{F}^{\times d}$ è soluzione. Queste equazioni hanno interesse solo in quanto si possono incontrare nel corso di manipolazioni iniziate con equazioni non degeneri.

G45:a.05 Le equazioni lineari sono casi particolari delle **equazioni polinomiali**, equazioni della forma $P(x_1, x_2, ..., x_d) = 0$ dove P denota un polinomio in d variabili. Un'equazione polinomiale dunque consiste nell'uguagliare a 0 un'espressione costruita con costanti, variabili e operazioni di somma, differenza e prodotto. Esempi di equazioni polinomiali sono

$$9x^2 + 8\,y^3 \;=\; c \quad , \quad A\,x^2\,y^2 + B\,x\,y + C\,x\,z + D\,z^3 \;=\; E \quad , \quad a\,x^5 + b\,x^2\,y + c\,x\,y\,z + d\,y\,z^2 \;=\; H \quad .$$

Casi particolari di equazioni polinomiali sono le **equazioni quadratiche**, nelle quali intervengono monomi di grado 2 ed eventualmente monomi di gradi inferiori come le seguenti

$$ax^2 + by^2 = c \qquad \text{e} \qquad Ax^2 + Bxy + Cxz + Dz^2 + E(x+z) = F \quad .$$

Le equazioni quadratiche in due variabili costituiscono uno strumento esauriente per l'esame delle importanti figure geometrice chiamate sezioni coniche (v. G50:), mentre le equazioni quadratiche in tre variabili consentono di trattare in modo esauriente le superfici quadriche (v. G52:) .

Vengono studiati specificamente altri insiemi di equazioni polinomiali i cui nomi sono determinti dal massimo grado nelle incognite dei monomi che le costituiscono: si dicono, risp., **equazioni cubiche**, **quartiche**, **quintiche** ecc. le equazioni nelle quali intervengono monomi di grado, risp., 3, 4, 5 ecc. in genere insieme a monomi di gradi inferiori.
Due equazioni cubiche sono le seguenti:

$$a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad a\,x^3 + b\,x^2\,y + c\,x\,y\,z + d\,y\,z^2 \;=\; H \;.$$

G45:a.06 Un'**equazione polinomiale** si dice **omogenea** sse in forma canonica tutti i suoi addenti sono monomi dello stesso grado ed il termine noto è nullo. Le equazioni lineari omogenee hanno la forma

$$(1) \qquad a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_d\,x_d \;=\; 0 \;,$$

cioè sono le equazioni lineari con il termine noto uguale a 0. Le equazioni omogenee nelle incognite x e y quadratiche e cubiche presentano, risp., le forme

$$(2) \qquad a_{2,0}\,x^2 + a_{1,1}\,x\,y + a_{0,2}\,y^2 \;=\; 0 \qquad \text{e} \qquad a_{3,0}\,x^3 + a_{2,1}\,x^2\,y + a_{1,2}\,x\,y^2 + a_{0,3}\,y^3 \;=\; 0 \;.$$

Un'equazione cubica omogenea nelle incognite x, y e z è

$$x^3 + 2\,x\,z^2 - 6\,y^3 + 2\,x\,y \;=\; 0 \quad .$$

Chiaramente la sequenza costituita da d componenti uguali a 0 è una soluzione di ogni equazione polinomiale omogenea. Si constata facilmente anche che se $\langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_d \rangle$ è una soluzione di un'equazione polinomiale omogenea, sono soluzioni tutte le sequenze $\langle \alpha\,\overline{x}_1, \alpha\,\overline{x}_2, ..., \alpha\,\overline{x}_d \rangle$, quale che sia $\alpha \in \mathbb{F}_{nz}$; in altre parole l'insieme delle soluzioni è costituito da raggi dello spazio $\mathbb{F}^{\times d}$.

G45:a.07 Le equazioni lineari in due e tre incognite che non sono degeneri hanno semplici interpretazioni geometriche, risp., in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Per $d = 2$ l'equazione esprime una retta nel piano cartesiano (v. G30:b) . Consideriamo l'equazione nella forma $a\,x + b\,y + c = 0$; se $a \neq 0$ essa equivale alla $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$, se $b \neq 0$ equivale alla $y = -\frac{a}{b}\,x - \frac{c}{b}$; quindi si ha una infinità di soluzioni che si possono porre in modo semplice e diretto in corrispondenza biunivoca con i punti della retta, ovvero con $\mathbb{R}$.

Per $d = 3$ l'equazione lineare esprime un piano nello spazio tridimensionale sui reali (v. G36b). Infatti se consideriamo l'equazione nella forma $a\,x + b\,y + c\,z + s = 0$, nel caso sia $a \neq 0$, essa equivale alla $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{s}{a}$; espressioni analoghe si deducono quando $b \neq 0$ e quando $c \neq 0$; questo dice che si ha una infinità di soluzioni che si possono porre in corrispondenza biunivoca semplice e diretta con i punti del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Per $d = 4, 5, ...$ l'equazione lineare esprime un **iperpiano** di $\mathbb{R}^{\times d}$, ossia un sottospazio proprio massimale, ovvero un sottospazio di $\mathbb{R}^{\times d}$ avente $d-1$ dimensioni; anche in questi casi si hanno infinite soluzioni che si possono porre significativamente in corrispondenza biunivoca con gli elementi dello spazio $\mathbb{R}^{\times(d-1)}$. Nei tre casi considerati si usa dire, risp., che vi sono ∞^1, ∞^2 e ∞^{d-1} soluzioni.

G45:b. Sistemi lineari

G45:b.01 Consideriamo il **sistema di** e **equazioni lineari** in d incognite sul campo $\mathbb{F}$:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,d}x_d = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,d}x_d = b_2 \\ \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{e,1}x_1 + a_{e,2}x_2 + \cdots + a_{e,d}x_d = b_e \end{cases} . \tag{1}$$

Il termine "sistema di equazioni lineari" in molti contesti si semplifica in **sistema lineare**; in questo capitolo useremo anche il solo sostantivo "sistema" o l'abbreviazione **LEsys**. Inoltre denoteremo con $\boldsymbol{LEsys}_{e,d}$ l'insieme dei sistemi di e equazioni lineari in d incognite sul generico campo $\mathbb{F}$.

Se $e = d$ il sistema di equazioni avente il numero delle equazioni uguale al numero delle incognite viene detto **sistema quadrato** di ordine d; la notazione per l'insieme di tali sistemi $\boldsymbol{LEsys}_{d,d}$ viene anche abbreviata con $\boldsymbol{LEsys}_d$.

La matrice A di profilo $e \times d$ formata dagli $a_{j,i}$ si dice **matrice dei coefficienti del sistema** $\mathcal{S}$ e si può individuare con $mat_c(\mathcal{S})$; il vettore formato dai b_i viene chiamato **vettore dei termini noti del sistema** $\mathcal{S}$. Il sistema introdotto con la (1) si può individuare scrivendo $\mathcal{S} = \langle A, \mathsf{b}\rangle^{?\mathsf{x}}$ o più concisamente scrivendo $A\,\mathsf{x} = \mathsf{b}$.

G45:b.02 La matrice $A \,⫼\, \mathsf{b}$ ottenuta affiancando alla A il vettore colonna b si dice **matrice orlata** o **matrice completa** del sistema e si può individuare scrivendo $mat_o(\mathcal{S})$.

Fissata una sequenza di d incognite, si ha corrispondenza biunivoca tra i sistemi lineari in tali incognite e le corrispondenti matrici orlate. Lo stretto collegamento fra sistemi lineari e matrici orlate consente di utilizzare per i sistemi lineari e le loro equazioni molti termini utilizzati per le matrici e le loro linee.

Nelseguito abbrevieremo il vettore colonna di e zeri $\mathsf{0}_{[e,1]}$ con $\mathsf{0}_e$.

Il sistema di equazioni $A\,\mathsf{x} = \mathsf{0}_e$ si dice **sistema omogeneo** associato al sistema (1), mentre quest'ultimo si dice essere uno dei **sistemi lineari completi** aventi $A\,\mathsf{x} = \mathsf{0}_e$ come corrispondente omogeneo.

Abbrevieremo poi con **LEsys triangolare** il termine "sistema di equazioni lineari con matrice dei coefficienti (quadrata e) triangolare superiore"; chiamiamo **LEsys diagonale** un "sistema di equazioni lineari con matrice dei coefficienti (quadrata e) diagonale"; diciamo **LEsys alto** un sistema con più equazioni che incognite (cioè con le notazioni di (1) un sistema con $e > d$); diciamo invece **LEsys largo** un sistema con più incognite che equazioni (nel caso (1) con $d < e$).

G45:b.03 Un LEsys si dice **sistema risolubile** o anche **coerente**, **possibile** o **siatema di equazioni compatibili** sse ammette una o più soluzioni, ossia sse per l'insieme delle sue soluzioni $\mathsf{Soln}(\mathcal{S}) \neq \emptyset$. Si dice invece **sistema nonrisolubile** o anche **incoerente**, **impossibile** o **sistema di equazioni incompatibili** sse non ammette soluzioni, ovvero sse $\mathsf{Soln}(\mathcal{S}) = \emptyset$.

Un sistema risolubile si dice **sistema determinato** sse ammette una e una sola soluzione, si dice **indeterminato** sse ne ammette più d'una (in questo caso, come vedremo, ne ammette infinite).

Il sistema $A\,\mathsf{x} = \mathsf{b}$ di profilo $e \times d$ ha due interpretazioni che si rivelano assai utili.

La matrice A si può considerare come trasformazione lineare del genere $\{\mathbb{F}^{\times d} \longmapsto \mathbb{F}^{\times e}\}$ e la soluzione del sistema come la individuazione del vettore di $\mathbb{F}^{\times d}$ che A trasforma nel vettore noto $\mathsf{b} \in \mathbb{F}^{\times e}$; si dice quindi che si tratta della soluzione di un problema inverso. Ne segue in particolare che il sistema è risolubile solo se $\mathsf{b} \in \boldsymbol{im}(A)$.

Una seconda interpretazione si ottiene riscrivendo il sistema come equazione riguardante vettori colonna di profilo $e \times 1$:

$$A_{*,1}\,x_1 + A_{*,2}\,x_1 + \cdots + A_{*,d}\,x_d \;=\; \mathsf{b}\ .$$

La soluzione del sistema si può quindi considerare come la determinazione delle possibilità di esprimere b come combinazione lineare dei d vettori colonna che affiancati costituiscono la matrice A.

Ne segue in particolare che se $r := \mathrm{rnk}(A)$, di questi vettori colonna se ne possono usare solo r, da scegliersi opportunamente, i rimanenti $d - r$ essendo sostituibili.

G45:b.04 Consideriamo un LEsys $d \times d$ omogeneo $A\,\mathsf{x} = \mathsf{0}_d$.

Esso evidentemente ammette sempre la soluzione $\mathsf{x} = \mathsf{0}_d$, chiamata talora **soluzione banale**; questa soluzione è unica se $\det A \neq 0$ e il sistema può ammettere altre soluzioni solo se $\det A = 0$. L'insieme della soluzioni è, per definizione, il nucleo della A, $\boldsymbol{ker}(A)$, cioè il sottospazio di $\mathbb{F}^{\times d}$ il cui numero delle dimensioni è chiamato nullità, si denota con $\mathrm{nlty}(A)$ ed è legato al rango della matrice dalla relazione $\mathrm{nlty}(A) = d - \mathrm{rnk}(A)$.

Il nucleo della matrice A si può riferire ad una base di $n := \mathrm{nlty}(A)$ vettori che possiamo denotare con $\{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n\}$; i vettori $\mathbf{f}_h$ si dicono **vettori liberi** per la A.

(1) Prop.: Consideriamo un LEsys quadrato $A\,\mathsf{x} = \mathsf{b}$ con $\det(A) = 0$ e sia p una sua soluzione particolare, cioè sia $A\,\mathsf{p} = \mathsf{b}$; inoltre si conoscano n vettori liberi per la $A \searrow \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n$. Anche ogni vettore della forma $\mathsf{p} + \sum_{h=1}^{n} \alpha_h\,\mathbf{f}_h$ è soluzione dell'equazione, quali che siano gli scalari $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Dim.: Per ogni $h = 1, ..., n$ si ha $A\,\mathbf{f}_h = \mathsf{0}_d$ ∎

L'insieme delle soluzioni di un LEsys quadrato indeterminato $\langle A, \mathsf{b}\rangle$, sistema caratterizzato dall'uguaglianza $\det(A) = 0$, costituisce quindi un sottospazio affine di $\mathbb{F}^{\times d}$ le cui dimensioni sono date da $\mathrm{nlty}(A) = d - \mathrm{rnk}(A)$. Questo giustifica l'uso del termine **spazio delle soluzioni** per tale insieme di vettori.

G45:b.05 Un esempio della situazione descritta in precedenza che può essere interpretato geometricamente in modo assai semplice è fornito dal sistema

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases} .$$

La Le due equazioni del sistema omogeneo, la $x - 2y = 0$ e $3x - 6y = 9$, esprimono entrambe, la retta per l'origine $y = \frac{1}{2}x$, sottospazio vettoriale monodimensionale di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. In accordo con questo la matrice A del sistema ha rango 1 e nullità 1 ed il suo nucleo è la suddetta retta.
Tutti i punti della retta $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$, e solo essi, forniscono soluzioni al sistema; questa retta è un sottospazio affine di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ed è ottenibile con una traslazione dal sottospazio espresso dall'equazione $y = \frac{1}{2}x$.

G45:b.06 Consideriamo due LEsys $\mathcal{S}_1$ ed $\mathcal{S}_2$ che riguardano la stessa sequenza di incognite **x**.
Si dice **LEsys congiunzione** di $\mathcal{S}_1$ ed $\mathcal{S}_2$, e si denota con $\mathcal{S}_1 \wedge \mathcal{S}_2$, il sistema costituito unendo le equazioni dei due LEsys dati; la sua matrice orlata dei coefficienti si ottiene per sovrapposizione delle matrici orlate dei due sistemi: $mat_o(\mathcal{S}_1 \wedge \mathcal{S}_2) = mat_o(\mathcal{S}_1) \boxminus mat_o(\mathcal{S}_2)$.
Chiaramente lo spazio delle soluzioni del sistema $\mathcal{S}_1 \wedge \mathcal{S}_2$ è l'intersezione degli spazi delle soluzioni dei sistemi dati:

$$\mathsf{Soln}(\mathcal{S}_1 \wedge \mathcal{S}_2) = \mathsf{Soln}(\mathcal{S}_1) \cap \mathsf{Soln}(\mathcal{S}_2) .$$

G45:c. Soluzione di sistema quadrato mediante matrice inversa e regola di Cramer

G45:c.01 La possibilità di stabilire se una matrice quadrata è invertibile e il calcolo effettivo della sua matrice inversa costituiscono operazioni di grande importanza generale e applicativa. Infatti la conoscenza di una matrice inversa fornisce la possibilità di controllare nei dettagli l'azione di una trasformazione inversa e molti problemi importanti si possono formulare come determinazione di punti di uno spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ che vengono mandati da una trasformazione lineare in altrettanti punti conosciuti dello stesso spazio o di uno spazio della forma $\mathbb{F}^{\times e}$.

Qui consideriamo una generica matrice quadrata A di profilo $d \times d$ e ci poniamo il problema se possiede l'inversa A^{-1}, cioè la matrice $d \times d$ tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbf{1}_{[d]}$, inoltre cerchiamo qualche formula o qualche procedimento che consente di calcolare questa A^{-1}, possibilmente in modo rapido e/o versatile.

G45:c.02 Prop. Il determinante di una matrice A^{-1} inversa di una data A è il reciproco del suo determinante: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Dim.: Se d è l'ordine delle matrici, si ha $A \cdot A^{-1} = \mathbf{1}_d$ e dal teorema di Binet (v. G42:d.07) segue $\det(A)\ \det(A^{-1}) = \det(\mathbf{1}_d) = 1$ ▮

G45:c.03 Prop. Una matrice quadrata è invertibile sse è nonsingolare.

Dim.: Dall'uguaglianza precedente segue che una matrice dotata di inversa non può avere il determinante uguale a 0 ▮

G45:c.04 Teorema Una matrice quadrata di ordine d non singolare è invertibile ed ha come inversa la matrice

$$(1) \qquad A^{-\mathbf{1}} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \overline{e}_{1,1} & \overline{e}_{1,2} & \dots & \overline{e}_{1,d} \\ \overline{e}_{2,1} & \overline{e}_{2,2} & \dots & \overline{e}_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{e}_{d,1} & \overline{e}_{d,2} & \dots & \overline{e}_{d,d} \end{bmatrix}^{\top} .$$

nella quale interviene la trasposta della matrice le cui entrate $\overline{a}_{i,j}$ sono i complementi algebrici delle entrate $a_{i,j}$ della matrice data.

Dim.: Le equazioni G42:e.05(1) e G42:e.05(2) si possono riscrivere, risp., come

$$(2) \qquad \forall h, p = 1, ..., d \; : \; \sum_{j=1}^{d} a_{h,j} (A^{-\mathbf{1}})_{j,p} = \delta_{h,p} \; ,$$

$$(3) \qquad \forall q, k = 1, ..., d \; : \; \sum_{i=1}^{d} (A^{-\mathbf{1}})_{q,i} a_{i,k} = \delta_{q,k} \; .$$

Queste costituiscono una formulazione dell'enunciato ▮

G45:c.05 Le formule precedenti consentono di determinare effettivamente la inversa di una matrice con determinante non nullo e, in linea di principio, di risolvere i sistemi lineari di d equazioni in d incognite.

$$(1) \qquad A \boldsymbol{+} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} = A^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{+} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{bmatrix} .$$

Esplicitiamo l'espressione che fornisce la generica componente del vettore soluzione

$$(2) \qquad \begin{aligned} \forall j = 1, ..., d \; : \; x_j &= \sum_{h=1}^{d} (A^{-\mathbf{1}})_{j,h} b_h = \frac{1}{\det(A)} \sum_{h=1}^{d} (-1)^{j+h} \det\left(A^{\top}{}_{\mathrm{E}_{j,h}} \right) b_h \\ &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{h=1}^{d} b_h (-1)^{h+j} \det\left(A_{\mathrm{E}_{h,j}} \right) \end{aligned} .$$

Tenendo conto degli sviluppi G42:e.02(1) e G42:e.02(2), l'espressione trovata dice che la j-esima componente della soluzione del sistema lineare $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\det(A) \neq 0$ è data dal rapporto fra il determinante della matrice ottenuta dalla A sostituendo la colonna j, $A_{*,j}$, con il vettore colonna dei termini noti $\mathbf{b}$. Questo enunciato viene chiamato **regola di Cramer** (v. [[en:Gabriel Cramer]])

Questa regola spesso viene ricordata con la scrittura

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \; ,$$

dove Δ denota il determinante della matrice dei coefficienti e per ogni $j = 1, ..., d$ Δ_j rappresenta il determinante della matrice ottenuta dalla a sostituendo la sua j-esima colonna con la $\mathbf{b}$.

G45:c.06 Esplicitiamo la regola di Cramer per i sistemi 2×2 e 3×3.

Consideriamo il sistema lineare

$$(1) \qquad \begin{cases} ax + by = P \\ cx + dy = Q \end{cases} .$$

La regola di Cramer afferma che la soluzione è data da

$$(2)\qquad x=\frac{\begin{vmatrix}P & b\\ Q & d\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}=\frac{Pd-bQ}{ad-bc}\quad,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a & P\\ c & Q\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}=\frac{aQ-Pc}{ad-bc}\ .$$

Consideriamo il sistema lineare

$$(3)\qquad \begin{cases} ax+by+cz=P\\ dx+ey+fz=Q\\ gx+hy+iz=R\end{cases}\ .$$

La regola di Cramer conduce alla seguente soluzione

$$(4)\qquad x=\frac{\begin{vmatrix}P & b & c\\ Q & e & f\\ R & h & i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a & P & c\\ d & Q & f\\ g & R & i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}a & b & P\\ d & e & Q\\ g & h & R\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}}\qquad .$$

G45:d. Sistemi con poche equazioni o poche incognite

G45:d.01 Ci proponiamo ora di affrontare il caso generale degli LEsys non necessariamente quadrati con il **metodo di eliminazione di Gauss-Jordan**, procedimento che non è esprimibile con formule sintetiche come quelle precedentemente trovate, ma che, oltre a portare a risultati esaurienti per tutti i sistemi, consente di raggiungerli in modo efficiente, cioè eseguendo operazioni in numero mediamente molto inferiore di quello richiesto da procedimenti che prevedono calcoli di determinanti. Inoltre questo metodo consente di chiarire importanti proprietà generali degli insiemi di matrici.

Prima di esporre il di sostituzione prendiamo in esame alcuni LEsys con poche equazioni o con poche incognite, per introdurre in modo graduale i suoi meccanismi di portata generale in relazione alla ampia casistica dei LEsys. In tutti i casi evitiamo di considerare la presenza di equazioni degeneri, cioè di matrici con qualche riga di zeri, equazioni che consentono di decidere rapidamente l'impossibilità della soluzione aut si rivelano superflue e si possono tranquillamente trascurare. Tuttavia delle equazioni degeneri possono presentarsi in qualcuna delle fasi attraverso le quali si svolge qualche procedimento risolutivo.

Successivamente illustreremo una semplificazione del procedimento che riguarda solo matrici.

G45:d.02 Consideriamo un sistema di $e>1$ equazioni in una sola incognita, cioè un sistema della forma

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{1,1}\,x= & b_1\\ a_{2,1}\,x= & b_2\\ \quad\vdots & \vdots\\ a_{e,1}\,x= & b_e\end{cases}\ .$$

Evidentemente esso ha una sola soluzione $x=b_1/a_{1,1}$ sse tutte le equazioni sono equivalenti, cioè sse $\forall j=2,...,e:\ b_j/a_{j,1}=b_1/a_{1,1}$ (per la richiesta di non degenerazione delle equazioni di partenza tutti gli $a_{j,1}$ sono diversi da 0): in caso contrario le equazioni del sistema sono incoerenti.

G45:d.03 Passiamo a un sistema di $e > 2$ equazioni in 2 incognite, cioè a un sistema della forma

(1) $$\begin{cases} a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y = & b_1 \\ a_{2,1}\,x + a_{2,2}\,y = & b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ a_{e,1}\,x + a_{e,2}\,y = & b_e \end{cases} .$$

Questo sistema è associato alla sequenza delle e rette del piano cartesiano

(2) $$\forall j = 1, ..., e \;\; : \;\; \mathcal{R}_j = \mathsf{Soln}(a_{j,1}\,x + a_{j,2}y = b_j) = Rtlin_g(a_{j,1}, a_{j,2}, -b_j) \; .$$

Il sistema è determinato sse le rette appartengono ad uno stesso fascio il cui centro fornisce la soluzione; questo (v. G30b05) equivale alla possibilità di trovare due equazioni del sistema che forniscono due rette diverse e tali che le rimanenti $e-2$ equazioni si possano esprimere come loro combinazioni lineari. In altre parole si devono avere due rette con esattamente un punto in comune e le rimanenti devono potersi esprimere come loro combinazioni lineari.

Se tutte le rette coincidono il sistema è indeterminato e la soluzione è l'insieme dei punti di tale retta; questo accade sse valgono le seguenti relazioni di proporzionalità

(3) $$\forall j = 2, ..., e \;\; : \;\; \ulcorner \frac{a_{j,1}}{a_{1,1}} = \frac{a_{j,2}}{a_{1,2}} = \frac{b_j}{b_1} \urcorner \; .$$

Queste equivalgono al fatto che le righe della matrice orlata esprimono vettori di $\mathbb{R}^{\times 3}$ proporzionali, ovvero che sia la matrice dei coefficienti del sistema che la corrispondente orlata hanno rango 1 (se ne trovassimo una di rango 0, allora tutte le equazioni sarebbero degeneri).

Se si hanno due rette parallele non coincidenti il sistema è impossibile: infatti un sottosistema della forma

(3) $$\begin{cases} a_{h,1}x + a_{h,2}y = b_h \\ \alpha a_{h,1}x + \alpha a_{h,2}y = \beta\alpha b_h \end{cases} \qquad \text{con} \quad \beta \neq 1 \quad \text{e} \quad b_h \neq 0 \quad ,$$

implica la relazione assurda $0x + 0y = \alpha(\beta - 1)$; si noti che la richiesta di parallelismo esclude che possa essere $\alpha = 0$.

G45:d.04 Una interpretazione geometrica analoga e solo un po' più articolata si ha per un sistema di $e > 3$ equazioni in 3 incognite, cioè a un sistema della forma

(1) $$\begin{cases} a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y + a_{1,3}\,z &= b_1 \\ a_{2,1}\,x + a_{2,2}\,y + a_{2,3}\,z &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ a_{e,1}\,x + a_{e,2}\,y + a_{e,3}\,z &= b_e \end{cases} .$$

Questo sistema si associa alla sequenza degli e piani dello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^{\times 3}$

$$\Pi_j = \mathsf{Soln}(a_{j,1}\,x + a_{j,2}\,y + a_{j,3}\,z \;=\; b_j) \;=\; Plan(a_{j,1}, a_{j,2}, a_{j,3}, -b_j) \; .$$

Il sistema è determinato sse tutti i piani appartengono ad una stessa stella il cui centro fornisce la soluzione; questo (v. G36b04) equivale alla possibilità di trovare tre equazioni che forniscono tre piani che si incontrano in un solo punto e di esprimere le rimanenti $e-3$ equazioni come combinazioni lineari delle tre individuate.

G45:d.05 Consideriamo un sistema di 2 equazioni in $d > 2$ incognite

(1) $$\begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + a_{1,3}\,x_3 + \cdots + a_{1,d}\,x_d &= b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + a_{2,3}\,x_3 + \cdots + a_{2,d}\,x_d &= b_2 \end{cases} .$$

È naturale per $j = 1, ..., d$ chiedere se sia ${a_{1,j}}^2 + {a_{2,j}}^2 > 0$, perché in caso contrario la incognita x_j non avrebbe interesse. Supponiamo dunque che la disuguaglianza valga per ogni j e in particolare supponiamo ad esempio che sia $a_{1,1} \neq 0$: in caso contrario basterebbe scambiare le due equazioni. Sottraendo alla seconda equazione la prima moltiplicata per $\dfrac{a_{2,1}}{a_{1,1}}$ si riduce a zero il coefficiente di x_1 nella seconda equazione ottenendo il sistema equivalente della forma

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + a_{1,3}\, x_3 + \cdots + a_{1,d}\, x_d \;=\; b_1 \\ \qquad\qquad \overline{a}_{2,2}\, x_2 + \overline{a}_{2,3}\, x_3 + \cdots + \overline{a}_{2,d}\, x_3 \;=\; \overline{b}_2 \end{cases} .$$

Ora vanno distinti due casi.

(a) Tutti i coefficienti della seconda equazione sono nulli.

Nel sottocaso $\overline{b}_2 = 0$ la seconda equazione risulta inutile e si ricade nella equazione trattata in :a.07. In effetti le due equazioni di (1) si equivalgono e la soluzione del sistema è un iperpiano esprimibile come

$$(3) \qquad x_1 \;=\; \frac{1}{a_{1,1}}(b_1 - a_{1,2}\, x_2 - a_{1,3}\, x_3 - \cdots - a_{1,d}\, x_d) \;.$$

Dunque il sistema in esame è indeterminato.

Nel sottocaso $\overline{b}_2 \neq 0$ la seconda equazione non è risolvibile ed il sistema (1) è privo di soluzione; geometricamente le due equazioni di (1) esprimono due iperpiani paralleli, privi di punti comuni.

(b) Qualche coefficiente della seconda equazione di (2) è diverso da 0; supponiamo, per semplicità, che sia il coefficiente di x_2 (in caso contrario basta cambiare i deponenti delle incognite). Sottraendo alla prima equazione la seconda moltiplicata per $\dfrac{a_{1,2}}{a_{2,2}}$ si annulla il coefficiente di x_2 nella prima equazione e si ha il sistema della forma

$$(4) \qquad \begin{cases} a_{1,1}\, x_1 \qquad\qquad + a'_{1,3}\, x_3 + \cdots + a'_{1,d}\, x_d \;=\; b_1 \\ \qquad \overline{a}_{2,2}\, x_2 \;\; + \overline{a}_{2,3}\, x_3 + \cdots + \overline{a}_{2,d}\, x_d \;=\; \overline{b}_2 \end{cases} .$$

Da questo si ottengono le soluzioni del sistema di partenza date dalle espressioni

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 \;=\; \dfrac{1}{a_{1,1}}(b_1 - a'_{1,3}\, x_3 - \cdots - a'_{1,d}\, x_d) \\ x_2 \;=\; \dfrac{1}{\overline{a}_{2,2}}(b_2 - \overline{a}_{2,3}\, x_3 - \cdots - \overline{a}_{2,d}\, x_d) \end{cases} .$$

Queste scritture costituiscono le espressioni parametriche dei punti di un sottospazio affine di $d-2$ dimensioni di $\mathbb{R}^{\times d}$. Il sistema quindi è indeterminato e possiede ∞^{d-2} soluzioni.

Si osserva che se una variabile x_h non compare nei secondi membri a causa dell'annullarsi di $a'_{1,h}$ e di $\overline{a}_{2,h}$, si ha che il sottospazio affine delle soluzioni è parallelo all'asse Ox_h; infatti ogni modifica di questa coordinata mantiene l'appartenenza o la non appartenenza di un punto di $\mathbb{R}^{\times d}$ al sottospazio affine delle soluzioni.

G45:d.06 Considerazioni solo un po' più articolate si possono svolgere sopra un sistema di 3 equazioni in $d > 3$ incognite

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + a_{1,3}\, x_3 + \cdots + a_{1,d}\, x_d \;= b_1 \\ a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + a_{2,3}\, x_3 + \cdots + a_{2,d}\, x_d \;= b_2 \\ a_{3,1}\, x_1 + a_{3,2}\, x_2 + a_{3,3}\, x_3 + \cdots + a_{3,d}\, x_d \;= b_3 \end{cases} .$$

Ancora possiamo supporre che sia $a_{1,1} \neq 0$ e sottraendo alla seconda equazione la prima moltiplicata per $\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}$ e sottraendo alla terza la prima moltiplicata per $\frac{a_{3,1}}{a_{1,1}}$ si ottiene il sistema della forma

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{1,1}\,x_1 & & +a'_{1,3}\,x_3 + \cdots + a'_{1,d}\,x_d & = & b_1 \\ & \overline{a}_{2,2}\,x_2 & +\overline{a}_{2,3}\,x_3 + \cdots \overline{a}_{2,d}\,x_d & = & \overline{b}_2 \\ & \overline{a}_{3,2}\,x_2 & +\overline{a}_{3,3}\,x_3 + \cdots + \overline{a}_{3,d}\,x_d & = & \overline{b}_3 \end{cases} .$$

Ancora si hanno le possibilità di equazioni degeneri analizzabili in modo simile a quanto fatto in :d.05 . In assenza di equazioni degeneri, con una manovra analoga si semplifica ulteriormente il sistema in modo da trovare un'espressione per una variabile x_j per ogni $j \geq 3$, a meno di aver trasformata la terza equazione in una degenere; a questo punto e procedendo a ritroso si trovano espressioni per x_2 e x_1 interpretabili come espressioni parametriche del sottospazio affine di $d-3$ dimensioni costituito dalle soluzioni ricercate.

G45:e. Matrici elementari ed equivalenze indotte tra matrici

G45:e.01 Si dicono **trasformazioni elementari-ρ** delle matrici, non necessariamente quadrate, le seguenti trasformazioni

(ρX) scambio di due righe,

(ρM) moltiplicazione di una riga per uno scalare diverso da 0,

(ρA) addizione ad una riga di un'altra.

Si tratta di trasformazioni invertibili: lo scambio di due righe è un'involuzione che coincide con la propria inversa; l'inversa della moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo α è la moltiplicazione della stessa riga per $1/\alpha$; la sottrazione della riga j'' dalla riga j' è l'inversa dell'addizione della riga j'' alla riga j'.

Si verifica che le trasformazioni elementari-ρ sono trasformazioni lineari delle matrici; più precisamente vedremo in :e.03 che si possono ottenere moltiplicando a sinistra la matrice da trasformare per opportune matrici invertibili.

Si osserva anche che la sostituzione di una riga con una combinazione lineare di alcune righe tra le quali compare la stessa riga interessata è ottenibile componendo opportune trasformazioni dei tipi (ρM) e (ρA).

Traspostamente si dicono **trasformazioni elementari-κ** delle matrici, quadrate o meno, le seguenti trasformazioni

(κX) scambio di due colonne,

(κM) moltiplicazione di una colonna per uno scalare diverso da 0,

(κA) addizione ad una colonna di un'altra colonna.

Anche queste trasformazioni sono trasformazioni lineari delle matrici e vedremo che si possono ottenere moltiplicando le matrici a destra per particolari matrici invertibili.

G45:e.02 Esamineremo le trasformazioni elementari da applicare alla generica matrice A di profilo $e \times d$ e faremo uso di notazioni specifiche che identificano le righe di tale matrice con indici, tipici j e k, che corrono da 1 ad e e identificano le colonne con indici, tipici i ed h, che corrono da 1 a d.

Per la A la riga j $A_{j,*}$ la scriveremo anche ρ_j e la colonna i-esima, cioè $A_{*,i}$, la denoteremo anche con κ_i.

Per due indici $j, k = 1, ..., e$ diversi tra di loro denotiamo con $\lceil_\rho j \leftrightarrow k \rceil$ lo scambio della riga j con la ρk; se α è uno scalare non nullo, denotiamo con $\lceil_\rho j \to \alpha\, j \rceil$ la moltiplicazione per α di tutte le entrate della ρ_j; denotiamo con $\lceil_\rho j \to j + k \rceil$ l'addizione alle entrate della ρ_j delle rispettive entrate della ρ_k; più in generale denotiamo con $\lceil_\rho j \to \sum_{k=1}^{e} \alpha_k\, k \rceil$ la sostituzione della ρ_j con la combinazione lineare delle varie righe relativa ai coefficienti $\alpha_1, ..., \alpha_e$.

Traspostamente per gli indici $i, h = 1, ..., d$ diversi tra di loro denotiamo con $\lceil_\kappa i \leftrightarrow h \rceil$ lo scambio della colonna i della matrice da modificare con la κ_h. Per β scalare non nullo, denotiamo con $\lceil_\kappa i \to \beta\, i'rTr$ la moltiplicazione per β di tutte le entrate della κ_i; denotiamo con $\lceil_\kappa i \to i + h \rceil$ la addizione alle entrate della colonna i delle rispettive entrate della κ_h; più in generale denotiamo con $\lceil_\kappa i \to \sum_{h=1}^{d} \beta\, h \rceil$ la sostituzione della colonna i con la combinazione lineare delle varie righe relativa ai coefficienti $\beta_1, ..., \beta_d$.

G45:e.03 Le trasformazioni elementari-ρ di una matrice $A \in \mathsf{Mat}_{e,d;\mathbb{F}}$ si possono esprimere mediante moltiplicazioni a sinistra per matrici quadrate $e \times e$.

Per lo scambio delle righe j e k si ha la matrice permutativa $\mathsf{Mprm}(j\ k)$; per la moltiplicazione per α della riga j si ha la matrice che denotiamo con $\lceil_\rho i \to \alpha\, i \rceil$ che differisce dalla matrice $\mathbf{1}_{[e]}$ solo per avere α invece di 1 nella casella $\langle j, j \rangle$, per la addizione della riga k alla riga j la matrice ottenuta dalla matrice unità $\mathbf{1}_{[e]}$ ponendo 1 invece di 0 nella casella $\langle i, j \rangle$. Tutte queste matrici sono evidentemente invertibili: quelle del tipo (ρX) hanno determinante -1, quelle del tipo (ρM) hanno determinante α, quelle del tipo (ρA) hanno determinante 1.

Questi meccanismi matriciali sono chiariti da semplici esempi.

$$[\rho_2 \leftrightarrow \rho_4] \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \end{bmatrix}$$

$$[\rho_3 \to 2\rho_3] \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 62 & 64 & 66 & 68 & 70 & 72 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \end{bmatrix}$$

$$[\rho_5 \to \rho_5 + \rho_2] \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 72 & 74 & 76 & 78 & 80 & 82 \end{bmatrix}$$

Osserviamo anche le seguenti relazioni di inversione

$$[\rho_3 \to 2\rho_3] \cdot [\rho_3 \to 1/2\rho_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1}_{[5]}$$

$$[\rho_5 \to \rho_5 + \rho_2] \cdot [\rho_5 \to \rho_5 - \rho_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1}_{[5]} \ .$$

G45:e.04 Diciamo **matrice multielementare-**ρ di ordine e una matrice $e \times e$ esprimibile come prodotto di matrici elementari-ρ; anche alla trasformazione corrispondente si assegna l'attributo multielementare-ρ.
Traspostamente chiamiamo **matrice multielementare-**κ di ordine d una matrice $d \times d$ esprimibile come prodotto di matrici elementari-κ; anche la trasformazione corrispondente si dice multielementare-κ.
Assumiamo inoltre che delle matrici multielementari facciano parte anche le matrici unità.

Consideriamo due matrici dello stesso profilo, la prima, A, data e la seconda, B, ottenibile dalla precedente moltiplicandola a sinistra per una matrice multielementare-ρ esprimibile come prodotto di un certo numero s di matrici elementari-ρ E_1, E_2, ..., E_s; si ha quindi $B = E_s \cdots E_2\, E_1 A$.
L'invertibilità delle matrici elementari consente di scrivere $A = {E_1}^{-1}\, {E_2}^{-1} \cdots {E_s}^{-1} B$. Quindi anche la A è ottenibile dalla B applicandole una trasformazione multielementare-ρ.
Chiaramente la relazione che intercorre tra matrici ottenibili per applicazione di trasformazioni multielementari-ρ è riflessiva, simmetrica e transitiva, cioè è un'equivalenza. Essa viene qui chiamata **equivalenza-**ρ**ME**.

G45:e.05 Traspostamente si trova che ogni composizione di trasformazioni elementari-κ applicate ad una matrice A di formato $e \times d$ si può esprimere mediante la moltiplicazione a destra per una matrice multielementare di ordine e.
Inoltre la relazione che sussiste tra matrici ottenibili l'una dall'altra per moltiplicazione a destra per una matrice multielementare-κ è anch'essa un'equivalenza e la chiameremo **equivalenza-**κ**ME**.

Chiamiamo inoltre **equivalenza-MELR** (LR sta per left-right) la relazione che sussiste fra due matrici A e B dello stesso profilo $e \times d$ quando si può affermare

$$B = PAQ$$

con P matrice multielementare-ρ di ordine e e Q matrice multielementare-κ di ordine d.
Si trova facilmente che anche questa relazione è una equivalenza; più precisamente essa è l'equivalenza più fine tra le equivalenze che sono più comprensive sia della equivalenza -ρME che della equivalenza -κME . Troveremo che questa relazione di equivalenza è molto comprensiva, cioè che le classi di tale equivalenza sono molto ampie.

G45:e.06 Consideriamo ora le equivalenze-ξME tra matrici quadrate, ove $\xi \in \{\rho, \kappa, \mu\}$.
Tutte le matrici elementari-ρ ed elementari-κ hanno il determinante diverso da 0:

$$\det \lceil\, {}_\rho j \leftrightarrow k \,\rceil = -1 \quad , \quad \det \lceil\, {}_\rho i \to \alpha\, i \,\rceil = \alpha \quad , \quad \det \lceil\, -\rho i \to i + h \,\rceil = 1$$

$$\det \lceil\, {}_\kappa j \leftrightarrow k \,\rceil = -1 \quad , \quad \det \lceil\, \kappa i \to \alpha\, i \,\rceil = \alpha \quad , \quad \det \lceil\, \kappa i \to i + h \,\rceil = 1 \ .$$

In particolare consideriamo le matrici A e B quadrate di ordine d collegate da una uguaglianza $B = E_s \cdots E_2\, E_1 A$ o da una uguaglianza $B = P\, A\, Q$. Due matrici equivalenti-ξME devono essere entrambe non-singolari o singolari; in altre parole, ciascuna delle classi di equivalenza-ξME è interamente contenuta aut nell'insieme delle matrici invertibili aut nell'insieme delle matrici singolari.

Vediamo come sulle classi dell'equivalenza-ME si può affermare molto di più, a cominciare da un'espressione canonica notevolmente utile che si può individuare per ogni matrice invertibile.

G45:e.07 Teorema Ogni matrice quadrata invertibile $A \in \mathsf{Mat}_d$ si può esprimere come prodotto di matrici di ordine d della forma $A = L\, U\, P$ dove: L è una matrice triangolare inferiore, U è una matrice triangolare superiore, $P = \mathsf{Mprm}(\mathsf{p})$ con $\mathsf{p} \in \mathsf{Perm}_d$.

Dim.: La forma canonica si ottiene con un procedimento che descriveremo a grandi linee e che è strettamente collegato al procedimento di riduzione di Gauss-Jordan al quale è dedicato il successivo paragrafo :f .

Il procedimento si sviluppa in successivi stadi caratterizzati dall'indice $h = 1, 2, ..., d-1$ ciascuno dei quali ottiene per la A un'espressione della forma $L_h\, U_h\, P_h$ che si serve di tre matrici fattore aventi ordine d ed invertibili. Le successive espressioni sono:

$$L_1 U_1 P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_{2,1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{d-1,1} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ m_{d,1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & \cdots & a'_{1,d-1} & a'_{1,d} \\ 0 & a'_{2,2} & \cdots & a'_{2,d-1} & a'_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{d-1,2} & \cdots & a'_{d-1,d-1} & a'_{d-1,d} \\ 0 & a'_{d,2} & \cdots & a'_{d,d-1} & a'_{d,d} \end{bmatrix} \cdot P_1$$

$$L_2 U_2 P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_{2,1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{d-1,1} & m_{d-1,2} & \dots & 1 & 0 \\ m_{d,1} & m_{d,2} & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a"_{1,1} & a"_{1,2} & \dots & a"_{1,d-1} & a"_{1,d} \\ 0 & a"_{2,2} & \dots & a"_{2,d-1} & a"_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a"_{d-1,d-1} & a"_{d-1,d} \\ 0 & 0 & \dots & a"_{d,d-1} & a"_{d,d} \end{bmatrix} \cdot P_2$$

$$. \; ,$$

$$LUP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_{2,1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{d-1,1} & m_{d-1,2} & \dots & 1 & 0 \\ m_{d,1} & m_{d,2} & \dots & m_{d,d-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{a}_{1,1} & \overline{a}_{1,2} & \dots & \overline{a}_{1,d-1} & \overline{a}_{1,d} \\ 0 & \overline{a}_{2,2} & \dots & \overline{a}_{2,d-1} & \overline{a}_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{a}_{d-1,d-1} & \overline{a}_{d-1,d} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{a}_{d,d} \end{bmatrix} \cdot P_{d-1}$$

Nello stadio h innanzi tutto si accerta che l'entrata nella casella $\langle h, h\rangle$ della matrice centrale U_{h-1} sia diversa da 0; in caso contrario si scambia la colonna h con una delle colonne successive, chiamiamola k-esima, che porti nella diagonale principale una entrata diversa da 0 agendo con la matrice di scambio $P_h = \textsf{Mprm}(h\ k)$; questa colonna k si deve trovare, perché in caso contrario si avrebbe la riga h nulla, in contrasto con l'implicazione $\det(A) \neq 0 \Longrightarrow \det(U_h) \neq 0$. Si fanno quindi agire le matrici elementari a sinistra che contribuiscono alla L_h sottraendo dalle righe $h+1$, ..., d la riga h moltiplicata per opportuni **moltiplicatori** $m_{k,h}$ in modo da azzerare le entrate della seconda matrice al di sotto della casella $\langle h, h\rangle$. Con lo stadio $h-1$ si ottiene la forma normale richiesta ▮

G45:e.08 (1) Prop.: Ogni matrice quadrata invertibile A si può trifattorizzare come $A = L\,U\,P$ con la matrice triangolare superiore U avente tutte le entrate sulla diagonale principale uguali ad 1.

Dim.: Basta modificare la trifattorizzazione $L_{d-1}U_{d-1}P_{d-1}$ ottenuta in :e.07 nel prodotto $(L_{d-1}D)(D^{-1}U_{d-1})P_{d-1}$ mediante la matrice diagonale non singolare

$$D = \begin{bmatrix} \overline{a}_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \overline{a}_{2,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{a}_{d-1,d-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{a}_{d,d} \end{bmatrix} \quad ▮$$

Si osserva che con l'ultima forma trovata si è persa la presenza di entrate uguali ad 1 nella diagonale principale della matrice triangolare inferiore primo fattore.

(2) Prop.: Ogni matrice quadrata invertibile A si può trifattorizzare come $A = \overline{L}\mathbf{1}_{[d]}Q$ con $\overline{L}$ matrice triangolare inferiore.

Dim.: La trifattorizzazione normale ottenuta in (1), $A = (LD)(D^{-1}U)P$, si può ulteriormente modificare attraverso successivi $d-1$ stadi caratterizzati dall'indice $h = d, d-1, ..., 1$. Nello stadio h-esimo vengono azzerate le entrate della matrice centrale triangolare superiore al di sopra della casella $\langle h, h\rangle$ mediante moltiplicazioni a destra di matrici elementari triangolari superiori che effettuano la sottrazione dalla riga j (con $j < h$) della riga h opportunamente moltiplicata.
Attraverso questo procedimento si giunge ad una trifattorizzazione $A = \overline{L}\mathbf{1}_{[d,d]}Q$ con Q prodotto delle matrici triangolari superiori suddette per una matrice permutativa. Questo dimostra l'asserto ▮

(3) Teorema Ogni matrice invertibile di ordine d è equivalente-MELR alla matrice unità $\mathbf{1}_{[d]}$.

G45:e.09 Ci chiediamo ora come vanno modificate le considerazioni precedenti quando si parte da matrici quadrate singolari e quando si parte da matrici non quadrate; ci chiediamo inoltre come si possono individuare le classi di equivalenza-MELR di tali matrici.
Consideriamo innanzi tutto una matrice quadrata A di ordine d singolare. Il procedimento che conduce alla trifattorizzazione descritto in :e.07 può essere condotto avanti per un certo numero di stadi ma non fino in fondo. Si deve giungere ad uno stadio r e alla trifattorizzazione $A = L_r\, U_r\, P_r$ nella quale le righe dalla $r+1$ alla d della matrice triangolare superiore U_r hanno tutte le entrate nulle:

(1) $$U_r = \begin{bmatrix} \overline{a}_{1,1} & \overline{a}_{1,2} & \dots & \overline{a}_{1,r} & \overline{a}_{1,r+1} & \dots & \overline{a}_{1,d} \\ 0 & \overline{a}_{2,2} & \dots & \overline{a}_{2,r} & \overline{a}_{2,r+1} & \dots & \overline{a}_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{a}_{r,r} & \overline{a}_{r,r+1} & \dots & \overline{a}_{r,d} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} ,$$

con le entrate $\overline{a}_{1,1}, ..., \overline{a}_{r,r}$ tutte diverse da 0. Infatti se non vi fossero le righe interamente nulle si avrebbe $\det(A) \neq 0$.

(2) Prop.: Il numero r dell'espressione precedente è il rango della matrice A.

Dim.: La matrice U_r ha evidentemente rango r; questo deve coincidere con il rango della matrice di partenza A ottenibile dalla U_r moltiplicandola a sinistra e a destra per matrici invertibili, cioè con operazioni che non cambiano il rango (v. G40:g) ▮

Proseguendo come in precedenza si giunge ad un enunciato analogo ad :e.08(2).

(3) Prop.: Ogni matrice quadrata di ordine d e rango $r < d$ si può trifattorizzare come

$$A = \overline{L} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[r,r]} & \mathbf{0}_{[r,d-r]} \\ \mathbf{0}_{[d-r,r]} & \mathbf{0}_{[d-r,d-r]} \end{bmatrix} \cdot Q \ ,$$

con $\overline{L}$ matrice triangolare inferiore.

Dim.: Alla trifattorizzazione $A = L_r\, U_r\, P_r$ si può applicare il procedimento corrispondente a quello indicato in :5h(1) per ridurre ad 1 le prime r entrate sulla diagonale principale della matrice centrale. Successibamente si può applicare un procedimento simile a quello indicato in :5h(2) per azzerare tutte le entrate delle prime r colonne della matrice centrale al di sopra della diagonale principale. Infine agendo sulle prime righe si possono azzerare tutte le entrate delle colonne $r+1$, ..., d ▮

Si giunge quindi ad un risultato riguardante le classi di equivalenza-MELR per le tutte matrici quadrate.

(4) Teorema Ogni matrice quadrata di ordine d e rango $r \leq d$ è equivalente-MELR ad una matrice avente la seguente rappresentazione a blocchi $[r + (d-r)] \times [r + (d-r)]$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[r]} & \mathbf{0}_{[r,d-r]} \\ \mathbf{0}_{[d-r,r]} & \mathbf{0}_{[d-r,d-r]} \end{bmatrix} \blacksquare$$

G45:e.10 Gli sviluppi precedenti si possono riprendere, con poche modifiche, anche per le matrici non quadrate. Qui procediamo in un modo leggermente diverso facendo riferimento ad un tipo di matrice che si incontra di frequente nella letteratura.

Diciamo **matrice a scala** o **matrice a scaglioni** una matrice della forma seguente:

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} 0 & \dots & a_{1,j_1} & \dots & a_{1,j_2} & \dots & a_{1,j_3} & \dots & a_{1,j_r} & \dots & a_{1,d} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{2,j_2} & \dots & a_{2,j_3} & \dots & a_{2,j_r} & \dots & a_{2,d} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{3,j_3} & \dots & a_{3,j_r} & \dots & a_{3,d} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{r,j_r} & \dots & a_{r,d} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} .$$

Qui, supposto che la matrice abbia profilo $e \times d$, si chiede che sia:

$$(2) \qquad r \leq \min(e,d) \ , \ 1 \leq j_1 < j_3 < \cdots < j_r \leq d \ , \ a_{1,j_1} \neq 0 \ , \ a_{2,j_2} \neq 0 \ , \ \dots \ , \ a_{r,j_r} \neq 0 \ .$$

Le $j_1 - 1$ colonne nulle iniziali (sse $j_1 = 1$) potrebbero essere assenti, come pure le $e - r$ righe nulle finali (sse $r = e$). Per $h = 1, ..., r$ ciascuna delle entrate a_{h,j_h} è la più a sinistra tra le entrate diverse da zero della sua riga e al crescere di h si trovano in colonne diverse e sempre più a destra; queste entrate sono chiamate **pivots** della matrice.

Sono matrici a scala le matrici quadrate triangolari superiori invertibili, ovvero con determinante diverso da zero; sono tali anche molte delle matrici centrali delle trifattorizzazioni trovate in :e.07-09 .

G45:e.11 Prop. Ogni matrice A di profilo $e \times d$ si trova una trifattorizzare della forma $A = L\,E\,P$, con L matrice di ordine e triangolare inferiore, E matrice a scala e P matrice di ordine d permutativa.

Dim.: Ancora si conduce una dimostrazione costruttiva delineando un procedimento analogo a quello esposto :e.07. Si opera in successivi stadi che vedono la determinazione delle successive righe della matrice a scala.

Nel primo stadio si sceglie una delle righe avente una entrata non nulla il più possibile a sinistra e si colloca tale riga nella prima posizione della matrice a scala che si sta costruendo moltiplicando a destra la matrice data per una matrice permutativa; la prima entrata non nulla costituisce il pivot della prima riga. Successivamente si riducono a 0 tutte le entrate al di sotto del primo pivot.

Negli $r - 1$ stati successivi si sistemano le successive righe della matrice a scala cercando ogni ulteriore pivot nella sottomatrice che sta al di sotto e alla destra dell'ultimo pivot individuato e successivamente riducendo a 0 le entrate al di sotto del nuovo pivot. Ciascuno di questi stadi corrisponde alla moltiplicazione della matrice da costruire a sinistra per una matrice triangolare inferiore e a destra per una matrice permutativa.

Il processo si conclude dopo la individuazione del pivot r-esimo e l'annullamento delle entrate poste sotto di esso o quando non si hanno altre righe successive, oppure quando tutte le righe successive sono nulle.

Questo processo ha portato ad una matrice a scala E dalla quale si ottiene la A di partenza moltiplicandola a sinistra per matrici triangolari inferiori e a destra per matrici permutative. Si è quindi trovata la trifattorizzazione enunciata ▮

G45:e.12 Prop. La trifattorizzazione $A = L\,E\,P$ dice anche che ogni matrice di profilo $e \times d$ è equivalente-MELR ad una matrice a scala; inoltre la invertibilità della L e della P garantiscono che A ed E hanno lo stesso rango.

Della trifattorizzazione si possono trovare varianti analoghe a quelle trovate per le matrici quadrate attraverso procedimenti che sono generalizzazioni piuttosto semplici delle precedenti. Permutando opportunamente le colonne della E mediante la moltiplicazione a destra per una opportuna matrice permutativa si ottiene una matrice a scala $\overline{E}$ nella quale i pivots si trovano sulla diagonale principale, come per la :e.09(1). Si trova quindi una trifattorizzazione $A = L\,\overline{E}\,\overline{P}$ con $\overline{P}$ matrice permutativa ed $\overline{E}$ matrice di rango r. a questo punto è evidente che r fornisce il rango delle matrici a scala e della matrice di partenza A.

Ricordiamo che una $A \in \mathsf{Mat}_{e,d;\mathbb{F}}$ si può considerare una trasformazione lineare da $\mathbb{F}^{\times d}$ a $\mathbb{F}^{\times e}$ in quanto agente a destra su vettori colonna appartenenti a $\mathbb{F}^{\times d}$ e come una trasformazione lineare da $\mathbb{F}^{\times e}$ a $\mathbb{F}^{\times d}$ in quanto agente a sinistra su vettori riga attribuibili a $\mathbb{F}^{\times e}$. Si possono quindi definire un rango per le righe come dimensione del codominio della prima trasformazione e un rango per le colonne come dimensione del codominio della seconda trasformazione.

Si dimostra che i due ranghi coincidono. È inoltre chiaro che questo rango della matrice A, che scriviamo r, coincide con l'ordine massimo delle sottomatrici di A non singolari e che coincide anche con il numero massimo di elementi diagonali non nulli delle matrici equivalenti-MELR alla A che si possono individuare con i procedimenti di riduzione.

G45:e.13 Prop. La trifattorizzazione $A = L\,\overline{E}\,\overline{P}$ si può ulteriormente modificare con un procedimento di riduzione a 0 delle entrate della matrice centrale che si trovano a destra dei pivots, procedimento che porta ad una matrice centrale con la sottomatrice delle prime r righe ed r colonne diagonale. Con la moltiplicazione di questa (a sinistra o a destra) per la matrice avente nelle prime r posizioni della diagonale principale i valori $1/a_{h,j_h}$ si ottiene infine, come in :e.09(3) una trifattorizzazione della forma

(1) $$A = \overline{L} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[r]} & \mathbf{0}_{[r,d-r]} \\ \mathbf{0}_{[e-r,r]} & \mathbf{0}_{[e-r,d-r]} \end{bmatrix} \cdot Q \ ,$$

con $\overline{L}$ matrice di ordine e triangolare inferiore e Q matrice di ordine d invertibile.

Quindi tra le matrici di un dato profilo $e \times d$ si individua una classe di equivalenza-MELR per ogni rango $r = 0, 1, ..., \min(e, d)$ e le matrici di rango r sono tutte equivalenti-MELR alla matrice centrale della trifattorizzazione precedente. Tale matrice quindi può essere chiamata **matrice ridotta rappresentativa** della classe di equivalenza-MELR delle matrici di profilo $e \times d$ aventi rango r.

G45:f. Metodo di eliminazione di Gauss-Jordan

G45:f.01 Possiamo ora affrontare il problema della determinazione efficiente della soluzione del sistema di e equazioni lineari nelle d incognite x_1, x_2,..., x_d.

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,d}x_d = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,d}x_d = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{e,1}x_1 + a_{e,2}x_2 + \cdots + a_{e,d}x_d = b_e \end{cases} .$$

Il problema si affronta con il cosiddetto **metodo di eliminazione o di riduzione di Gauss-Jordan**, metodo che consiste nel sottoporre il sistema a successive modifiche ciascuna delle quali richiede, in genere, l'introduzone di nuove variabili in biiezione con le precedenti e conduce a un nuovo sistema equivalente fino ad ottenere, ma se e solo se questo è possibile, un sistema di equazioni aventi al primo membro semplici variabili e al secondo costanti o espressioni nelle quali compaiono altre variabili alle quali è consentito di assumere qualsiasi valore; queste sono le cosiddette variabili libere (:b.03).

Un sistema di equazioni lineari corrisponde biunivocamente alla sua matrice orlata e può essere utile vedere le successive modifiche del sistema di equazioni come successive modifiche delle corrispondenti matrici orlate. Queste modifiche costituiscono arricchimenti delle modifiche viste nei paragrafi :e.10, :e.11, :e.12 ed :e.13 per la matrice dei coefficienti.

Il procedimento di eliminazione per un sistema lineare si può portare avanti in diversi modi. Qui consideriamo che esso avvenga in due fasi; nella prima il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ viene ridotto, se possibile, in una forma $E\mathbf{y} = \mathbf{c}$, dove il vettore $\mathbf{y}$ differisce da $\mathbf{x}$ solo per avere le componenti permutate e $\mathbf{c}$ è un vettore di costanti deducibile da $\mathbf{b}$; nella seconda si procede a risolvere il sistema lineare con la matrice dei coefficienti nella forma a scala.

G45:f.02 La riduzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alla forma $E\mathbf{y} = \mathbf{c}$ si ottiene con successive operazioni di eliminazioni di variabili consistenti nella ricerca nelle equazioni a primo membro di addendi della forma $a_{h,k}x_k$ con $a_{h,k} \neq 0$, nell'eventuale spostamento della relativa equazione h-esima in una posizione precedente e nella eliminazione per ogni $m = h+1, ..., e$ degli addendi $a_{m,k}$ mediante la modifica dell'equazione m-esima ottenuta aggiungendole l'equazione h-esima moltiplicata per $-\dfrac{a_{m,k}}{a_{h,k}}$. Con una tale manovra si modifica la riga m-esima della attuale matrice orlata del sistema lineare, cioè si ottiene non solo la modifica della matrice dei coefficienti denotata in :e.02 con $\lceil\, {}_\rho m \;\to\; m - \dfrac{a_{m,k}}{a_{h,k}} h \,\rceil$, ma anche la modifica del termine noto attuale esprimibile come $\lceil\, \overline{b}_m \;\to\; \overline{b}_m - \dfrac{a_{m,k}}{a_{h,k}} \overline{b}_h \,\rceil$.

Con queste manovre può accadere che un'equazione venga trasformata in una equazione degenere la quale evidentemente non potrà fornire nessun altro pivot. Quando essa assume la forma $0\,x_1 + \cdots + 0\,x_d = 0$, risulta inutile e va trascurata. Se invece ha la forma $0\,x_1 + \cdots + 0\,x_d = \overline{b}_m$ con $\overline{b}_m \neq 0$, si riscontra una situazione assurda e il sistema lineare corrente, come quello di partenza, risulta incoerente, senza possibili soluzioni.

In termini geometrici, l'equazione che si è trovata in conflitto con le precedenti, diciamo quella della riga m, esprime un iperpiano H dello spazio delle variabili in $\mathbb{F}^{\times d}$ che è parallelo (e privo di punti in comune) ad un iperpiano appartenente all'insieme degli iperpiani ottenibili come combinazioni lineari degli iperpiani forniti dalle equazioni precedenti. infatti se l'equazione m ha la forma $\sum_{i=1}^d a_{m,i}\, x_i = b'_m$ per essere ridotta alla forma $0x_1 + \cdots + 0x_d = \overline{b}_m$ dalla congiunzione logica con le precedenti, queste devono fornire la combinazione lineare della forma $\sum_{i=1}^d a_{m,i}\, x_i = b'_m - \overline{b}$, cioè l'equazione di un iperpiano parallelo ad H e diverso da questo.

G45:f.03 Abbiamo quindi visto che un qualsiasi sistema lineare, mediante manovre di eliminazione delle variabili si può ridurre alla forma caratterizzata dalla seguente matrice orlata.

$$(1)\qquad \left[\begin{array}{ccccccccccc|c}
0 & \dots & a_{1,j_1} & \dots & a_{1,j_2} & \dots & a_{1,j_3} & \dots & a_{1,j_r} & \dots & a_{1,d} & c_1 \\
0 & \dots & 0 & \dots & a_{2,j_2} & \dots & a_{2,j_3} & \dots & a_{2,j_r} & \dots & a_{2,d} & c_2 \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{3,j_3} & \dots & a_{3,j_r} & \dots & a_{3,d} & c_3 \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & * & \dots & * & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{r,j_r} & \dots & a_{r,d} & c_r \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & c_{r+1} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & c_e
\end{array}\right] ,$$

Se $c_{r+1} = \cdots = c_e = 0$ le ultime $e - r$ equazioni possono essere trascurate; se invece almeno una delle $e - r$ entrate in basso nell'ultima colonna è diversa da 0, il sistema lineare non ha soluzioni.

Nel caso di esistenza di soluzioni occorre esaminare un sistema di r equazioni lineari che, in seguito ad una opportuna riindicizzazione delle variabili, assume la forma.

$$(2)\qquad \begin{cases}
a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,r}\,x_r = c_1 - \displaystyle\sum_{m=r+1}^{d} a_{1,m}\,x_m \\
\qquad a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,d}\,x_d = c_2 - \displaystyle\sum_{m=r+1}^{d} a_{2,m}\,x_m \\
\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad a_{r,r}\,x_r = c_r - \displaystyle\sum_{m=r+1}^{d} a_{r,m}\,x_m
\end{cases} .$$

In queste equazioni sono diverse da zero tutte le entrate sulla diagonale principale $a_{i,i}$ per $i = 1, ..., d$. Il sistema precedente quindi può essere trasformato in uno equivalente con manovre di riduzione a zero di tutti i coefficienti al di fuori della diagonale principale; ad esempio i coefficienti della riga h $a_{h,k}$ per $k = h+1, ..., d$ si annullano mediante la sostituzione della colonna k che con le notazioni introdotte in :e.02 sono date da $\lceil_{\kappa} k \;\to\; k - \dfrac{a_{h,k}}{a_{h,h}}\, h \rceil$.

Si giunge quindi ad un sistema lineare della forma

$$(3)\qquad \begin{cases}
a_{1,1}\,x_1 = \;\overline{c}_1 - \displaystyle\sum_{m=r+1}^{d} \overline{a}_{1,m}\,x_m \\
a_{2,2}\,x_2 = \;\overline{c}_2 - \displaystyle\sum_{m=r+1}^{d} \overline{a}_{2,m}\,x_m \\
\quad\vdots \qquad \vdots \\
a_{r,r}\,x_r = \;\overline{c}_r - \displaystyle\sum_{m=r+1}^{d} \overline{a}_{r,m}\,x_m
\end{cases} .$$

Questo sistema può semplificarsi ulteriormente per ogni $h = 1, ..., d$ dividendo l'equazione h per il coefficiente $a_{h,h}$.

In questo sistema di equazioni le variabili x_{r+1}, ..., x_d non sono assoggettate ad alcun vincolo e ad esse si può assegnare un valore qualsiasi. Una soluzione particolare del sistema si ottiene in genere comodamente assegnando il valore 0 a tutte le suddette variabili:

$$x_1 = \frac{\overline{c}_1}{a_{1,1}} \ , \quad x_2 = \frac{\overline{c}_2}{a_{2,2}} \ , \ \ldots \ , \quad x_d = \frac{\overline{c}_d}{a_{d,d}} \ .$$

La soluzione generale si ottiene applicando la traslazione corrispondente al vettore che fornisce la soluzione particolare al sottospazio di $d-r$ dimensioni $\boldsymbol{span}(\mathsf{e}_{r+1}, ..., \mathsf{e}_d)$.

G45:f.04 Osserviamo esplicitamente che le considerazioni precedenti valgono anche per ogni sistema lineare in cui il rango della matrice dei coefficienti è uguale al numero d delle incognite. Basta leggere i sistemi di equazioni (2) e (3) osservando che le sommatorie a secondo membro non danno contributi, in quanto il fatto che $r+1 > d$ implica che l'indice delle sommatorie non può assumere alcun valore ammissibile. In tale caso il sottospazio da aggiungere alla soluzione particolare per ottenere qualla generale si riduce al solo vettore nullo $\mathbf{0}_d$ dello spazio in cui varia si colloca il vettore delle incognite.

G45:f.05 Illustriamo il procedimento di Gauss-Jordan con alcuni esempi.

(1) Consideriamo il sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite x, y, z

$$\begin{cases} x + \ y + \ z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ x + 2y - \ z = 0 \end{cases} .$$

Si semplifica la seconda equazione sottraendole la prima moltiplicata per 2 e si semplifica la terza equazione sottraendole la prima. Si ottiene allora

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad y \qquad = -1 \\ \quad y - 2z = -2 \end{cases} .$$

Si giunge poi al sistema a scala sottraendo alla terza equazione la seconda:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad y \qquad = -1 \\ \qquad -2z = -1 \end{cases} .$$

Questo sistema è un sistema triangolare superiore relativo ad una matrice di rango 3: quindi ammette una e una sola soluzione che rapidamente si trova essere data da $x = 5/2$, $y = -1$, $z = 1/2$.

(2) Consideriamo il sistema delle 3 equazioni nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 5y - 9z = 4 \\ 3x + 4y - 3z = -1 \end{cases} .$$

Si elimina la variabile x dalla seconda equazione sottraendole la prima moltiplicata per 2 e si elimina la x dalla terza equazione sottraendole la prima moltiplicata per 3 ottenendo

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ \quad y - 3z = 2 \\ -2y + 6z = -4 \end{cases} .$$

La terza equazione risulta equivalente alla seconda e può essere trascurata. Si ottengono quindi per le prime due variabili le espressioni $y = 2 + 3z$ e $x = 1 + 3z - 4 - 6z = -3 - 3z$. Il sistema dato quindi è indeterminato e le sue soluzioni costituiscono la retta in $\mathbb{R}^{\times 3}$ che passa per il punto $\langle -3, 3, 0 \rangle$.

(3) Si abbia il sistema di tre equazioni lineari nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x + 4y - 2z = 1 \\ 5x + 4y + 6z = 0 \end{cases} .$$

Si elimina la variabile x dalla seconda equazione sottraendole la prima moltiplicata per 3 e dalla terza equazione sottraendole la prima moltiplicata per 5 giungendo alla

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ \quad -2y + 7z = 4 \\ \quad -6y + 21z = 5 \end{cases} .$$

Si osserva facilmente che le due ultime equazioni sono incompatibili: quindi il sistema dato non ha alcuna soluzione.

G45:g. Teorema di Rouché-Capelli

G45:g.01 Le caratteristiche di risolubilità di un sistema di equazioni lineari, cioè l'esistenza di una soluzione, di infinite soluzioni o la assenza di soluzioni, sono chiarite da un enunciato che fa riferimento ai ranghi della matrice dei coefficienti del sistema e della corrispondente matrice orlata. Questo enunciato fu formulato da [[Eugène Rouché]] e riformulato in termini più semplici da [[Alfredo Capelli]] ed è noto come teorema di Rouché-Capelli. A questo teorema vengono anche associati i nomi di Fontan'e, di [[Kronecker]] e di [[Frobenius]].

Va detto che esso fornisce indicazioni concise e ben definite sulle caratteristiche di risolubilità di ogni sistema lineare, ma non risulta di grande utilità computazionale quando si affronta uno specifico sistema lineare impegnativo, ovvero un sistema con parecchie equazioni e/o con parecchie incognite. Infatti esso richiede di conoscere i ranghi di matrici non piccole, cioè quantità il cui calcolo è impegnativo e per il quale non fornisce alcuna indicazione. Per le soluzioni effettive ed efficienti di sistemi impegnativi occorre ricondursi a procedimenti di eliminazione, procedimenti la cui formulazione è sensibilmente più articolata e quindi meno facile da ricordare, ma che consentono di arrivare a soluzioni concrete e ad ottenere agevolmente anche i valori dei ranghi delle matrici.

G45:g.02 Teorema di Rouché-Capelli Consideriamo un sistema lineare di e equazioni nelle d incognite x_1, x_2, ..., x_d, esprimibile nella forma $A\,\mathsf{x} = \mathsf{b}$, con $A \in \mathsf{Mat}_{e,d}$, $\mathsf{b} \in \mathbb{F}^{\times d}$ e con $\mathsf{x} = \langle x_1, x_2, ..., x_d \rangle$.
Il sistema possiede soluzioni sse coincidono il rango della matrice dei coefficienti e il rango della matrice orlata, $\operatorname{rnk}(A) = \operatorname{rnk}(A \Box \mathsf{b})$.

Se esistono soluzioni, si distinguono due situazioni:
(i) se $\operatorname{rnk}(A) = d$, allora si ha una soluzione unica
(ii) sse $\operatorname{rnk}(A) < d$, le soluzioni costituiscono un sottospazio affine di $\mathbb{F}^{\times d}$ di dimensione $d - \operatorname{rnk}(A)$.

Dim.: La dimostrazione si ottiene richiamando la matrice orlata :f.03(1). Il rango della sua sottomatrice ottenuta trascurando le ultime $e - r$ righe e l'ultima colonna è chiaramente pari ad r. Questo à anche il rango della matrice dei coefficienti. Il rango della matrice orlata è uguale ad r sse le entrate c_{r+1}, ..., c_e sono tutte nulle, mentre è uguale ad $r + 1$ sse almeno una delle suddette entrate è diversa da 0.

Abbiamo quindi che il sistema ammette almeno una soluzione sse il rango della matrice dei coefficienti coincide con il rango della matrice orlata, non ammette soluzioni se la matrice orlata ha rango superiore a quello della matrice dei coefficienti. La distinzione fra i casi (i) e (ii) si ricava dalle considerazioni dei paragrafi :f.03 e :f.04 ▮