Capitolo G42:
Matrici e determinanti

Contenuti delle sezioni

G42:0.01 Questo capitolo riprende dall'inizio la nozione di matrice ed altre nozioni ad essa riconducibili, in particolare quella di determinante. La trattazione si focalizza sulle matrici con un numero finito di righe e di colonne e con valori su un campo; vengono tuttavia segnalate anche costruzioni e proprietà valide in situazioni più generali.

L'esposizione riguarda questioni generali e si sviluppa senza vincolarsi ad applicazioni particolari; il fatto che le matrici sopra un campo possono sempre vedersi come rappresentanti di trasformazioni lineari non viene utilizzato esplicitamente.
Tuttavia i risultati ottenuti si possono riconoscere come utili soprattutto per l'algebra lineare e per i calcoli finalizzati alle soluzioni dei sistemi di equazioni lineari.
La seconda parte, dedicata ai determinanti, tocca a livello introduttivo alcune questioni di algebra multilineare e tratta l'inversione delle matrici quadrate.

G42:a. Matrici

G42:a.01 Il termine **matrice** viene talora utilizzato con portata generale per individuare una funzione il cui dominio è il prodotto cartesiano di due insiemi ed il cui codominio è un insieme munito di due operazioni con caratteristiche numeriche che si possano chiamare somma e prodotto. In effetti delle matrici interessano tendenzialmente applicazioni che richiedono elaborazioni effettive sui valori assunti da queste funzioni.
In misura prevalente vengono considerate matrici aventi come dominio il prodotto cartesiano di due insiemi finiti e come codominio un campo. Talora, ma piuttosto raramente, si considerano matrici il cui dominio ha un fattore o entrambi i fattori costituiti da insiemi numerabili come $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Inoltre molte costruzioni e proprietà sono applicabili a matrici su strutture algebriche più generali dei campi come anelli e semianelli.

Più specificamente le funzioni il cui dominio è $E \times D$ ed il cui codominio fa parte dell'insieme V, si dicono **matrici di profilo** o **di formato** $E \times D$ con **entrate** o **valori** in V; più concisamente esse si dicono matrici $E \times D$ su V. Il loro insieme, cioè $\{E \times D \longmapsto V\}$, viene denotato anche con $\mathsf{Mat}_{E,D;V}$. Gli insiemi E e D sono chiamati, risp., insieme delle etichette delle righe ed insieme delle etichette delle colonne della matrice.

In sintonia con le convenzioni più adottate per le notazioni di insiemi caratterizzati da parametri, useremo la notazione $\mathsf{Mat}_{E,D;*}$ per l'insieme delle matrici con dominio $E \times D$ quale che sia il suo codominio, la notazione $\mathsf{Mat}_{*,*;V}$ per l'insieme delle matrici con entrate in V quali che siano gli insiemi di etichette per righe e colonne ed altre simili scritture facilmente comprensibili.

Per la matrice $A \in \mathsf{Mat}_{E,D;V}$, l'insieme E si dice costituire l'insieme delle **etichette delle righe**, mentre D è chiamato insieme delle **etichette delle colonne**.

Collettivamente le righe e le colonne di una matrice sono chiamate **linee della matrice**.

Come si fa spesso, denoteremo le matrici con lettere maiuscole; una matrice potrebbe essere introdotta scrivendo $A \in \mathsf{Mat}_{E,D;V}$.
Un elemento $\langle j, i\rangle$ del dominio $E \times D$ di una matrice si dice **casella** di tale matrice. Il valore assunto dalla matrice $A \in \{E \times D \longmapsto V\}$ in corrispondenza della casella $\langle j, i\rangle \in E \times D$, cioè l'entrata della matrice nella detta casella, piuttosto che con la scrittura $A(j, i)$, usuale per le funzioni di due variabili, si preferisce denotarla con la scrittura $a_{j,i}$ che si serve della minuscola corrispondente della maiuscola che identifica l'intera matrice.

Delle matrici interessano, almeno potenzialmente, proprietà collegate alla calcolabilità. In linea di massima tratteremo matrici calcolabili, cioè matrici $A \in \mathsf{Mat}_{E,D;V}$ con E, D e V insiemi calcolabili, ossia aventi righe e colonne etichettate da insiemi calcolabili e con entrate calcolabili; quindi spesso righe, colonne e valori saranno individuati da espressioni calcolabili. Tuttavia occorre anche esaminare proprietà di matrici generiche, per le quali non viene data alcuna indicazione specifica.

G42:a.02 Qui interessano maggiormente le matrici il cui dominio $E \times D$ è un insieme finito e con valori collocabili in un insieme V dominabile algoritmicamente.
Supporremo inoltre che gli elementi di E e D siano effettivamente esplicitabili e che si possano ordinare.
In effetti se $e := |E|$ e $d := |D|$, le matrici in esame si possono ricondurre con opportune convenzioni alle matrici aventi come dominio $(e] \times (d] = \{1, 2, ..., e\} \times \{1, 2, ..., d\}$.
Per individuare il dominio di queste matrici sono sufficienti gli interi e e d; esse si possono chiamare matrici di profilo $e \times d$ con entrate in V e il loro insieme si può denotare con $\mathsf{Mat}_{e,d;V}$.
Talora risulta più comodo etichettare le righe e le colonne con intervalli di interi che iniziano con 0 o anche con altri interi non necessariamente positivi; i collegamenti tra questi tipi di matrici non presenta difficoltà, in quanto i vari intervalli di interi si collegano biunivocamente con semplicissime biiezioni.
In particolare è evidente il collegamento tra le matrici di profilo $[e)\times[d) = \{0, 1, ..., e-1\}\times\{0, 1, ..., d-1\}$ e quelle di profilo $e \times d$.

Per molte questioni (tendenzialmente per quelle di portata generale) si concentra l'attenzione sopra le matrici degli insiemi $\mathsf{Mat}_{e,d;V}$, matrici che in linea di massima hanno il vantaggio di potersi trattare con notazioni più semplici. Tuttavia incontreremo esposizioni dimostrative che risultano più semplici adottando per le etichette di righe e colonne le usuali notazioni insiemistiche.

Spesso per le righe e per le colonne si adotta un ordinamento che si mantiene imprecisato, confidando che sia adattabile ad esigenze specifiche; a tale ordinamento si assegna solo il ruolo di riferimento per algoritmi sufficientemente definiti, ritenendo che apra la possibilità di precisare esaurientemente le elaborazioni effettive specifiche.

Nel seguito ci si mantiene elastici nei confronti dell'ordinamento, cioè si ritiene possibile effettuare suoi adattamenti che permettano di semplificare l'esposizione delle proprietà degli algorimi e/o le conseguenti elaborazioni.

Per molte applicazioni specifiche delle matrici risulta invece opportuno scegliere gli oggetti che **etichettano** le rispettive linee in modo che siano significativi e/o atti a semplificare descrizioni ed elaborazioni.

In particolare talora è utile etichettare righe e colonne con coppie, terne o sequenze di numeri o parametri.
Un tipico settore nel quale si impone questa opportunità è lo studio della struttura degli atomi e delle molecole (v. [[Orbitale]], [[Configurazione elettronica]], [[Composizione di momenti angolari]]).

G42:a.03 Una matrice esplicita, come ogni prodotto cartesiano della forma $(e] \times (d]$, si può visualizzare in più modi, essenzialmente negli 8 modi qui esemplificati per una matrice 2×3:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d & a \\ e & b \\ f & c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c & f \\ b & e \\ a & d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} f & e & d \\ c & b & a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} f & c \\ e & b \\ d & a \end{bmatrix} .$$

Noi ci serviremo prevalentemente di quella che chiamiamo **raffigurazione matriciale** (la prima delle precedenti) avente le righe disposte orizzontalmente e con indici crescenti da sinistra a destra e avente le colonne verticali e con indici crescenti dall'alto verso il basso. Una tipica raffigurazione matriciale di una matrice di profilo $e \times d$ con d ed e interi imprecisati è la seguente

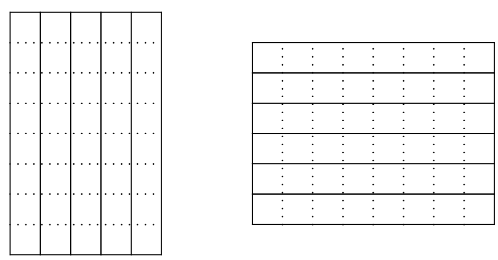
$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{e,1} & a_{e,2} & \dots & a_{e,d} \end{bmatrix}$$

Talora tuttavia risulta più opportuna quella che diciamo **raffigurazione geografica** delle matrici che presenta le righe disposte verticalmente con indici crescenti dal basso verso l'alto e le colonne orizzontali con indici crescenti da sinistra a destra (come la sesta delle matrici dell'esempio precedente); questa raffigurazione si avvicina agli usuali grafici delle funzioni -RR.

G42:a.04 Hanno interesse in particolare i **vettori riga**, detti anche **matrici riga**, cioè le matrici di profilo $1 \times d$, ed i **vettori colonna**, detti anche **matrici colonna**, cioè le matrici di profilo $e \times 1$.

Una matrice A di profilo $e \times d$ sul campo $\mathbb{F}$ si può considerare ottenuta come sovrapposizione di e vettori riga d-dimensionali che denotiamo, per $j = 1, ..., e$, con $\mathsf{A}_{j,*}$ o con notazione alla Dirac con $\langle \mathsf{A}_j |$; traspostamente A si può considerare ottenuta come affiancamento di d vettori colonna e-dimensionali che denotiamo per $i = 1, ..., d$, con $\mathsf{A}_{*,i}$ o alla Dirac con $| \mathsf{A}_i \rangle$. Queste semplici osservazioni si possono presentare formalmente servendosi dei simboli delle composizioni **affiancamento**, $\mathbin{[\![\,]\!]}$, e **sovrapposizione**, $\boxminus$, scrivendo

$$\mathsf{A} \;=\; \boxminus_{j=1}^{e} \mathsf{A}_{j,*} \;=\; [\![\,]\!]_{i=1}^{d} \mathsf{A}_{*,i} \; .$$



Si può definire anche l'affiancamento di due matrici della forma $A_1 \in \mathsf{Mat}_{E,D_1;V}$ e $A_2 \in \mathsf{Mat}_{E,D_2;V}$ tali che $D_1 \cap D_2 = \emptyset$:

(1) $$A_1 \mathbin{[\![\,]\!]} A_2 := A_1 \dot{\cup} A_2 \; .$$

Traspostamente si definisce come sovrapposizione di due matrici della forma $A' \in \mathsf{Mat}_{E',D;V}$ e $A'' \in \mathsf{Mat}_{E'',D;V}$ con $E' \cap E'' = \emptyset$:

(1) $$A' \boxminus A'' := A' \dot\cup A'' \ .$$

Ad essere pignoli le costruzioni affiancamento e sovrapposizione, quando vi sono sovrapposizioni fra insiemi delle etichette originarie richiedono precisazioni per le etichette delle matrici risultanti.
Nelle analisi di casi specifici possono rendersi necessarie scelte attente che dovranno essere effettuate dagli interessati alle applicazioni.
Negli studi di portata generale, invece, non presentano difficoltà e possono essere lasciate al semplice buon senso e quindi trascurate nelle esposizioni come si è fatto qui sopra.
Limitiamoci ad aggiungere quanto segue. Per una composizione $A \mathbin{|\!|} B$ con $A \in \{(k]times(h] \longmapsto C\}$ e $B \in \{(k] \times (\overline{h}] \longmapsto C\}$ basta sostituire la B con $B' := \lceil j = 1, ..., k \ , \ i = h+1, ..., h+\overline{h} \ \ \nmid\!\!\!\to \ \ b_{j,i-h} \rceil$; modifiche analoghe si adottano per le sovrapposizioni.
Per matrici con insiemi generici di etichette basta modificare uno dei due insieme di etichette con elementi comuni con un insieme che gli corrisponde biunivocamente e non presenta elementi comuni.

G42:a.05 Introduciamo due operazioni sulle matrici, contrariamente alle sovrapposizioni ed agli affiancamenti, portano a ridurre il loro profilo e quindi il complesso delle loro entrate.
Se $\emptyset \subset E' \subseteq E$ e $\emptyset \subset D' \subseteq D$, si dice **riduzione** della matrice $A \in \mathsf{Mat}_{E,D;V}$ la matrice

(1) $$A_{\upharpoonright E' \times D'} \ := \ \lceil \langle i, j\rangle \in E' \times D' \ \nmid\!\!\!\to \ a_{i,j} \rceil \ .$$

Si osserva che la riduzione delle matrici è un caso particolare di riduzione delle funzioni.
Se $\emptyset \subseteq E'' \subset E$ e $\emptyset \subseteq D'' \subset D$, si dice **eliminazione** dalla matrice $A \in \mathsf{Mat}_{E,D;V}$ delle righe di E'' e delle colonne di D'' la matrice

(2) $$A_{\llcorner E'',D''} \ := \ \lceil \langle i, j\rangle \in (E \setminus E'') \times (D \setminus D') \ \nmid\!\!\!\to \ a_{i,j} \rceil \ .$$

Consideriamo una $A \in \mathsf{Mat}_{E,D;V}$. Diciamo **sottomatrice** della $A \in \mathsf{Mat}_{E,D;V}$ ogni matrice ottenuta dalla A riducendo l'insieme delle sue righe e/o l'insieme delle sue colonne, ovvero ogni matrice ottenuta dalla A eliminando qualche sua riga e/o qualche sua colonne.
Se denotiamo con $\boldsymbol{Submat}(A)$ l'insieme delle sottomatrici della A, possiamo scrivere

(2) $$\boldsymbol{Submat}(A) \ = \ \bigcup\{T \subset E \ , \ S \subset D :| \ A_{\upharpoonright T \times S}\} \ = \ \bigcup\{T \subset E \ , \ S \subset D :| \ A_{\llcorner T,S}\} \ .$$

Osserviamo esplicitamente che tra le sottomatrici di una $A \in \mathsf{Mat}_{E,D;V}$ va collocata anche la stessa A; essa viene detta sottomatrice impropria di se stessa.

G42:a.06 Si dice **matrice quadrata** una matrice il cui dominio è un quadrato cartesiano $D \times D$. Per concisione, l'insieme delle matrici quadrate $\mathsf{Mat}_{D,D;V}$ si denota anche con la scrittura $\mathsf{Mat}_{D;V}$, mentre $\mathsf{Mat}_{d,d;V}$ si può semplificre nella notazione $\mathsf{Mat}_{d;V}$. Le matrici di questo insieme sono chiamate anche **matrici di ordine** d.

Tra le sottomatrici di una matrice spesso hanno particolare interesse le quadrate.

Si dice **diagonale principale** di una matrice, quadrata o meno, l'insieme delle sue caselle aventi etichette coincidenti.
Si dice **codiagonale** di una matrice quadrata $A \in \mathsf{Mat}_{d;\mathbb{F}}$ l'insieme delle sue caselle della forma $\langle j, d{+}1{-}j\rangle$, ovvero $\{\langle d, 1\rangle, \langle d-1, 2\rangle, \ldots, \langle 2, d-1\rangle, \langle 1, d\rangle\}$.

G42:a.07 Le matrici hanno moltissime applicazioni sia all'interno della matematica, sia nell'informatica, sia nella statistica, sia in numerose discipline applicative.

Vengono prese in considerazioni soprattutto matrici le cui entrate sono numeri o espressioni con valori numerici. I loro campi applicativi sono i più svariati: geometria, statistica, meccanica, astronomia, fisica nucleare, chimica, sociologia, economia, ...
Le matrici numeriche sono essenziali per una grande varietà di metodo quantitativi: esse quindi sono ampiamente studiate nell'analisi numerica e negli studi sugli algoritmi e sulla loro complessità e nelle tecniche di programmazione e circuitali volte alla loro implementazione.

Sono importanti anche vari tipi di matrici con entrate non numeriche. Nel seguito incontreremo matrici contenenti vettori, matrici, funzioni ed operatori, in particolare nello studio di funzioni multivariate (I30:, I49:, ...) e nella geometria differenziale (G63:, G64:). Le matrici si incontrano in molti capitoli della fisica, in particolare nello studio di sistemi fisici articolati come molecole e sistemi di stati quantici. Nella statistica le matrici sono sistematicamente usate per trattare situazioni nelle quali occorre distinguere caratteristiche differenziate. Varie matrici contenenti stringhe, insiemi di stringhe e anche istruzioni operative sono utilizzate in elaborazioni automatiche riguardanti il comportamento di [[automi]] (C12:, C13:), la compilazione di linguaggi di programmazione e la gestione di [[basi di dati]].

I precedenti cenni intendono anche convincere che per affrontare tanti problemi risulta utile sapere trattare le matrici da diversi punti di vista.

G42:a.08 Le matrici comportano un loro linguaggio che talora risulta utile adottare per la presentazione di alcune nozioni matematiche di base.
Un elenco di lunghezza n può vedersi come matrice di profilo $1 \times n$ o $n \times 1$; un oggetto semplice può vedersi come matrice 1×1.
Una funzione esplicita di dominio D si può presentare con una matrice di profilo $2 \times D$ o di profilo $D \times 2$.

Si dice **matrice binaria** ogni matrice su $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, cioè ogni matrice le cui entrate possono essere solo 0 ed 1. Osserviamo che $\mathbb{B}$ può considerarsi un campo.

Una matrice binaria di profilo $E \times D$ si può considerare la funzione caratteristica di un sottoinsieme del prodotto cartesiano $E \times D$, ovvero come la funzione caratteristica di una relazione binaria tra elementi dell'insieme E ed elementi dell'insieme D.

La presentazione cartesiana bidimensionale di una funzione finita si può anche considerare una matrice binaria che conviene considerare nella presentazione geografica; si tratta di una matrice binaria di tipo particolare, in quanto in ogni sua linea verticale (riga) si trova uno ed un solo valore 1.
Chiaramente le endofunzioni corrispondono a matrici quadrate binarie che sono casi particolari delle matrici precedenti.
Molte formule riguardanti trasformate integrali ed equazioni integrali possono descriversi mediante compoizioni di matrici con linee etichettate da intervalli reali.

G42:a.09 Una ben definita matrice $A \in \mathsf{Mat}_{e,d;V}$, se e e d non sono molto elevati può essere individuata fornendo esplicitamente il quadro delle sue entrate $a_{j,i}$, per $j = 1, ..., e$ e $i = 1, ..., d$.
Le matrici aventi il dominio esteso possono essere tenute sotto controllo o mediante espressioni che consentano di calcolare le loro entrate, o all'opposto mediante sistemi di dati registrati su supporti digitali.
Una matrice $A \in \mathsf{Mat}_{E,D;V}$ delle cui entrate relative ad $j \in E$ e $i \in D$ si possiedono espressioni calcolabili che denotiamo con $\mathcal{A}_{j,i}$ si può individuare con una delle scritture

$$[\mathcal{A}_{j,i} \mid: j \in E\ ,\ i \in D] \qquad \text{e} \qquad [j \in E\ ,\ i \in D :\mid \mathcal{A}_{j,i}]\ .$$

In vari contesti i campi di variabilità delle etichette di riga j e di colonna i di una tale matrice si possono sottintendere e risulta possibile individuare tale matrice con una scrittura semplificata come $[\mathcal{A}_{j,i}]$.

Un esempio è fornito dalla [[matrice di Vandermonde]] $e \times d$ costruita sulle e variabili x_1, x_2, ..., x_e e sulle loro d potenze relative agli esponenti 0, 1, ...,$d-1$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \dots & {x_1}^{d-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \dots & {x_2}^{d-1} \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 & \dots & {x_3}^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_e & {x_e}^2 & \dots & {x_e}^{d-1} \end{bmatrix} \quad = \quad [{x_j}^{i-1} :\mid j = 1, ..., e\ ,\ i = 1, ..., d]\ .$$

G42:a.10 Si dice **trasposta** della matrice $[a_{j,i} \mid: j \in E, i \in D]$ la matrice $[a_{i,j} \mid: i \in D, j \in E]$ di profilo $D \times E$, matrice che presenta le stesse occorrenze di valori, ma schierate diversamente. Essa si denota con $A^\top$; in questa scrittura si utilizza il simbolo $^\top$ per indicare la **trasposizione** delle matrici, trasformazione che ad ogni matrice di profilo $E \times D$ associa una matrice di profilo $D \times E$. La matrice trasposta viene presentata da un quadro di valori ottenibile dal quadro che presenta la matrice di partenza scambiando il ruolo delle righe con quello delle colonne; questa trasformazione si può descrivere anche come riflessione dalla matrice (non necessariamente quadrata) rispetto alla sua diagonale principale.

Una matrice di numeri interi e la sua trasposta sono, ad esempio,

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \\ 41 & 42 & 43 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} 11 & 21 & 31 & 41 \\ 12 & 22 & 32 & 43 \\ 13 & 23 & 33 & 43 \end{bmatrix}\ .$$

La trasposizione scambia i vettori riga $1 \times d$ con i vettori colonna $d \times 1$.

La matrice trasposta della $A^\top$ è evidentemente la A stessa: $(A^\top)^\top = A$. La trasposizione è quindi una endofunzione involutoria entro gli insiemi della forma

$$\mathsf{Mat}_{*,*;V} := \cup\{E, D \in \mathsf{Set} :\mid \mathsf{Mat}_{E,D;V}\ .$$

La trasposizione trasforma matrici quadrate in matrici quadrate; questo si esprime anche dicendo che le matrici quadrate entro l'insieme delle matrici costituiscono un **sottoinsieme stabile** rispetto alla trasposizione.

G42:a.11 Si dice **matrice simmetrica** ogni matrice quadrata che non viene modificata dalla trasposizione, ovvero una matrice che si può mettere sotto la forma $S = [s_{i,j} \mid: i, j \in I]$ e per la quale $\forall i, j \in I\ :\ s_{i,j} = s_{j,i}$, cioè ogni matrice per la quale coincidono le entrate in due caselle in posizioni simmetriche rispetto alla diagonale principale.

Le matrici simmetriche sono dunque i punti fissi per la trasposizione di matrici intesa come endofunzione di $\mathsf{Mat}_{*,*;V}$. Questo si esprime anche dicendo che le matrici simmetriche che appartengono ad un certo insieme $\mathsf{Mat}_{I;V}$ sono **elementi invarianti rispetto alla trasposizione**, oppure, più in breve, che sono degli **invarianti per trasposizione**.

Per individuare una matrice simmetrica $S \in \mathsf{Mat}_{d;V}$ è sufficiente fornire le componenti $s_{i,j}$ per $i = 1, ..., d$ e per $j = 1, ..., i$ (oppure per $j = 1, ..., d$ ed $i = 1, ..., j$); il numero delle entrate di una matrice simmetrica di ordine d è $\dfrac{d(d+1)}{2}$.

Consideriamo le matrici le cui entrate si collocano in un insieme V contenente un elemento che si possa considerare elemento neutro di qualche operazione e che chiamiamo zero. L'insieme V potrebbe essere $\mathbb{C}$, qualcuno dei suoi sottoinsiemi o anche una collezione di insiemi (in tal caso il ruolo di zero l'avrebbe $\emptyset$).
Si dicono **matrici diagonali** di $\mathsf{Mat}_{*,*;V}$ le matrici quadrate di questo insieme che possono avere entrate diverse da zero solo sulla diagonale principale.
Palesemente le matrici diagonali sono particolari matrici simmetriche.
Le matrici diagonali $D \in \mathsf{Mat}_{d;V}$ sono in evidente biiezione con gli elementi di $V^{\times d}$.

G42:a.12 Rivestono particolare importanza le matrici quadrate aventi le entrate nell'insieme che etichetta le sue righe e le sue colonne, cioè le funzioni del tipo $\{S \times S \longmapsto S\}$. Queste matrici individuano la nozione di **operazione binaria**, nozione tra le più importanti della matematica e basilare per l'intera algebra.

Operazioni binarie con matrici molto semplici sono quelle associate agli operatori booleani $\wedge$, $\vee$ e $+_2$ che consideriamo agire sugli operandi 0 e 1:

$$\wedge \; : \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vee \; : \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad +_2 \; : \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Le relative matrici sono simmetriche e questo corrisponde alla commutatività delle operazioni, cioè alla proprietà che per una qualsiasi operazione binaria denotata con il simbolo $*$ da usare come infisso è espressa dall'enunciato $\forall x, y \in S \; : \; x * y = y * x$.

G42:a.13 **Esercizi** Consideriamo la matrice $A \in \mathsf{Mat}_{E,D,C}$ e gli insiemi T ed S tali che $\emptyset \subset T \subset E$ e $\emptyset \subset S \subset D$; si dimostrino le proprietà che seguono.
(a) $A^\top{}_{\sqcap\, S\times T} \; = \; (A_{T\times S})^\top$
(b) $A^\top{}_{\mathsf{E}\, S,T} \; = \; \left(A_{\mathsf{E}\, T,S}\right)^\top$
(c) Ogni matrice diagonale è simmetrica.
(d) Le sole matrici quadrate diagonali antisimmetriche sono le matrice nulle $\mathbf{0}_d$.
(e) Le sole matrici quadrate simmetriche ed antisimmetriche sono le matrice nulle $\mathbf{0}_d$.

G42:b. Operazioni tra matrici su un campo

G42:b.01 Avremo modo di
Come già segnalato, le matrici che interessano maggiormente sono quelle le cui entrate appartengono ad un campo (T23:) , ma possono interessare anche matrici le cui entrate appartengono a strutture monoterreno meno ricche dei campi come gli anelli ed i semianelli (T23:) e, all'opposto, matrici le cui entrate fanno parte di strutture più ricche, strutture su due terreni come algebre su campo (T15:) e polinomi.

Considerando un insieme $\mathbf{M}$ di matrici le cui entrate appartengono ad una struttura $\boldsymbol{K}$, per tale struttura useremo il termine **struttura codominio** di $\mathbf{M}$.

Per tutte le matrici sopra una data struttura codominio $\boldsymbol{K}$ si possono definire utilmente varie operazioni costruite a partire dalle operazioni della stessa $\boldsymbol{K}$.

Nel seguito denoteremo con $\mathbb{F}$ un campo generico e con $\mathbb{K}$ una struttura meno ricca di un campo da precisare di volta in volta.

Consideriamo due matrici sopra $\mathbb{F}$ aventi lo stesso profilo $e \times d$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{e,1} & a_{e,2} & \dots & a_{e,d} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,d} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{e,1} & b_{e,2} & \dots & b_{e,d} \end{bmatrix} .$$

Si dice **somma** di A e B la matrice $e \times d$

$$A + B := \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,d} + b_{1,d} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,d} + b_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{e,1} + b_{e,1} & a_{e,2} + b_{e,2} & \dots & a_{e,d} + b_{e,d} \end{bmatrix} .$$

Non viene invece definita la somma di due matrici con profili diversi.

Se α è un qualsiasi elemento del campo $\mathbb{F}$ si dice **moltiplicazione per lo scalare** α della matrice A la matrice avente lo stesso profilo $e \times d$

$$\alpha \cdot A := \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{1,1} & \alpha \cdot a_{1,2} & \dots & \alpha \cdot a_{1,d} \\ \alpha \cdot a_{2,1} & \alpha \cdot a_{2,2} & \dots & \alpha \cdot a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{e,1} & \alpha \cdot a_{e,2} & \dots & \alpha \cdot a_{e,d} \end{bmatrix} .$$

G42:b.02 Si definisce **opposta** della matrice A la matrice di uguale profilo

$$-1 \cdot A := -A := \begin{bmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,d} \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & \dots & -a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{e,1} & -a_{e,2} & \dots & -a_{e,d} \end{bmatrix} .$$

Di due matrici A e B aventi lo stesso profilo si può quindi definire la **differenza** come la matrice (di uguale profilo)

$$A - B := A + (-B) := \begin{bmatrix} a_{1,1} - b_{1,1} & a_{1,2} - b_{1,2} & \dots & a_{1,d} - b_{1,d} \\ a_{2,1} - b_{2,1} & a_{2,2} - b_{2,2} & \dots & a_{2,d} - b_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{e,1} - b_{e,1} & a_{e,2} - b_{e,2} & \dots & a_{e,d} - b_{e,d} \end{bmatrix} .$$

G42:b.03 Di due o più matrici dello stesso profilo si possono quindi considerare le **combinazioni lineari**. Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ ed A e B sono matrici di profilo $e \times d$, si può considerare la matrice combinazione lineare, anch'essa appartenente a $\mathsf{Mat}_{e,d;\mathbb{F}}$

$$\alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C \;:=\; \begin{bmatrix} \alpha a_{1,1} + \beta b_{1,1} + \gamma c_{1,1} & \alpha a_{1,2} + \beta b_{1,2} + \gamma c_{1,2} & \dots & \alpha a_{1,d} + \beta b_{1,d} + \gamma c_{1,d} \\ \alpha a_{2,1} + \beta b_{2,1} + \gamma c_{2,1} & \alpha a_{2,2} + \beta b_{2,2} + \gamma c_{2,2} & \dots & \alpha a_{2,d} + \beta b_{2,d} + \gamma c_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{e,1} + \beta b_{e,1} + \gamma c_{e,1} & \alpha a_{e,2} + \beta b_{e,2} + \gamma c_{e,2} & \dots & \alpha a_{e,d} + \beta b_{e,d} + \gamma c_{e,d} \end{bmatrix} .$$

L'insieme delle matrici di un dato profilo $e \times d$ su un campo costituisce quindi uno spazio vettoriale; chiaramente tale spazio ha $e \cdot d$ dimensioni, ovvero si ha $\dim(\mathsf{Mat}_{E,D,\mathbb{F}}) = |E| \cdot |D|$.

Può essere utile osservare che le definizioni date costituiscono generalizzazioni di analoghe definizioni sulle sequenze di data lunghezza di elementi del campo $\mathbb{F}$. Infatti l'insieme delle matrici riga di profilo $1 \times d$ equivale logicamente allo spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ costituito dalle d-uple e l'insieme delle matrici colonna di profilo $e \times 1$ equivale allo spazio delle e-uple $\mathbb{F}^{\times e}$.

G42:b.04 Com'è prevedibile, per le operazioni sulle matrici sopra definite si dimostrano senza difficoltà le proprietà che caratterizzano gli spazi vettoriali.

Per ogni scelta di $A, B, C \in \mathsf{Mat}_{e,d;\mathbb{F}}$ e di $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ si ha:

(1) $A + B = B + A$

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3) $A + \mathbf{0}_{[e,d]} = A$

(4) $A - A = \mathbf{0}_{[e,d]}$

(5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

(6) $(\alpha + \beta)A = \alpha\, A + \beta\, A$

(7) $(\alpha\, \beta)A = \alpha(\beta\, A)$

(8) $1 \cdot A = A$

(9) $0 \cdot A = \mathbf{0}_{[e,d]}$

(10) $\forall n \in \mathbb{P} \;:\; n \cdot A = A + A + \cdots + A$

Ricordiamo che con $\mathbf{0}_{[r,c]}$ denotiamo la matrice $r \times c$ con le entrate tutte nulle.

Osserviamo anche che le operazioni definite finora si possono introdurre anche per matrici di un insieme $\mathsf{Mat}_{E,D;\mathbb{F}}$ con insiemi di etichette E e D numerabili o anche continue.
Inoltre queste operazioni si possono definire anche per matrici sopra un semianello commutativo $\mathbb{K}$, con la sola precauzione di chiedere $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

G42:b.05 Definiamo ora il **prodotto di due matrici** B ed A su un dato campo $\mathbb{F}$ alle quali chiedimo di avere profilo finito e di costituire una cosiddetta **coppia di matrici moltiplicabili** o **coppia di matrici conformabili**: questo significa che l'insieme delle etichette della colonne della B deve coincidere con l'insieme delle etichette delle righe della A. In tal caso Se $B \in \mathsf{Mat}_{F,E;\mathbb{F}}$ ed $A \in \mathsf{Mat}_{E,D;\mathbb{F}}$, dove F, E e D denotano insiemi finiti, si definisce il prodotto delle due matrici e lo si scrive $B \mathbin{+} A$ o $B \cdot A$.
Per semplicità di notazioni ci limitiamo al caso in cui le etichette sono costituite dai primi interi positivi; assumiamo che $f, e, d \in \mathbb{P}$ e definiamo come prodotto della matrice $B \in \mathsf{Mat}_{f,e;\mathbb{F}}$ per la matrice $A \in \mathsf{Mat}_{e,d;\mathbb{F}}$ la matrice

$$B \cdot A := \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,e} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,e} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{f,1} & b_{f,2} & \dots & b_{f,e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{e,1} & a_{e,2} & \dots & a_{e,d} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,d} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{f,1} & p_{f,2} & \dots & p_{f,d} \end{bmatrix}$$

$$\text{con} \quad p_{k,i} := \sum_{j=1}^{e} b_{k,j} a_{j,i} \quad \text{per} \quad k = 1, 2, ..., f \;\text{ ed }\; i = 1, 2, ..., d\,.$$

La definizione, molto importante, non è di comprensione immediata e conviene accostarla attraverso alcuni semplici esempi, prima solo numerici, poi con entrate contenenti variabili.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 19 \\ 14 & 27 \end{bmatrix} \;;$$

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 w_1 + v_2 w_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 w_1 & v_2 w_1 \\ v_1 w_2 & v_2 w_2 \end{bmatrix} \;;$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ag + bh + ci \\ dg + eh + fi \end{bmatrix} \,.$$

G42:b.06 I primi due prodotti degli esempi precedenti mostrano che il prodotto di matrici in generale non è commutativo. Confrontando i due prodotti di matrici della forma $B \cdot A$ ed $A \cdot B$, va detto che se è definita la prima di tali composizioni, cioè se $\langle B, A\rangle$ è una coppia di matrici conformabili, non è detto che lo sia anche la coppia riflessa $\langle A, B\rangle$: se $B \in \mathsf{Mat}_{f,e}$ ed $A \in \mathsf{Mat}_{e,d}$, è conformabile anche $\langle A, B\rangle$ sse $f = d$, cioè sse B ha lo stesso profilo della $A^\intercal$.
In questo caso le due matrici prodotto hanno i profili $d \times d$ ed $e \times e$, profili che coincidono sse $f = e = d$. Dunque ha senso di porsi la questione se due matrici commutano solo se queste sono matrici quadrate dello stesso ordine.
Abbiamo visto in :b.06 due matrici 2×2 che non commutano; esempi di coppie di matrici quadrate che commutano sono i seguenti:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha & b\alpha \\ c\alpha & d\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Questi esempi suggeriscono che si hanno matrici commutanti in casi piuttosto particolari: il primo esempio evidenzia la commitatività di due matrici diagonali, il secondo palesa che una matrice quadrata costante commuta con ogni altra matrice dello stesso ordine. Vedremo che questi fatti corrispondono al fatto che matrici costanti e matrici diagonali esprimono trasformazioni lineari di uno spazio vettoriale finitodimensionale aventi significati geometrici ben precisi.

G42:b.07 Particolare attenzione merita il prodotto di un vettore riga $1 \times d$ per un vettore colonna $d \times 1$. Nei casi delle dimensioni 3 e d:

$$[\, u_1 \quad u_2 \quad u_3 \,] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [\, u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 \,] \qquad [\, v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_d \,] \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_d \end{bmatrix} = \left[\, \textstyle\sum_{j=1}^d v_j w_j \,\right]$$

Questi prodotti di matrici quindi forniscono i prodotti scalari dei due vettori individuati dalle due particolari matrici, prodotti ai quali, risp., si possono dare forme come $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}$ e $\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle$ (v. G41:1).

Un vettore riga e un vettore colonna si dicono **ortogonali** sse il loro prodotto è nullo.

Conviene prendere in esame anche il semplice caso in cui vettore riga e vettore colonna hanno solo come entrate zeri ed uni. Due esempi con $d = 6$:

$$[\, 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \,] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \qquad [\, 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \,] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \,.$$

Evidentemente questo prodotto fornisce il numero degli indici per i quali si hanno le due rispettive entrate uguali ad 1. Questo prodotto potrebbe applicarsi a due persone delle quali si registra se posseggono o meno le competenze di un dato elenco (costiyuito da $d = 6$ competenze nei due esempi): il prodotto fornisce il numero delle competenze possedute da entrambe le persone; in questo "spazio delle competenze" due persone risultano ortogonali se non si riscontra alcuna competenza posseduta da entrambe.

G42:b.08 L'interesse del prodotto scalare visto come prodotto di un vettore riga per un vettore colonna sta nella possibilità di esprimere un generico prodotto di matrici (conformabili) $B \in \mathsf{Mat}_{f,e}$ ed $A \in \mathsf{Mat}_{e,d}$ come matrice le cui entrate sono prodotti scalari.
Come visto in :a.04, la B si può considerare ottenuta come sovrapposizione di f matrici riga esprimenti vettori e-dimensionali che denotiamo, per $k = 1, ..., f$, con $B_{k,*}$ o con notazione alla Dirac con $\langle \mathsf{B}_k|$; la matrice A si può considerare ottenuta come affiancamento di d matrici colonna esprimenti vettori e-dimensionali che denotiamo per $i = 1, ..., d$, con $A_{*,i}$ o alla Dirac con $|\mathsf{A}_i\rangle$. Queste osservazioni si possono presentare formalmente scrivendo

$$B = \mathbb{I}_{k=1}^{f} B_{k,\star} \qquad \text{e} \qquad A = \boxminus_{j=1}^{e} A_{\star,i} \ .$$

L'entrata relativa alla generica casella $\langle k, i\rangle$ del prodotto $B \cdot A$ è quindi

(1) $$\sum_{j=1}^{e} b_{k,j} a_{j,i} = \langle \mathsf{B}_k | \mathsf{A}_i \rangle = B_{k,*} \cdot A_{*,i}$$

e la matrice prodotto si può scrivere come matrice di prodotti scalari

(2) $$B \cdot A = \begin{bmatrix} B_{1,*} \cdot A_{*,1} & B_{1,*} \cdot A_{*,2} & \dots & B_{1,*} \cdot A_{*,d} \\ B_{2,*} \cdot A_{*,1} & B_{2,*} \cdot A_{*,2} & \dots & B_{2,*} \cdot A_{*,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{f,*} \cdot A_{*,1} & B_{f,*} \cdot A_{*,2} & \dots & B_{f,*} \cdot A_{*,d} \end{bmatrix} .$$

G42:b.09 È opportuno soffermarsi anche sul prodotto di una matrice per un vettore colonna che consideriamo nella forma seguente

(1) $$A \dashv \mathsf{x} \ = \ A \cdot \mathsf{x} \ = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{e,1} & a_{e,2} & \dots & a_{e,d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,d}x_d \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,d}x_d \\ \vdots \\ a_{e,1}x_1 + a_{e,2}x_2 + \dots + a_{e,d}x_d \end{bmatrix} .$$

L'espressione precedente si può leggere come la rappresentazione mediante matrici di una trasformazione lineare: la matrice A di profilo $e \times d$ rappresenta una trasformazione del genere $\{\mathbb{F}^{\times d} \longrightarrow_{\mathbb{F}-lin} \mathbb{F}^{\times e}\}$ relativamente a una determinata base di $\mathbb{F}^{\times d}$ e ad una base di $\mathbb{F}^{\times e}$; l'azione di A sul vettore $\mathsf{x} \in \mathbb{F}^{\times d}$ è rappresentata dal vettore colonna $e \times 1$ fornito da $A \cdot \mathsf{x}$.
Questa espressione si può anche considerare un vettore di $\mathbb{F}^{\times e}$ ottenuto come combinazione lineare dei d vettori e-dimensionali che costituiscono le d colonne di A, combinazione lineare ottenuta usando come coefficienti le d entrate del vettore colonna x:

(2) $$\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{e,1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{e,1} \end{bmatrix} x_2 + \cdots \begin{bmatrix} a_{1,d} \\ a_{2,d} \\ \vdots \\ a_{e,d} \end{bmatrix} x_s = A_{*,1}x_1 + A_{*,2}x_2 + \dots + A_{*,d}x_d \ = \begin{bmatrix} A_{1,*} \cdot \mathsf{x} \\ A_{2,*} \cdot \mathsf{x} \\ \vdots \\ A_{d,*} \cdot \mathsf{x} \end{bmatrix} .$$

Il prodotto di una matrice per un vettore colonna consente anche di esprimere concisamente un sistema di e equazioni lineari in d incognite: basta pensare che x esprima una d-upla di incognite e uguagliare il prodotto a un vettore colonna con e entrate b da pensare costituito dai termini noti del sistema:

(3) $$A \cdot \mathsf{x} = \mathsf{b} \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,d}x_d & = \ b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,d}x_d & = \ b_2 \\ \qquad \vdots & \\ a_{e,1}x_1 + a_{e,2}x_2 + \dots + a_{e,d}x_d & = \ b_e \end{cases} .$$

G42:b.10 Consideriamo ancora il prodotto di una matrice per un vettore colonna cui ora diamo la forma $\mathsf{c} = B \cdot \mathsf{a}$ e che ora interpretiamo come rappresentazione di un episodio evolutivo: l'applicazione di B al vettore $\mathsf{a} \in \mathbb{F}^{\times e}$ lo trasforma in $\mathsf{c} \in \mathbb{F}^{\times f}$. Le caratteristiche della trasformazione individuata dalla matrice B si riconducono interamente all'applicazione di B ai vettori della base canonica di $\mathbb{F}^{\times d}$:

$$\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,e} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,e} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{f,1} & b_{f,2} & \dots & b_{f,e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{f,1} \end{bmatrix} \quad \dots\dots \quad \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,e} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,e} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{f,1} & b_{f,2} & \dots & b_{f,e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,e} \\ b_{2,e} \\ \vdots \\ b_{f,e} \end{bmatrix}$$

In generale $\forall j = 1, 2, ..., e \;\vdots\; B \cdot \mathsf{e}_j = B_{*,j}$. La colonna j-esima della matrice B è il vettore ottenuto applicando la B allo j-esimo vettore della base canonica dello spazio dominio della B stessa.

Simmetricamente per il prodotto del vettore riga c di profilo $1 \times f$ per la matrice $B \in \mathsf{Mat}_{f,e;\mathbb{F}}$ si trova:

$$\mathsf{c} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,e} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,e} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{f,1} & b_{f,2} & \dots & b_{f,e} \end{bmatrix} = [\, \mathsf{c} \cdot B_{*,1} \quad \mathsf{c} \cdot B_{*,2} \quad \dots \quad \mathsf{c} \cdot B_{*,e} \,] \ .$$

Se si considerano i prodotti nei quali come vettori riga si prendono i vettori riga canonici che scriviamo $\langle \mathsf{e}_k |$ per $k = 1, ..., f$ si ottiene:

$$[1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,e} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,e} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{f,1} & b_{f,2} & \dots & b_{f,e} \end{bmatrix} = [\, b_{1,1} \quad b_{1,2} \quad \dots \quad b_{1,e} \,] = B_{1,*} \qquad \dots\dots$$

$$\dots\dots \qquad [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,e} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,e} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{f,1} & b_{f,2} & \dots & b_{f,e} \end{bmatrix} = [\, b_{f,1} \quad b_{f,2} \quad \dots \quad b_{f,e} \,] = B_{f,*} \ .$$

Quindi la riga k-esima della matrice B è il vettore ottenuto applicando B alla destra del k-esimo vettore canonico di $\mathbb{F}^{\times f}$.

G42:b.11 Le precedenti considerazioni mostrano come ogni matrice $f \times e$ può essere associata a due trasformazioni lineari: come trasformazione di vettori colonna $e \times 1$ in vettori colonna $f \times 1$ e come trasformazione di vettori riga $1 \times f$ in vettori riga $1 \times e$. Queste interpretazioni e le connesse interpretazioni delle righe e delle colonna delle matrici risultano ancora più chiare nel semplice caso delle matrici binarie. Consideriamo ad esempio la matrice di zeri e uni:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Questa matrice si può pensare come la rappresentazione delle connessioni che esistono tra due gruppi di località; le località del primo gruppo $j \in E$ sono associate alle colonne della B, quelle del secondo gruppo $k \in F$ alle sue righe; nell'esempio $E = \{1, 2, ..., e = 6\}$ ed $F = \{1, 2, ..., f = 5\}$. Ciascuna delle entrate $b_{k,j}$ della B si interpreta come indicazione del collegamento della località $j \in E$ con la $k \in F$, indicazione ottenibile servendosi della funzione valore booleano come:

$$b_{k,j} = \mathsf{Bval}(k \text{ è raggiungibile da } j).$$

Il vettore colonna $B_{*,j}$ dice quali località $k \in F$ sono raggiungibili da j; il vettore riga $B_{k,*}$ dice quali località $j \in E$ possono raggiungere k.

Applichiamo la matrice a un vettore colonna a avente come entrate interi naturali associati alle località $j \in E$ per ottenere il vettore colonna $\mathsf{d} = B \cdot \mathsf{a}$ le cui entrate sono associate alle località $k \in F$; ad esempio

$$\begin{bmatrix}1\\3\\8\\2\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&0&1&0&0\\1&0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&1\\1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\0\\3\\1\\0\\4\end{bmatrix} .$$

Interpretiamo questa relazione come passo evolutivo pensando che il vettore a riguardi località nelle quali è immagazzinato un bene razionato e stabilendo quante confezioni possono essere inviate a ciascuna delle località k che ne fanno richiesta. In tal caso il vettore d dice quante confezioni possono essere fornite a ciascuna delle località k, che quindi assumono il ruolo delle destinazioni.
Questa interpretazione dissimmetrica vede la B come indicatrice di collegamenti che conviene visualizzare orientati da destra a sinistra, in accordo con la scrittura $\mathsf{d} = B \cdot \mathsf{a}$. Il ruolo delle colonne e delle righe può essere ricordato da due frecce consecutive, la prima associata ad aSd discendente e la seconda volta a sinistra associata alla B; questa raffigurazione vuole segnalare che la B rappresenta evoluzioni da entità associate alle sue colonne ad entità associate alle sue righe. L'interpretazione di una matrice come trasformazione di vettori riga può invece essere ricordata da due frecce consecutive, la prima volta verso destra, la seconda verso il basso.

G42:b.12 Può anche essere utile interpretare il prodotto di due matrici binarie conformabili $B \in \mathsf{Mat}_{F,E;\mathbb{B}}$ ed $A \in \mathsf{Mat}_{E,D;\mathbb{B}}$ in termini di raggiungimento di località. Esse possono essere considerate le matrici delle adiacenze di due digrafi bipartiti che forniscono i collegamenti tra le località (nodi) di tre insiemi: la matrice A presenta i collegamenti tra le località di un primo insieme D con quelle di un secondo insieme E e la B i collegamenti fra le località di E con quelle di un insieme F. Più precisamente, mediante la funzione valore binario Bval definiamo come entrate di queste matrici

$\forall i \in D \ , \ j \in E \ \vdots \ \ a_{j,i} \ := \ \mathsf{Bval}(\text{ esiste collegamento da } i \text{ a } j\,)$ e

$\forall j \in E \ , \ k \in F \ \vdots \ \ b_{k,j} \ := \ \mathsf{Bval}(\text{ esiste collegamento da } j \text{ a } k\,)$

Va osservato che queste matrici delle adiacenze sono le trasposte di quelle comunemente definite per i digrafi.
Un esempio di prodotto di queste matrici è

$$B \cdot A = \begin{bmatrix}0&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&2&2\\0&1&1&0\\2&0&1&3\\0&0&0&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$

Il prodotto delle matrici $B \cdot A$, come mostra la rappresentazione sagittale dei digrafi dei collegamenti, fornisce i numeri dei collegamenti che consentono di raggiungere dalle diverse località di D le località di F passando per qualche località di E.

G42:b.13 Un altro tipo di prodotto di matrici che va segnalato è il prodotto tra una matrice colonna

$f \times 1$ per una matrice riga $1 \times d$, matrici conformabili quali che siano i valori di f e d:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\, w_1 & v_1\, w_2 & \dots & v_1\, w_d \\ v_2\, w_1 & v_2\, w_2 & \dots & v_2\, w_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_f\, w_1 & v_f\, w_2 & \dots & v_f\, w_d \end{bmatrix} .$$

G42:b.14 Combinando le operazioni su matrici di combinazione lineare e prodotto con la trasposizione per arbitrari $A, \overline{A} \in \mathsf{Mat}_{e,d}$, $B \in \mathsf{Mat}_{f,e}$ ed $\alpha \in \mathbb{F}$, si trovano le proprietà che seguono:

(1) $(A + \overline{A})^\top = A^\top + \overline{A}^\top$ ▮

(2) $(\alpha\, A)^\top = \alpha A^\top$ ▮

(3) $(B \cdot A)^\top = A^\top \cdot B^\top$

Dim.: Basta osservare che

$$(B \cdot A)^\top{}_{\upharpoonright\, i,k} = \sum_{j=1}^{e} b_{i,j}\, a_{j,k} = \sum_{j=1}^{e} A^\top{}_{\upharpoonright\, k,j}\, B^\top{}_{\upharpoonright\, j,i} = \left(A^\top \cdot B^\top\right)_{\upharpoonright\, k,i}$$ ▮

(4) $\langle A, A^\top\rangle$ e $\langle A^\top, A\rangle$ sono coppie di matrici conformabili, $A \cdot A^\top \in \mathsf{Mat}_{e,e}$ e $A^\top \cdot A \in \mathsf{Mat}_{d,d}$ ▮

Possono venire utili anche le seguenti formule che esprimono mediante sovrapposizioni di righe e affiancamenti di colonne, risp., la trasposizione di una matrice e il prodotto di due matrici.

$$A^\top = \left(\boxbar_{i=1}^{d} A_{*,i} \right)^\top = \boxminus_{i=1}^{d} A_{*,i}{}^\top = \boxminus_{i=1}^{d} (A^\top)_{i,*} = \left(\boxminus_{j=1}^{e} A_{i,*} \right)^\top = \boxbar_{j=1}^{e} A_{j,*}{}^\top = \boxbar_{j=1}^{e} (A^\top)_{j,*} \; .$$

$$B \cdot A = \left(\boxminus_{k=1}^{f} B_{k,*} \right) \cdot A = \boxminus_{k=1}^{f} (B_{k,*} \cdot A) = B \cdot \left(\boxbar_{i=1}^{d} A_{*,i} \right) = \boxbar_{i=1}^{d} (B \cdot A_{*,i}) \; .$$

G42:b.15 Consideriamo due interi $e, d \geq 2$ e una matrice A di dominio $E \times D$ con $|E| =: e$ e $|D| =: d$; in particolare potrebbe essere $E = \{1, ..., e\}$ e $D = \{1, ..., d\}$. Ricordiamo che per sottomatrice della $A \in \mathsf{Mat}_{e,d:V}$ si intende ogni matrice ottenuta dalla A eliminando un certo numero $s \in [0 : e-1]$ delle sue righe e un certo numero $t \in [0 : d-1]$ delle sue colonne.

Più in dettaglio consideriamo $J \subset E$ e $I \subset D$; in particolare potrebbe essere $J = \langle j_1, ..., j_q\rangle$ una sottosequenza propria della $\langle 1, ..., e\rangle$ ed $I = \langle i_1, ..., i_p\rangle$ una sottosequenza propria della $\langle 1, ..., d\rangle$. Con la scrittura $A_{\upharpoonright\, J \times I}$ denotiamo la sottomatrice della A ottenuta mantenendo di essa solo le righe fornite da J e le colonne corrispondenti ad I. Denotiamo inoltre con $A_{\llcorner\, J,I}$ la sottomatrice ottenuta dalla A eliminando le righe fornite da J e le colonne relative ad I. Quest'ultima si dice **sottomatrice complementare** della $A_{\upharpoonright\, J \times I}$.

Le notazioni introdotte consentono di affermare che

$$A_{\upharpoonright\, J \times I} = A_{\llcorner\, E \setminus J, D \setminus I} \; .$$

Un esempio di matrice accompagnata da due sue sottomatrici complementari:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & 57 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 & 67 \end{bmatrix} \quad A_{\upharpoonright\, J \times I} = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 15 & 16 \\ 32 & 33 & 35 & 36 \\ 62 & 63 & 65 & 66 \end{bmatrix} \quad A_{\llcorner\, J,I} = \begin{bmatrix} 21 & 24 & 27 \\ 41 & 44 & 47 \\ 51 & 54 & 57 \end{bmatrix} \; ;$$

qui $J = \{1, 3, 6\}$ e $I = \{2, 3, 5, 6\}$

G42:b.16 Di una matrice $A \in \mathsf{Mat}_{E,D}$ talora è utile considerare una cosiddetta **evidenziazione a blocchi** ottenuta a partire da due partizioni degli insiemi delle righe e delle colonne $E = E_1 \dot\cup ... \dot\cup E_q$ e

$D = D_1 \dot\cup ... \dot\cup D_p$; questo interessa quando le partizioni risultano significative e/o quando consentano semplificazioni.

L'evidenziazione a blocchi consiste nella matrice di profilo $q \times p$ le cui entrate sono matrici,

$$(1) \qquad A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q,1} & A_{q,2} & \dots & A_{q,p} \end{bmatrix} \quad \text{ove} \quad \forall j = 1, ..., q \ , \ i = 1, ..., p \ : \ A_{j,i} := A_{\upharpoonright E_j \times D_i} \ .$$

Va osservato che le definizioni di sottomatrice e di blocchi, per le matrici con righe e colonne etichettate da interi successivi, non richiedono affatto che i sottoinsiemi come E_j e D_i ed F_l siano costituiti da interi successivi. Tuttavia molte formule su questo argomento, per facilità di lettura, sono presentate considerando solo ripartizioni degli insiemi di etichette formate da successivi intervalli di interi. Questa facilitazione è resa lecita dalla possibilità di ricondursi ad essa applicando riordinamenti delle righe e delle colonne, riordinamenti ottenibili moltiplicando la matrice in esame a destra e a sinistra per matrici permutative. Due esempi di evidenziazione di struttura a blocchi sono i seguenti:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 30 & 21 & 31 & 20 \\ 10 & 0 & 11 & 0 \\ 32 & 23 & 33 & 22 \\ 12 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 12 & 13 \\ 20 & 21 & 30 & 31 \\ 22 & 23 & 32 & 33 \end{bmatrix} ,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 21 & 3 & 2 & 2 & 3 & 22 & 20 \\ 0 & 1 & 13 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 27 & 3 & 2 & 2 & 3 & 28 & 26 \\ 5 & 33 & 4 & 4 & 32 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 51 & 31 & 4 & 4 & 30 & 5 & 5 \\ 24 & 3 & 2 & 2 & 3 & 25 & 23 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 11 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & 13 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 20 & 21 & 22 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 23 & 24 & 25 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 26 & 27 & 28 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 30 & 31 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 32 & 33 \end{bmatrix}$$

G42:b.17 Le evidenziazioni a blocchi possono rendere più concise e semplici certe espressioni riconducendo numerose operazioni sulle entrate ad un numero minore di operazioni sulle sottomatrici costituenti i blocchi. Vediamo lo schema di base per queste semplificazioni.

Si abbiano le matrici $B \in \mathsf{Mat}_{F,E}$ ed $A \in \mathsf{Mat}_{E,D}$, e le tre ripartizioni $F = F_1 \dot\cup ... \dot\cup F_r$, $E = E_1 \dot\cup ... \dot\cup E_q$ e $D = D_1 \dot\cup ... \dot\cup D_p$, l'evidenziazione a blocchi precedente e la

$$B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,q} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r,1} & B_{r,2} & \dots & B_{r,q} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \forall l = 1, ..., r \ , \ j = 1, ..., q \ : \ B_{l,j} := B_{\upharpoonright F_l \times E_j} \ .$$

Il prodotto di queste matrici, $P \in \mathsf{Mat}_{F,D}$, è ottenibile dalla evidenziazione a blocchi

$$P = B \cdot A = \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \dots & P_{1,p} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \dots & P_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r,1} & P_{r,2} & \dots & P_{r,p} \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad \forall l = 1,...,r \ , \ i = 1,...,p \ \vdots \ \ P_{l,i} := \sum_{j=1}^{q} B_{l,j} \cdot A_{j,i} \ .$$

G42:b.18 L'evidenziazione a blocchi è vantaggiosa in particolare nel caso delle cosiddette **matrici diagonali a blocchi**, matrici quadrate per le quali si trova una evidenziazione a blocchi basata su una sola partizione dell'insieme delle righe e delle colonne e tale che i blocchi relativi a due indici diversi hanno tutti gli elementi uguali a 0. Due matrici diagonali a blocchi relative a tre partizioni con lo stesso numero di parti sono

$$A \ = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{2,2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_{p,p} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B \ = \begin{bmatrix} B_{1,1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{2,2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & B_{p,p} \end{bmatrix} .$$

Esse presentano blocchi $B_{j,j}$ ed $A_{j,j}$ che evidentemente costituiscono coppie conformabili e il loro prodotto è anch'esso una matrice diagonale a blocchi:

$$P = B \cdot A = \begin{bmatrix} B_{1,1} \cdot A_{1,1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{2,2} \cdot A_{2,2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & B_{p,p} \cdot A_{p,p} \end{bmatrix} .$$

Incontreremo casi interessanti di matrici diagonali a blocchi con i blocchi dati da matrici nulle o da matrici unità.

Semplici matrici a blocchi con blocchi nulli sono le matrici permutative; in essa i blocchi corrispondono ai cicli nei quali si decompone ogni permutazione. Ad esempio

$$\mathsf{Mprm}((1\ 2\ 3)(4\ 5)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{Mprm}((1\ 6)(2\ 3\ 4\ 5)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

G42:c. Matrici quadrate

G42:c.01 Tra le matrici su un campo $\mathbb{F}$, quelle che risultano più interessanti e utili sono le matrici quadrate, cioè gli elementi di $\mathsf{Mat}_{D;\mathbb{F}} = \mathsf{Mat}_{D,D;\mathbb{F}}$ con D insieme finito. In particolare vengono utilizzate ampiamente le cosiddette **matrici di ordine** d su $\mathbb{F}$, con d intero positivo, cioè gli elementi di $\mathsf{Mat}_{d;\mathbb{F}}$.

In effetti su queste matrici si possono applicare più agevolmente che ad altre numerose composizioni e funzioni che le rendono strumenti computazionali notevolmente versatili.

In particolare le combinazioni lineari, i prodotti e le trasposte delle matrici di $\mathsf{Mat}_{d;\mathbb{F}}$ sono ancora matrici dello stesso profilo.

Una collezione non vuota di matrici quadrate su un campo $\mathcal{M}$ viene chiamata **algebra di matrici** sse è chiusa rispetto alla combinazione lineare e al prodotto tra matrici. Una particolare algebra di matrici è costituita dalla totalità delle matrici quadrate di un dato ordine d, $\mathsf{Mat}_{d;\mathbb{F}}$.

Conviene osservare che le algebre di matrici sono un particolare sottoinsieme della specie delle **algebre su campo**. Una specifica algebra sul campo $\mathbb{F}$ è una struttura costituita da un insieme terreno i cui elementi possono essere sottoposti a combinazioni $\mathbb{F}$-lineari e possono essere composte con un'operazione binaria associativa e distributiva rispetto alla somma, il prodotto. Sia la combinazione lineare che il prodotto forniscono un nuovo elemento del terreno. Altri due esempi di algebre su campo di grande interesse sono forniti dai polinomi su un campo e in un determinato insieme di variabili (una o più) e dagli operatori lineari su uno spazio vettoriale.

Un'altra peculiarità delle matrici di ordine d è quella di costituire endomorfismi lineari del genere $\{\mathbb{F}^{\times d} \longmapsto_{\mathbb{F}-lin} \mathbb{F}^{\times d}\}$. In effetti ciascuna di esse è la rappresentazione di un endomorfismo lineare (=operatore lineare) sullo spazio vettoriale $\mathbb{F}^{\times d}$.

G42:c.02 Consideriamo due matrici quadrate $A, B \in \mathsf{Mat}_{d;\mathbb{F}}$ per le cui entrate usiamo le notazioni usuali

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & a_{d,2} & \dots & a_{d,d} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,d} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d,1} & b_{d,2} & \dots & b_{d,d} \end{bmatrix} .$$

Si può porre il problema se A e B commutino o meno (v. :b.06). Può essere utile fare riferimento al loro composizione chiamata **commutatore** e denotata mediante parentesi quadrate con il ruolo di **parentesi di commutazione**:

$$[A, B] \;:=\; A \cdot B - B \cdot A \;.$$

Evidentemente A e B commutano sse $[A, B] = \mathbf{0}_{[d,d]}$.

(1) Prop.: Il commutatore costituisce una operazione binaria bilineare e anticommutativa:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}\ ,\ A, B, C \in \mathsf{Mat}_d\ :$

$$[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C] \quad , \quad [A, \beta B + \gamma C] = \beta[A, B] + \gamma[A, C] \quad , \quad [B, A] = -[A, B]$$ ▮

(2) Prop.: **Identità di Jacobi** $\forall A, B, C \in \mathsf{Mat}_d\ :\ \ [[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = \mathbf{0}_{[d,d]}$

Dim.: Basta sviluppare i commutatori ed osservare che da ciascuno dei tre addendi si ricavano 4 prodotti delle tre matrici e che i 12 prodotti riguardano i $3! = 6$ scritture di prodotti dei tre operatori, ciascuno dei quali compare una volta con il segno $+$ ed una con il segno $-$ ▮

G42:c.03 Ricordiamo alcune definizioni e proprietà.
Si dicono **entrate diagonali** di $A \in \mathsf{Mat}_d$ le sue entrate relative alle caselle della sua diagonale principale, entrate aventi l'etichetta della riga uguale a quella della colonna, cioè le entrate $a_{1,1}, a_{2,2}, ..., a_{d,d}$.

Una matrice $A \in \mathsf{Mat}_{d;\mathbb{F}}$ si dice **matrice diagonale** sse tutte le sue entrate non diagonali sono nulle, ovvero sse accade che $\forall i, j = 1, 2, ..., d\ :\ a_{i,j} = \delta_{i,j} a_{i,j}$.
In particolare si dice **matrice costante** ogni matrice multipla della matrice identità, matrice le cui entrate hanno la forma $\alpha\delta_{i,j}$ per qualche $\alpha \in \mathbb{F}$. Ancor più particolare è la **matrice unità** di ordine d

$$\mathbf{1}_{[d]} = [\delta_{i,j}\ |:\ i, j = 1, 2, ..., d] \;.$$

Evidentemente due matrici diagonali dello stesso ordine commutano e ogni matrice costante commuta con ogni matrice quadrata dello stesso ordine. Più precisamente le matrici diagonali di ordine d su un campo $\mathbb{F}$ costituiscono un campo isomorfo al campo $\left\langle \mathbb{F}^{\times d}, +^{\times d}, -^{\times d}, 0^{\times d}, \cdot^{\times d}, 1^{\times d}, {}^{-1\times d} \right\rangle$.

G42:c.04 Si dice **traccia** della matrice quadrata A la somma delle sue entrate diagonali:

$$\mathrm{Tr}\,A := a_{1,1} + a_{2,2} + ... + a_{d,d} = \sum_{i=1}^{d} a_{i,i} \ .$$

La traccia è una applicazione del genere $\{\mathsf{Mat}_{d;\mathbb{F}} \longmapsto_{\mathbb{F}-lin} \mathbb{F}\}$; può quindi considerarsi un funzionale.

(1) Prop.: $\forall A, B \in \mathsf{Mat}_{d;\mathbb{F}}$, $\alpha \in \mathbb{F}$:

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B \qquad \mathrm{Tr}(\alpha\,A) = \alpha \cdot \mathrm{Tr}\,A \qquad \mathrm{Tr}(A \cdot B) = \mathrm{Tr}(B \cdot A)$$

Dim.: Basta esprimere i due membri di ciascuna uguaglianza mediante le entrate delle matrici: per la prima si ha $\sum_i a_{i,i} + b_{i,i} = \sum_i a_{i,i} + \sum_i b_{i,i}$, per la seconda $\sum_i \alpha a_{i,i} = \alpha \sum_i a_{i,i}$, per l'ultima $\sum_{i,j} a_{i,j} b_{j,i} = \sum_{i,j} b_{j,i} a_{i,j}$ ▮

Le prime due uguaglianze dicono che la traccia è un funzionale lineare.
Per quanto riguarda la terza si osserva che il campo $\mathbb{F}$ si può considerare un'algebra sullo stesso campo $\mathbb{F}$; quindi l'uguaglianza afferma che la traccia rispetta l'operazione algebrica di prodotto. Va osservato anche che la traccia della matrice unità vale d, scalare che per $d > 1$ è diverso da 1, l'unità del prodotto su $\mathbb{F}$.

G42:c.05 Per le matrici quadrate si possono definire facilmente le potenze e i polinomi: per ogni matrice quadrata $A \in \mathsf{Mat}_{d;\mathbb{F}}$ si definiscono iterativamente le **potenze** A^n con $n \in \mathbb{N}$ ponendo

$$A^0 := \mathbf{1}_{[d]} \quad , \quad A^1 := A \quad , \quad \forall n = 1, 2, ... \ : \ A^{n+1} := A^n \ .$$

Si verifica facilmente che $\forall m, n \in \mathbb{N} \ : \ A^m \cdot A^n = A^{m+n}$.

Per qualsiasi polinomio su $\mathbb{F}$ nella variabile x, $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$ si definisce come **composizione polinomiale** della matrice A retta dal polinomio $p(x)$ la seguente combinazione lineare di matrici $d \times d$:

$$p(A) := p_0 \mathbf{1}_{[d]} + p_1 A + p_2 A^2 + \cdots + p_n A^n = \sum_{i=0}^{n} p_i A^i \ .$$

(1) Prop.: Per $p(x), q(x)$ polinomi nella x, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $A \in \mathsf{Mat}_{d;\mathbb{F}}$ si ha
(i) $(\alpha p + \beta q)(A) = \alpha p(A) + \beta q(A)$,
(ii) $(p \cdot q)(A) = p(A) \cdot q(A)$, 'vjp (iii) $p(A) \cdot q(A) = q(A) \cdot p(A)$ ▮

Senza difficoltà si possono definire anche, per ogni $m = 2, 3, ...$, le valutazioni relative ad m matrici quadrate dei polinomi in m variabili, mediante l'attribuzione di una matrice quadrata come valore di ciascuna delle variabili.

Possono servire anche matrici le cui entrate sono polinomi su di un campo; tali matrici possono essere sottoposte a tutte le operazioni dell'algebra delle matrici. In effetti l'insieme di questi polinomi costituisce un campo.

G42:c.06 Una matrice quadrata si dice **matrice triangolare superiore** sse tutte le entrate nelle caselle al di sotto della diagonale principale sono nulle; si dice **matrice triangolare inferiore** sse tutte le entrate nelle caselle al di sopra della diagonale principale sono nulle. Le matrici triangolari superiori e inferiori, risp., hanno forme come le seguenti

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{d,d} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d,1} & b_{d,2} & \dots & b_{d,d} \end{bmatrix}$$

Una matrice quadrata è sia triangolare superiore che triangolare inferiore sse è una matrice diagonale; in altre parole l'intersezione dell'insieme delle matrici triangolari superiori con l'insieme delle matrici triangolari inferiori è l'insieme delle matrici diagonali.

Chiaramente la trasposizione è una biiezione tra matrici triangolari superiori e matrici triangolari inferiori. Inoltre si constata facilmente che sia la combinazione lineare che il prodotto di due matrici dello stesso ordine triangolari superiori [inferiori] è una matrice triangolare superiore [inferiore]. In altre parole le matrici triangolari superiori e le matrici triangolari inferiori di un dato ordine costituiscono sottoalgebre dell'algebra delle matrici di Mat_d.

G42:c.07 Una matrice quadrata si dice **matrice strettamente triangolare superiore** sse tutte le entrate nelle caselle al di sotto della diagonale principale e sulla diagonale principale sono nulle; si dice **matrice strettamente triangolare inferiore** sse tutte le entrate nelle caselle al di sopra della diagonale principale e sulla diagonale principale sono nulle. Le matrici strettamente triangolari superiori e inferiori hanno, risp., forme come le seguenti

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,d-1} & a_{1,d} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,d-1} & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{d-1,d} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{2,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{d-1,1} & b_{d-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ b_{d,1} & b_{d,2} & \dots & b_{d,d-1} & 0 \end{bmatrix} .$$

Le matrici triangolari strettamente superiori [strettamente inferiori] sono casi particolari delle matrici triangolari superiori [inferiori]. Chiaramente la trasposizione è una biiezione tra matrici strettamente triangolari superiori e matrici strettamente triangolari inferiori. Si osserva anche che l'insieme delle matrici triangolari strettamente superiori [inferiori] costituisce una sottoalgebra dell'algebra delle matrici triangolari superiori [inferiori].

Nello spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine d le matrici triangolari superiori, inferiori, strettamente superiori e strettamente inferiori costituiscono 4 sottospazi; il sottospazio delle triangolari superiori e il sottospazio delle triangolari strettamente inferiori sono sottospazi complementari; traspostamente sono complementari il sottospazio delle triangolari inferiori e il sottospazio delle triangolari strettamente superiori.

(1) Prop.: Sia T una matrice strettamente triangolare superiore [inferiore] di ordine d; allora $T^d = \mathbf{0}_{[d,d]}$.

Dim.: Per chiarire consideriamo un caso particolare di matrice strettamente triangolare superiore.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad T^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ad & ae+bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad T^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & adf \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad T^4 = \mathbf{0}_{[4,4]}$$

La progressiva riduzione dei triangoli di caselle contenenti entrate non nulle all'aumentare della potenza è evidentemente un fatto generale e l'enunciato è dimostrato per le matrici strettamente triangolare superiori. Formule simili ottenute per trasposizione dimostrano l'enunciato per le matrici strettamente triangolare inferiori ▮

Si dice **matrice nilpotente** una matrice quadrata tale che una sua potenza è la matrice nulla.
La proposizione precedente consente di affermare che le matrici strettamente triangolari superiori [inferiori] sono matrici nilpotenti.

G42:c.08 Nozioni meno stringenti di quelle di matrici triangolari sono quelle di **matrici triangolari** [superiore / inferiore / strettamente superiore / strettamente inferiore] **a blocchi**.

Esempi di matrici triangolari superiori a blocchi sono

$$\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} & b_{1,5} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & b_{2,5} \\ 0 & 0 & b_{3,3} & b_{3,4} & b_{3,5} \\ 0 & 0 & b_{4,3} & b_{4,4} & b_{4,5} \\ 0 & 0 & b_{5,3} & b_{5,4} & b_{5,5} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ 0 & 0 & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix} ;$$

esse sono evidenziabili, risp., nelle forme

$$\begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \mathbf{0} & B_{2,2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \mathbf{0} & A_{2,2} \end{bmatrix} .$$

Le evidenziazioni a blocchi sono utili quando consentono di semplificare espressioni come quella che segue riguardante il prodotto delle matrici precedenti:

$$\begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \mathbf{0} & B_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \mathbf{0} & A_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1,1} \cdot A_{1,1} & B_{1,1} \cdot A_{1,2} + B_{1,2} \cdot A_{2,2} \\ \mathbf{0} & B_{2,2} \cdot A_{2,2} \end{bmatrix} .$$

G42:c.09 In :a.10 abbiamo introdotto la nozione di matrice simmetrica senza fare richieste sulla natura delle loro entrate.
Una matrice quadrata i cui valori appartengono a un campo (o ad un'altre struttura nella quale è definito il passaggio al valore opposto, ovvero per la quale è possibile definire un cambiamento di segno, si dice **matrice antisimmetrica** sse coincide con l'opposta della propria trasposta: $A = -A^\top$. Equivalentemente la matrice individuata da $A = [a_{i,j} \mid: i,j \in I]$ si dice antisimmetrica sse $\forall i,j \in I \ : \ a_{i,j} = -a_{j,i}$.

Le entrate della diagonale principale di una matrice antisimmetrica, dato che deve essere $a_{i,i} = -a_{i,i}$, sono necessariamente degli zeri. L'unica matrice di ordine d che è sia simmetrica che antisimmetrica è la matrice nulla $\mathbf{0}_{[d,d]}$.
Le matrici simmetriche e antisimmetriche degli ordini 2 e 3 sono riconducibili alle forme seguenti

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{bmatrix} .$$

G42:c.10 Per ogni matrice quadrata A si dice, **matrice simmetrica canonicamente associata** la $\dfrac{A + A^\top}{2}$, mentre si dice **matrice antisimmetrica canonicamente associata** la $\dfrac{M - M^\top}{2}$. In effetti ogni matrice quadrata si può esprimere come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica:

$$M = \frac{M + M^\top}{2} + \frac{M - M^\top}{2} . \tag{1}$$

Si verifica facilmente che le matrici simmetriche di ordine d costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione $\dfrac{d(d+1)}{2}$ e che le matrici antisimmetriche di ordine d costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione $\dfrac{d(d-1)}{2}$.
La decomposizione (1) mostra che, nello spazio delle matrici di ordine d il sottospazio delle simmetriche e il sottospazio delle antisimmetriche sono sottospazi complementari (v. G40:b.07).

G42:c.11 Nell'ambito dello spazio $\mathsf{Mat}_{d,\mathbb{F}}$ abbiamo individuato i sottospazi delle matrici simmetriche, delle antisimmetriche, delle triangolari superiori, delle triangolari inferiori, delle triangolari strettamente superiori e delle triangolari strettamente inferiori. Si osserva che i tre sottospazi delle matrici

simmetriche, delle triangolari superiori e delle triangolari inferiori si possono facilmente porre in biiezione e costituiscono sottospazi a $\frac{d(d+1)}{2}$ dimensioni. Traspostamente i tre sottospazi delle matrici antisimmetriche, delle triangolari strettamente superiori e delle triangolari strettamente inferiori si possono facilmente porre in biiezione e costituiscono sottospazi a $\frac{d(d-1)}{2}$ dimensioni.
Va osservato che la caratteristica della triangolarità è legata ad un determinato ordinamento delle etichette delle righe e delle colonne, mentre simmetria e antisimmetria sono invarianti rispetto al sottoporre le matrici ad una stessa permutazione delle righe e delle colonne.
Le 4 classi delle matrici triangolari di ordine d costituiscono sottoalgebre dell'algebra delle matrici quadrate di ordine d.
Per un dato ordine l'insieme delle matrici simmetriche e l'insieme di quelle antisimmetriche non costituiscono invece sottoalgebre dell'algebra delle matrici, in quanto il prodotto di due matrici simmetriche che non commutano può non essere una matrice simmetrica e il prodotto di due matrici antisimmetriche che non commutano può non essere una matrice antisimmetrica. Ad esempio si hanno

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & e \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad+be & ae+bf \\ bd+ce & be+cf \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} d & e \\ e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} da+eb & db+ec \\ ea+fb & eb+fc \end{bmatrix}$$

ed $X = Y$ solo se $ae + bf = db + ec$, in particolare se $d = f$ ed $a = c$.

G42:c.12 Definiamo **matrice invertibile** o **matrice nonsingolare** ogni matrice quadrata per la quale esiste una matrice quadrata A^{-1} dello stesso ordine, che denotiamo con d, tale che sia

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbf{1}_{[d]} \ .$$

Questa matrice è univocamente determinata da A: infatti se esistesse $\overline{A}$ tale che $A \cdot \overline{A} = \overline{A} \cdot A = \mathbf{1}_{[d]}$ si avrebbe

$$\overline{A} = \overline{A} \cdot \mathbf{1}_[d] = \overline{A} \cdot A \cdot A^{-1} = \mathbf{1}_[d] \cdot A^{-1} = A^{-1} \ .$$

La matrice A^{-1} viene detta **matrice inversa** della A.

L'applicazione che associa ad una matrice invertibile la sua inversa è una involuzione: infatti la simmetria delle due equazioni che definiscono l'inversa implica che sia

$$(A^{-1})^{-1} = A \ .$$

(1) Prop.: Il prodotto di due matrici invertibili A e B è invertibile e si trova

(1) $$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \ .$$

Dim.: Bastano due semplici verifiche:

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = A\mathbf{1}_{[*]}A^{-1} = \mathbf{1}_{[*]} \quad ,$$
$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\mathbf{1}_{[*]}B = \mathbf{1}_{[*]} \blacksquare$$

Qui abbiamo usato la notazione $\mathbf{1}_{[*]}$ per denotare una matrice quadrata unità di un dato ordine che non è necessario esplicitare in quanto desumibile dall'ordine delle altre matrici quadrate in gioco che devono essere supposte tutte dello stesso ordine.

Estendendo il risultato precedente si ha che il prodotto di un certo numero positivo m di matrici invertibili A_1, A_2,... ,A_m è invertibile e si ha

(2) $$(A_1 A_2 \cdots A_{m-1} A_m)^{-1} = {A_m}^{-1} {A_{m-1}}^{-1} \cdots {A_2}^{-1} {A_1}^{-1} \ .$$

G42:c.13 Una matrice diagonale è invertibile se e solo se tutte le entrate della sua diagonale principale sono scalari diversi da 0. In effetti si constata che

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{d,d} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (a_{1,1})^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (a_{2,2})^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (a_{d,d})^{-1} \end{bmatrix} .$$

Questa formula si generalizza al caso delle matrici diagonali a blocchi.

Nel caso di blocchi dati da una bipartizione dell'insieme delle etichette di righe e di colonne si constata che se A e B sono due matrici invertibili i cui ordini diciamo, risp., d ed e, è invertibile anche la matrice di ordine $d+e$ diagonale a blocchi avente i due blocchi costituiti da A e B e si ha:

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} A & \mathbf{0}_{[d,e]} \\ \mathbf{0}_{[e,d]} & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & \mathbf{0}_{[d,e]} \\ \mathbf{0}_{[e,d]} & B^{-1} \end{bmatrix} .$$

G42:c.14 Anche le matrici permutative sono invertibili. Innanzi tutto gli scambi sono endofunzioni involutorie e le corrispondenti matrici coincidono con le proprie inverse. Ad esempio in 4 dimensioni per lo scambio di 2 con 3 si ha

$$\mathsf{Mprm}(23) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Le matrici di ordine d che esprimono un ciclo di lunghezza $s(\leq d)$ presentano $d-s$ entrate sulla diagonale principale uguali ad 1 e un blocco diagonale $s \times s$; ad esempio se $d=6$, la matrice del ciclo $(2\ 3\ 5\ 4)$ è

$$\mathsf{Mprm}(2\ 3\ 5\ 4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la matrice inversa coincide con la sua trasposta:

$$\mathsf{Mprm}(2\ 4\ 5\ 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

In generale una permutazione, essendo esprimibile come prodotto di permutazioni cicliche, è rappresentata da una matrice diagonale a blocchi che ha come inversa la propria trasposta. Quindi per ogni permutazione p, la matrice permutativa relativa alla permutazione inversa p^{-1} è ottenibile come

$$(1) \qquad \mathsf{Mprm}(\mathsf{p}^{-1}) = (\mathsf{Mprm}(\mathsf{p}))^{\top} .$$

G42:c.15 Altri esempi di matrici inverse

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

G42:d. Determinanti

G42:d.01 In questa sezione esaminiamo la nozione generale di determinante di una matrice quadrata generalizzando le nozioni di determinante di matrici 2×2 e 3×3 introdotte in precedenza (v. B22e) . Si tratta di una funzione delle entrate delle matrici quadrate sopra un campo o sopra una struttura di qualche altra specie munita di operazioni come somma e prodotto, la quale riveste grande importanza per le trasformazioni che le matrici rappresentano, importanza collegata ad un suo significato geometrico. Purtroppo la sua definizione generale è piuttosto elaborata, mentre è semplice nei casi bidimensionale e tridimensionale, casi nei quali anche il significato geometrico del determinante risulta piuttosto intuitivo e di evidente utilità per applicazioni come le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari (G45:) e le questioni di indipendenza lineare dei vettori (B32a05, G36:).

G42:d.02 Faremo principalmente riferimento ad una matrice quadrata di profilo $d \times d$ sopra un campo $\mathbb{F}$ che scriviamo

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & a_{d,2} & \dots & a_{d,d} \end{bmatrix} .$$

Ci riserviamo tuttavia di segnalare le costruzioni e le proprietà che si possono attribuire anche a matrici su anelli, su semianelli o su loro varianti.

Consideriamo una generica permutazione degli interi 1, 2, .., d che scriviamo $\mathsf{p} :=: \langle p_1, p_2, ..., p_d \rangle$, e la sequenza di d entrate della matrice A associata alla p della forma $\mathsf{a_p} = \langle a_{1,p_1}, a_{2,p_2}, ..., a_{d,p_d} \rangle$; i successivi componenti della $\mathsf{a_p}$ provengono dalle successive righe della matrice e, per il carattere permutativo della p, a ciascuna colonna della matrice appartiene uno e uno solo degli a_{j,p_j}. Ricordiamo che alla p è associato il segno $\text{sign}(\mathsf{p})$, numero che vale $+1$ se la permutazione è pari (ossia se espressa come prodotto di cicli presenta un numero pari di cicli di lunghezza pari, o equivalentemente se si può ricondurre alla permutazione crescente $\langle 1, 2, ..., d \rangle$ con un numero pari di scambi) e che vale -1 se essa è dispari (ossia se espressa come prodotto di cicli presenta un numero dispari di cicli di lunghezza pari, ovvero se si può ricondurre alla permutazione crescente con un numero dispari di scambi).

Consideriamo poi il prodotto associato alla p

$$\pi_{\mathsf{p}} := \text{sign}(\mathsf{p}) \prod_{i=1}^{d} a_{j,p_j} .$$

Per definire il determinante di A, per il quale useremo sia la notazione $\det(A)$, che la $|A|$, servono tutti i prodotti π_{p} ottenibili da tutte le diverse $\mathsf{p} \in \mathsf{Perm}_d$, cioè da tutte le $d!$ permutazioni degli interi di $(d]$. In effetti definiamo **determinante** della matrice quadrata A la seguente composizione

$$\det(A) := \sum_{\mathsf{p} \in \mathsf{Perm}_d} \text{sign}(\mathsf{p}) \prod_{j=1}^{d} a_{j,p_j} . \qquad (1)$$

G42:d.03 Il secondo membro della :d.02(1) si dice **sviluppo del determinante** della matrice A e gli addendi π_{p} di questo sviluppo si chiamano **termini del determinante**.
In generale il determinante si può considerare come una composizione polinomiale delle entrate di una matrice quadrata per le quali si chiede solo che siano definite le due operazioni binarie di somma e prodotto. Queste entrate potrebbero essere d^2 variabili in un campo $\mathbb{F}$; in questo caso il determinante si può considerare una ben specifica espressione polinomiale in queste variabili. Le entrate possono anche essere polinomi in date variabili x, y, ..., t; in tal caso anche il determinante è un polinomio in queste variabili.

Per le matrici dei primi ordini le espressioni dei determinanti sono semplici e facili da ricordare:

$$\det[a_{1,1}] = a_{1,1} \qquad , \qquad \det\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \ ,$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - \\ \qquad a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \end{matrix} \ .$$

Lo sviluppo del determinante di una matrice di ordine 3 si può ottenere con pochi rischi di errori con un accorgimento chiamato **regola di Sarrus**: si tratta di allargare la matrice affiancandole, nell'ordine, una replica della prima colonna e una replica della seconda:

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{matrix} \ ;$$

su questo schieramento di elementi del campo si considera la somma dei tre prodotti ottenuti dalla diagonale principale e dai due allineamenti alla sua destra ad essa paralleleli e a tale somma si sottraggono i tre prodotti della codiagonale e dei due allineamenti alla sua destra ad essa paralleli.

Quando cresce l'ordine della matrice il calcolo effettivo del determinante si fa sempre più oneroso e prono agli errori. In effetti per effettuare calcoli sui determinanti in generale è cruciale conoscere molte loro proprietà; in particolare risulta utile conoscere loro proprietà collegate a simmetrie.

G42:d.04 Lo sviluppo del determinante di una matrice sul cui codominio è definita una somma commutativa si può esprimere anche come

(1) $$\det(A) \ := \sum_{\mathsf{p}\in\mathbf{Perm}_d} \mathrm{sign}(\mathsf{p}) \prod_{h=1}^{d} a_{p_h,h} \ .$$

Infatti la permutabilità degli addendi ed il fatto che il segno di una permutazione coincide con quello della sua inversa consente di porre in biiezione i termini di questo sviluppo con quelli di :d.02(1); si può dunque scrivere

$$\mathrm{sign}(\mathsf{p}) \prod_{h=1}^{d} a_{p_h,h} \ = \ \mathrm{sign}(\mathsf{p}^{-1}) \prod_{j=1}^{d} a_{j,q_j}$$

con $\mathsf{q} \ = \ \langle_{perm} q_1, q_2, ..., q_d \rangle \ := \ \mathsf{p}^{-1}$.

Il precedente sviluppo si può leggere come sviluppo del determinante della matrice trasposta della A e comporta l'enunciato che segue.

(2) Prop.: Per ogni matrice quadrata A si ha: $\det(A^{\top}) = \det(A)$ ▮

In altre parole il determinante di una matrice è invariante per trasposizione della matrice stessa.

Questo enunciato consente di trasformare proprietà del determinante di una matrice A concernenti le sue righe in proprietà omologhe concernenti le colonne di A e viceversa.

Duetti di proprietà di questo genere si dicono duetti di **proprietà duali per trasposizione**.

G42:d.05 Ricordiamo che ogni matrice A si può utilmente associare alla sequenza dei vettori (ket) costituenti le sue colonne oppure alla sequenza delle forme lineari (bra) costituenti le sue righe.

(1) Prop.: Consideriamo una matrice quadrata A per il cui codominio $\mathbb{K}$ vale la distributività del podotto rispetto alla somma. Se si moltiplicano per uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ tutte le entrate di una linea di una matrice, allora il suo determinante viene moltiplicato per tale λ.

Dim.: Nello sviluppo del determinante della nuova matrice secondo la formula :d.02(1) ogni termine viene moltiplicato per lo scalare e la distributività implica che lo stesso accade al determinante ∎

(2) Coroll.: Se si moltiplica una matrice $d \times d$ sopra il suddetto codominio per uno scalare λ, allora il suo determinante viene moltiplicato per λ^d ∎

(3) Coroll.: Il determinante di una matrice avente una linea le cui entrate sono tutte nulle vale 0.

Dim.: Accanto alla matrice in esame, che denotiamo con A, considerare una sua variante A' che differisce dalla A solo per la linea in questione che etichettiamo con ℓ. La A si può considerare ottenuta dalla A' moltiplicando per 0 tutte le entrate della linea ℓ; quindi, grazie alla (1), per il suo determinante si ha $\det(A) = 0 \cdot \det(A') = 0$ ∎

(4) Prop.: Il determinante di una matrice avente una riga [colonna] esprimibile come somma di due vettori riga [colonna] è dato dalla somma dei determinanti delle matrici che nella linea in questione presentano i due singoli vettori.

Dim.: Consideriamo il caso della riga j e dimostriamo che

$$\det \begin{bmatrix} A_{1,*} \\ \vdots \\ {A'}_{j,*} + {A''}_{j,*} \\ \vdots \\ A_{d,*} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_{1,*} \\ \vdots \\ {A'}_{j,*} \\ \vdots \\ A_{d,*} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_{1,*} \\ \vdots \\ {A''}_{j,*} \\ \vdots \\ A_{d,*} \end{bmatrix} .$$

Nello sviluppo del primo determinante il termine corrispondente alla permutazione $\mathsf{p} \in \mathbf{Perm}_d$ ha la forma $\text{sign}(\mathsf{p})(a'_{j,p_j} + a''_{j,p_j}) \prod_{h \neq j} a_{hp_h}$ e si può esprimere come somma della forma $\text{sign}(\mathsf{p})a'_{j,p_j} \prod_{h \neq j} a_{hp_h} + \text{sign}(\mathsf{p})a''_{j,i} \prod_{h \neq j} a_{hp_h}$. Sommando sulle permutazioni $\mathsf{p} \in \mathbf{Perm}_d$ si ottiene la somma dei due determinanti indicati.

Per le colonne si potrebbe procedere con espressioni modificate per trasposizione, oppure ricondursi all'uguaglianza per le righe tenendo conto (v. :d.04(2)) che $\det(A^\top) = \det(A)$ ∎

G42:d.06 **(1) Prop.**: Se si scambiano due linee di una matrice quadrata, il suo determinante cambia di segno.

Dim.: Consideriamo la matrice quadrata A e la matrice A' ottenuta dalla A scambiando le colonne h e k con $h < k$. Esaminando gli sviluppi :d.02(1) delle due matrici, per ogni permutazione p al termine $\text{sign}(\mathsf{p}) \cdots a_{h,p_h} \cdots a_{k,p_k} \cdots$ dello sviluppo di $\det(A)$ si fa corrispondere biunivocamente il termine $\text{sign}(\mathsf{p}') \cdots a_{k,p_k} \cdots a_{h,p_h} \cdots$, dove p' denota la permutazione ottenibile componendo la p con lo scambio di h con k; per i segni di tali permutazioni si ha $\text{sign}(\mathsf{p}') = -\text{sign}(\mathsf{p})$. Questo cambiamento di segno riguarda tutti i termini presenti dei due sviluppi e quindi implica $\det(A') = -\det(A)$.

Per l'effetto dello scambio di due righe della matrice A si osserva che questa modifica equivale alla composizione della trasposizione della matrice seguita dallo scambio di due colonne e conclusa da una seconda trasposizione; dato che le trasposizioni non cambiano il determinante, l'effetto dello scambio di due righe coincide con l'effetto allo scambio di due colonne, cioè al cambiamento del segno ▮

(2) Prop.: Una matrice quadrata con due righe uguali o con due colonne uguali ha il determinante nullo.

Dim.: Il determinante di una matrice quadrata A deve essere l'opposto del determinante della matrice ottenuta scambiando le due linee uguali, cioè della stessa matrice A: dunque $\det(A) = -\det(A)$ e quindi $\det(A) = 0$ ▮

(3) Coroll.: Una matrice quadrata con due linee proporzionali ha il determinante nullo.

Dim.: Moltiplicando per un opportuno scalare λ una delle due linee si ottiene una matrice il cui determinante risulta moltiplicato per λ, ma che presenta due linee uguali e quindi è nullo ▮

(4) Prop.: Se ad una riga [colonna] di una matrice quadrata A si somma una qualsiasi combinazione lineare delle altre righe [colonne], allora il determinante non viene modificato.
Dim.: Sommando ad una riga j della matrice A una sua altra riga j', il determinante viene aumentato del determinante della matrice con la riga j sostituita dalla j', cioè del determinante di una matrice con due righe uguali, cioè viene aumentato del valore 0.
Argomentazione sostanzialmente uguale vale per la somma di due colonne.
Argomentazione simile si applica a matrici ottenute da una data sommando ad una sua riga [colonna] un'altra sua riga [colonna] moltiplicata per uno scalare.
L'enunciato riguardante la modifica ottenuta sommando ad una riga [colonna] una qualsiasi combinazione lineare di righe [colonne] si ottiene applicando più volte le manovre precedentemente esaminate, manovre che non cambiano $\det(A)$ ▮

G42:d.07 Teorema di Binet Il determinante del prodotto di due matrici quadrate è uguale al prodotto dei determinanti delle matrici fattori. In formula

$$\forall B, A \in \mathsf{Mat}_{d;\mathbb{F}} \ : \ \det(B \cdot A) \ = \ \det(B) \cdot \det(A) \ .$$

Dim.: Scriviamo $C := B \cdot A$; le sue entrate (v. :b.08(2)) sono date da $\forall k, i = 1, ..., d \ : \ c_{k,i} = B_{k,*} \cdot A_{*,i}$ e le sue righe da $\forall k = 1, ..., d \ : \ C_{k,*} = \sum_{j=1}^{d} b_{k,j} A_{j,*}$. Quindi

$$\det(B \cdot A) = \det \left[\left(\sum_{j_1=1}^{d} b_{1,j_1} A_{j_1,*} \right) \boxminus \left(\sum_{j_2=1}^{d} b_{2,j_2} A_{j_2,*} \right) \boxminus \cdots \boxminus \left(\sum_{j_d=1}^{d} b_{d,j_d} A_{j,*} \right) \right] \ .$$

L'uso di indici diversi j_1, j_2, ..., j_d per le diverse righe vuole sottolineare l'indipendenza di questi indici correnti. Elaboriamo questa espressione servendoci in un primo tempo della linearità dello sviluppo del determinante rispetto alla prima riga e succesivamente della linearità per tutte le righe successive:

$$\begin{aligned} \det(B \cdot A) &= \sum_{j_1=1}^{d} b_{1,j_1} \det \left[A_{j_1,*} \boxminus \left(\sum_{j_2=1}^{d} b_{2,j_2} A_{j_2,*} \right) \boxminus \cdots \boxminus \left(\sum_{j_d=1}^{d} b_{d,j_d} A_{j,*} \right) \right] \\ &= \sum_{j_1=1}^{d} b_{1,j_1} \ \sum_{j_2=1}^{d} b_{1,j_2} \ \cdots \ \sum_{j_d=1}^{d} b_{1,j_d} \ \det \left[A_{j_1,*} \boxminus A_{j_2,*} \cdots \boxminus A_{j_d,*} \right] \ . \end{aligned}$$

Le iniziali d sommatorie indipendenti si possono riscrivere come una sola sommatoria relativa alla sequenza di indici $\langle j_1, j_2, ..., j_d \rangle$. Il determinante sulla destra è diverso da 0 solo quando i d primi indici non presentano coincidenze, in quanto due indici uguali portano al determinante nullo di una matrice con due righe uguali (v. :d.06(2)). Quindi l'espressione precedente si riduce ad una sommatoria riguardante le sequenze di indici $\langle j_1, j_2, ..., j_d\rangle$ costituenti permutazioni di 1, 2, ..., d:

$$\det(B \cdot A) = \sum_{\langle j_1,...,j_d\rangle \in \mathsf{Perm}_d} b_{1,j_1} b_{1,j_2} \cdots b_{1,j_d} \cdot \det\left[A_{j_1,*} \boxminus A_{j_2,*} \cdots \boxminus A_{j_d,*}\right] \ .$$

Per oghi permutazione $\mathsf{j} = \langle_{perm} j_1, ..., j_d\rangle \in \mathsf{Perm}_d$ sottoponendo a j^{-1} le righe della matrice sulla destra si ottiene $\operatorname{sign}(\mathsf{j}) \det(A)$ e in definitiva

$$\det(B \cdot A) = \left(\sum_{\mathsf{j} \in \mathsf{Perm}_d} b_{1,j_1} b_{1,j_2} \cdots b_{1,j_d} \operatorname{sign}(\mathsf{j})\right) \det(A) = \det(B) \cdot \det(A) \ \blacksquare$$

G42:d.08 Notiamo esplicitamente che il teorema di Binet, detto anche teorema di Cauchy-Binet, stabilisce che il calcolo del determinante rispetta il prodotto fra matrici quadrate e che :d.05, cioè $\det(\alpha A) = \alpha^d \det(A)$, stabilisce un comportamento abbastanza semplice del calcolo del determinante nei confronti della moltiplicazione per una costante delle matrici.

Non si ha invece alcuna relazione generale fra il determinante di una somma di matrici quadrate e i determinanti di questi addendi.

Va inoltre sottolineata la coerenza del teorema di Binet con l'interpretazione geometrica del determinante del prodotto di due matrici 2×2 come prodotto dei due rapporti tra tre aree con segno e con l'interpretazione del determinante del prodotto di due matrici 3×3 come prodotto dei due rapporti riguardanti tre volumi con segno (B32g03).

Consideriamo il caso particolarmente semplice delle due omotetie del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ relative ai fattori $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{nz}$:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \ , \quad B = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \ , \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} \beta\alpha & 0 \\ 0 & \beta\alpha \end{bmatrix} \ , \quad |A| = \alpha^2 \ , \quad |B| = \beta^2 \ , \quad |B \cdot A| = (\alpha\beta)^2 \ .$$

L'applicazione della A ha l'effetto di moltiplicare per α le lunghezze e per α^2 le aree, mentre la B porta a moltiplicare per β le lunghezze e per β^2 le aree. Di conseguenza l'effetto dell'applicazione della $B \cdot A$ ai vettori di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ da pensare scritti a destra della matrice prodotto si può descrivere come la moltiplicazione delle lunghezze per α seguita dalla loro moltiplicazione per β; quindi la $B \cdot A$ comporta la moltiplicazione delle aree per $(\alpha\beta)^2$.

In tre dimensioni possiamo considerare il caso, ancora molto semplice, delle tre omotetie monodirezionali relative alle direzioni dei tre assi e ai fattori $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_{nz}$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \ , \quad A_3 \cdot A_2 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \ .$$

chiaramente $|A_s| = a_s$ per $s = 1, 2, 3$ e $|A_3 \cdot A_2 \cdot A_1| = a_1 a_2 a_3$. L'applicazione della A_s comporta la moltiplicazione per a_s dei segmenti orientati paralleli all'esse Ox_s, mentre l'applicazione delle tre trasformazioni ha l'effetto di moltiplicare il volume per $a_1 a_2 a_3$.

G42:d.09 La precedente introduzione della nozione di determinante si basa su una definizione costruttiva e combinatoria di una funzione delle entrate di una matrice quadrata: infatti la definizione consente (almeno in linea di principio) di calcolare il determinante di una qualsiasi matrice particolare facendo riferimento solo alle nozioni combinatorie sulle permutazioni degli intervalli di interi.

Enunciamo ora una definizione del determinante diversa, ma che risulta del tutto equivalente; essa ha carattere assiomatico, in quanto individua il determinante come funzione caratterizzata da determinati requisiti. Successivamente mostriamo che può essere calcolata attraverso l'espressione :d.02(1) e concludiamo con l'equivalenza delle due definizioni.

Sia $\mathbb{F}$ un campo. Provvisoriamente definiamo come **determinanteA** e denotiamo con D la funzione del genere $D \in \{\cup_{d \in \mathbb{P}} \mathsf{Mat}_{d;\mathbb{F}} \longmapsto \mathbb{F}\}$ tale che, per ogni $A \in \mathsf{Mat}_{d;\mathbb{F}}$ valgono le proprietà che seguono.

[det1] $D(A) = D(A_{*,1} \square A_{*,2} \square \cdots \square A_{*,d})$ è multilineare nelle colonne della matrice argomento, cioè è lineare in ciascuno dei vettori colonna $A_{*,i}$.

[det2] È alternante nelle colonne, ovvero si annulla quando due vettori colonna consecutivi coincidono.

[det3] È normalizzato, cioè vale 1 per la matrice identità: $D(\mathbf{1}_{[d]}) = 1$.

Segnaliamo che la precedente definizione potrebbe formularsi anche sostituendo i campi con gli anelli commutativi, strutture che abbiamo definite come dotate di unità (B41:c).

G42:d.10 La dimostrazione dell'equivalenza delle definizioni delle funzioni det e D richiede diversi passi; i primi di questi dimostrano proprietà elementari.

(1) Prop.: Scambiando due colonne consecutive della matrice argomento il determinanteA cambia di segno.

Dim.: Discende dalla seguente catena di uguaglianze nella quale c e d denotano due colonne di una matrice quadrata.

$$\begin{aligned}0 \;=\; & D(\cdots \square (\mathsf{c}+\mathsf{d}) \square (\mathsf{c}+\mathsf{d}) \square \cdots) \;=\\ & D(\cdots \square \mathsf{c} \square \mathsf{c} \square \cdots) + D(\cdots \square \mathsf{c} \square \mathsf{d} \square \cdots) + D(\cdots \square \mathsf{d} \square \mathsf{c} \square \cdots) + D(\cdots \square \mathsf{d} \square \mathsf{d} \square \cdots)\\ & = D(\cdots \square \mathsf{c} \square \mathsf{d} \square \cdots) + D(\cdots \square \mathsf{d} \square \mathsf{c} \square \cdots) \;\blacksquare\end{aligned}$$

(2) Prop.: Scambiando due colonne qualsiasi della matrice argomento il determinanteA cambia di segno.

Dim.: La manovra di scambio delle colonne i e $j(> i)$ della matrice equivale a $(j-i)+(j-1-i)$ scambi di colonne consecutive e quindi porta a moltiplicare il determinanteA per $(-1)^{2j-2i-1} = -1$ ▮

(3) Coroll.: Il determinanteA di una matrice con due colonne uguali è nullo ▮

(4) Prop.: Aggiungendo ad una colonna della matrice argomento un'altra colonna il determinanteA non cambia.

Dim.: Segue dalle seguenti uguaglianze nelle quali c_i e c_j . denotano due colonne di una matrice quadrata.

$$\begin{aligned}D(\cdots \square (\mathsf{c}_i + \mathsf{c}_j) \square \cdots \square \mathsf{c}_j \square \cdots) \;&=\; D(\cdots \square \mathsf{c}_i \square \cdots \square \mathsf{c}_j \square \cdots) + D(\cdots \square \mathsf{c}_j \square \cdots \square \mathsf{c}_j \square \cdots)\\ &=\; D(\cdots \square \mathsf{c}_i \square \cdots \square \mathsf{c}_j \square \cdots) \;\blacksquare\end{aligned}$$

(5) Coroll.: aggiungendo ad una colonna della matrice argomento una qualsiasi combinazione lineare delle colonne il determinanteA non cambia.

Dim.: Segue dalla (4) per la linearità [det2] ▮

G42:d.11 Occorre osservare che la definizione assiomatica del determinanteA lascia aperta la questione dell'esistenza di una tale funzione, ed anche quella della sua unicità. Ora otteniamo l'esistenza di una tale funzione fornendo una espressione di una funzione che sodisfa le richieste [dat1,2,3] per le matrici di tutti gli ordini.

Le definizioni di minore e di cofattore di una matrice quadrata associati alla sua casella $\langle i,j\rangle$ si possono ripetere servendosi della funzione determinanteA: per tali numeri scriviamo

$$(1) \qquad M_{i,j} := D\left(A_{\mathsf{E}\,i,j}\right) \qquad \text{e} \qquad C_{i,j} := (-1)^{i+j}\, M_{i,j}\ .$$

(2) Teorema Per ogni intero positivo d esiste una funzione determinanteA calcolabile per ogni matrice di ordine d con l'espressione

$$(*) \qquad \forall i = 1, ..., d\ \ \vdots\ \ D(A) \ = \ \sum_{j=1}^{d} a_{i,j}\, C_{i,j}\ .$$

Dim.: La dimostrazione si conduce per induzione sull'ordine d.
Per $d = 1$ si può assumere $D([a]) = a$, in modo da rendere soddisfatta la $(*)$ assumendo che l'unico cofattore valga 1.
Si può anche constatare che per $d = 2$ la $(*)$ fornisce l'espressione $D(A) = a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}$ che evidentemente soddisfa le richieste [dat1,2,3].

Si ipotizza poi di aver individuata la funzione determinanteA per le matrici di tutti gli ordini 2, 3, ..., $d-1$ e si procede a dimostrare che la $(*)$ relativa all'ulteriore ordine d fornisce una funzione che soddisfa [dat1,2,3].

Multilinearità – Mostriamo che $D(A)$ è lineare per ogni indice di colonna $\overline{j}$. Per ogni $j \in (d] \setminus \overline{j}$ accade che $a_{i,j}$ non dipende dalle entrate di $A_{*,\overline{j}}$, mentre $C_{i,j}$ è lineare nelle $d-1$ entrate di tale colonna in quanto queste costituiscono una sua colonna.
Per l'indice di colonna $j = \overline{j}$ si ha linearità nel coefficiente $a_{i,\overline{j}}$, mentre $C_{i,\overline{j}}$ non dipende da alcuna delle entrate della colonna $A_{*,\overline{j}}$.
Dunque tutti gli addendi a secondo membro della $(*)$ sono lineari nella $A_{*,\overline{j}}$.

Alternanza – Assumiamo che siano uguali le colonne $A_{*,\overline{j}}$ e $A_{*,\overline{j}+1}$. Allora per ogni etichetta di colonna $j \neq \overline{j}, jol + 1$ $A_{\mathsf{E}\,i,j}$ presenta due colonne coincidenti e $C_{i,j} = (-1)^{i+j}\, D(A_{\mathsf{E}\,i,j}) = 0$ per l'ipotesi induttiva. di conseguenza

$$D(A) \ = \ a_{i,\overline{j}}\, C_{i,\overline{j}} + a_{i,\overline{j}+1}\, C_{i,\overline{j}+1} \ = \ a_{i,\overline{j}}\, (-1)^{i+\overline{j}}\, M_{i,\overline{j}} + a_{i,\overline{j}+1}\, (-1)^{i+\overline{j}+1}\, M_{i,\overline{j}+1}\ .$$

L'assunta uguaglianza delle colonne implica $a_{i,\overline{j}} = a_{i,\overline{j}+1}$ e $M_{i,\overline{j}} = M_{i,\overline{j}+1}$ e quindi

$$D(A) = \left((-1)^{i+\overline{j}} + (-1)^{i+\overline{j}+1}\right)\, a_{i,\overline{j}}\, M_{i,\overline{j}} = 0\ .$$

Normalizzazione – Discende dal seguente sviluppo:

$$D(\mathbf{1}_{[d]}) \ = \ \sum_{j=1}^{d} \delta_{i,j}\, (-1)^{i+j}\, D(\mathbf{1}_{[d]\,\mathsf{E}\,i,j}) \ = \ (-1)^{2\,i}\, D(\mathbf{1}_{[d-1]}) \ = \ 1 \cdot 1 \ = \ 1 \ ▮$$

G42:d.12 Evidentemente la funzione fornita dalla :d11(2) è la stessa introdotta con l'espressione :d02(1), funzione che risulta calcolabile anche attraverso l'espressione che si serve dei cofattori. Abbiamo dunque dimostrato che la funzione det è una realizzazione costruttiva della funzione D introdotta assiomaticamente.

Resta da osservare che la funzione det è l'unica che soddisfa gli assiomi [det1,2,3]. Infatti la dimostrazione del teorema :d11(2) passa attraverso espressioni dei determinanti delle matrici degli ordini successivi che a partire dall'ordine 1 non possono che essere uniche.

G42:d.13 Se si effettuasse il calcolo dei determinanti delle matrici seguendo pedissequamente la sola definizione, con il crescere dell'ordine delle matrici stesse il calcolo diventerebbe sempre più oneroso, in accordo con la rapida crescita del fattoriale e quindi del crescere come $(d-1)d!$ del numero delle moltiplicazioni necessarie per arrivare al risultato.

Dato che il calcolo dei determinanti di matrici di ordini elevati viene richiesto per risolvere molti problemi applicativi di rilievo, risulta importante individuare procedimenti efficienti per queste elaborazioni numeriche.

Evidentemente il determinante di una matrice A diagonale è dato dal semplice prodotto $\prod_{j=1}^{d} a_{j,j}$ delle entrate sulla diagonale principale che richiede solo $d-1$ moltiplicazioni. Il prodotto della forma precedente fornisce anche il determinante di una matrice triangolare inferiore o superiore (si osserva in effetti che per trasposizione una matrice triangolare superiore diventa triangolare inferiore e viceversa).

Si è quindi indotti a ricondurre il calcolo del determinante di una matrice A a quello di una matrice A' ottenuta dalla precedente con modifiche che lascino invariato il determinante, oppure che lo modifichino in modo facilmente controllabile.

G42:e. Inversione di matrici quadrate

G42:e.01 Delle matrici quadrate $d \times d$ interessano in particolare le sottomatrici quadrate di ordine $d-1$, cioè le sottomatrici complementari delle sottomatrici costituite da una sola entrata. Per la sottomatrice della $A \in \mathsf{Mat}_{d,\mathbb{F}}$ complementare di quella relativa all'entrata $a_{i,j}$ useremo la notazione $A_{\mathsf{E}\; i,j}$. Chiamiamo poi **minore complementare** della A relativo alla sua casella $\langle i,j\rangle$ il determinante della precedente sottomatrice; per questo numero useremo localmente la scrittura $M_{i,j} := \det\big(A_{\mathsf{E}\; i,j}\big)$.

Consideriamo lo sviluppo di $\det(A)$ e isoliamo i termini contenenti $a_{1,1}$; chiaramente la somma di questi termini è data da $a_{1,1}\, M_{1,1}$. Se per generici $h,k \in (d]$ isoliamo i termini contenenti il fattore $a_{h,k}$, la loro somma è data da $a_{h,k}\,(-1)^{h+k}\, M_{h,k}$, in quanto $\det(A) = (-1)^{h-1+k-1}\det(A')$ dove A' è la matrice ottenuta dalla A portando la riga h nella prima posizione e la colonna k nella prima posizione e osservando che $(-1)^{h-1+k-1} = (-1)^{h+k}$.

Il prodotto $(-1)^{h+k}\, M_{h,k} = (-1)^{h+k}\det\big(A_{\mathsf{E}\; i,j}\big)$ viene detto **cofattore** o **complemento algebrico** della A relativo all'entrata nella casella $\langle h,k\rangle$, cioè alla entrata $a_{h,k}$; denoteremo questa quantità con

$$\mathsf{cof}_{h,k}(A) \;:=\; (-1)^{h+k}\det\big(A_{\mathsf{E}\; i,j}\big) \;.$$

Localmente useremo invece la scrittura $C_{h,k}$.

G42:e.02 Chiamiamo **segno della casella** $\langle h,k\rangle \in (d] \times (e]$ di una matrice l'intero $(-1)^{h+k}$. Si osserva che i due segni delle caselle si distribuiscono similmente alle caselle bianche e nere di una scacchiera: ad esempio per le matrici 3×4 e 5×5:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Nel caso di matrice quadrata questa matrice dei segni è simmetrica, come la distribuzione delle caselle dei due colori sulla scacchiera.

Troviamo ora il cosiddetto sviluppo di un determinante secondo le entrate di una linea. Consideriamo la riga h della matrice A e separiamo i termini dello sviluppo del suo determinante in d aggregati di addendi, il primo contenente gli addendi con il fattore $a_{h,1}$, il secondo gli addendi con il fattore $a_{h,2}$, ... , il d-esimo gli addendi con il fattore $a_{h,d}$. Come si è visto la somma dei soli termini dello sviluppo contenenti $a_{h,k}$ è data da $a_{h,k}\,\mathsf{cof}A_{h,k}$. Quindi per il determinante

$$(1) \qquad \forall h = 1, ..., d \ \vdots \ \det(A) \ = \ \sum_{j=1}^{d} a_{h,j}\,(-1)^{h+j}\,\det\left(A_{\llcorner\, h,j}\right) \ .$$

Simmetricamente, scambiando righe e colonne, si ottiene lo sviluppo secondo la colonna k:

$$(2) \qquad \forall k = 1, ..., d \ \vdots \ \det(A) \ = \ \sum_{i=1}^{d} a_{i,k}\,(-1)^{i+k}\,\det\left(A_{\llcorner\, k,i}\right) \ .$$

Le due formule precedenti sono chiamate **sviluppi di Laplace del determinante**.

G42:e.03 Consideriamo alcuni esempi.

Preliminarmente ricordiamo che per esprimere il determinante di una matrice che si denota con un identificatore come A si usa anche la scrittura $|A|$ e per esprimere il deteminante di una matrice espressa mediante le sue singole entrate si usa anche presentare il quadro di tali entrate delimitate non dalle parentesi quadrate, ma da barre verticali. Negli esempi che seguono quest'ultima notazione risulta la più opportuna.

Notiamo anche che le formule precedenti si semplificano molto quando si hanno varie entrate nulle, in quanto gli addendi con fattori nulli si possono trascurare.

$$\det\begin{bmatrix}-2 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 4 & -3 & 2\end{bmatrix} = -2\det\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & 2\end{bmatrix} = -4\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix} + 0 = -2(-2+6) - 4(2-8) + 0 = -8 + 24 = 16 \ .$$

$$\begin{vmatrix}-2 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 4 & -3 & 2\end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 4 & 2\end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} =$$

$$-4(2-8) + (-1)(-4) + 3(-4) = 24 + 4 - 12 = 16 \ .$$

$$\begin{vmatrix}a & 2 & 0 & -1\\ b & 0 & -3 & a\\ 0 & -a & 4 & -b\\ 2a & 0 & a-b & 0\end{vmatrix} = -2a\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & -3 & a\\ -a & 4 & -b\end{vmatrix} - (a-b)\begin{vmatrix}a & 2 & -1\\ b & 0 & a\\ 0 & -a & -b\end{vmatrix} =$$

$$(-2a)\left(2\begin{vmatrix}-3 & a\\ 4 & -b\end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix}0 & -3\\ -a & 4\end{vmatrix}\right) + (b-a)\left(a\begin{vmatrix}0 & a\\ -a & -b\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix}2 & -1\\ -a & -b\end{vmatrix}\right) =$$

$$-4a(3b-4a) + 2a\,(-3a) + (b-a)(a^3 - b(-2b-a)) =$$

$$-12ab + 16a^2 - 6a^2 + (b-a)(a^3 + 2b^2 + ab) = -a^4 + a^3b + 10a^2 - a^2b - ab^2 - 12ab + 2b^3 \ .$$

G42:e.04 Consideriamo due interi $p, h \in (d]$ con $p \neq h$; se nella :d.09(1) per $j = 1, 2, ..., d$, risp., si sostituiscono gli $(-1)^{h+j}\det\left(A_{\llcorner\, h,j}\right)$ con gli $(-1)^{p+j}\det\left(A_{\llcorner\, p,j}\right)$, si ottiene il determinante della matrice $[\rho_h \longleftrightarrow \rho_p]\,A$ ottenuta dalla A sostituendo la riga h con la riga p; questo determinante di una matrice con due righe uguali è notoriamente nullo. Una conclusione simmetrica si ottiene per lo sviluppo secondo una colonna. Si hanno quindi le due formule

$$(1) \qquad \forall h, p \in (d] \ \vdots \ \sum_{j=1}^{d} a_{h,j}(-1)^{p+j}\det\left(A_{\llcorner\, p,j}\right) \ = \ \delta_{h,p}\,\det(A) \ ,$$

(2) $$\forall k, q \in (d] \; : \; \sum_{i=1}^{d} a_{i,k}(-1)^{k+i} \det\left(A_{\llcorner\, i,q}\right) \; = \; \delta_{k,q} \det(A) \; .$$

G42:e.05 Quando il determinante è diverso da 0, dalle due uguaglianze precedenti si ricavano le uguaglianze

(1) $$\forall h, p \in (d] \; : \; \sum_{j=1}^{d} a_{h,j} \; (-1)^{p+j} \, \frac{\det\left(A^{\top}{}_{\llcorner\, j,p}\right)}{\det(A)} \; = \; \delta_{h,p} \; ,$$

(2) $$\forall k, q \in (d] \; : \; \sum_{i=1}^{d} (-1)^{q+i} \, \frac{\det\left(A^{\top}{}_{\llcorner\, q,i}\right)}{\det(A)} \, a_{i,k} \; = \; \delta_{k,q} \; .$$

Queste uguaglianze dicono che le espressioni dei fattori che si combinano con le entrate $a_{h,j}$ e $a_{i,k}$ forniscono le componenti della matrice inversa della A:

(3) $$(A^{-1})_{j,h} \; = \; \frac{(-1)^{j+h} \, \det\left(A^{\top}{}_{\llcorner\, j,h}\right)}{\det(A)} \; .$$

Le formule precedenti consentono di determinare effettivamente la inversa di una matrice con determinante non nullo. Inoltre, come vedremo in G45:c.06 e G45:c.07, esse in linea di principio consentono di risolvere i sistemi lineari di d equazioni in d incognite.

G42:f. Altri sviluppi del determinante

G42:f.01 Diamo ora una generalizzazione degli sviluppi di Laplace per il determinante di una matrice quadrata su un campo $\mathbb{F}$.

Premettiamo alcune notazioni che possiamo applicare ad una matrice $A \in \mathsf{Mat}_{D;V}$ senza porre restrizioni all'insieme finito delle etichette D e all'insieme dei valori V.

Tra le sottomatrici della A ci interessano solo le sottomatrici quadrate proprie; a ciascuna di esse si può dare la forma $A_{\sqcap\, S\times T}$ ove S e T denotano due sottoinsiemi propri di D aventi la stessa cardinalità che denotiamo con k.

Introduciamo gli insiemi di indici $\overline{S} := D \setminus S$ e $\overline{T} := D \setminus T$ e consideriamo la sottomatrice quadrata propria $A_{\sqcap\, \overline{S}\times\overline{T}}$, osservando che coincide con la $A_{\llcorner\, S,T}$. Le due sottomatrici quadrate $A_{\llcorner\, S,T}$ ed $A_{\sqcap\, \overline{S}\times\overline{T}}$ sono dette **sottomatrici quadrate complementari** della A.

Assumiamo ora che in particolare sia $D = (d] = \{1, ..., d\}$, in modo che a ciascuna delle coppie $\langle S, T\rangle$ di sottoinsiemi di D aventi la stessa cardinalità k si possa dare la forma $\big\langle \{i_1, ..., i_k\}, \{j_1, ..., j_k\}\big\rangle$, dove conviene convenire che $1 \le i_1 < ... < i_k \le d$ e $1 \le j_1 < ... < j_k \le d$.

A tale coppia attribuiamo come **segno** l'intero

$$\mathrm{sign}(S, T) \; := \; (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \; = \; (-1)^{\sum_{h=1}^{k}(i_h+j_h)} \; .$$

A questo punto possiamo chiamare **sottomatrice quadrata con segno** della A ogni sottomatrice della forma $\mathrm{sign}(S,T)\, A_{\sqcap\, S\times T}$. Inoltre diciamo **sottomatrice quadrata complementare con segno** della precedente la matrice $\mathrm{sign}(\overline{S},\overline{T})\, A_{\sqcap\, \overline{S}\times\overline{T}}$.

Forse serve osservare che si ha biiezione evidente fra le coppie di sottoinsiemi di D della stessa cardinalità con le coppie di sottomatrici quadrate complementari con segno della $A \in \mathsf{Mat}_{d;V}$.

G42:f.02 Osserviamo anche che se si etichettano le righe e le colonne di una matrice quadrata con gli interi da 0 a $d-1$ o anche con gli elementi di un qualsiasi intervallo di k interi non cambiano le coppie delle sue sottomatrici quadrate complementari con segno: infatti abbassando o aumentando della stessa quantità tutti i valori delle etichette delle righe e delle colonne si toglie o si aggiunge un intero pari (si toglie $2d$ nel caso $\{0, 1, ..., d-1\}$) all'esponente nella definizione di $\text{sign}(S, T)$, e quindi non si cambia il suo valore.

Diamo alcuni esempi.

Consideriamo la matrice $A_a := \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$

Alcune delle sue coppie di sottomatrici quadrate con segno complementari sono:

$$\left\langle [\,11\,] \ , \ \begin{bmatrix} 22 & 23 & 24 \\ 32 & 33 & 34 \\ 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \right\rangle \quad ,$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 11 & 14 \\ 41 & 44 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 22 & 23 \\ 32 & 33 \end{bmatrix} \right\rangle \quad ,$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} -11 & -13 \\ -21 & -23 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -32 & -34 \\ -42 & -44 \end{bmatrix} \right\rangle \quad ,$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} -11 & -13 & -14 \\ -21 & -23 & -24 \\ -41 & -43 & -44 \end{bmatrix} \ , \ [\,-32\,] \right\rangle \quad .$$

G42:f.03 Valgono i seguenti sviluppi del determinante di una matrice $A \in \mathsf{Mat}_{d;\mathbb{F}}$ che generalizzano gli sviluppi di Laplace :e.02(1-2).

$$(1) \qquad \forall S \subset_k D \quad : \quad \det(A) = \sum_{T \subset_k D} \text{sign}(S,T)\, \det(A_{\sqcap\, S\times T}) \cdot \text{sign}(D \setminus S, D \setminus T)\, \det(A_{\llcorner\, S\times T}) \ ;$$

$$(2) \qquad \forall T \subset_k D \quad : \quad \det(A) = \sum_{S \subset_k D} \text{sign}(S,T)\, \det(A_{\sqcap\, S\times T}) \cdot \text{sign}(D \setminus S, D \setminus T)\, \det(A_{\llcorner\, S\times T}) \ .$$

G42:f.04 Consideriamo la matrice generica di ordine 4 e due suoi sviluppi: il primo riguardante le sue sottomatrici collocate nelle prime due righe, il secondo concernente le sue sottomatrici collocate nelle colonne 1 e 3:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & l \\ o & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} \begin{vmatrix} j & l \\ n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ e & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} j & k \\ n & o \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i & l \\ m & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & d \\ f & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i & k \\ m & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i & j \\ m & n \end{vmatrix} \ .$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} \begin{vmatrix} j & l \\ n & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ i & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f & h \\ n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ m & o \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f & h \\ j & l \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} e & g \\ i & k \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & d \\ n & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e & g \\ m & o \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & d \\ j & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & k \\ m & o \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & d \\ f & h \end{vmatrix} .$$

G42:f.05 Nel caso di matrici triangolari a blocchi si hanno semplificazioni notevoli.
Casi piuttosto semplici sono dati dalle seguenti formule collegate dalla trasposizione e riguardanti le matrici $A \in \mathsf{Mat}(k, \mathbb{F})$, $D \in \mathsf{Mat}(d-k, \mathbb{F})$, $B \in \mathsf{Mat}(k, d-k; \mathbb{F})$ e $C \in \mathsf{Mat}(d-k, k; \mathbb{F})$, con $1 < k < d$.

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0}_{[d-k,k]} & D \end{bmatrix} = \det(A) \cdot \det(D) ;$$

$$\det \begin{bmatrix} A & \mathbf{0}_{[k,d-k]} \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A) \cdot \det(D) .$$

Casi un po' meno leggibili si hanno quando i blocchi riguardano sottoinsiemi di etichette non consecutive.

`Le varie componenti di questo testo sono accessibili in http://www.mi.imati.cnr.it/∼alberto`