Capitolo G41:
Spazi euclidei

Contenuti delle sezioni

G41:0.01 La geometria fin dall'antichità, e ad un elevato grado di consapevolezza, fin dalla matematica greco-ellenistica, è la disciplina che si propone come modello formale dello spazio che ci circonda.
Gli spazi vettoriali forniscono alcune nozioni (come quelle di retta, piano, dipendenza e indipendenza lineare) che sono indispensabili per impostare gran parte della geometria.
Con la struttura di spazio vettoriale non si possono invece definire nozioni come la lunghezza di un vettore, la distanza fra due punti e l'ampiezza di un angolo compreso fra due semirette o due vettori, nozioni evidentemente indispensabili per trattare soddisfacentemente le entità geometriche, soprattutto quelle che rivestono interesse applicativo (per la misurazione del suolo, per l'architettura, per l'astronomia, ...) .

G41:0.02 In particolare le lunghezze di due vettori possono essere confrontate solo se questi sono proporzionali: se $\mathbf{w} = 2\,\mathbf{v}$ risulta sensato affermare che la lunghezza di $\mathbf{w}$ è maggiore di quella di $\mathbf{v}$, ma questo non porta più avanti dello studio della retta reale.
Osservimo anche che nell'ambito della struttura spazio vettoriale non è detto che due vettori di una base abbiano la stessa lunghezza e che siano ortogonali, domande che hanno pienamente senso per un modello materiale dei vettori di una base bi- o tri-dimensionale. Va notato che quando si pensa una base di uno spazio a 2 o 3 dimensioni solitaamente si è portati a visualizzarla come costituita da con un punto in comune aventi la stessa lunghezza e disposti ortogonalmente. Questo atteggiamento però si basa solo sulla familiarità con figure materiali facilmente misurabili e descrivibili (pagine stampate, schermi, quadri, campi di calcio, stanze regolari, ...), mentre nulla a che fare con gli assiomi e le proposizioni della struttura spazio vettoriale.
Tutte le proprietà che si dimostrano per uno spazio vettoriale valgono sia in un suo modello materiale con una base canonica ortonormale, sia in un modello in cui i vettori della base sono ottenuti applicando a quelli di una base ortonormale delle omotetie e delle rotazioni che fanno sı` che due suoi vettori hanno lunghezze diverse e determinano un angolo con qualsiasi ampiezza compresa tra 0° e 180°, estremi esclusi.

G41:0.03 Per poter trattare grandezze di vettori, distanze fra punti ed ampiezze angolari, grandezze pesantemente richieste dalle applicazioni della geometria, si deve arricchire la struttura di spazio vettoriale. Questo può ottenersi in modo soddisfacente per molte esigenze con una funzione, chiamata prodotto interno, che ad ogni coppia di vettori associa uno scalare e gode di proprietà che consentono di definire le suddette grandezze geometriche fisicamente misurabili.

Anche con questo arricchimento si ottiene di una struttura che non soddisfa completamente le esigenze della geometria. Infatti in uno spazio vettoriale con prodotto interno si ha un punto, il vettore nullo che costituisce l'origine per ogni sistema di riferimento, che si comporta diversamente da tutti gli altri elementi dello spazio: questa disomogeneità contrasta con la necessità di enunciare proprietà geometriche valide per tutti i punti e tutte le regioni dello spazio, proprietà richieste per poter formulare leggi fisiche dotate di alcune proprietà di invarianza che sono da considerare essenziali. In particolare nella meccanica hanno ruoli importanti le leggi invarianti rispetto alle traslazioni e alle rotazioni, mentre la teoria della [[relatività ristretta]] (P60:) si basa su leggi invarianti rispetto alle [[trasformazioni di Lorentz]]. Quindi si rende necessario qualche ulteriore arricchimento della piattaforma algebrica della geometria.
In questo capitolo introdurremo la nozione più soddisfacente di spazio euclideo che effettueremo servendoci di una rapida introduzione della struttura di spazio affine.

G41:a. Spazi sui reali con prodotto interno

G41:a.01 L'operazione di prodotto interno viene definita in due versioni, una per arricchire gli spazi vettoriali sui reali ed una, un po' più elaborata, per gli spazi vettoriali sulcampo dei numeri complessi (v. B50). Essa può essere introdotta piuttosto facilmente per tutti gli spazi finito-dimensionali, mentre richiede discorsi più articolati per essere introdotta su spazi costituiti da funzioni con caratteristiche particolari, ad esempio da funzioni con il modulo del quadrato integrabile (v. [[funzione a quadrato sommabile]]).

Qui ci interessiamo sistematicamente solo degli spazi sui reali a finite dimensioni, strutture sufficienti per la trattazione della geometria euclidea. Questi sviluppi si possono accostare intuitivamente facendo riferimento allo spazio tridimensionale, cioè lo spazio nel quale è stata sviluppata la geometria euclidea classica e che ha costituito l'ambiente per gran parte dell'analisi infinitesimale e della fisica da Newton a Maxwell.

Per visualizzare alcune delle costruzioni più semplici può bastare anche il solo spazio bidimensionale. Le costruzioni formali consentono comunque di portare avanti abbastanza agevolmente, lo studio dei generici spazi multidimensionali, ambienti dei quali non riusciamo ad ottenere una visualizzazione capace di rendere intuitivi numerosi risultati.

G41:a.02 Si consideri un intero positivo d e uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ sul campo dei reali a d-dimensioni (in particolare potrebbe trattarsi dello spazio $\mathbb{R}^{\times d}$). Si definisce come **prodotto interno** su $\boldsymbol{V}$ una funzione che a due vettori v e w associa un numero reale per il quale useremo le due notazioni equivalenti $\langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\rangle$ e $\mathsf{v}\cdot\mathsf{w}$ ed alla quale si chiedono le proprietà che seguono.

(1) $\forall\, \mathsf{v},\mathsf{w},\mathsf{x}\in \boldsymbol{V}\,,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ :\ \langle \mathsf{v}|\alpha\mathsf{w}+\beta\mathsf{x}\rangle = \alpha\langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\rangle + \beta\langle \mathsf{v}|\mathsf{x}\rangle$ (**linearità nel secondo argomento**)

(2) $\forall \mathsf{v},\mathsf{w}\in \boldsymbol{V}\ :\ \langle \mathsf{w}|\mathsf{v}\rangle = \langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\rangle$ (**simmetria rispetto allo scambio dei due argomenti**)

(3) $\forall \mathsf{v}\in \boldsymbol{V}\ :\ \langle \mathsf{v}|\mathsf{v}\rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle \mathsf{v}|\mathsf{v}\rangle = 0 \iff \mathsf{v}=\mathbf{0}$ (**definitezza positiva**)

Dalle proprietà (1) e (2) discende subito che il prodotto interno è lineare anche nel suo primo argomento:

(4) $\forall \mathsf{u},\mathsf{v},\mathsf{w}\in \boldsymbol{V}\,,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ :\ \langle \alpha\mathsf{u}+\beta\mathsf{v}|\mathsf{w}\rangle = \alpha\langle \mathsf{u}|\mathsf{w}\rangle + \beta\langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\rangle$

G41:a.03 Gli spazi vettoriali sui reali dotati di un prodotto interno si dicono **spazi con prodotto interno reale**; un tale spazio di dimensione finita talora viene detto **spazio unitario reale**; viene usato anche il termine *spazio euclideo*, ma questo termine lo adotteremo per strutture più ricche (v. :d).

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^d$ viene spesso dotato del cosiddetto **prodotto interno standard** definito da

(1) $$\big\langle \langle v_1, ..., v_d \rangle | \langle w_1, ..., w_d \rangle \big\rangle := v_1\, w_1 + \cdots + v_d\, w_d \ .$$

Alcuni esempi: $\big\langle \langle 2, -1.5 \rangle | \langle 0.6, 2.2 \rangle \big\rangle = -2.1$, $\big\langle \langle 1, 2.5, -0.8 \rangle | \langle -0.4, 1.2, -2 \rangle \big\rangle = 4.2$.
$\big\langle \langle 1, a, -0.8b \rangle | \langle -0.7, 1.2b, -a \rangle \big\rangle = 2ab - 0.7$

G41:a.04 Procediamo a chiarire le proprietà generali degli spazi $\boldsymbol{V}$ dotati di un prodotto interno reale $\langle * | * \rangle$.
L'importanza del prodotto scalare emerge anche nell'enunciato che segue.

(1) Lemma: Consideriamo uno spazio $\boldsymbol{V}$ dotato di prodotto interno $\langle * | * \rangle$ e due suoi vettori v e w;

$$\forall \mathsf{x} \in \boldsymbol{V} \ \vdots \ \langle \mathsf{v} | \mathsf{x} \rangle \ = \ \langle \mathsf{w} | \mathsf{x} \rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{v} = \mathsf{w} \ .$$

Dim.: $\forall \mathsf{x} \in \boldsymbol{V} \vdots \ \langle \mathsf{v} | \mathsf{x} \rangle = \langle \mathsf{w} | \mathsf{x} \rangle \iff \forall \mathsf{x} \in \boldsymbol{V} \vdots \ \langle \mathsf{v} - \mathsf{w} | \mathsf{x} \rangle = 0 \implies \langle \mathsf{v} - \mathsf{w} | \mathsf{v} - \mathsf{w} \rangle = 0 \iff \mathsf{v} = \mathsf{w}$.
L'implicazione inversa è immediata ▮

G41:a.05 Si dice **norma** o **lunghezza** di un vettore $\mathsf{v} \in \boldsymbol{V}$ la radice quadrata del prodotto scalare del vettore per sé stesso

(1) $$||\mathsf{v}|| := \sqrt{\langle \mathsf{v} | \mathsf{v} \rangle} \ .$$

Le prime proprietà della norma si dimostrano facilmente.
La norma di ogni vettore dello spazio $\boldsymbol{V}$ è un numero positivo, con la sola eccezione della norma del vettore nullo che vale 0:

(2) $$\forall \mathsf{v} \in \boldsymbol{V} \ \vdots \ ||\mathsf{v}|| \geq 0 \quad \text{e} \quad ||\mathsf{v}|| = 0 \Longleftrightarrow \mathsf{v} = \mathbf{0} \ .$$

La moltiplicazione per uno scalare modifica la norma di un vettore in modo molto semplice:

(3) $$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathsf{v} \in \boldsymbol{V} \ \vdots \ ||\alpha \mathsf{v}|| = |\alpha| \ ||\mathsf{v}|| \ .$$

In particolare ogni vettore v ha la stessa norma del suo opposto $-\mathsf{v}$.

Interessano in particolare i vettori di norma 1, entità chiamate **vettori normalizzati** o **versori**.
Si può trasformare facilmente ogni vettore v diverso da $\mathbf{0}$ in un vettore proporzionale di norma 1: basta la modifica

(4) $$\mathsf{v} \quad \mapsto \quad \frac{1}{\sqrt{\langle \mathsf{v} | \mathsf{v} \rangle}}\, \mathsf{v} \ ,$$

che porta ad un vettore per la cui norma, come si richiede, si ha

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\langle \mathsf{v} | \mathsf{v} \rangle}}\, \mathsf{v} \ \middle| \ \frac{1}{\sqrt{\langle \mathsf{v} | \mathsf{v} \rangle}}\, \mathsf{v} \right\rangle \ = \ \frac{1}{\langle \mathsf{v} | \mathsf{v} \rangle} \langle \mathsf{v} | \mathsf{v} \rangle \ = \ 1 \ .$$

G41:a.06 (1) Teorema (**disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**)

$$\forall \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \boldsymbol{V} \ \vdots \ |\langle \mathsf{v} | \mathsf{w} \rangle| \leq ||\mathsf{v}|| \cdot ||\mathsf{w}||$$

e l'uguaglianza vale sse i vettori v e w sono proporzionali.

Dim.: Se uno dei due vettori, diciamo w, è uguale a $\mathbf{0}$ si ha

$$\langle \mathsf{v}|\mathbf{0}\rangle = \langle \mathsf{v}|\mathsf{x}-\mathsf{x}\rangle = \langle \mathsf{v}|\mathsf{x}\rangle - \langle \mathsf{v}|\mathsf{x}\rangle = 0$$

e la disugualianza si riduce ad una uguaglianza evidente. Esaminiamo quindi il caso $\mathsf{v},\mathsf{w} \neq \mathbf{0}$. Sia r una variabile reale e si consideri l'espressione

$$\begin{aligned} q(r) &:= ||r\mathsf{v}+\mathsf{w}||^2 = \langle r\mathsf{v}+\mathsf{w}|r\mathsf{v}+\mathsf{w}\rangle = r^2\langle \mathsf{v}|\mathsf{v}\rangle + r\langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\rangle + r\langle \mathsf{w}|\mathsf{v}\rangle + \langle \mathsf{w}|\mathsf{w}\rangle \\ &= r^2||\mathsf{v}||^2 + 2r\langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\rangle + ||\mathsf{w}||^2 \ . \end{aligned}$$

Si tratta di un polinomio quadratico nella r che deve essere maggiore o uguale a 0 in quanto esprime una norma al quadrato. Quindi il suo discriminante deve essere non positivo, ovvero deve essere

$$4|\langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\rangle|^2 - 4||\mathsf{v}||^2||\mathsf{w}||^2 \leq 0$$

questa disuguaglianza equivale a quella da dimostrare. Inoltre vale l'uguaglianza sse esiste un reale ω tale che sia $q(\omega) = 0$, cioè $||\mathsf{v}+\omega\mathsf{w}||^2 = 0$, cioè $\mathsf{v}+\omega\mathsf{w} = \mathbf{0}$, cioè sse i due vettori sono proporzionali ▮

L'interpretazione geometrica per $d = 2$ e $d = 3$ (v. G30 e G36a) è piuttosto semplice.

G41:a.07 Teorema (disuguaglianza triangolare)

(1) $$\forall \mathsf{v},\mathsf{w} \in \boldsymbol{V} \ : \ \ \|\mathsf{v}+\mathsf{w}\| \leq \|\mathsf{v}\| + \|\mathsf{w}\|$$

e l'uguaglianza vale sse i vettori v e w sono proporzionali.

Dim.: Si ha la seguente catena di relazioni, tra le quali nel passaggio [•] interviene la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} ||\mathsf{v}+\mathsf{w}||^2 &= \langle \mathsf{v}+\mathsf{w}|\mathsf{v}+\mathsf{w}\rangle = \langle \mathsf{v}|\mathsf{v}\rangle + \langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\rangle + \langle \mathsf{w}|\mathsf{v}\rangle + \langle \mathsf{w}|\mathsf{w}\rangle \\ &\leq ||\mathsf{v}||^2 + 2|\langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\rangle| + ||\mathsf{w}||^2 \leq [\bullet] \leq ||\mathsf{v}||^2 + 2||\mathsf{v}||||\mathsf{w}|| + ||\mathsf{w}||^2 = (||\mathsf{v}|| + ||\mathsf{w}||)^2 \end{aligned} \ ;$$

da questa segue la disuguaglianza da dimostrare ▮

G41:a.08 (1) Coroll.: $\forall \mathsf{v},\mathsf{w},\mathsf{x} \in \boldsymbol{V} \ : \ \ ||\mathsf{v}-\mathsf{w}|| \leq ||\mathsf{v}-\mathsf{x}|| + ||\mathsf{x}-\mathsf{w}||$

Dim.: Discende dalla disuguaglianza triangolare sostituendo in essa v con $\mathsf{v}-\mathsf{x}$ e w con $\mathsf{x}-\mathsf{w}$ ▮

(2) Prop.: $\forall \mathsf{v},\mathsf{w} \in \boldsymbol{V} : \ \big| ||\mathsf{v}|| - ||\mathsf{w}|| \big| \leq ||\mathsf{v}-\mathsf{w}||$

Dim.: Segue dalla seguente catena di relazioni, nella quale [•] fa intervenire la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} ||\mathsf{v}-\mathsf{w}||^2 &= \langle \mathsf{v}-\mathsf{w}|\mathsf{v}-\mathsf{w}\rangle = \langle \mathsf{v}|\mathsf{v}\rangle - \langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\rangle - \langle \mathsf{w}|\mathsf{v}\rangle + \langle \mathsf{w}|\mathsf{w}\rangle = ||\mathsf{v}||^2 - 2|\langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\rangle| + ||\mathsf{w}||^2 \\ &\leq ||\mathsf{v}||^2 + 2|\langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\rangle| + ||\mathsf{w}||^2 \leq [\bullet] \leq ||\mathsf{v}||^2 + 2||\mathsf{v}||||\mathsf{w}|| + ||\mathsf{w}||^2 = (||\mathsf{v}|| + ||\mathsf{w}||)^2 \end{aligned}$$ ▮

(1) Prop.: (**regola del parallelogramma**)

$$\forall \mathsf{v},\mathsf{w} \in \boldsymbol{V} \ : \ \ ||\mathsf{v}+\mathsf{w}||^2 + ||\mathsf{v}-\mathsf{w}||^2 = 2||\mathsf{v}||^2 + 2||\mathsf{w}||^2$$

Dim.: È sufficiente sviluppare il primo membro $||\mathsf{v}||^2 + 2\langle \mathsf{w}|\mathsf{v}\rangle + ||\mathsf{w}||^2 + ||\mathsf{v}||^2 - 2\langle \mathsf{w}|\mathsf{v}\rangle + ||\mathsf{w}||^2$ ▮

G41:a.09 In uno spazio con prodotto interno reale la conoscenza dei prodotti scalari delle diverse coppie di vettori porta alla conoscenza delle norme dei vettori: in effetti queste sono definite a partire da particolari prodotti scalari (v. :a.05(1)).
Va notato che vale anche il viceversa: si possono ricavare i prodotti scalari delle coppie di vettori dalle norme di tali vettori.

(1) Prop.: (**identità di polarizzazione**) Se $\boldsymbol{V}$ è uno spazio vettoriale sui reali:

$$\forall \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \boldsymbol{V} \;:\; \langle \mathsf{v}|\mathsf{w} \rangle \;=\; \frac{1}{4}\left(||\mathsf{v}+\mathsf{w}||^2 - ||\mathsf{v}-\mathsf{w}||^2\right) \;.$$

Dim.: È sufficiente sviluppare il secondo membro dell'uguaglianza ▮

G41:a.10 Molti spazi vettoriali si possono arricchire con una norma introdotta con un procedimento puramente assiomatico e quindi aperto a tutte le scelte compatibili con le proprietà di questa funzione sui vettori senza alcuna richiesta iniziale di una funzione prodotto interno.

Si consideri un campo $\mathbb{K}$ che potrebbe essere sia il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, si scelga un suo sottocampo (ad esempio il campo dei razionali o il campo dei reali); per ogni elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ ha quindi senso considerare il suo modulo $|\alpha|$.

Si dice **norma** su uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ sul campo $\mathbb{K}$ una funzione $|| * ||$ del genere $\{\boldsymbol{V} \longmapsto \mathbb{R}\}$ che soddisfi le seguenti proprietà:

[Nrm1] $\forall \mathsf{v} \in \boldsymbol{V} \;:\; ||\mathsf{v}|| \geq 0$ e $||\mathsf{v}|| = 0 \iff \mathsf{v} = \mathbf{0}$; (**definitezza positiva**);

[Nrm2] $\forall \alpha \in \mathbb{F}\,,\; \mathsf{v} \in \boldsymbol{V} \;:\; ||\alpha\mathsf{v}|| = |\alpha| \cdot ||\mathsf{v}||$ (**scalabilità positiva**) ;

[Nrm3] $\forall \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \boldsymbol{V} \;:\; ||\mathsf{v}+\mathsf{w}|| \leq ||\mathsf{v}|| + ||\mathsf{w}||$ (**disuguaglianza triangolare**) .

Uno spazio vettoriale munito di una norma si dice **spazio normato**.

(1) Prop.: Ogni spazio vettoriale sui reali munito di prodotto interno $\langle \star|\star \rangle$ può essere dotato della norma costituita dalla funzione

$$\ulcorner\, \mathsf{v} \in \boldsymbol{V} \mapsto \sqrt{\langle \mathsf{v}|\mathsf{v} \rangle}\, \urcorner \;.$$

Dim.: Si verifica facilmente che questa funzione soddisfa le proprietà [Nrm1], [Nrm2] e [Nrm3] ▮

Dunque ogni spazio vettoriale sui reali munito di un prodotto interno può considerarsi uno spazio normato.

G41:a.11 Presentiamo ora alcune considerazioni sulla differenza fra gli spazi vettoriali e gli spazi vettoriali con prodotto interno, strutture che sul piano formale costituiscono dei ben definiti arricchimenti dei precedenti.

La percezione di questa differenza spesso non risulta chiara. In effetti in genere accade che quando ci vengono presentati gli spazi vettoriali si faccia riferimento, come è naturale, allo spazio tridimensionale nel quale siamo immersi. cioè ad $\mathbb{R}^{\times 3}$. Questo spazio si è portati a riferirlo alla base $\{\mathsf{e}_x, \mathsf{e}_x, \mathsf{e}_x\}$ e si è indotti ad attribuire ai vettori della base la lunghezza 1 ed a pensarli come costituenti una terna ortonormale. In tal modo si prende in considerazione un modello costituito da uno spazio con il prodotto interno pitagorico. Stando alla definizione di spazio vettoriale queste attribuzioni sono del tutto arbitrarie e vanno considerate solo una scelta comoda per una prima visione intuitiva della specie degli spazi vettoriali. Tutte le proprietà dedotte dalla definizione di spazio vettoriale rimangono valide anche se si immergono i tre vettori di base nello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ come vettori di lunghezze non tutte uguali e con direzioni non tutte mutuamente ortogonali: questi tre vettori devono solo essere linearmente indipendenti.

In particolare le considerazioni sulle proiezioni su sottospazi sac possono essere visualizzate come proiezioni oblique.

La differenza fra spazi vettoriali e spazi arricchiti con un prodotto interno può essere giudicata come apertura delle possibilità di visualizzazione.

La maggiore ricchezza degli spazi con prodotto interno diventa più tangibile considerando gli spazi di polinomi (v.a. (I58:). In molte applicazioni computazionali di queste entità che si servono di diversi sistemi di polinomi spaciali (polinomi di Newton, di Legendre, di Hermite, ...) si impongono sistemi di riferimento riconducibili a prodotti interni forniti da integrali che riguardano diversi intervalli di integrazione e diverse funzioni peso.

G41:b. Isometrie, ortogonalità, basi ortonormali

G41:b.01 Ricordiamo che si dice **distanza** o **metrica** su un generico insieme non vuoto $\boldsymbol{S}$ una funzione del genere $\mathrm{d} \in \{\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S} \longmapsto \mathbb{R}\}$ che gode delle seguenti proprietà

(1) $\forall \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \boldsymbol{S} \;:\; \mathrm{d}(\mathsf{v}, \mathsf{w}) = 0 \implies \mathsf{v} = \mathsf{w}$ (**proprietà di identità**);

(2) $\forall \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \boldsymbol{S} \;:\; \mathrm{d}(\mathsf{v}, \mathsf{w}) = \mathrm{d}(\mathsf{w}, \mathsf{v})$ (**simmetria**);

(3) $\forall \mathsf{v}, \mathsf{w}, \mathsf{x} \in \boldsymbol{S} \;:\; \mathrm{d}(\mathsf{v}, \mathsf{x}) \leq \mathrm{d}\mathsf{v}, \mathsf{w}) + \mathrm{d}(\mathsf{w}, \mathsf{x})$ (**disuguaglianza triangolare**).

Si osserva che da queste tre proprietà discende la seguente

(4) $\forall \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \boldsymbol{S} \;:\; \mathrm{d}(\mathsf{v}, \mathsf{w}) \geq 0$ e $\mathrm{d}(\mathsf{v}, \mathsf{w}) = 0 \iff \mathsf{v} = \mathsf{w}$ (**definitezza positiva**).

Dunque il codominio di una distanza è un sottoinsieme di $\mathbb{R}_{0,+}$.

Un insieme munito di una sua distanza si dice **spazio metrico**.

Consideriamo due spazi metrici $\langle \boldsymbol{S}_1, \mathrm{d}_1 \rangle$ e $\langle \boldsymbol{S}_2, \mathrm{d}_2 \rangle$; una funzione del genere $\mathrm{m} \in \{\boldsymbol{S}_1 \longmapsto \boldsymbol{S}_2\}$ si dice **isometria** sse mantiene le distanze, cioè sse

$$(5) \qquad \forall P, Q \in \boldsymbol{S}_1 \;:\; \mathrm{d}_2(\mathrm{m}(P), \mathrm{m}(Q)) = \mathrm{d}_1(P, Q) \;.$$

Una isometria biiettiva tra due spazi metrici è chiamata **isomorfismo metrico** e due spazi metrici tra i quali esiste un isomorfismo metrico si dicono **spazi metricamente isomorfi**. Si constata agevolmente che l'isomorfismo metrico è una equivalenza fra spazi metrici.

G41:b.02 Consideriamo uno spazio normato $\langle \boldsymbol{N} |, | * || \rangle$; da esso si ricava lo spazio metrico $\langle \boldsymbol{N}, \mathrm{d} \rangle$ con la distanza d ricavata dalla norma mediante la definizione

$$(1) \qquad \forall \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \boldsymbol{N} \;:\; \mathrm{d}(\mathsf{v}, \mathsf{w}) := ||\mathsf{v} - \mathsf{w}|| \;.$$

Conseguentemente (:a.10(1)) da ogni spazio vettoriale sui reali munito di prodotto interno si può ricavare uno spazio metrico con la distanza definita mediante la norma ricavabile dal suddetto prodotto interno.

Va segnalato che la nozione di spazio metrico è assai generale e che sono studiati anche spazi metrici molto diversi dagli spazi vettoriali dotati di prodotto interno ovvero di una norma. In particolare vi sono spazi metrici costruiti su insiemi finiti o su insiemi numerabili; ancor più in particolare si danno gli esempi che riguardano i nodi di un [[grafo non orientato]] e connesso, il cui insieme di nodi può essere sia finito che numerabile ed ai cui spigoli si possono attribuire delle distanze locali.

Gli spazi metrici e gli spazi normati devono la loro importanza alla possibilità di essere dotati con un procedimento relativamente semplice di una cosiddetta "[[topologia]]", ovvero di costruzioni formali che consentono di introdurre le nozioni di [[intorno di un punto]], di [[convergenza di una successione]] e di [[limite]] e conseguentemente di sviluppare una vasta gamma di efficaci strumenti computazionali: convergenza e limite sono nozioni chiave per l'analisi infinitesimale e per la [[geometria differenziale]].

G41:b.03 Consideriamo due spazi vettoriali sopra il campo $\mathbb{R}$ $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ dotati di prodotto interno (reale) $\langle *|* \rangle$. Per **isometria** tra questi spazi vettoriali si intende una trasformazione lineare del genere $L \in \{\boldsymbol{V} \longmapsto_{\mathbb{R}-lin} \boldsymbol{W}\}$ che preserva il prodotto interno, cioè tale che

(1) $$\forall \mathsf{u}, \mathsf{v} \in \boldsymbol{V} \ : \ \langle L(\mathsf{u}) | L(\mathsf{v}) \rangle \ = \ \langle \mathsf{u} | \mathsf{v} \rangle \ .$$

Si dimostra che ogni isometria di questi spazi è iniettiva e, di conseguenza ogni isometria suriettiva è anche un isomorfismo metrico.
Qui interessano soprattutto gli spazi metrici costituiti da spazi vettoriali sui reali a finite dimensioni dotati di prodotto interno (reale). La finitezza delle dimensioni consente di dimostrare facilmente che la iniettività implica la suriettività. Quindi per la classe di questi spazi le relazioni di isometria e di isomorfismo metrico coincidono.

(2) Prop.: Una trasformazione lineare tra due spazi con prodotto interno $L \in \{\boldsymbol{V} \longmapsto_{\mathbb{R}-lin} \boldsymbol{W}\}$ è un'isometria sse conserva la norma.

Dim.: Dalla definizione (1) segue subito che una isometria L conserva la norma, cioè
$$\forall \mathsf{v} \in \boldsymbol{V} \ : \ ||L(\mathsf{v})|| = ||\mathsf{v}|| \ .$$
Viceversa se L conserva la norma, per la trasformazione del prodotto interno si ha, grazie ad :a.09(1),
$$\begin{aligned}\forall \mathsf{u}, \mathsf{v} \in \boldsymbol{V} : \ \langle L(\mathsf{u}) | L(\mathsf{v}) \rangle &= \frac{1}{4}\left(||L(\mathsf{u}) + L(\mathsf{v})||^2 - ||L(\mathsf{u}) - L(\mathsf{v})||^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(||L(\mathsf{u}+\mathsf{v})||^2 - ||L(\mathsf{u}-\mathsf{v})||^2\right) = \frac{1}{4}\left(||\mathsf{u}+\mathsf{v}||^2 - ||\mathsf{u}-\mathsf{v}||^2\right) = \langle \mathsf{u} | \mathsf{v} \rangle \ \blacksquare\end{aligned}$$

(3) Prop.: Consideriamo un endomorfismo lineare $L \in \{\boldsymbol{V} \longmapsto_{\mathbb{R}-lin} \mathbb{F}\,\boldsymbol{V}\}$;
$$\forall \mathsf{v}, \mathsf{x} \in \boldsymbol{V} \ : \ \langle L(\mathsf{v}) | \mathsf{x} \rangle = 0 \implies L \ = \ \lceil \mathsf{u} \in \boldsymbol{V} \mapsto \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} \rceil \ .$$
Dim.: Segue da :a.04(1) ∎

G41:b.04 Consideriamo uno spazio con prodotto interno $\boldsymbol{V}$. Due vettori $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \boldsymbol{V}$ si dicono **vettori ortogonali** sse il loro prodotto interno è nullo, cioè sse $\langle \mathsf{u} | \mathsf{v} \rangle = 0$; per esprimere questa relazione di ortogonalità si scrive $\mathsf{u} \perp \mathsf{v}$.
Due sottoinsiemi $S, T \subseteq \boldsymbol{V}$ si dicono **ortogonali** sse $\forall \mathsf{u} \in S, \mathsf{v} \in T : \langle \mathsf{v} | \mathsf{w} \rangle = 0$; in tal caso si scrive $S \perp T$.
Si dice **complemento ortogonale** di $S \subseteq \boldsymbol{V}$ l'insieme di vettori $S^{\perp} := \{\mathsf{v} \in \boldsymbol{V} \mid \mathsf{v} \perp S\}$.

(1) Prop.: Ogni complemento ortogonale di un insieme di vettori di $\boldsymbol{V}$ è un sottospazio, ovvero:
$$\forall S \subseteq \boldsymbol{V} \ : \ S^{\perp} \leq_{Vsp} \boldsymbol{V} \ .$$
Dim.: $\forall \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2 \in S^{\perp}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $\alpha_1 \mathsf{v}_1 + \alpha_2 \mathsf{v}_2 \perp S$ *i.e.* $\alpha_1 \mathsf{v}_1 + \alpha_2 \mathsf{v}_2 \in S^{\perp}$ ∎

(2) Prop.: $\forall S \subseteq \boldsymbol{V} : S \cap S^{\perp} = \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}\}$ ∎

Dim.: Se $\mathsf{x} \in S \cap S^{\perp}$ deve essere $\langle \mathsf{x} | \mathsf{x} \rangle = 0$ e per la definizione di prodotto interno, $\mathsf{x} = \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$ ∎

G41:b.05 Diciamo **insieme ortogonale** di $\boldsymbol{V}$ ogni insieme non vuoto di vettori non nulli di tale spazio $\{i \in I :| \mathsf{u}_i\}$ tale che $\forall i, j \in I : \langle \mathsf{u}_i | \mathsf{u}_j \rangle = \delta_{i,j} ||\mathsf{u}_i||^2$. Denotiamo con $\mathsf{Ortset}_{\boldsymbol{V}}$ la collezione degli insiemi ortogonali dello spazio $\boldsymbol{V}$.

(1) Prop.: Ogni $\{i \in I :| \mathsf{u}_i\} \in \mathsf{Ortset}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Dim.: Supponiamo sia $I = \{1, ..., m\}$ e consideriamo $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{F}$, numeri tali che sia $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathsf{u}_i = \mathbf{0}$.
Per ogni $j = 1, ..., m$ si ha $\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathsf{u}_i | \mathsf{u}_j \rangle = \alpha_j ||\mathsf{u}_j||^2 = 0$ e di conseguenza $\alpha_j = 0$ ∎

Tra gli insiemi ortogonali di uno spazio $\boldsymbol{V}$ interessano in particolare quelli che sono anche basi, cioè i sistemi di vettori ortogonali che consentono di esprimere ogni vettore dello spazio come loro combinazione lineare. Questi insiemi si chiamano **basi ortogonali** e denotiamo con $\mathsf{Ortbas}_{\boldsymbol{V}}$ la loro collezione.

Tra gli insiemi ortogonali di uno spazio $\boldsymbol{V}$ interessano particolarmente quelli costituiti da versori, vettori aventi norma uguale ad 1. Questi insiemi si chiamano **insiemi ortonormali** e denotiamo con $\mathsf{Ortonset}_{\boldsymbol{V}}$ la loro collezione.

Ancor più particolari e sono le basi costituite da versori mutuamente ortogonali; questi insiemi si chiamano **basi ortonormali** o **basi di Hilbert** e denotiamo con $\mathsf{Ortonbas}_{\boldsymbol{V}}$ la loro collezione. Evidentemente $\mathsf{Ortonbas}_{\boldsymbol{V}} = \mathsf{Ortbas}_{\boldsymbol{V}} \cap \mathsf{Ortonset}_{\boldsymbol{V}}$.

G41:b.06 Le basi ortogonali e ancor più le basi ortonormali sono strumenti particolarmente maneggevoli per /effettuare calcoli sugli spazi euclidei. In effetti per molti calcoli su vettori riferiti ad una generica base risulta conveniente sostituire tale base con una base ortogonale o ancor meglio con una base ortonormale.

Abbiamo visto in :a.05(4) come passare da un vettore non nullo $\mathbf{v}$ ad un versore a esso proporzionale mediante il calcolo di $||\mathbf{v}||$. Ad una base ortogonale $\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_d\}$ si associa una base di versori, cioè una base ortonormale, attraverso una mera estensione della trasformazione suddetta:

(1) $$\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_d\} \quad \mapsto \quad \left\{ \frac{\mathbf{b}_1}{||\mathbf{b}_1||}, ..., \frac{\mathbf{b}_d}{||\mathbf{b}_d||} \right\} .$$

Chiaramente se la base è ortogonale, la base di versori associata è ortonormale.

La trasformazione di una base generica in una base ortogonale è più laboriosa e verrà presentata in :b.09 .

G41:b.07 Consideriamo uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ a d dimensioni e denotiamo una sua base ortonormale con $\mathcal{O} = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_d\}$.

(1) Prop.: $\forall \mathbf{v} \in \boldsymbol{V} : \ \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}|\mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{v}|\mathbf{u}_d \rangle \mathbf{u}_d$.

Dim.: Essendo $\mathcal{O}$ una base, si può scrivere $\mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_1 + \cdots + v_d\mathbf{u}_d$; i coefficienti di questo sviluppo si ottengono considerando per $i = 1, ..., d$ i prodotti scalari

$$\langle \mathbf{v}|\mathbf{u}_i \rangle = \langle v_1\mathbf{u}_1 + \cdots + v_d\mathbf{u}_d|\mathbf{u}_i \rangle = v_i \langle \mathbf{u}_i|\mathbf{u}_i \rangle = v_i \quad \blacksquare$$

L'espressione dell'enunciato viene detta **sviluppo di Fourier** di $\mathbf{v}$ nella base $\mathcal{O}$ e i coefficienti v_i sono detti **coefficienti di Fourier** dello sviluppo di $\mathbf{v}$ rispetto a tale base.

(2) Prop.: (**identità di Bessel**) $\forall \mathbf{v} \in \boldsymbol{V} : \ ||\mathbf{v}||^2 = |\langle \mathbf{v}|\mathbf{u}_1 \rangle|^2 + \cdots + |\langle \mathbf{v}|\mathbf{u}_d \rangle|^2 \ \blacksquare$

(3) Prop.: (**identità di Perseval**) $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \boldsymbol{V} : \ \langle \mathbf{v}|\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}|\mathbf{u}_1 \rangle \langle \mathbf{w}|\mathbf{u}_1 \rangle + \cdots + \langle \mathbf{v}|\mathbf{u}_d \rangle \langle \mathbf{w}|\mathbf{u}_d \rangle \ \blacksquare$

Vedremo inoltre in :e che le basi ortonormali vengono collegate da matrici di cambiamento base più particolari delle non singolari, le matrici ortogonali; queste sono le matrici la cui inversa coincide con la propria trasposta e che quindi può ottenersi con un'elaborazione del tutto agevole.

G41:b.08 **(1) Teorema della proiezione** Sia $\boldsymbol{U}$ un sottospazio dello spazio con prodotto interno $\boldsymbol{V}$ e si consideri la decomposizione in sottospazi ortogonali $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{U}^{\perp}$. Ogni $\mathbf{v} \in \boldsymbol{V}$ individua univocamente i vettori $\mathbf{u} \in \boldsymbol{U}$ e $\mathbf{u}' \in \boldsymbol{U}^{\perp}$ tali che sia $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{u}'$.

Dim.: Sia $h := \dim(\boldsymbol{U})$ e sia $\mathcal{O}' = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_h\}$ una base ortonormale di $\boldsymbol{U}$. Consideriamo inoltre una base ortonormale di $\boldsymbol{V}$ che contiene $\mathcal{O}'$ e che possiamo denotare con $\mathcal{O} = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{h+1}, ..., \mathbf{u}_d\}$. Lo sviluppo di Fourier di $\mathbf{v}$ in tale base è: $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{d} \langle \mathbf{v}|\mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i$. Consideriamo inoltre il vettore fornito dalla restrizione della combinazione lineare precedente ai soli vettori della base $\mathcal{O}'$

$$\mathbf{v}_U := \langle \mathbf{v}|\mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{v}|\mathbf{u}_h \rangle \mathbf{u}_h \ .$$

Chiaramente $\mathbf{v}_U \in \boldsymbol{U}$ e possiamo scrivere $\mathbf{v} = \mathbf{v}_U + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_U)$ con $\mathbf{v}_U \in \boldsymbol{U}$. Accade che $\mathbf{v} - \mathbf{v}_U \in \boldsymbol{U}^\perp$, in quanto per $i = 1, ..., h$ si ha $\langle \mathbf{v} - \mathbf{v}_U|\mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}|\mathbf{u}_i \rangle - \langle \mathbf{v}_U|\mathbf{u}_i \rangle = 0$. Di conseguenza $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}^\perp$ e, dovendo essere $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{U}^\perp = \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$, si può scrivere $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{U}^\perp$ ▮

G41:b.09 Descriviamo ora il processo di **ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**, procedimento che consente di trasformare una base generica di uno spazio sui reali con prodotto interno $\boldsymbol{V}$ in una base ortogonale. Sia $d := \dim(\boldsymbol{V})$; data una base ordinata $\langle \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_d \rangle$, si pone il problema di individuare una base ordinata equivalente $\langle \mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_d \rangle$ tale che sia $\forall i, j = 1, ..., d \ : \ \langle \mathbf{c}_i|\mathbf{c}_j \rangle = k_i \delta_{i,j}$.
Più precisamente ci proponiamo di individuare la base ortogonale tale che sia

$$\forall h = 1, ..., d \ : \ \boldsymbol{span}(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_h) = \boldsymbol{span}(\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_h) \ .$$

In effetti in generale si ha una certa libertà nella individuazione della base e la precedente richiesta comporta un certo vincolo, ma pone ordine nel modo di procedere, ordine opportuno per individuare senza ambiguità un procedimento effettivo. Tuttavia va detto che in casi particolari può essere opportuno individuare basi ordinate che si discostano dall'ordine della base di partenza.

Come primo passo si adotta $\mathbf{c}_1 := \mathbf{b}_1$.

Al secondo passo si cerca in $\boldsymbol{span}_{nz}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ un vettore $\mathbf{c}_2 =: \mathbf{b}_2 + \alpha_{2,1}\mathbf{b}_1$ che sia ortogonale a $\mathbf{c}_1$;

$$\langle \mathbf{c}_2|\mathbf{c}_1 \rangle = 0 \implies \langle \mathbf{b}_2|\mathbf{c}_1 \rangle + \alpha_{2,1} \langle \mathbf{b}_1|\mathbf{c}_1 \rangle = 0 \implies \alpha_{2,1} = -\frac{\langle \mathbf{b}_2|\mathbf{c}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1|\mathbf{b}_1 \rangle}$$

ed evidentemente $\boldsymbol{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = \boldsymbol{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$

Procedendo per induzione, supponiamo che per $h = 3, ...,$ si sia individuato un insieme ortogonale $\{\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_{h-1}\}$ equivalente a $\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_{h-1}\}$, cioè tale che sia $\boldsymbol{span}(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_{h-1}) = \boldsymbol{span}(\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_{h-1})$.
Occorre allora trovare un vettore $\mathbf{c}_h = \mathbf{b}_h + \sum_{i=1}^{h-1} \alpha_{h,i}\mathbf{c}_1$ che sia ortogonale a $\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_{h-1}$; questa richiesta comporta

$$\forall j = 1, ..., h-1 \quad : \quad 0 = \langle \mathbf{c}_h|\mathbf{c}_j \rangle = \langle \mathbf{b}_h|\mathbf{c}_j \rangle + \sum_{i=1}^{h-1} \alpha_{h,i} \langle \mathbf{c}_i|\mathbf{c}_j \rangle = \langle \mathbf{b}_h|\mathbf{c}_j \rangle + \alpha_{h,j} \langle \mathbf{c}_j|\mathbf{c}_j \rangle \ .$$

Quindi per ogni $j < h$ deve essere $\alpha_{h,j} = \frac{\langle \mathbf{b}_h|\mathbf{c}_j \rangle}{\langle \mathbf{c}_j|\mathbf{c}_j \rangle}$ e chiaramente si ha $\boldsymbol{span}(\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_h) = \boldsymbol{span}(\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_h)$, come richiesto.
Questo risultato, per il ruolo induttivo dell'indice h, conclude la definizione dell'algoritmo.

G41:b.10 (1) Esempio Consideriamo in $\mathbb{R}^{\times 3}$ i vettori $\mathbf{b}_1 = \langle 2, 0, 1 \rangle$, $\mathbf{b}_2 = \langle 1, 1, 1 \rangle$ e $\mathbf{b}_3 = \langle -1, 2, 0 \rangle$. Si verifica che i tre vettori sono linearmente indipendenti, ad esempio constatando che

$$\det(\mathbf{b}_1 \boxminus \mathbf{b}_2 \boxminus \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

I tre vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^{\times 3}$, ma non una base ortogonale, in quanto sono diversi da 0 i prodotti scalari $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 3$, $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_3 = -2$ e $\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_3 = 1$. Applichiamo quindi il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt ed otteniamo

$\mathsf{c}_1 := \mathsf{b}_1 = \langle 2,0,1\rangle$

$\mathsf{c}_2 := \langle 1,1,1\rangle - \dfrac{\langle 1,1,1\rangle\cdot\langle 2,0,1\rangle}{\langle 2,0,1\rangle\cdot\langle 2,0,1\rangle}\langle 2,0,1\rangle = \langle 1,1,1\rangle - \dfrac{3}{5}\langle 2,0,1\rangle = \left\langle -\dfrac{1}{5},1,\dfrac{2}{5}\right\rangle$

$\mathsf{c}_3 := \langle -1,2,0\rangle - \dfrac{\langle -1,2,0\rangle\cdot\langle 2,0,1\rangle}{\langle 2,0,1\rangle\cdot\langle 2,0,1\rangle}\langle 2,0,1\rangle - \dfrac{\langle -1,2,0\rangle\cdot\langle 1,1,1\rangle}{\langle 1,1,1\rangle\cdot\langle 1,1,1\rangle}\langle 1,1,1\rangle$

$\qquad = \langle -1,2,0\rangle + \dfrac{2}{5}\langle 2,0,1\rangle - \dfrac{1}{3}\langle 1,1,1\rangle = \left\langle -\dfrac{14}{15},\dfrac{5}{3},\dfrac{1}{15}\right\rangle .$

I tre vettori trovati $\langle 2,0,1\rangle$, $\left\langle -\frac{1}{5},1,\frac{2}{5}\right\rangle$ e $\left\langle -\frac{14}{15},\frac{5}{3},\frac{1}{15}\right\rangle$ costituiscono una base ortogonale ma non ortonormale: normalizzando ciascuno dei tre vettori si ottiene la seguente base

$$\left\{\left\langle \frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle,\left\langle -\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right\rangle,\left\langle -\frac{14}{\sqrt{822}},\frac{25}{\sqrt{822}},\frac{1}{\sqrt{822}}\right\rangle\right\} .$$

(2) Esempio Consideriamo in $\mathbb{R}^{\times 3}$ i vettori $\mathsf{b}_1 = \langle 2,0,1\rangle$, $\mathsf{b}_2 = \langle 1,1,1\rangle$ e $\mathsf{b}_4 = \langle 3,2,2.5\rangle$, vettori che si verificano essere linearmente dipendenti. Cercando di applicare ad essi il procedimento di ortogonalizzazione si ottiene

$\mathsf{c}_1 := \mathsf{b}_1 = \langle 2,0,1\rangle$

$\mathsf{c}_2 := \left\langle -\dfrac{1}{5},1,\dfrac{2}{5}\right\rangle$

$\mathsf{c}_4 := \langle 3,2,2.5\rangle - \dfrac{\langle 3,2,2.5\rangle\cdot\langle 2,0,1\rangle}{\langle 2,0,1\rangle\cdot\langle 2,0,1\rangle}\langle 2,0,1\rangle - \dfrac{\langle 3,2,2.5\rangle\cdot\langle 1,1,1\rangle}{\langle 1,1,1\rangle\cdot\langle 1,1,1\rangle}\langle 1,1,1\rangle = \langle 0,0,0\rangle$

In generale il procedimento di ortogonalizzazione applicato a una sequenza di vettori non linearmente indipendenti annulla tutti i vettori esprimibili come combinazioni lineari dei precedenti, come scende dal seguente esercizio.

(3) Eserc. Riprendendo :b.09 dimostrare che se b_h è combinazione lineare di b_1,...,b_{h-1}, allora $\mathsf{c}_h = \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$.

G41:b.11 Può essere utile presentare esplicitamente le prime formule per la sostituzione della base $\langle \mathsf{b}_1,...,\mathsf{b}_d\rangle$ nella base ortogonale equivalente $\langle \mathsf{c}_1,...,\mathsf{c}_d\rangle$, aggiungendo la interpretazione dei vari addendi in termini di proiezioni.

$$\mathsf{c}_1 := \mathsf{b}_1$$

$$\mathsf{c}_2 := \mathsf{b}_2 - \frac{\langle \mathsf{b}_2|\mathsf{c}_1\rangle}{\langle \mathsf{c}_1|\mathsf{c}_1\rangle}\mathsf{c}_1 = \mathsf{b}_2 - \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{c}_1}(\mathsf{b}_2)$$

$$\mathsf{c}_3 := \mathsf{b}_3 - \frac{\langle \mathsf{b}_3|\mathsf{c}_1\rangle}{\langle \mathsf{c}_1|\mathsf{c}_1\rangle}\mathsf{c}_1 - \frac{\langle \mathsf{b}_3|\mathsf{c}_2\rangle}{\langle \mathsf{c}_2|\mathsf{c}_2\rangle}\mathsf{c}_2 = \mathsf{b}_3 - \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{c}_1}(\mathsf{b}_3) - \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{c}_2}(\mathsf{b}_3)$$

$$\mathsf{c}_4 := \mathsf{b}_4 - \frac{\langle \mathsf{b}_4|\mathsf{c}_1\rangle}{\langle \mathsf{c}_1|\mathsf{c}_1\rangle}\mathsf{c}_1 - \frac{\langle \mathsf{b}_4|\mathsf{c}_2\rangle}{\langle \mathsf{c}_2|\mathsf{c}_2\rangle}\mathsf{c}_2 - \frac{\langle \mathsf{b}_4|\mathsf{c}_3\rangle}{\langle \mathsf{c}_3|\mathsf{c}_3\rangle}\mathsf{c}_3 = \mathsf{b}_4 - \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{c}_1}(\mathsf{b}_4) - \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{c}_2}(\mathsf{b}_4) - \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{c}_3}(\mathsf{b}_4)$$

La seconda delle formule precedenti si visualizza agevolmente in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e la terza formula può essere visualizzata un po' meno facilmente in $\mathbb{R}^{\times 3}$.

G41:c. Spazi affini

G41:c.00 Gli spazi affini costituiscono una specie di struttura algebrica che può essere definita a diveri livelli di astrazione. Qui ne diamo una definizione piuttosto semplice e non molto generale che si basa su quella degli spazi vettoriali.
Si possono considerare spazi vettoriali ed affini sui reali e sui complessi; qui ci interessiamo dei primi, in quanto hanno maggiori applicazioni nella geometria (e di conseguenza in discipline come meccanica, fisica e tecnologia).
Più particolarmente introduciamo spazi affini associati a spazi vettoriali sui reali ed a dimensioni finite al fine di giungere ad una formalizzazione della nozione di spazio euclideo.
Giungeremo tuttavia a dimostrazioni e risultati che valgono anche per spazi sui complessi.

G41:c.01 Sia $\boldsymbol{V}$ uno spazio vettoriale sui reali di dimensione d ai cui elementi riserviamo il nome di vettori.
Si dice **spazio affine** su $\boldsymbol{V}$ una quaterna $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{V}, -, + \rangle$ ove:

$\boldsymbol{A}$ è un insieme ai cui elementi riserviamo il nome di **punti**;

$\boldsymbol{V}$ è uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{F}$ che contiene il campo dei numeri razionali e che ha dimensione finita d; agli elementi di $\boldsymbol{V}$ riserviamo il termine di vettori; talora si dice che questo è lo **spazio dei vettori liberi** dello spazio affine;

$-$ è una operazione binaria del genere $\{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \longmapsto\triangleright \boldsymbol{V}\}$; per ogni coppia di punti $P, P' \in \boldsymbol{A}$ il vettore $P' - P \in \boldsymbol{V}$ si denota anche con $\overrightarrow{P' - P}$ ed equivalentemente con $\overrightarrow{PP'}$;

$+$ è una operazione binaria del genere $\{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{V} \longmapsto\triangleright \boldsymbol{A}\}$ tale che $P + \overrightarrow{PP'} = P + \overrightarrow{P' - P} = P'$; ogni coppia $\langle P, P' \rangle \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ si dice **segmento orientato** dello spazio $\boldsymbol{A}$ avente P come estremo iniziale e P' come estremo finale.

Si chiede inoltre che valgano le proprietà che seguono.

(1) $\forall \mathsf{v} \in \boldsymbol{V} :\ \lceil P \in \boldsymbol{A} \mapsto P + \mathsf{v} \rceil \in \{\boldsymbol{A} \longmapsto\triangleright \boldsymbol{A}\}$; in altre parole, per ogni $\mathsf{v} \in \boldsymbol{V}$ esiste uno e un solo $P' \in \boldsymbol{A}$ tale che $\overrightarrow{PP'} = \mathsf{v}$.

(2) Per ogni terna di punti $P_1, P_2, P_3 \in \boldsymbol{A}$ vale l'**uguaglianza di Chasles** $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{P_1P_3}$; questa uguaglianza si può riscrivere significativamente $\overrightarrow{P_3 - P_1} = \overrightarrow{P_3 - P_2} + \overrightarrow{P_2 - P_1}$.

G41:c.02 Ponendo nella (3) $P_3 = P_1$ si deduce $\overrightarrow{P_1P_2} = -\overrightarrow{P_2P_1}$, ovvero $\overrightarrow{P_2 - P_1} = -\overrightarrow{P_1 - P_2}$.
Ponendo in questa $P_2 = P_1 = P$ si ricava subito che per ogni P, $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{P - P} = \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$.

Osserviamo che due elementi di $\boldsymbol{A}$ si possono sottrarre per ottenere un elemento di $\boldsymbol{V}$, ma non si possono sommare; di essi si possono però considerare alcune combinazioni lineari.

Si definisce il **punto medio** di due punti P_1 e P_2 come $\dfrac{1}{2}P_1 + \dfrac{1}{2}P_2 := P_1 + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{P_2 - P_1}$; quasto punto si trova coincidere con $P_2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1 - P_2}$.

Della precedente costruzione si danno le due generalizzazioni che seguono. Si definisce **punto intermedio** fra P_1 e P_2 relativo ai pesi reali positivi w_1 e w_2 il punto definito come

$$\frac{w_1}{w_1 + w_2}P_1 + \frac{w_2}{w_1 + w_2}P_2 \ :=\ P_1 + \frac{w_2}{w_1 + w_2}\overrightarrow{P_2 - P_1} = P_2 + \frac{w_1}{w_1 + w_2}\overrightarrow{P_1 - P_2}\ .$$

Si definisce come **baricentro** di n punti P_1, ..., P_n come

$$\frac{1}{n}P_1 + \frac{1}{n}P_2 + \cdots + \frac{1}{n}P_n \ :=\ P_1 + \frac{1}{n}\overrightarrow{P_2 - P_1} + \cdots + \frac{1}{n}\overrightarrow{P_n - P_1}\ .$$

Le due generalizzazioni si possono combinare definendo, ancor più in generale, la **media pesata** o **combinazione lineare convessa** di n punti dello spazio affine P_1, ..., P_n pesati, risp., dai numeri reali positivi w_1, w_2, ..., w_n normalizzati, cioè tali che $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, come

$$\sum_{i=1}^n w_i P_i := P_1 + w_2 \overrightarrow{P_2 - P_1} + \cdots + w_n \overrightarrow{P_n - P_1} \ .$$

G41:c.03 Alla nozione di spazio affine si accompagna la nozione di sottospazio affine di uno spazio vettoriale.

Consideriamo uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ ed un suo sottospazio $\boldsymbol{W}$. Si dice **sottospazio affine** di $\boldsymbol{V}$ parallelo a $\boldsymbol{W}$ determinato da un qualsiasi vettore $\mathsf{v} \in \boldsymbol{V}$ l'insieme di vettori della forma $\boldsymbol{A} = \{\mathsf{w} \in \boldsymbol{W} : |\mathsf{v}+\mathsf{w}\}$
Si trova che questo insieme di vettori costituisce uno spazio affine sullo spazio vettoriale $\boldsymbol{W}$. In effetti la differenza di vettori su $\boldsymbol{A}$ è un vettore di $\boldsymbol{W}$ e per tali vettori vale la disuguaglianza triangolare. La somma di due vettori di tale $\boldsymbol{A}$, se $\mathsf{v} \notin \boldsymbol{W}$, non appartiene ad $\boldsymbol{A}$ stesso; vi appartengono invece punti medi, baricentri e combinazioni lineari convesse.

In $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sono sottospazi affini tutte le rette caratterizzate dalle equazioni $ax + by + c = 0$, rette parallele alle rette per l'origine.
In $\mathbb{R}^{\times 3}$ sono sottospazi affini tutti i piani caratterizzati dalle equazioni $ax + by + cz + d = 0$ (ciascuno dei quali è parallelo ad un piano passante per l'origine) e tutte le rette ottenibili come intersezioni di due dei suddetti piani (ciascuna delle quali è parallela ad una retta passante per l'origine.

G41:d. Introduzione degli spazi euclidei

G41:d.01 Si dice **spazio euclideo** uno spazio affine basato su uno spazio vettoriale sui reali di dimensione finita e dotato di prodotto interno bilineare e simmetrico.

Consideriamo dunque:

- uno spazio vettoriale d-dimensionale sui reali $\boldsymbol{V}$, i cui elementi denotiamo con scritture come v, w_j x_1 o y' e che chiamiamo vettori;
- un prodotto interno reale su $\boldsymbol{V}$ che denotiamo $\langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\rangle$ e quindi una norma su $\boldsymbol{V}$ definita da $\|\mathsf{v}\| := \sqrt{\langle \mathsf{v}|\mathsf{v}\rangle}$;
- uno spazio euclideo $\boldsymbol{E}$ i cui elementi diciamo punti e denotiamo con notazioni come P, P' e P_i.

G41:d.02 Fra i punti di uno spazio euclideo si introduce la **distanza euclidea**, funzione del genere $\{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}_{0+}\}$ definita da $\mathrm{d}_2(P, P') := \langle \overrightarrow{PP'} | \overrightarrow{PP'} \rangle$ per ogni $P, P' \in \boldsymbol{E}$.

Gli spazi euclidei sono le strutture matematiche di base per la trattazione dello spazio fisico e di molti problemi estremamente concreti come quelli per i quali si ricorre alla analisi numerica ed alla computer graphics; a questo proposito limitiamoci a citare gli studi sulle molecole di interesse industriale e biologico.

È quindi importante poter trattare analiticamente e numericamente i punti e le configurazioni degli spazi euclidei. Per questo si definiscono i cosiddetti **sistemi di riferimento euclidei**, chiamati anche **sistemi di riferimento affini**, $d+1$-uple della forma $\langle O, \mathsf{b}_1, ..., \mathsf{b}_d \rangle$, ove O è un punto di $\boldsymbol{E}$ che assume il ruolo di **origine** per il sistema di riferimento, e $\mathcal{B} = \langle \mathsf{b}_1, ..., \mathsf{b}_3 \rangle$ è una base ordinata di $\boldsymbol{V}$.

Relativamente a questa base si definisce come **tensore metrico** la matrice G di profilo $d \times d$ avente come componenti, per $i, j = 1, ..., d$, i reali $[G]_{i,j} := \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{b}_j \rangle$. Questa matrice consente di esprimere il prodotto scalare di due vettori di $\boldsymbol{V}$ mediante le loro componenti nella base $\mathcal{B}$. In effetti per il prodotto interno dei due vettori $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^d v_i \, \mathbf{b}_i$ e $\mathbf{w} = \sum_{f=1}^d w_f \, \mathbf{b}_f$ si trova

$$\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle \; = \; \sum_{i,f=1}^{d} v_i \, w_f \, \langle \mathbf{b}_i | \mathbf{b}_f \rangle \; .$$

Osserviamo che l'espressione a secondo membro individua un prodotto di un vettore riga di d componenti, di una matrice $d \times d$ e di un vettore colonna di profilo $d \times 1$.

G41:d.03 Anche la distanza fra due punti di uno spazio affine si esprime mediante il tensore metrico. Consideriamo $P_1, P_2 \in \boldsymbol{A}$ ed i vettori ausiliari $\mathbf{v}_1 = OP_1$ e $\mathbf{v}_2 = OP_2$ i quali consentono di scrivere $P_1P_2 = P_1O + OP_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$; di conseguenza:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_2(P_1, P_2) &= \langle \overrightarrow{P_1P_2} | \overrightarrow{P_1P_2} \rangle = \langle \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \rangle = \\ &= \Big\langle \sum_{i=1}^{d} (v_{2,i} - v_{1,i}) \, \mathbf{b}_i \; \Big| \; \sum_{f=1}^{d} (v_{2,f} - v_{1,f}) \, \mathbf{b}_f \; \Big\rangle = \\ &= \sum_{i,f=1}^{d} \; \big(v_{2,i} - v_{1,i}\big) \, G_{i,f} \, \big(v_{2,f} - v_{1f}\big) \end{aligned}$$

Quando si utilizza per $\boldsymbol{V}$ un riferimento cartesiano ortogonale, cioè una base ordinata ortonormale $\boldsymbol{E} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_d \rangle$, si ha $G_{i,f} = \delta_{i,f}$ e la precedente espressione si semplifica nella espressione pitagorica della distanza:

$$\mathrm{d}_2(P_1, P_2) \; = \; \sum_{i=1}^{d} \; \big(v_{2,i} - v_{1,i}\big)^2 \; .$$

G41:e. Cambiamento di riferimento

G41:e.01 Nello studio di configurazioni in uno spazio euclideo spesso risulta utile cambiare il sistema di riferimento, in quanto alcuni sviluppi risultano più semplici in un dato riferimento, altri in uno diverso.

Il cambiamento di riferimento risulta di primaria importanza in fisica, in quanto si ritiene che le leggi fisiche fondamentali siano quelle che risultano invarianti rispetto ad ampie collezioni di trasformazioni, anzi rispetto ad estesi [[gruppi di trasformazioni]]. Questo atteggiamento è particolarmente evidente nello sviluppo delle [[teorie relativistiche]].

G41:e.02 Consideriamo dunque due sistemi di riferimento affini $\mathcal{R} = \langle O, \mathcal{B} \rangle = \langle O, \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_d \rangle$ e $\mathcal{R}' = \langle O', \mathcal{B}' \rangle = \langle O', \mathbf{b}'_1, ..., \mathbf{b}'_d \rangle$ e vediamo come cambiano le coordinate di un punto P passando dal primo sistema al secondo.

Assumiamo che P nei due riferimenti venga individuato, risp., dai vettori

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{f=1}^{d} x_f \, \mathbf{b}_f \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{O'P} = \sum_{i=1}^{d} {x'}_i \, \mathbf{b}'_i \; .$$

Per il collegamento fra le due origini O ed O' serve l'espressione

$$\overrightarrow{O'O} = -\sum_{i=1}^{d} b_i\,\mathsf{b}'_i \ .$$

la quale esprime nel riferimento $\mathcal{R}'$ il vettore opposto a quello che individua la traslazione che porta O in O'.
Per esprimere come il riferimento $\mathcal{R}$ viene visto da $\mathcal{R}'$ servono le due espressioni Occorre poi conoscere come i vettori di base di $\mathcal{R}$ sono visti dalla base di $\mathcal{R}'$; essi devono essere forniti da espressioni lineari che possiamo assumere abbiano la forma

$$\forall f = 1, ..., d \ \colon\ \mathsf{b}_f = \sum_{i=1}^{d} \mathsf{b}'_i\, a^i{}_f \ .$$

I coefficienti $a^i{}_f$ sono le d^2 componenti di una matrice A, cioè tale che $[A]_{if} =: a^i{}_f$; essa deve essere invertibile.

A questo punto basta mettere assieme le precedenti espressioni:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} &= -\sum_{i=1}^{d} b^i\mathsf{b}'_i + \sum_{f=1}^{d} x^f\,\mathsf{b}_f = \\ = -\sum_{i=1}^{d} b^i\mathsf{b}'_i &+ \sum_{i,f=1}^{d} \mathsf{b}'_i a^i{}_f x^f = \sum_{i=1}^{d} x'^i\mathsf{b}'_i\end{aligned} \ .$$

Si ottiene quindi la legge di trasformazione delle coordinate

$$x'^i = \sum_{f=1}^{d} a^i{}_f\, x^f - b^i \ .$$

In questa espressione la sommatoria riguarda la trasformazione lineare che porta la base $\mathcal{B}'$ di $\mathcal{R}'$ nella base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{R}$, mentre l'ultimo addendo concerne la traslazione che collega le due origini.

G41:e.03 Vediamo ora come si collega alla matrice A della trasformazione lineare che porta la base $\mathcal{B}'$ nella $\mathcal{B}$ la matrice, che scriviamo Γ, della trasformazione inversa che manda la base $\mathcal{B}$ nella $\mathcal{B}'$.
Se poniamo $\gamma_i{}^f := [\Gamma]_{i,f}$ abbiamo

$$\mathsf{b}'{}_i = \sum_{f=1}^{d} \gamma_i{}^f\,\mathsf{b}_f = \sum_{f=1}^{d} \gamma_i{}^f \left(\sum_{j=1}^{d} \mathsf{b}'_j a^j{}_f\right) = \sum_{j=1}^{d} \mathsf{b}'_j \left(\sum_{f=1}^{d} a^j{}_f \gamma_i{}^f\right) \ .$$

Per la indipendenza lineare dei vettori b'_j segue

$$\sum_{f=1}^{d} a^j{}_f\,\gamma_i{}^f \ = \ \delta_{j,i} \ .$$

G41:e.04 Introducendo esplicitamente le due matrici, si ha la relazione tra componenti

$$\sum_{f=1}^{d} [A]_{j,f} [\Gamma]_{i,f} = \delta_{j,i}$$

o l'equivalente

$$\sum_f [A]_{j,f} [\Gamma^{\mathsf{T}}]_{f,i} = \delta_{j,i} \ .$$

Questa a sua volta si traduce nella più concisa uguaglianza fra matrici

$$A \cdot \Gamma^{\mathsf{T}} = \mathbf{1}_d \ .$$

Si trova poi $A \cdot \Gamma^{\mathsf{T}}\mathbf{1} \iff \Gamma^{\mathsf{T}} = A^{-1} \iff (\Gamma^{\mathsf{T}})^{-1} = A \iff \Gamma = (A^{-1})^{\mathsf{T}} = (A^{\mathsf{T}})^{-1}$.

Osserviamo esplicitamente che, oltre ad essere invertibile A, cioè oltre ad essere $\det(A) \neq 0$, risulta invertibile anche Γ, grazie al fatto che $\det(\Gamma) = \det(\Gamma^{\mathsf{T}}) = \det(A^{-1}) = 1/\det(A) \neq 0$.

G41:e.05 Troviamo ora il collegamento del tensore metrico nei due sistemi di riferimento.

$$g'_{ij} := \langle \mathsf{b}'_i | \mathsf{b}'_j \rangle = \sum_{h,k} {\gamma_i}^h {\gamma_j}^k \langle \mathsf{b}_h | \mathsf{b}_k \rangle = \sum_{h,k} {\gamma_i}^h {\gamma_j}^k g_{hk} = \sum_{h,k} {\gamma_i}^h g_{hk} {(\gamma^{\mathsf{T}})^k}_j \ .$$

Anche a questa relazione si può dare una forma matriciale concisa: $G' = \Gamma G \Gamma^{\mathsf{T}}$.

G41:e.06 Le espressioni per il collegamento di due sistemi di riferimento diventano particolarmente semplici quando si considerano solo basi e riferimenti ortonormali

$$\mathcal{R} = \langle O, \boldsymbol{E} \rangle = \langle O, \mathsf{e}_1, ..., \mathsf{e}_d \rangle \ \text{ e } \ \mathcal{R}' = \langle O', \boldsymbol{E} \rangle = \langle O', \mathsf{e}'_1, ..., \mathsf{e}'_d \rangle \ .$$

In questo caso $g_{i,j} = \langle \mathsf{e}_i | \mathsf{e}_j \rangle = \delta_{i,j}$ e similmente $g'_{h,k} = \delta_{h,k}$; in termini matriciali $G = G' = \mathbf{1}_d$.

La $G' = \Gamma G \Gamma^{\mathsf{T}}$ diventa $\Gamma\Gamma^{\mathsf{T}} = \mathbf{1}_d$, cioè $\Gamma^{\mathsf{T}} = \Gamma^{-1}$ e, dalla $\Gamma^{\mathsf{T}} = A^{-1}$, valida per ogni riferimento, si conclude che $\Gamma = A$.

G41:f. Matrici ortogonali

G41:f.01 Consideriamo una matrice A quadrata di ordine d sui reali; essa si dice **matrice ortogonale** sse soddisfa una delle seguenti equazioni equivalenti:

(1) $$A \cdot A^{\mathsf{T}} = \mathbf{1}_d \qquad A^{\mathsf{T}} \cdot A = \mathbf{1}_d \qquad A^{-\mathbf{1}} = A^{\mathsf{T}} \ .$$

È evidente l'equivalenza delle tre equazioni ed è anche evidente che una matrice è ortogonale sse lo è la sua trasposta. Denotiamo con $\mathsf{MatOrt}_{\mathbb{R},d}$ o con $\mathcal{O}(\mathbb{R}^{\times d})$ l'insieme delle matrici ortogonali di ordine d sui reali.

Prima di presentare altre proprietà di queste matrici, osserviamo che la definizione delle matrici ortogonali non fa riferimento ad uno spazio vettoriale arricchito da una metrica, ovvero da un prodotto scalare. Tuttavia, come stiamo per mostrare, esse sono vantaggiosamente utilizzate se si considerano costituite da vettori colonna o da vettori riga ai quali si applica la metrica canonica.
Useremo quindi il termine ortogonalità canonica per sequenze di reali (più in generale di elementi di un anello commutativo (unitale)) $\langle x_1, ..., x_d\rangle$ ed $\langle y_1, ..., y_d\rangle$ per le quali $\sum_{i=1}^{d} x_i\, y_i = 0$, il termine normalità canonica per sequenze $\langle x_1, ..., x_d\rangle$ per le quali $\sum_{i=1}^{d} {x_i}^2 = 1$ ed il termine ortonormalità canonica per basi delo spazio costituite da vettori canonicamente mutuamente ortogonali e normalizzati.

(2) Prop.: Una $A \in \mathsf{Mat}_{\mathbb{R},d}$ è ortogonale sse può considerarsi costituita dall'affiancamento di d vettori colonna che sono mutuamente ortonormali canonicamente sse può considerarsi costituita dalla sovrapposizione di d vettori riga che sono mutuamente ortonormali canonicamente.

Dim.: L'equazione $A^{\mathsf{T}} \cdot A = \mathbf{1}_d$ che caratterizza le matrici $A \in \mathsf{MatOrt}_{\mathbb{R},d}$ equivale alla mutua ortonormalità dei d vettori colonna costituenti la A. Traspostamente la equivalente equazione $A \cdot A^{\mathsf{T}} = \mathbf{1}_d$ equivale alla mutua ortonormalità dei d vettori riga ∎

Ricordiamo che ogni matrice $A \in \mathsf{Mat}_{\mathbb{R},d}$ si può considerare costituita dall'affiancamento dei vettori colonna che si ottengono applicando la matrice stessa ai versori della base canonica.
La A è ortogonale sse i suoi vettori colonna costituiscono una nuova base ortonormale secondo la metrica canonica.

Similmente si vede che le matrici ortogonali sono costituite dalla sovrapposizione di d vettori riga mutuamente ortogonali: questo fatto corrisponde al fatto che la trasposta di ogni matrice ortogonale è una matrice ortogonale.

Dato che per generiche matrici quadrate $\det(B\,C) = \det(B)\,\det(C)$ e $\det(B^{\mathsf{T}}) = \det(B)$, per una matrice ortogonale si ha $(\det(A))^2 = \det(\mathbf{1}_d) = 1$ e di conseguenza $\det(A) = \pm 1$.

G41:f.02 A questo punto conviene richiamare alcune proprietà gruppali delle matrici.
Si dimostra agevolmente che l'insieme delle matrici reali M di profilo $d \times d$ non singolari, cioè tali che $\det(M) \neq 0$, costituiscono un gruppo; questo viene chiamato gruppo lineare generale e viene denotato con $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^d)$.

Denotiamo con $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ l'insieme delle matrici reali ortogonali di profilo $d \times d$. Questo sottoinsieme di $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^d)$ più precisamente è un suo sottogruppo: infatti queste matrici trasformano basi ortonormali in basi ortonormali o, equivalentemente, mantengono le distanze fra vettori. Il mantenimento delle distanze, come ogni proprietà di conservazione, essendo realizzato da determinate trasformazioni, viene

necessariamente realizzato anche dai loro prodotti e dalle loro inverse.
Il gruppo delle matrici ortogonali $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ viene detto **gruppo ortogonale** o **gruppo delle roto-riflessioni**.

G41:f.03 L'insieme $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ si ripartisce in due sottoinsiemi ben distinti, quello delle matrici con determinante uguale ad 1, e quello comprendente le matrici con determinante uguale a -1.
Il primo sottoinsieme è un sottogruppo del gruppo ortogonale: infatti la matrice identità appartiene ad esso ed ogni prodotto di sue matrici mantiene ad 1 il valore del determinante. Esso viene chiamato **gruppo ortogonale speciale** o **gruppo delle rotazioni** di $\mathbb{R}^d$ e viene denotato con $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^d)$.

L'insieme delle matrici ortogonali con determinante -1 costituisce un semplice laterale di $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$: in effetti il prodotto di due tali matrici ha determinante uguale a $(-1)(-1) = 1$ e quindi appartiene ad $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^d)$.
Casi particolari di matrici ortogonali con determinante -1 sono le matrici che differiscono dalla unità solo per avere sulla diagonale principale un numero dispari di componenti uguali a -1. Alcuni esempi:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Osserviamo che tutte queste matrici J sono involutorie, cioè hanno il quadrato uguale alla unità, $J^2 = \mathbf{1}_d$.

G41:f.04 Si constata anche che le matrici del laterale di $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^d)$ si possono ottenere dalle matrici ortogonali speciali scambiando due delle loro colonne: con questa operazione non cambia la mutua ortonormalità dei vettori colonna, mentre cambia di segno il determinante. Simmetricamente le matrici del laterale si possono ottenere dalle speciali scambiando due loro righe.
Più precisamente ogni scambio di date colonne ed ogni scambio di date righe costituiscono biiezioni fra $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^d)$ ed il suo laterale.
Si osserva che queste modifiche di matrici ortogonali speciali equivalgono alla moltiplicazione per matrici di trasposizione, cioè aventi forme come le seguenti:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} .$$

Anche queste matrici sono involutorie: in effetti esprimono degli scambi. Inoltre esse sono involutorie.

G41:f.05 Si vede che ogni matrice M ortogonale con determinante -1 si ottiene come prodotto di una matrice di rotazione R per una delle involuzioni J dei due tipi precedenti. Infatti posto $R := MJ$, moltiplicando i due membri dell'uguaglianza per J a destra si ha $M = RJ$, mentre se $R' := JM$ si trova $M = JR'$.
Queste uguaglianze dicono che quando si sa controllare l'insieme $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^d)$ non bisogna aggiungere molto per conoscere l'insieme $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$.

L'insieme $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^2)$ è abbastanza semplice. Imponendo ortogonalità e valore 1 del determinante alle matrici reali 2×2 si trova abbastanza facilmente che devono avere la forma

$$\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad 0 \le \phi \le 2\pi .$$

Questa matrice ruota i vettori del piano di un angolo ϕ in verso antiorario (positivo). Inversione e prodotto di queste matrici si calcolano agevolmente:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi' & -\sin\phi' \\ \sin\phi' & \cos\phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi+\phi') & -\sin(\phi+\phi') \\ \sin(\phi+\phi') & \cos(\phi+\phi') \end{bmatrix} .$$

G41:f.06 L'insieme $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$, insieme che spesso viene detto gruppo delle rotazioni *tout court*, è decisamente più complesso e qui diamo soltanto alcune delle sue proprietà più semplici.

Ricordiamo che $\mathbb{R}^3$ si riferisce comodamente alla terna di riferimento canonica costituita da

$$\mathsf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

A questa terna si attribuisce una raffigurazione che si ricava dalla cosiddetta regola della mano destra. I tre versori e_1, e_2 e e_3 si collocano in modo da risultare mutuamente ortogonali e da disporsi nell'ordine come pollice, indice e medio di una mano destra tenuta con allungate solo le tre dita suddette.
Si può anche dire che i tre versori nell'ordine si dispongono mutuamente ortogonali ed in modo che una vite del tipo più usuale con l'asse orientata come e_3 quando viene girata da un cacciavite che ruotato di 90° porta e_1 a sovrapporsi ad e_3 avanza nella direzione di e_3.

G41:f.07 La terna $\langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3 \rangle$ disposta secondo una delle precedenti regole equivalenti si dice terna destrorsa. Sono chiamate destrorse tutte le terne che si possono sovrapporre alla terna canonica destrorsa con un movimento continuo. In particolare sono destrorse anche le terne $\langle \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3, \mathsf{e}_1 \rangle$ ed $\langle \mathsf{e}_3, \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2 \rangle$ ottenute dalla prima con permutazioni circolari.

Non tutte le terne ortonormali si possono sovrapporre alla canonica: in particolare $\langle \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_3 \rangle$ non può essere ricondotta con continuità a sovrapporsi alla canonica. E neppure lo possono le terne $\langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_3, \mathsf{e}_2 \rangle$ e $\langle \mathsf{e}_3, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_1 \rangle$ ottenibili permutando circolarmente la precedente ovvero scambiando le prime due componenti delle precedenti. Queste ultime due terne possono essere portate con continuità a sovrapporsi alla $\langle \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_3 \rangle$. Queste e tutte le terne che possono sovrapporsi ad esse con continuità si dicono destrorse.

Si vede anche che con una riflessione rispetto ad un piano passante per l'origine le terne sinistrorse e le destrorse si scambiano. In particolare la terna canonica riflessa rispetto al piano Oxy, cioè la terna ortonormale $\langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, -\mathsf{e}_3 \rangle$, può sovrapporsi con continuità alla $\langle \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_3 \rangle$.
La relazione di sovrapponibilità per movimento continuo è una equivalenza nell'ambito delle terne ortonormali di $\mathbb{R}^3$ e tale insieme per questa equivalenza si ripartisce in due classi (disgiunte): quelle riconducibili con continuità alla terna canonica e le rimanenti.

G41:f.08 La ripartizione delle terne è strettamente collegata alla ripartizione delle matrici ortogonali: le terne destrorse si ottengono, tutte e sole, applicando alla base canonica le matrici ortogonali speciali, cioè le rotazioni; le sinistrorse si ottengono, tutte e sole, applicando alla base canonica le matrici ortogonali non speciali, matrici con determinante -1.

Casi particolari notevoli di matrici ortogonali non speciali sono le matrici delle riflessioni nei piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, e la matrice della riflessione centrale, trasformazione chiamata anche parità:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Tra le matrici di rotazione si trovano le seguenti

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Esse forniscono, risp., la rotazione dell'angolo α intorno all'asse Ox, la rotazione di β intorno a Oy e la rotazione di γ intorno ad Oz.

G41:f.09 Altre particolari matrici di rotazione sono le seguenti

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Queste matrici chiaramente forniscono risp. le riflessioni rispetto ad Oy ed Oz, le riflessioni rispetto ad Ox ed Oz, le riflessioni rispetto ad Ox ed Oy. Si osserva che queste tre trasformazioni si possono ottenere anche, risp., con la rotazione di 180° intorno Ox, la rotazione di 180° intorno Oy, la rotazione di 180° intorno Oz.

`Le varie componenti di questo testo sono accessibili in http://www.mi.imati.cnr.it/∼alberto`