1

# Capitolo G40
# spazi vettoriali di dimensioni finite

## Contenuti delle sezioni

a. spazi vettoriali, combinazioni lineari, basi p. 2
b. sottospazi p. 11
c. trasformazioni lineari p. 17
d. matrici di trasformazioni lineari p. 22
e. forme lineari e notazioni alla Dirac p. 26
f. prodotti di trasformazioni lineari p. 30
g. cambiamenti di base p. 32
h. nucleo, nullità e rango di trasformazioni e di matrici p. 35

36 pagine

**G40 0.01** In questo capitolo sono esaminati gli spazi vettoriali ottenibili dalle sequenze finite di una determinata lunghezza le cui componenti sono elementi di un generico campo [B41d].

Tra questi spazi vettoriali di dimensioni finite quelli ai quali si fa più spesso riferimento sono gli sazi sul campo dei numeri reali in quanto utilizzabili direttamente per lo studio di oggetti geometrici lineari (rette, piani, poligoni, poliedri, ...). e di altre configurazioni geometriche di grande rilevanza per la matematica e le sue applicazioni, a partire dalla meccanica classica.

Grande importanza rivestono anche gli spazi vettoriali sul campo dei complessi, utilizzati direttamente per studi un poco astratti come quelli sopra i fenomeni ondulatori dell'acustica, dell'ottica e dell'elettromagnetismo.

Occorre anche segnalare che molte costruzioni e proprietà valgono anche quando riguardano oggetti attribuiti a strutture algebriche più generali dei campi, come semianelli e anelli [T15h].
Come minimo si chiede che le componenti delle sequenze appartengano ad una struttura algebrica munita di due operazioni che godono di proprietà formali assimilabili alla somma e al prodotto tra numeri reali o complessi o tra funzioni numeriche.

**G40 0.02** Gli spazi qui esaminati sono generalizzazioni della retta razionale $\mathbb{Q}$, dei piani $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e di $\mathbb{R}^{\times 3}$ visti in precedenza [B30, B31, G30 e G36].

Nel seguito di questo capitolo, comunque, ci serviremo di esempi riguardanti quasi esclusivamente sequenze di numeri razionali; anzi spesso è sufficiente limitarsi a sequenze di numeri interi.
Tuttavia gran parte delle costruzioni e delle proprietà che esporremo si applicano a ogni campo [B41] e quindi le considerazioni generali riguarderanno un campo generico che denoteremo con $\mathbb{F}$.

Per la portata del capitolo va tenuto presente che la geometria richiede di servirsi primariamente del campo dei numeri reali $\mathbb{R}_{Fld}$, ma che gli studi geometrico-algebrici, a cominciare dall'esame delle coniche, si servono anche del campo dei numeri complessi $\mathbb{C}_{Fld}$.
Va segnalato anche che gli spazi vettoriali sui campi finiti, ossia sulle classi di resti, rivestono grande importanza per molti temi della matematica discreta [in particolare C65 e C66] .

## G40 a. spazi vettoriali, combinazioni lineari, basi

**G40 a.01** Cominciamo con il ricordare [B30c08, B41d] che in algebra per campo si intende una struttura della forma $\boldsymbol{F} = \langle F, +, -, 0, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ tale che $\langle F, +, -, 0\rangle$ e $\langle F \setminus 0, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ sono gruppi commutativi e l'operazione binaria "$\cdot$", chiamata prodotto, è distributiva rispetto all'operazione binaria "+", chiamata somma. I due gruppi citati sono detti, risp., **gruppo additivo del campo** e **gruppo moltiplicativo del campo** $\boldsymbol{F}$.

In parole povere per campo si intende un insieme di entità numeriche alle quali si chiede solo che possano essere composte con quattro operazioni (la somma, la moltiplicazione e le rispettive operazioni inverse sottrazione e divisione), per le quali valgono le proprietà dimostrate per i numeri razionali [B30] .

Ricordiamo anche che importanti campi particolari già incontrati sono il campo razionale [B30c], il campo reale [B42], il campo complesso [B50] e i campi delle classi di resti modulo $p$ per $p$ numero primo qualsiasi [B26].

Per quanto riguarda possibili generalizzazioni ricordiamo anche che diciamo semianello [T15h02] una struttura algebrica della forma $\langle R, \oplus, 0, \odot\rangle$, dove $\langle R, \oplus, 0\rangle$ è un monoide commutativo ed $\langle R, \odot\rangle$ è un semigruppo.
Tra le strutture più particolari o più ricche ricordiamo i semianelli commutativi (con $\odot$ commutativo), i semianelli.uniferi (che presentano una unità per l'operazione $\odot$), gli anelli e gli anelli.uniferi.

**G40 a.02** In questo capitolo con $d$, $e$, $f$ e loro arricchimenti (come $d_i$) denoteremo numeri interi positivi; con $\mathbb{F}$ un campo generico.
Faremo spesso riferimento a $\mathbb{F}^{\times d}$, potenza cartesiana $d$-esima del campo $\mathbb{F}$, cioè l'insieme delle $d$-uple di numeri del campo $\langle a_1, a_2, \ldots, a_d\rangle$; in particolare per $d = 1$ si hanno le rette razionale $\mathbb{Q}$ e reale $\mathbb{R}$ e il piano $\mathbb{C}$, per $d = 2$ abbiamo i piani $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e per $d = 3$ gli spazi tridimensionale $\mathbb{Q}^{\times 3}$ e $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Anche nelle pagine che seguono chiamiamo **scalari** gli elementi del campo e usiamo come equivalenti i termini **vettori** $d$**-dimensionali** e **punti** $d$**-dimensionali** per le $d$-uple di tali scalari.

I vettori sul campo reale e sul campo complesso si incontrano in una grande varietà di sviluppi della matematica e delle sue applicazioni e vengono denotati in vari modi: utilizzando lettere in grassetto come $\mathbf{x}$ o $\mathbf{b}_j$ e con simboli come $\underline{H}$, $\vec{E_\perp}$ o $\big|3\big\rangle$.

Se $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, ..., v_d\rangle$, le componenti di tale sequenza si dicono anche **coordinate cartesiane del vettore** o del punto $\mathbf{v}$.

Tra gli elementi di un campo $\mathbb{F}$ lo zero si distingue nettamente dagli altri e conviene servirsi di una notazione particolare per l'insieme degli elementi diversi da zero: scriviamo quindi:

$$\mathbb{F}_{nz} := \mathbb{F} \setminus \{0\} . \tag{1}$$

Corrispondentemente, tra i vettori di $\mathbb{F}^{\times d}$ gioca un ruolo particolare la sequenza di $d$ zeri del campo; questa $d$-upla viene denotata con $0^{\times d}$ o con $\mathbf{0}_d$ ed è chiamata vettore nullo o vettore zero di $\mathbb{F}^{\times d}$; quando non si hanno ambiguità se si trascura di segnalare la dimensione $d$ la denotiamo semplicemente con $\mathbf{0}$.

Spesso interessa distinguere il vettore nullo da tutti gli altri vettori e conviene disporre di una notazione specifica per l'insieme dei vettori di $\mathbb{F}^{\times d}$ diversi da quello nullo: introduciamo quindi

$$\mathbb{F}^{\times d}{}_{nz} := \mathbb{F}^{\times d} \setminus \{\mathbf{0}\} . \tag{2}$$

**G40 a.03** Definiamo una struttura algebrica ottenuta arricchendo $\mathbb{F}^{\times d}$ con $\mathbb{F}$ e con le entità che seguono:

**somma di due vettori** $\mathbf{v} = \langle v_1, ..., v_d \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, ..., w_d \rangle$ , somma termine a termine delle due sequenze, cioè

$$\mathbf{v} +^{ce} \mathbf{w} \ := \ \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2, ..., v_d + w_d \rangle \ ;$$

**passaggio all'opposto di un vettore** $\mathbf{v} = \langle v_1, ..., v_d \rangle$

$$-^{ce}\mathbf{v} \ := \ \langle -v_1, ..., -v_d \rangle \ ;$$

**vettore nullo** $\mathbf{0}_d \ := \ \langle 0, 0, ..., 0 \rangle$ ;

**moltiplicazione di un vettore v per uno scalare** $\alpha$

$$\alpha \ \cdot^{ce} \ \mathbf{v} \ := \langle \alpha\, v_1, \alpha\, v_2, ..., \alpha\, v_d \rangle \ .$$

Inoltre consideriamo come equivalente alla precedente la scrittura $\mathbf{v} \cdot^{ce} c \ := \ c \cdot^{ce} \mathbf{v}$ .

La struttura ottenuta $\langle \mathbb{F}^{\times d}, \mathbb{F}, +^{ce}, -^{ce}, \mathbf{0}_d, \cdot^{ce} \rangle$ viene detta **spazio vettoriale delle $d$-uple di elementi del campo $\mathbb{F}$** a anche **spazio vettoriale $d$-dimensionale su $\mathbb{F}$**.

Si verifica facilmente che valgono le proprietà che seguono.

(1) Associatività della somma:

$$\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{F}^{\times d} \ : \quad \mathbf{v} +^{ce} (\mathbf{w} + \mathbf{u}) \ = \ (\mathbf{v} +^{ce} \mathbf{w}) + \mathbf{u} \ .$$

(2) Commutatività della somma:

$$\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{F}^{\times d} \ : \quad \mathbf{v} +^{ce} \mathbf{w} \ = \ \mathbf{w} +^{ce} \mathbf{v} \ .$$

(3) Il vettore nullo $\mathbf{0}_d \in \mathbb{F}^{\times d}$ è elemento neutro per la somma:

$$\forall\ \mathbf{v} \in \mathbb{F}^{\times d} \ : \quad \mathbf{v} +^{ce} \mathbf{0} \ = \ \mathbf{v} \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{0}_d +^{ce} \mathbf{v} \ = \ \mathbf{v} \ .$$

(4) Ad ogni vettore è associato un **vettore opposto** per la somma:

$$\forall\ \mathbf{v} \in \mathbb{F}^{\times d} \ : \quad \exists\, -^{ce} \mathbf{v} \in \mathbb{F}^{\times d} \quad ST \quad \mathbf{v} +^{ce} (-^{ce}\mathbf{v}) \ = \ (-^{ce}\mathbf{v}) +^{ce} \mathbf{v} \ = \ \mathbf{0}_d \ .$$

(5) Proprietà della moltiplicazione di un vettore per uno scalare:

$$\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{F}^{\times d} \ , \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{F} \ : \ \alpha \cdot^{ce} (\mathbf{v} +^{ce} \mathbf{w}) \ = \ \alpha \cdot^{ce} \mathbf{v} + \alpha \cdot^{ce} \mathbf{w} \ , \quad (\alpha + \beta) \cdot^{ce} \mathbf{v} \ = \ \alpha \cdot^{ce} \mathbf{v} + \beta \cdot^{ce} \mathbf{v} \ ,$$
$$(\alpha\beta) \cdot^{ce} \mathbf{v} \ = \ \alpha \cdot^{ce} (\beta \cdot^{ce} \mathbf{v}) \ , \ 1 \cdot^{ce} \mathbf{v} \ = \ \mathbf{v} \ , \quad 0 \cdot^{ce} \mathbf{v} \ = \ \mathbf{0}_d \ .$$

**G40 a.04** Introduciamo ora con procedimento assiomatico gli spazi vettoriali ottenendo una specie di strutture algebriche nella quale si possono collocare anche gli spazi $\mathbb{F}^{\times d}$.

Per un qualsiasi campo $\mathbb{F}$ si dice **spazio vettoriale** su $\mathbb{F}$ una struttura $\boldsymbol{V} = \langle V, \mathbb{F}, \mathbf{+}, \mathbf{-}, \mathbf{0}, \cdot \rangle$ costituita, oltre che da $\mathbb{F}$, da un insieme $V$ chiamato terreno della struttura i cui elementi sono detti **vettori**, dall'operazione binaria su $V$ chiamata **somma di vettori** $\mathbf{+} \in \lceil V \times V \longmapsto V \rceil$, da un particolare **vettore nullo** $\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$, da una endofunzione $\mathbf{-} \in \lceil V \longmapsto V \rceil$ chiamata **passaggio al vettore opposto** e dalla legge di composizione $\cdot \in \lceil F \times V \longmapsto V \rceil$ chiamata **moltiplicazione di un vettore per uno scalare** per le quali valgono le proprietà che seguono.

[Vsp 1] Associatività della somma:

$$\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \boldsymbol{V} \ : \quad \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) \ = \ (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u} \ .$$

[Vsp 2] Commutatività della somma:

$$\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \boldsymbol{V} \ : \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} \ = \ \mathbf{w} + \mathbf{v} \ .$$

[Vsp 3] Neutralità per la somma del vettore nullo:

$$\forall\ \mathbf{v} \in \boldsymbol{V}\ :\quad \mathbf{v}\mathbf{+}\mathbf{0} = \mathbf{v} \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{0}_d\mathbf{+}\mathbf{v}\ =\ \mathbf{v}\ .$$

[Vsp 4] Esistenza per ogni vettore di un vettore opposto per la somma:

$$\forall\ \mathbf{v} \in \boldsymbol{V}\ :\ \exists \mathbf{-v} \in \boldsymbol{V} \quad ST \quad \mathbf{v}\mathbf{+}(\mathbf{-v})\ =\ (\mathbf{-v})\mathbf{+}\mathbf{v} = \mathbf{0}_d\ .$$

[Vsp 5] Proprietà della moltiplicazione per uno scalare:

$$\begin{aligned}\forall\ \mathbf{v},\mathbf{w} \in \boldsymbol{V}\,,\ \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{F} \quad :\quad & \alpha \cdot (\mathbf{v}\mathbf{+}\mathbf{w})\ =\ \alpha \cdot \mathbf{v} + \alpha \cdot \mathbf{w} \quad , \quad (\alpha+\beta)\cdot\mathbf{v}\ =\ \alpha\cdot\mathbf{v} + \beta\cdot\mathbf{v} \quad , \\ & (\alpha\beta)\cdot\mathbf{v}\ =\ \alpha\cdot(\beta\cdot\mathbf{v}) \quad , \quad 1\cdot\mathbf{v}\ =\ \mathbf{v}\ , \quad 0\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}_d\ .\end{aligned}$$

Nel seguito denotiamo con $\mathbf{Vsp}_{\mathbb{F}}$ l'insieme degli spazi vettoriali sul campo $\mathbb{F}$ e con **Vsp** la classe degli spazi vettoriali.

**G40 a.05** In seguito ci muoveremo su diversi livelli di generalità: quello più astratto e generale degli spazi vettoriali che soddisfano gli assiomi [Vsp 1]—[Vsp 5], quello degli spazi finitodimensionali e quello più specifico degli spazi $\mathbb{F}^{\times d}$ e quello più concretamente trattabile degli spazi sui reali $\mathbb{R}^{\times d}$.

Definiamo una famiglia molto comprensiva di spazi vettoriali. Terreni di questi spazi sono gli insiemi di funzioni della forma $\lceil\, D \longmapsto \mathbb{F} \,\rceil$ ove $D$ è un qualsiasi insieme e $\mathbb{F}$ un arbitrario campo. Indici di questa famiglia sono $D$ e $\mathbb{F}$ e il membro generico della famiglia lo denotiamo con $\mathbf{Vsp}_{fun}(D,\mathbb{F})$.

Procediamo a definire le operazioni dello spazio $\mathbf{Vsp}_{(}fun)(D,\mathbb{F})$, assumendo che $f$ e $g$ siano due delle sue funzioni e che $\alpha$ sia un elemento di $\mathbb{F}$.
Si definisce come somma di $f$ e $g$ la funzione che associa ad ogni $x \in D$ la somma dei loro valori $f(x)+g(x)$, cioè

$$f + g\ :=\ \lceil\, x \in D \mapsto f(x) + g(x) \,\rceil\ . \tag{1}$$

Si definisce come moltiplicazione della funzione $f$ per lo scalare $\alpha \in \mathbb{F}$ la funzione che ad $x$ associa $\alpha \cdot f(x)$:

$$\alpha \cdot f\ :=\ \lceil\, x \in D \mapsto \alpha \cdot f(x) \,\rceil\ . \tag{2}$$

Si definisce come vettore nullo dello spazio la funzione $\lceil\, x \in D \mapsto 0 \,\rceil$.

Si verifica facilmente che tale spazio soddisfa le proprietà a03(1)-(5).

Si osserva che lo spazio vettoriale $\mathbb{F}^{\times d}$ delle sequenze di una data lunghezza $d$ di elementi di $\mathbb{F}$ appartiene alla famiglia di spazi sopra definita; infatti le sue sequenze si possono considerare le funzioni a valori in $\mathbb{F}$ aventi come dominio $\{1,2,...,d\}$, cioè l'insieme delle posizioni delle componenti di ciascuna sequenza. Dunque questo spazio si può individuare come $\mathbf{Vsp}_{fun}(\{1,2,...,d\},\mathbb{F})$ .

**G40 a.06** Due vettori nonnulli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ si dicono **vettori proporzionali** o **vettori collineari** sse esiste un $\alpha \in \mathbb{F}_{nz}$ tale che $\mathbf{v}\ =\ \alpha\,\mathbf{w}$ . La proporzionalità tra vettori è un'equivalenza su $\boldsymbol{V}_{nz}$ e le classi di questa equivalenza si chiamano **raggi dello spazio vettoriale**, (mentre in geometria proiettiva [G61] si dicono "rette radiali").

Per esempio allo stesso raggio di $\mathbb{F}^{\times 3}$ appartengono i vettori $\langle 1,2,-3\rangle$, $\langle 2.5,5,-7.5\rangle$ e $\langle -0.2,-0.4,0.6\rangle$.

Il raggio che contiene il vettore $\mathbf{v}$, cioè l'insieme di vettori $\{q \in \mathbb{F} :|\ q\,\mathbf{v}\}$, si denota anche concisamente con $\mathbb{F}\cdot\mathbf{v}$.

Consideriamo l'intero positivo $k$ e l'insieme di $k$ vettori di $\boldsymbol{V}$ $\{\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, ..., \mathsf{v}_k\}$ . Si dice **combinazione lineare di tali vettori** ogni composizione della forma

$$\sum_{h=1}^{k} \alpha_h \, \mathsf{v}_h \;:=\; \alpha_1 \, \mathsf{v}_1 + \alpha_2 \, \mathsf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \, \mathsf{v}_k \;, \tag{1}$$

dove per ogni $h = 1, 2, ..., k$ $\alpha_h$ denota uno scalare.
Gli scalari che intervengono in una combinazione lineare sono detti **coefficienti della combinazione lineare** stessa.

Di due vettori proporzionali è lecito affermare che uno è combinazione lineare dell'altro.
Tra le combinazioni lineari di ogni insieme finito di vettori $\{\mathsf{w}_1, ..., \mathsf{w}_k\}$ si trova il vettore nullo: infatti questo si può ottenere con la combinazione lineare della forma $\sum_{h=1}^{k} \mathsf{w}_h \cdot 0 = \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$ .
Le notazioni precedenti per le combinazioni lineari sono le più usate, ma noi useremo spesso anche le notazioni che consideriamo equivalenti

$$\mathsf{v}_1 \, \alpha_1 + \mathsf{v}_2 \, \alpha_2 + \cdots + \mathsf{v}_k \, \alpha_k \;=\; \sum_{h=1}^{k} \mathsf{v}_h \, \alpha_h \;, \tag{2}$$

così come abbiamo considerate equivalenti le scritture $\alpha \, \mathsf{v}$ e $\mathsf{v} \, \alpha$.
La notazione che pone i coefficienti a destra dei vettori conduce in maniera più semplice al sistema di espressioni riguardante le rappresentazioni matriciali delle trasformazioni che riteniamo preferibile e che vedremo nel paragrafo che segue.

**G40 a.07** Come vederemo, molto spesso serve esprimere i vettori di uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ che si stanno esaminando come combinazioni lineari di vettori di $\boldsymbol{V}$ appartenenti a determinate famiglie.
Anzi nella pratica risulta conveniente servirsi di particolari sequenze di vettori che per questo atteggiamento assumono il ruolo di vettori di riferimento.
È rilevante individuare alcuni insiemi di riferimento convenienti per uno spazio $\mathbb{F}^{\times d}$.

Un insieme di vettori di $\boldsymbol{V}$ si dice costituire un insieme di vettori linearmente indipendenti sse non si può esprimere nessuno di essi come combinazione lineare degli altri.
Viceversa un insieme di vettori tale che almeno uno di essi si può esprimere come combinazione lineare dei rimanenti si chiama **insieme di vettori linearmente dipendenti**.

Diamo alcuni esempi di insiemi di vettori linearmente dipendenti;

In $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$: $\{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 2, -2\rangle\}$ e $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, -1\rangle, \langle \alpha, \beta\rangle\}$ per $\alpha$ e $\beta$ razionali arbitrari.

In $\mathbb{Q}^{\times 3}$: $\{\langle 0, 1, 0\rangle, \langle 1, 0, 0\rangle, \langle 2, -2, 0\rangle, \langle 1, 2, 5\rangle\}$ e $\{\langle 1, 0, 0\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle 1, -1, 0\rangle\langle -1, -1, -1\rangle\}$.

In qualsiasi spazio $\boldsymbol{V}$ su $\mathbb{F}$ l'insieme $\{\mathsf{u}, \mathsf{u}\, c\}$, quali che siano $\mathsf{u} \in \boldsymbol{V}$ e $c \in \mathbb{F}$ e l'insieme $\left\{\mathsf{u}_1, ..., \mathsf{u}_{k-1}, \sum_{h=1}^{k-1} \mathsf{u}_h \, \alpha_h\right\}$, quali che siano $k$ e $\mathsf{u}_1, ..., \mathsf{u}_{k-1} \in \boldsymbol{V}$ ed $\alpha_1, ..., \alpha_{k-1} \in \mathbb{F}$.

**G40 a.08** Si osserva che aggiungendo qualche vettore a un sistema di vettori linearmente dipendenti si ottiene ancora un sistema di vettori linearmente dipendenti.
All'opposto, eliminando una parte degli elementi da un sistema di vettori linearmente indipendenti si ottiene ancora un sistema di vettori linearmente indipendenti.

**(1) Prop.**: Un insieme finito di vettori $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k\} \subset \boldsymbol{V}$ costituisce un insieme di vettori linearmente indipendenti sse per ogni $k$-upla di scalari $\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \rangle$ diversa da $0^{\times d}$ che soddisfa l'uguaglianza lineare $\sum_{h=1}^{k} \mathbf{u}_h \alpha_h = \mathbf{0}$ deve essere $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$ .

**Dim.**: Se esistesse una sequenza $\langle \alpha_{1,1}, \alpha_2, ..., \alpha_{1,k} \rangle \neq 0^{\times k}$ per la quale $\sum_{h=1}^{k} \mathbf{u}_h \alpha_{1,h} = \mathbf{0}$ , posto che sia $\alpha_j \neq 0$ per un particolare $j = 1, 2, ..., k$, sarebbe possibile affermare $\mathbf{u}_j = -\frac{1}{\alpha_j} \sum_{h=1,..,k \atop h \neq j} \mathbf{u}_h \alpha_h$, e questo sarebbe contrario all'indipendenza lineare di $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k\}$ ∎

In uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ un insieme di vettori che consente di esprimere ogni altro vettore come loro combinazione lineare si dice **sistema completo di vettori** per $\boldsymbol{V}$, o o **insieme di generatori** di $\boldsymbol{V}$, o anche **insieme spanning** di $\boldsymbol{V}$.

In $\mathbb{Q}^{\times 3}$ sono sistemi completi di vettori gli insiemi $\{\langle 1,1,0\rangle, \langle 1,0,1\rangle, \langle 0,-2,-2\rangle\}$ e $\{\langle 1,0,-2\rangle, \langle -1.5,0,3.6\rangle, \langle 2,0,-2\rangle\}$.

Viceversa si constata che sono sistemi incompleti $\{\langle 1,1,0\rangle, \langle -0.5,2.3,0\rangle, \langle 2,-2,0\rangle\}$ e $\{\langle 1,0,-2\rangle, \langle -1.5,0,3.6\rangle, \langle 2,0,-2\rangle\}$.

Si trova essere incompleto anche $\{\langle 1,-2,3\rangle, \langle 1,2,-3\rangle, \langle 0.5,-3,4.5\rangle, \langle 1,6,-9\rangle\}$.

In seguito individueremo procedimenti ben definiti che consentono di decidere la completezza o meno di ogni insieme di vettori sopra un campo calcolabile.

**G40 a.09** Dato che togliendo qualche elemento da un sistema di vettori linearmente indipendenti si ha ancora un sistema di vettori linearmente indipendenti, tra questi insiemi di vettori hanno maggiore interesse quelli più estesi, in quanto tutti gli altri si ottengono da questi con eliminazioni di vettori che si possono scegliere ad arbitrio, cioè con operazioni poco impegnative, che richiedono solo verifiche ottenibili con semplici manovre.

Similmente, per quella che possiamo chiamare dualità-iu (da intersezione vs. unione) aggiungendo qualche nuovo vettore a un sistema di vettori linearmente dipendenti si ha ancora un sistema di vettori linearmente dipendenti. Tra questi insiemi di vettori quindi hanno maggiore interesse quelli il più possibile ridotti, in quanto gli altri si ottengono da questi con ampliamenti che si possono effettuare come si vuole, senza vincoli.

Un sistema di vettori linearmente dipendenti come mezzo per esprimere altri vettori mediante combinazioni lineari si rivela essere uno strumento ridondante e poco economico.

Consideriamo per esempio l'insieme di vettori della forma $\left\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{k-1}, \sum_{h=1}^{k-1} \mathbf{u}_h \, \beta_h\right\}$ ed un vettore combinazione lineare $\mathbf{v} := \sum_{i=1}^{k} \mathbf{u}_i \, \alpha_h$; questo può esprimersi anche come

$$\sum_{h=1}^{k-1} \mathbf{u}_h \, \alpha_h + \alpha_k \left( \sum_{h=1}^{k-1} \mathbf{u}_h \, \beta_h \right) \; = \; \sum_{h=1}^{k-1} \mathbf{u}_h \, (\alpha_h + \alpha_k \, \beta_h) \; ,$$

cioè come combinazione lineare di soli $k-1$ vettori.

Dunque un sistema di vettori linearmente dipendenti contiene qualche elemento del quale si può fare a meno. Quindi i sistemi di vettori linearmente indipendenti, in linea di massima, vanno considerati strumenti più essenziali dei sistemi di vettori linearmente dipendenti.

**G40 a.10** Cerchiamo sistemi di vettori linearmente indipendenti nell'ambito di spazi $\mathbf{Vsp}_{fun}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Consideriamo le funzioni-RtR $\mathsf{e}^{\alpha\,x}$ ed $\mathsf{e}^{\beta\,x}$ con $\alpha$ e $\beta$ reali diversi; per chiarezza assumiamo $\alpha<\beta$.

Le due precedenti funzioni sono vettori linearmente indipendenti, in quanto una uguaglianza della forma $a\,\mathsf{e}^{\alpha\,x}+b\,\mathsf{e}^{\beta\,x}=0$ con $a$ e $b$ reali implica che sia $a=b=0$.
Infatti dalla uguaglianza segue $a+b\,\mathsf{e}^{(\beta-\alpha)x}=0$, ossia $a=-b\,\mathsf{e}^{(\beta-\alpha)x}$ e il secondo membro può essere costante solo se $b=0$, fatto che comporta $a=b=0$.

Considerazioni di questo genere si possono svolgere nell'ambito più ampio degli spazi $\mathbf{Vsp}_{fun}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, ben inteso limitandosi alle funzioni univoche.
Si trova in particolare che sono linearmente indipendenti due funzioni della forma $\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,m\,\phi}$ ed $\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,n\,\phi}$ per $\phi$ variabile in $[0,2\,\pi)$ e con $m,n$ interi diversi.
L'indipendenza lineare rimane anche quando ci si riduce a considerare la parte reale o la parte immaginaria di funzioni linearmente indipendenti.
In tal modo si ottiene che sono linearmente indipendenti:
due funzioni della forma $\sin m\,\phi$ relative a $m$ interi positivi diversi, due funzioni della forma $\cos m\,\phi$ per $m$ interi naturali diversi, e due funzioni delle forme $\sin m\,\phi$ e $\cos n\,\phi$ con $m$ ed $n$ interi qualsiasi.

**G40 a.11** Si dice **base per uno spazio finitodimensionale** $\boldsymbol{V}$ ogni sistema completo di vettori linearmente indipendenti. Per le considerazioni precedenti le basi di uno spazio vettoriale sono da considerare strumenti convenienti per l'individuazione di combinazioni lineari, in quanto sistemi in grado di esprimere ogni vettore e privi di ridondanze.

Consideriamo i $d$ vettori di $\mathbb{F}^{\times d}$

$$\mathsf{e}_1:=\langle 1,0,...,0\rangle\ ,\quad \mathsf{e}_2:=\langle 0,1,...,0\rangle\ ,\quad ...\ ,\quad \mathsf{e}_d:=\langle 0,0,...,1\rangle\ . \tag{1}$$

Essi costituiscono un insieme di vettori linearmente indipendenti: infatti $\sum_{h=1}^{k} c_k\,\mathsf{e}_h=\langle c_1,c_2,...,c_k\rangle=\mathbf{0}$ implica evidentemente $c_1=c_2=\cdots=c_k=0$ .

Ogni vettore $d$-dimensionale su $\mathbb{F}$ $\mathsf{v}=\langle v_1,v_2,\ldots,v_d\rangle$ si può esprimere come combinazione lineare di questi vettori:

$$\langle v_1,v_2,\ldots,v_d\rangle\ =\ \sum_{i=1}^{d}\mathsf{e}_i\,v_i\ . \tag{2}$$

Quindi l'insieme $\mathfrak{B}_{can}\ :=\ \{\mathsf{e}_1,\mathsf{e}_2,...,\mathsf{e}_k\}$ costituisce una base di $\mathbb{F}^{\times d}$; tale base è detta **base canonica dello spazio** $\mathbb{F}^{\times d}$.

Per organizzare effettivamente le elaborazioni in ogni spazio vettoriale risulta necessario servirsi di una **base ordinata**, cioè di una sequenza di $d$ vettori diversi tali che l'insieme dei suoi componenti costituisca una base per lo spazio nel quale si opera.
Fissata una base ordinata, ogni suo vettore si può individuare con l'intero che fornisce la sua posizione nella sequenza.
In particolare quando si decide di fare riferimento a una specifica base ordinata, per esempio di trattare $\mathbb{F}^{\times d}$ servendosi della base ordinata canonica $\langle\mathsf{e}_1,\mathsf{e}_2,...,\mathsf{e}_d\rangle$, può essere comodo denotare i suoi componenti con i simboli $|1\rangle$, $|2\rangle$, ..., e $|d\rangle$.
Ciascuno di questi simboli è detto **ket** e fa parte delle cosiddette **notazioni di Dirac** per gli spazi vettoriali, notazioni che riprenderemo in :d .

**G40 a.12** I vettori di molti spazi vettoriali sono strumenti di lavoro ampiamente usati e conviene servirsi per essi di diverse modalità di notazioni.

In molte formule interviene la funzione delta di Kronecker, funzione che può considerarsi del genere $\lceil\, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longmapsto \{0,1\} \,\rceil$ o di un genere $\lceil\, D \times D \longmapsto \{0,1\} \,\rceil$ per un insieme finito $D$ e in particolare di un genere $\lceil\, (\mathrm{d}\,] \times (\mathrm{d}\,] \longmapsto \{0,1\} \,\rceil$ per un qualsiasi intero $d \geq 2$; le sue componenti sono definite dalla richiesta

$$\delta_{i,j} \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{sse } i = j \\ 0 & \text{sse } i \neq j \end{cases} \tag{1}$$

È anche utile ampliare la definizione della delta di Kronecker come la funzione valore binario avente come argomento una relazione dipendente da due parametri interi $\mathcal{R}_{i,j}$: $\delta_{i,j} \;:=\; \mathsf{Bval}(\mathcal{R}_{i,j})$.
La usuale delta di Kronecker si può considerare il caso particolare relativo alla relazione uguaglianza dei due parametri interi, $\delta_{i,j} \;:=\; \mathsf{Bval}(i = j)$.

La delta di Kronecker consente di esprimere per ogni $i = 1, 2, ..., d$ il vettore $i$-esimo della base canonica di $\mathbb{F}^{\times d}$ attraverso le sue componenti relative alla base stessa:

$$\mathsf{e}_i \;= \langle \delta_{i,1}, \delta_{i,2}, ..., \delta_{i,d} \rangle \;. \tag{2}$$

I vettori specifici di uno spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ per molti scopi si trattano vantaggiosamente mediante i cosiddetti vettori colonna, matrici di profilo $d \times 1$ [B16, G42a]. Alcuni esempi di vettori colonna sono

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{bmatrix} \;.$$

Un esempio di combinazione lineare di vettori colonna è il seguente:

$$\forall v_1, v_2, w_1, w_2, \alpha, \beta \in \mathbb{F} \;:\; \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \alpha v_1 + \beta w_1 \\ \alpha v_2 + \beta w_2 \end{bmatrix} \;. \tag{3}$$

Molti insiemi di vettori di uno spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ si individuano mediante equazioni e disequazioni nelle quali intervengono variabili che riguardano le singole coordinate; tipicamente si denota con $x_i$ la variabile per la componente $i$-esima, per $i = 1, 2, ..., d$. In alternativa se $d = 2, 3, 4$ o 5 si trova spesso comodo usare $x$ invece di $x_1$, $y$ invece di $x_2$, $z$ invece di $x_3$, $w$ invece di $x_4$ e $t$ invece di $x_5$.

**G40 a.13** Si dimostra in modo generale, servendosi del `lemma di Zorn (wi)` che ogni spazio vettoriale diverso da $\{\mathbf{0}\}$ possiede una base [*Roman: Advanced Linear Algebra* p. 37].
Qui procediamo a dimostrare che in uno spazio vettoriale che possiede una insieme spanning finito $\mathsf{S}$ ogni sistema linearmente indipendente ha cardinale non superiore a $|\mathsf{S}|$.

**(1) Prop.**: Siano $\boldsymbol{V}$ uno spazio vettoriale, $\mathsf{I} = \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, ..., \mathbf{i}_n\}$ un suo insieme di vettori linearmente indipendenti ed $\mathsf{S} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_d\}$ un sottoinsieme spanning (finito) di $\boldsymbol{V}$. Allora $n \leq d$.

**Dim.**: Facciamo riferimento a coppie di sequenze di vettori che modifichiamo attraverso successivi stadi [0], [1], ..., [n]; iniziamo con

$$\langle \mathbf{s}_1 \;,\; \mathbf{s}_2 \;,\; ... \;,\; \mathbf{s}_d \rangle \qquad - \qquad \langle \mathbf{i}_1 \;,\; \mathbf{i}_2 \;,\; ... \;,\; \mathbf{i}_n \rangle \qquad .$$

$\mathbf{i}_1$ si può esprimere come combinazione lineare degli $\mathbf{s}_j$ con almeno un coefficiente diverso da zero; da questa combinazione si ricava un'espressione di uno dei $\mathbf{s}_j$ come combinazione dei rimanenti vettori di $\mathsf{S}$ e di $\mathbf{i}_1$. Si giunge con questo alla coppia di sequenze dello stadio [1]

$$\langle \mathbf{i}_1 \;,\; \mathbf{s}_{2,1},\; ... \;,\; \mathbf{s}_{d,1} \rangle \qquad - \qquad \langle \mathbf{i}_2 \;,\; ... \;,\; \mathbf{i}_n \rangle \qquad [1]$$

La prima sequenza riguarda ancora un insieme spanning nel quale il primo vettore dell'insieme $\mathsf{I}$ ha rimpiazzato uno dei vettori di $\mathsf{S}$; la seconda è stato semplicemente privata del primo vettore.
Le notazioni $\mathsf{s}_{j,1}$ esprimono i vettori nella prima sequenza privata del vettore rimpiazzato da $\mathsf{i}_1$.

Si giunge allo stadio [2] considerando che $\mathsf{i}_2$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori della prima sequenza nella quale almeno uno dei coefficienti dei $\mathsf{s}_{j,1}$ è diverso da 0; infatti non si può esprimere un vettore $\mathsf{i}_i$ come combinazione lineare dei soli rimanenti vettori di $\mathsf{I}$.

Questo rende possibile sostituire uno di questi vettori di $\mathsf{S}$ con $\mathsf{i}_2$ ottenendo

$$\langle \mathsf{i}_1\ ,\ \mathsf{i}_2\ ,\ \mathsf{s}_{3,2}\ ,\ \dots\ ,\ \mathsf{s}_{d,2} \rangle \quad - \quad \langle \mathsf{i}_3\ \dots\ ,\ \mathsf{i}_n \quad [2] \rangle\ .$$

Ancora la prima sequenza costituisce un insieme spanning e risulta possibile esprimere $\mathsf{i}_3$ come combinazione lineare dei primi vettori nella quale almeno uno dei coefficienti dei $\mathsf{s}_{j,2}$ è diverso da 0.

Il procedimento può essere portato avanti fino allo stadio [n] con l'esaurimento dei vettori di $\mathsf{I}$:

$$\langle \mathsf{i}_1\ \dots\ \mathsf{i}_n \rangle \quad - \quad \langle \mathsf{s}_{d-n,n}\ \dots\ \mathsf{s}_{d,n} \rangle \quad - \quad [n]$$

Di conseguenza i vettori dell'insieme spanning $\mathsf{S}$ devono essere in numero non inferiore ad $n$ ∎

**G40 a.14 (1) Coroll.**: Ogni spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ che possiede un insieme spanning finito ha tutte le basi con lo stesso cardinale.

**Dim.**: Siano $\mathfrak{B}_1$ e $\mathfrak{B}_2$ due basi di $\boldsymbol{V}$. Il procedimento visto in a12 si può effettuare con $\mathfrak{B}_1$ nel ruolo di insieme spanning $\mathcal{S}$ e con $\mathfrak{B}_2$ nel ruolo di insieme di vettori linearmente indipendenti, fino a concludere che $|\mathfrak{B}_1| \geq |\mathfrak{B}_2|$. Ma esso si può effettuare anche con $\mathfrak{B}_2$ nel ruolo di insieme spanning $\mathcal{S}$ e con $\mathfrak{B}_1$ nel ruolo di insieme di vettori linearmente indipendenti fino a concludere che $|\mathfrak{B}_1| \leq |\mathfrak{B}_2|$ ∎

Ogni spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ che possiede un insieme spanning finito è caratterizzato dall'intero positivo che fornisce il cardinale di tutte le sue basi. Questo viene chiamato **dimensione dello spazio** $\boldsymbol{V}$ si denota con $\dim(\boldsymbol{V})$.
Se $d := \dim(\boldsymbol{V})$, si dice che $\boldsymbol{V}$ è uno spazio $d$-dimensionale, ovvero che $\boldsymbol{V}$ possiede $d$ dimensioni.
Lo spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ delle sequenze di lunghezza $d$ ha $d$ dimensioni, in quanto la sua base canonica è costituita dai $d$ vettori $\mathsf{e}_1$, $\mathsf{e}_2$, ..., $\mathsf{e}_d$ e quindi tutte le sue basi hanno cardinale $d$.

Prescindendo dal particolare valore $d$, gli spazi vettoriali dotati di un insieme spanning finito si dicono **spazi finitodimensionali** o **spazi di dimensioni finite**.

**G40 a.15** Consideriamo uno spazio vettoriale $d$-dimensionale $\boldsymbol{V}$ e una sua base ordinata $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_d \rangle$ ; ciascuno dei vettori di $\boldsymbol{V}$ si può esprimere in un unico modo come combinazione lineare dei vettori della base.

Quindi ogni spazio finitodimensionale si può trattare come uno spazio vettoriale di sequenze di data lunghezza.

In altre parole, lo spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ è in grado di rappresentare in modo chiaramente trattabile ciascuno degli spazi $d$-dimensionali su $\mathbb{F}$ con il quale risulta isomorfo; esso si può quindi qualificare come rappresentazione standard di questi spazi.

**G40 a.16** Spazi vettoriali finitodimensionali di notevole interesse sono costituiti da polinomi aventi gradi limitati superiormente.

Per ogni $n$ intero positivo denotiamo con $\mathbb{F}_{<n}[x]$ l'insieme dei polinomi nella variabile $x$ che corre su un campo $\mathbb{F}$ aventi grado inferiore ad $n$.

Tale insieme costituisce uno spazio vettoriale di dimensione $n$; infatti i polinomi di grado minore di $n$ sono individuati dalle sequenze dei loro coefficienti che conviene considerare ordinati per potenze crescenti; una di queste sequenze relativa a un polinomio di un grado $m < n-1$ si può completare con $n-1-m$ componenti finali con coefficienti uguali a 0, cioè con addendi formali della forma $0\,x^j$ per $j = m, ..., n-1$.
In tal modo ogni polinomio di $\mathbb{F}_{<n}[x]$ viene individuato biunivocamente da una sequenza di $n$ componenti appartenenti al campo.

Per esempio se trattiamo i polinomi di $\mathbb{R}_{<4}[x]$, polinomi a coefficienti reali nella variabile reale $x$ di grado al più 3, il polinomio $1-x$ viene individuato dalla quaterna $\langle 1, -1, 0, 0\rangle$ , il polinomio $3\,x + x^2$ dalla sequenza $\langle 0, 3, 1, 0\rangle$ e il polinomio $(x-2)^3$ da $\langle -8, 12, -6, 1\rangle$ .

I polinomi possono essere sommati e moltiplicati per elementi del campo, ovvero possono essere combinati $\mathbb{F}$-linearmente.

Si constata facilmente che le operazioni di somma e moltiplicazione per un elemento del campo soddisfano gli assiomi in a04 ; quindi il loro insieme può essere trattato come uno spazio vettoriale.
Si vede in particolare che il polinomio nullo costituisce l'origine di ogni spazio di polinomi.

Talvolta risulta più comodo fare riferimento alla notazione $\mathbb{F}_{\leq n}[x]$ per l'insieme dei polinomi nella variabile $x$ che corre su un campo $\mathbb{F}$ aventi grado non superiore ad $n$; evidentemente $\mathbb{F}_{\leq n}[x] = \mathbb{F}_{<n+1}[x]$.

Si può allora affermaree che ogni polinomio di grado al più $n$ si può esprimere come combinazione lineare dei monomi 1, $x$, $x^2$, ..., $x^{n-1}$, $x^n$.
Questi $n+1$ polinomi svidentemente sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base dello spazio che risulta essere $n+1$-dimensionale.

## G40 b. sottospazi

**G40 b.01** Consideriamo uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V} = \langle V, \mathbb{F}, \mathbf{+}, \mathbf{-}, \mathbf{0}, \cdot \rangle$; un sottoinsieme $S$ del suo terreno $V$ si dice **insieme di vettori chiuso per combinazione lineare** sse ogni combinazione lineare di vettori di $S$ appartiene a tale sottoinsieme, ossia sse:

$$\forall n \in \mathbb{P} \ , \ \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in S \ , \ c_1, ..., c_n \in \mathbb{F} \ : \ \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mathbf{v}_i \in S \ . \tag{1}$$

Munendo un tale insieme $S$ con le opportune riduzioni delle operazioni somma, passaggio al vettore opposto e moltiplicazione per scalare, otteniamo la struttura della forma

$$\boldsymbol{S} := \left\langle S, \mathbb{F}, \mathbf{+}|_{S\times S}, \mathbf{-}|_{S}, \mathbf{0}, \cdot|_{\mathbb{F}\times S} \right\rangle \ . \tag{2}$$

Questa struttura costituisce a pieno titolo uno spazio vettoriale sopra il campo $\mathbb{F}$ e si dice che costituisce un **sottospazio** di $\boldsymbol{V}$.

Per esprimere il fatto che un $\boldsymbol{S} \in \mathbf{Vsp}$ è sottospazio di $\boldsymbol{V}$ scriviamo $\boldsymbol{S} \leq_{Vsp} \boldsymbol{V}$ .
Se $S$ è sottoinsieme proprio di $V$ si dice che $\boldsymbol{S}$ è **sottospazio proprio** di $\boldsymbol{V}$ e per esprimere questo fatto si usa la notazione più stringente $\boldsymbol{S} <_{Vsp} \boldsymbol{V}$.

Occorre anche segnalare che spesso parlando di sottospazi, come per molte altre sottostrutture, si applica la **semplificazione-SB**, ossia la identificazione delle strutture con i rispettivi terreni.

Due particolari sottospazi di $\boldsymbol{V}$ sono quello che ha come terreno il solo $\{\mathbf{0}_d\}$, chiamato **sottospazio nullo**, e lo stesso $\boldsymbol{V}$, detto **sottospazio improprio** di $\boldsymbol{V}$.

Altri semplici sottospazi sono i cosiddetti **sottospazi monodimensionali** che hanno come terreno un insieme della forma $\mathbf{v}\,\mathbb{F} = \{c \in \mathbb{F} :| \ \mathbf{v}\,c\}$ , con $\mathbf{v}$ vettore nonnullo di $\boldsymbol{V}$, cioùn insieme corrispondente a un raggio di $\boldsymbol{V}$ al quale si è aggiunto $\mathbf{0}$.

Si prova facilmente che $\boldsymbol{T} \leq_{Vsp} \boldsymbol{S} \leq_{Vsp} \boldsymbol{V}$ implica $\boldsymbol{T} \leq_{Vsp} \boldsymbol{V}$; in altre parole ogni sottospazio di un sottospazio di un dato spazio vettoriale ambiente è a sua volta sottospazio dell'ambiente.

Per rendere le esposizioni meno pesanti si tende a non distinguere tra le operazioni in uno spazio vettoriale e le riduzioni di queste ai suoi sottospazi e a non distinguere tra un sottospazio e il suo terreno.
Questa è una semplificazione del linguaggio che si applica anche per altre sottostrutture (sottogruppi, sottoanelli, ...) e cheè un altro caso di **semplificazione-SB**.

Queste semplificazioni del linguaggio e delle notazioni in genere non comportano confusione in quanto, ogni spazio ambiente $\boldsymbol{V}$ con il suo campo e le sue operazioni, insieme a un qualsiasi suo sottoinsieme chiuso per combinazione lineare permettono di individuare senza problemi il sottospazio corrispondente con le relative operazioni.

**G40 b.02** Per $\mathbb{F}^{\times d}$ con $d \geq 2$ è molto semplice individuare i sottospazi costituiti da $d$-uple le quali hanno determinate componenti uguali a 0 e le componenti rimanenti arbitrariamente variabili in $\mathbb{F}$. Per questi sottospazi usiamo il termine **sottospazi con alcune coordinate azzerate** e la corrispondente abbreviazione sscz.

Osserviamo esplicitamente che sono sscz di $\mathbb{F}^{\times d}$ sia questo stesso spazio che il suo sottospazio nullo $\{\mathbf{0}_d\}$.
In $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ sono sottospazi sscz l'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate.

In $\mathbb{F}^{\times 3}$ sono sottospazi sscz, oltre allo stesso spazio delle terne numeriche e ad $\{\mathbf{0}_3\}$:

$\mathsf{Sscz}_{011} := \{y, z \in \mathbb{F} :| \langle 0, y, z\rangle\}$, insieme individuato dall'equazione $x = 0$ e quindi chiamato piano $x = 0$ e denotato con Oyz;
$\mathsf{Sscz}_{101} := \{x, z \in \mathbb{F} :| \langle x, 0, z\rangle\}$, insieme individuato dall'equazione $y = 0$, chiamato piano $y = 0$ e denotato con Oxz;
$\mathsf{Sscz}_{110} := \{x, y \in \mathbb{F} :| \langle x, y, 0\rangle\}$, insieme individuato dall'equazione $z = 0$, chiamato piano $z = 0$ e denotato con Oxy;
$\mathsf{Sscz}_{100} := \{x \in \mathbb{F} :| \langle x, 0, 0\rangle\}$, insieme individuato dal sistema di equazioni $y = z = 0$ , chiamato **asse della prima coordinata**, la $x$, e denotato con Ox;
$\mathsf{Sscz}_{010} := \{y \in \mathbb{F} :| \langle 0, y, 0\rangle\}$, insieme individuato dal sistema di equazioni $x = z = 0$ , chiamato **asse della seconda coordinata**, la $y$, e denotato con Oy;
$\mathsf{Sscz}_{001} := \{z \in \mathbb{F} :| \langle 0, 0, z\rangle\}$, insieme individuato dal sistema di equazioni $x = y = 0$ , chiamato **asse della terza coordinata**, la $z$, e denotato con Oz.

Le precedenti notazioni si possono estendere per dimensioni superiori a 3 con scritture della forma $\mathsf{Sscz}_{b_1 b_2 \dots b_d}$ aventi a deponente $d$-uple di cifre binarie; una di queste notazioni identifica lo sscz dei vettori la cui $i$-esima coordinata vale 0 se il corrispondente $b_i = 0$ e può assumere qualsiasi valore di $\mathbb{F}$ se $b_i = 1$.
Per esempio per $\mathbb{F}^{\times 4}$ si hanno

$$\mathsf{Sscz}_{1101} := \{x, y, w \in \mathbb{F} :| \langle x, y, 0, w\rangle\} \quad \text{e} \quad \mathsf{Sscz}_{1011} := \{x, z, w \in \mathbb{F} :| \langle x, 0, z, w\rangle\} .$$

Evidentemente $\mathsf{Sscz}_{0000}$ è il sottospazio nullo $\{\langle 0, 0, 0, 0\rangle\}$, mentre $\mathsf{Sscz}_{11111} = \mathbb{F}^{\times 5}$ è il sottospazio improprio.

**G40 b.03** Un sscz che riguarda l'annullamento di una sola coordinata, diciamo la $i$-esima, si individua anche con la semplice equazione $x_i = 0$.

Un sscz che corrisponde all'annullamento di più coordinate si individua con il sistema delle equazioni di annullamento di tali coordinate: per esempio $\mathsf{Sscz}_{1001}$ con il sistema di equazioni di annullamento

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Se si intersecano due sottospazi sscz si ottiene un altro sottospazio dello stesso genere: per esempio

$$\mathsf{Sscz}_{1101} \cap \mathsf{Sscz}_{1011} = \{x, w \in \mathbb{F} :| \langle x, 0, 0, w\rangle\} = \mathsf{Sscz}_{1001} .$$

Si osserva che la intersezione di due sscz si esprime con il sistema di equazioni di annullamento di coordinate costituito dall'unione delle equazioni che costituiscono i sistemi che individuano i due sottospazi che vengono intersecati.

Per esempio per l'intersezione dei due sscz

$$\mathsf{Sscz}_{10010} : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathsf{Sscz}_{01010} : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

si ha

$$\mathsf{Sscz}_{00010} : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

L'unione di due sscz noncomparabili come insiemi non è un sscz, ma solo un sottoinsieme del sscz caratterizzato dalla $d$-upla binaria ottenuta come somma booleana delle somme dei due sscz che vengono uniti.

**G40 b.04** In generale anche l'intersezione di due sottospazi qualsiasi $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ di uno spazio $\boldsymbol{V}$ è un sottospazio. Infatti scelti come si vuole l'intero positivo $k$, i vettori $\mathsf{v}_1$, ..., $\mathsf{v}_k$ in $S_1 \cap S_2$, e altrettanti scalari $\alpha_1$, ..., $\alpha_k$, la combinazione lineare $\displaystyle\sum_{h=1}^{k} \mathsf{v}_h\, \alpha_h$ deve appartenere a entrambi i sottospazi e quindi anche alla loro intersezione.

Se si confrontano due sottospazi $\boldsymbol{S}_1$ ed $\boldsymbol{S}_2$ di $\boldsymbol{V}$ propri e nonnulli deve verificarsi una e una sola delle seguenti situazioni:

(1) $\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{S}_2$ ;

(2) $\boldsymbol{S}_1 <_{Vsp} \boldsymbol{S}_2$, relazione equivalente alla $\boldsymbol{S}_1 \cap \boldsymbol{S}_2 = S_1$, a sua volta equivalente alla $\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_2$;

(3) $\boldsymbol{S}_2 <_{Vsp} \boldsymbol{S}_1$, relazione equivalente alla $\boldsymbol{S}_1 \cap \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_2$, a sua volta equivalente alla $\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_1$;

(4) $\boldsymbol{S}_1 \cap \boldsymbol{S}_2 = \{\mathbf{0}_d\}$ ;

(5) $\emptyset <_{Vsp} \boldsymbol{S}_1 \cap \boldsymbol{S}_2 <_{Vsp} \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ .

Nei primi tre casi $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ sono due **sottospazi confrontabili**; nei due casi restanti sono **sottospazi non-confrontabili** e in tal caso esistono vettori di $\boldsymbol{S}_1$ che non appartengono ad $\boldsymbol{S}_2$ e vettori di $\boldsymbol{S}_2$ che non appartengono ad $\boldsymbol{S}_1$, ovvero si può scrivere $\boldsymbol{S}_1 \setminus \boldsymbol{S}_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ e $\boldsymbol{S}_2 \setminus \boldsymbol{S}_1 \neq \{\mathbf{0}\}$.

Esempi piuttosto evidenti delle precedenti situazioni si ottengono con sottospazi sscz di ogni $\mathbb{F}^{\times d}$:

$$\mathsf{Sscz}_{1010} <_{Vsp} \mathsf{Sscz}_{1011} \quad , \quad \mathsf{Sscz}_{10101} >_{Vsp} \mathsf{Sscz}_{00100} \quad ,$$
$$\{\mathbf{0}_6\} <_{Vsp} \mathsf{Sscz}_{011010} = \mathsf{Sscz}_{011110} \cap \mathsf{Sscz}_{111011} <_{Vsp} \mathsf{Sscz}_{011110}\ ,\ \mathsf{Sscz}_{111010}\ .$$

**G40 b.05** Dato un $E \subset V$, si dice **chiusura lineare** di $E$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi di $E$; per tale insieme scriviamo

$$\boldsymbol{span}(E) := \{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}\ ,\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in E :|\ \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2\}\ . \tag{1}$$

Evidentemente la chiusura lineare di un qualsiasi insieme di vettori di $V$ porta a un sottospazio dello spazio ambiente $\boldsymbol{V}$, cioè $\boldsymbol{span}(E) \leq_{Vsp} \boldsymbol{V}$ : infatti la combinazione lineare di due vettori che sono combinazioni lineari di vettori di un dato insieme $E$ si può riscrivere come combinazione lineari di vettori di $E$.
Questo fatto può essere chiarito dalla seguente formula, riguardante l'insieme di vettori $E = \{\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, ..., \mathsf{v}_k\}$

$$\forall \alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_k, \gamma, \delta \in \mathbb{F}\ :\quad \left(\sum_{h=1}^{k} \mathsf{v}_h\alpha_h\right)\gamma + \left(\sum_{h=1}^{k} \mathsf{v}_h\beta_h\right)\delta = \sum_{h=1}^{k} \mathsf{v}_h(\alpha_h\gamma + \beta_h\delta)\ . \tag{2}$$

Un insieme di vettori espresso da una chiusura lineare della forma $\boldsymbol{span}(E)$ viene chiamato anche **sottospazio sotteso** dall'insieme di vettori $E$.

La scrittura $\boldsymbol{span}$ individua, per ogni $\boldsymbol{V}$, una funzione che ha come dominio $\mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$, la collezione di tutti i sottoinsiemi di $\boldsymbol{V}$, e come codominio l'insieme di tutti i sottospazi di $VBi$; questo insieme lo denotiamo con $\boldsymbol{Sbvsp}(\boldsymbol{V})$.

La $\boldsymbol{span}$ evidentemente è una funzione-SS ampliamento: per ogni $E \subseteq \boldsymbol{V}$ si ha $\boldsymbol{span}(E) \supseteq E$.
È anche evidente che essa è una funzione idempotente:

$$\forall E \subseteq V\ :\ \boldsymbol{span}\big(\boldsymbol{span}(E)\big) = \boldsymbol{span}(E)\ . \tag{3}$$

Va segnalato che la chiusura lineare dell'insieme $E$ si può definire in due altri modi che si dimostrano senza diffivoltà essere equivalenti.

Il sottospazio $\boldsymbol{span}(E)$ è il più ridotto dei sottospazi che contengono $E$:

$$\boldsymbol{span}(E) \;=\; \inf\{S \in \boldsymbol{Sbvsp}(\boldsymbol{V}) :|\; E \subseteq S\} \;. \tag{4}$$

Il sottospazio $\boldsymbol{span}(E)$ è l'intersezione di tutti i sottospazi che contengono $E$:

$$\boldsymbol{span}(E) \;=\; \bigcap \Big\{ \boldsymbol{S} \in \boldsymbol{Sbvsp}(\mathbb{F}^{\times d}) \;[\!]\; \boldsymbol{S} \supseteq E \Big\} \;. \tag{5}$$

**G40 b.06** Consideriamo due sottospazi $\boldsymbol{S}_1$ ed $\boldsymbol{S}_2$ e la loro unione $U := SBi_1 \cup \boldsymbol{S}_2$ . Ovviamente se essi sono confrontabili la loro unione coincide con il più esteso dei due.

Se invece essi sono nonconfrontabili $U$ non è un sottospazio. Un controesempio evidente si osserva già in due dimensioni: due rette diverse passanti per l'origine costituiscono due sottospazi nonconfrontabili che non sono sottospazi del piano; queste rette hanno in comune solo l'origine, mentre la somma di due vettori nonnulli, il primo appartenente solo alla prima retta, il secondo solo alla seconda, non può appartenere a nessuna delle due rette.

Altri semplici controesempi sono forniti da opportune coppie di sscz; consideriamo $\mathsf{Sscz}_{1100}$ e $\mathsf{Sscz}_{0110}$; $\mathsf{v} = \alpha\,\mathsf{e}_1 + \beta\,\mathsf{e}_2 \in \mathsf{Sscz}_{1100}$, $\mathsf{w} = \gamma\,\mathsf{e}_2 + \delta\,\mathsf{e}_3 \in \mathsf{Sscz}_{0110}$, mentre $\mathsf{v}+\mathsf{w} = \alpha\,\mathsf{e}_1 + (\beta+\gamma)\mathsf{e}_2 + \delta\,\mathsf{e}_3$ se $\gamma \neq -\beta$ non appartiene a $\mathsf{Sscz}_{1100} \cup \mathsf{Sscz}_{0110}$ .

In generale si possono considerare i due vettori $\mathsf{v}_1 \in \boldsymbol{S}_1 \setminus \boldsymbol{S}_2$ e $\mathsf{v}_2 \in \boldsymbol{S}_2 \setminus \boldsymbol{S}_1$ e $\mathsf{v}_1+\mathsf{v}_2$ non può appartenere ad $\boldsymbol{S}_1$, perché in tal caso si avrebbe $\mathsf{v}_2 = (\mathsf{v}_1+\mathsf{v}_2)-\mathsf{v}_1 \in \boldsymbol{S}_1$, contro l'ipotesi $\mathsf{v}_2 \in \boldsymbol{S}_2 \setminus \boldsymbol{S}_1$. Per simmetria tale vettore non può appartenere neppure ad $\boldsymbol{S}_2$ e dunque $\mathsf{v}_1 + \mathsf{v}_2 \notin \boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2$.

**G40 b.07** Si ottiene invece un sottospazio dalla chiusura lineare dell'unione di due sottospazi, ossia $\boldsymbol{span}(\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2) <_{Vsp} \boldsymbol{V}$ . Per esempio, riprendendo i due sottospazi precedenti, accade che

$$\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_3 \subset \boldsymbol{span}(\mathsf{Sscz}_{1100} \cup \mathsf{Sscz}_{0110}) \;=\; \mathsf{Sscz}_{1110} \;.$$

Il sottospazio $\boldsymbol{span}(\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2)$ si può esprimere come

$$\{\mathsf{v}_1 \in \boldsymbol{S}_1, \mathsf{v}_2 \in \boldsymbol{S}_2 :|\; \mathsf{v}_1 + \mathsf{v}_2\} \;.$$

Questo induce a chiamarlo **somma diretta dei sottospazi** $\boldsymbol{S}_1$ ed $\boldsymbol{S}_2$

Questa composizione di sottospazi la denotiamo con $\boldsymbol{S}_1 \boldsymbol{+} \boldsymbol{S}_2$ .

Il simbolo $\boldsymbol{+}$ esprime una operazione binaria tra sottospazi di uno spazio ben determinato. Come tale risulta chiaramente simmetrica e dotata di un elemento neutro.
Essa inoltre risulta commutativa in conseguenza della commuttatività della somma di vettori, dotata di un elemento neutro, $\{\mathsf{0}\}$, in conseguenza della neutralità di $\mathsf{0}$ rispetto ala somma di vettori e associativa, grazie alla associatività della somma di vettori.

I sscz forniscono anche semplici esempi di somme dirette di sottospazi:

$$\mathsf{Sscz}_{0101} + \mathsf{Sscz}_{0110} = \mathsf{Sscz}_{0111} \quad , \quad \mathsf{Sscz}_{010100} + \mathsf{Sscz}_{010011} + \mathsf{Sscz}_{101011} = \mathbb{R}^{\times 6} \;.$$

In generale se $\mathsf{b}_1$ e $\mathsf{b}_2$ denotano due sequenze binarie della stessa lunghezza $d$, si ha

$$\mathsf{Sscz}_{\mathsf{b}_1} + \mathsf{Sscz}_{\mathsf{b}_2} = \mathsf{Sscz}_{\max(\mathsf{b}_1,\mathsf{b}_2)} \qquad , \qquad \mathsf{Sscz}_{\mathsf{b}_1} \cap \mathsf{Sscz}_{\mathsf{b}_2} = \mathsf{Sscz}_{\min(\mathsf{b}_1,\mathsf{b}_2)} \;. \tag{1}$$

Va segnalato che si definisce anche una somma diretta esterna di spazi vettoriali, operazione assimilabile con l'operazione qui definita che viene talora chiamata "somma diretta interna".

**G40 b.08** La somma diretta si può applicare a sottospazi dello spazio vettoriale ambiente la cui intersezione si riduce al sottospazio zero $\{\mathsf{0}_d\}$. Due o più di tali sottospazi si dicono **sottospazi mutuamente complementari** Per evidenziare la caratteristica dei due operandi la loro composizione viene chiamata **somma diretta-co**.

Se $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{T}$ sono due sottospazi (propri) dello spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ tali che $\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{T} = \{\mathbf{0}_d\}$ per la loro somma diretta si scrive $\boldsymbol{S} \oplus \boldsymbol{T} := \boldsymbol{S} + \boldsymbol{T}$

Se in particolare $\boldsymbol{S} \oplus \boldsymbol{T} = \boldsymbol{V}$ si dice che $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{T}$ sono **sottospazi complementari entro** $\boldsymbol{V}$.

Anche per le somme dirette-co è spesso utile considerare composizioni di tre o più sottospazi le cui mutue intersezioni si riducono a $\{\mathbf{0}_d\}$; evidentemente la somma diretta-co è un'operazione commutativa e associativa.

**G40 b.09** Semplici esempi di sottospazi complementari e di somme dirette sono forniti dalle seguenti espressioni

$$\mathsf{Sscz}_{101100} \oplus \mathsf{Sscz}_{010011} = \mathbb{F}^{\times 6} \quad , \quad \mathsf{Sscz}_{10110011} \oplus \mathsf{Sscz}_{01001100} \oplus \mathsf{Sscz}_{01001100} = \mathbb{F}^{\times 8}$$

Altri esempi intuitivi si trovano nel piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e nello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Due rette del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ diverse e passanti per l'origine sono sottospazi monodimensionali complementari entro il piano sui reali.

Una retta e un piano passanti per l'origine tali che la retta non appartiene al piano costituiscono sottospazi complementari di $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Dato un $\boldsymbol{S}$ sottospazio proprio di $\boldsymbol{V}$, sono molti i sottospazi suoi complementari in $\boldsymbol{V}$. Per esempio nel piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sono sottospazi complementari dell'asse delle ascisse $\mathsf{Ox}$ tutte le rette per l'origine esprimibili con le equazioni $x \cos\theta + y \sin\theta = 0$ per un angolo fissato $\theta \in (0, \pi)$.
Per ogni spazio $\boldsymbol{V}$ e ogni suo sottospazio proprio $\boldsymbol{S}$ denotiamo con $\boldsymbol{Cmplsp}_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{S})$ l'insieme dei sottospazi propri di $\boldsymbol{V}$ complementari di $\boldsymbol{S}$.

Tre esempi interessanti di coppie di sottospazi complementari sono forniti da sottospazi dello spazio delle matrici di ordine $d$ [G42c07]: sono coppie di sottospazi complementari:

- il sottospazio delle matrici simmetriche e quello dalle matrici antisimmetriche;
- il sottospazio delle matrici triangolari superiori e il sottospazio delle matrici triangolari strettamente inferiori;
- il sottospazio delle matrici triangolari inferiori e il sottospazio delle matrici triangolari strettamente superiori.

**G40 b.10** **(1) Prop.**: Ogni sottospazio proprio $\boldsymbol{S} <_{Vsp} \boldsymbol{V}$ possiede un complemento in $\boldsymbol{V}$.

**Dim.:** Sia $\boldsymbol{V}$ che $\boldsymbol{S}$ possiedono una base; sia $\{\mathsf{v}_1, ..., \mathsf{v}_d\}$ una base di $\boldsymbol{V}$ ed $\{\mathsf{s}_1, ..., \mathsf{s}_r\}$ una base di $\boldsymbol{S}$. Con successivi scambi di un $\mathsf{s}_h$ con un opportuno $\mathsf{v}_k$ si ottiene una base di $\boldsymbol{V}$ della forma $\{\mathsf{s}_1, ..., \mathsf{s}_r, \mathsf{v'}_{r+1}, ..., \mathsf{v'}_d\}$, cioè una base che estende la base del sottospazio. Un complemento di $\boldsymbol{S}$ è fornito da $\boldsymbol{span}(\mathsf{v'}_{r+1}, ..., \mathsf{v'}_d)$ ∎

**(2) Prop.**: Un insieme di vettori $\{\mathsf{v}_1, ..., \mathsf{v}_d\}$ dello spazio $\boldsymbol{V}$ è una sua base sse $\boldsymbol{V}$ si può esprimere mediante la somma diretta

$$\boldsymbol{V} = \mathsf{v}_1 \mathbb{F} \oplus \cdots \oplus \mathsf{v}_d \mathbb{F}$$ ∎

Per esempio $\langle 0, 1\rangle\mathbb{R} \oplus \langle -1, -1\rangle\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

**G40 b.11** In varie circostanze risulta utile fare riferimento a sottospazi di uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ privati dell'origine $\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$. Per uno di questi sottoinsiemi di $\boldsymbol{V}$ verrà usato il termine **sottospazio-nz**. Corrispondentemente talora è utile servirsi della scrittura $\boldsymbol{span}_{nz}$ per la funzione che a un sottoinsieme $S \subseteq \boldsymbol{V}_{nz}$ associa $\boldsymbol{span}_{nz}(S) := \boldsymbol{span}(S) \setminus \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}\}$ .

Chiaramente per ogni sottospazio-nz $N$ si ha $\boldsymbol{span}(N) = N \dot\cup \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}\}$; questo sottospazio si dice semplicemente **chiusura del sottospazio-nz**.

Per ogni $S \subseteq \boldsymbol{V}$ si constata $\boldsymbol{span}(\boldsymbol{span}_{nz}(S)) = \boldsymbol{span}(S)$. Dunque la corrispondenza tra sottospazi-nz $N$ e sottospazi loro chiusure, $\boldsymbol{span}(N)$, è biunivoca. Essa rende ragionevole attribuire a un sottospazio-nz la dimensione del corrispondente sottospazio chiusura e chiamare **sottospazi-nz complementari** due di questi sottoinsiemi di vettori le cui chiusure sono sottospazi complementari. Evidente anche che l'intersezione di due sottospazi-nz è un sottospazio-nz e la somma diretta di due sottospazi-nz è un sottospazio-nz.

## G40 c. trasformazioni lineari

**G40 c.01** Consideriamo due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{F}$, $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$. Si dice **trasformazione lineare-$\mathbb{F}$** da $\boldsymbol{V}$ in $\boldsymbol{W}$ ogni funzione del genere $L \in \lceil\, \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W} \,\rceil$ tale che,

$$\forall\, \mathsf{v}, \mathsf{u} \in \mathsf{dom}(L) \subseteq \boldsymbol{V}\ ,\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}\ \ :\ \ L(\mathsf{v}\alpha + \mathsf{u}\beta) = L(\mathsf{v})\alpha + L(\mathsf{u})\beta\ . \tag{1}$$

L'insieme di queste funzioni si denota con $\lceil\, \boldsymbol{V} \longrightarrow_{Lin-\mathbb{F}} \boldsymbol{X} \,\rceil$.

Nella pratica è necessario fare riferimento esplicitamente al campo quando si trattano spazi vettoriali su campi diversi. Molto più spesso si fa riferimento a un unico campo e quindi si adotta la semplificazione che porta a **trasformazione lineare** e e si serve di notazioni come $\lceil\, \boldsymbol{V} \longrightarrow_{Lin} \boldsymbol{W} \,\rceil$.

La proprietà data viene chiamata **conservazione della combinazione lineare** e si dice anche che una trasformazione lineare è una funzione tra due spazi vettoriali che mantiene la combinazione lineare.

Una trasformazione come la precedente $L$ si chiama anche **omomorfismo di spazi vettoriali** o omomorfismo lineare da $\boldsymbol{V}$ in $\boldsymbol{W}$. Questi termini sono preferiti quando si trattano questioni algebriche riguardanti diverse specie di strutture.

Un altro termine conciso usato spesso nell'analisi funzionale e nella meccanica quantistica è **operatore lineare**.

**G40 c.02** La definizione di trasformazione lineare $L$ implica anche che ogni combinazione lineare di vettori appartenenti a $\mathsf{dom}(L)$ appartiene allo stesso $\mathsf{dom}(L)$, cioè che $\boldsymbol{span}(\mathsf{dom}(L)) = \mathsf{dom}(L)$ , ovvero che $\mathsf{dom}(L) \in \boldsymbol{Sbvsp}(\boldsymbol{V})$.
In effetti a ogni trasformazione lineare si assegna come dominio un sottospazio.

Inoltre si trova che anche $\mathsf{cod}(L)$ è chiuso rispetto alla combinazione lineare, cioè che $\mathsf{cod}(L) \in \boldsymbol{Sbvsp}(\boldsymbol{W})$.
Infatti, quali che siano $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathsf{cod}(L)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, se $\mathsf{v}$ e $\mathsf{w}$ sono due vettori di $\mathsf{dom}(L)$ tali che $L(\mathsf{v}) = \mathsf{x}$ e $L(\mathsf{w}) = \mathsf{y}$, segue che $\mathsf{x}\,\alpha + \mathsf{y}\,\beta = L(\mathsf{v}\,\alpha + \mathsf{w}\,\beta) \in \mathsf{cod}(L)$.

Dunque le trasformazioni lineari sono funzioni che hanno come domini e codomini dei sottospazi.
Questo fatto implica che gran parte delle considerazioni su insiemi di trasformazioni lineari il cui genere ha la forma $\lceil\, \boldsymbol{V} \longrightarrow_{Lin} \boldsymbol{W} \,\rceil$ si possono focalizzare su insiemi di trasformazioni i cui generi hanno la forma $\lceil\, \boldsymbol{V} \longmapsto_{Lin} \boldsymbol{W} \,\rceil$ .

**G40 c.03** Le trasformazioni lineari si incontrano in moltissimi sviluppi della matematica e delle sue applicazioni e vengono ampiamente studiate e utilizzate.
Qui approfondiamo solo lo studio delle trasformazioni lineari tra due spazi di sequenze $\boldsymbol{V} = \mathbb{F}^{\times d}$ e $\boldsymbol{W} = \mathbb{F}^{\times e}$, ma è opportuno segnalare che si studiano trasformazioni di spazi i cui vettori sono funzioni di variabili reali o complesse con particolari proprietà.
Queste trasformazioni sono utilizzate in numerosi campi applicativi: fisica atomica, chimica molecolare, meccanica, svariate tecnologie, modellistica, statistica, economia ... .

Negli spazi di funzioni reali derivabili, la derivazione è una trasformazione lineare, grazie alla proprietà

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\Big) \ =\ \alpha\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + \beta\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)\ .$$

Negli spazi di funzioni reali integrabili in un intervallo $[a, b]$, l'integrazione definita in tale intervallo è una trasformazione lineare che porta allo spazio (monodimensionale) dei numeri reali, grazie alla

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ \Big(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\Big) \ =\ \alpha \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) + \beta \int_a^b \mathrm{d}x\ g(x)\ .$$

Vi sono inoltre spazi di funzioni per le quali si possono definire delle cosiddette trasformate integrali della forma

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ L(y,x)\, f(x)\ .$$

Queste trasformate sono trasformazioni lineari grazie a proprietà quale

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ L(y,x)\ [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)] \ =\ \alpha \int_a^b \mathrm{d}x\ L(y,x)\, f(x) + \beta \int_a^b \mathrm{d}x\ L(y,x)\, g(x)\ .$$

È opportuno segnalare anche che l'importanza delle trasformazioni lineari è dovuta da un lato alla disponibilità di svariate tecniche di calcolo che consentono di risolvere vari problemi che le riguardano, dall'altro al fatto che molte trasformazioni nonlineari possono essere approssimate proficuamente dalle lineari.

**G40 c.04** Consideriamo ora le trasformazioni lineari entro uno spazio $\boldsymbol{V}$, le funzioni che sono dette anche operatori lineari su $\boldsymbol{V}$ ed **endomorfismi lineari** di $\boldsymbol{V}$. Per l'insieme di tutti questi operatori ci serviremo della notazione $\mathsf{Lintr}(\boldsymbol{V})$ .

Per ogni $\omega \in \mathbb{F}_{nz}$ la funzione $\lceil \mathsf{v} \in \boldsymbol{V} \mapsto \mathsf{v} \cdot \omega \rceil$, cioè la moltiplicazione dei vettori di $\boldsymbol{V}$ per lo scalare $\omega$, si dice anche **omotetia centrale** di fattore $\omega$.
Essa si denota con $\boldsymbol{Hmtt}_{\mathbf{0}\,\boldsymbol{V},\omega}$ ed evidentemente è un operatore lineare.

Chiaramente una tale trasformazione lineare è invertibile e la trasformazione inversa della omotetia centrale di fattore $\omega$ è l'omotetia centrale di fattore $\omega^{-1}$.

La moltiplicazione per 1 è l'**identità dello spazio** o **trasformazione identica dello spazi** di $\boldsymbol{V}$, $\mathsf{Id}_{\boldsymbol{V}}$; se si può sottintendere $\boldsymbol{V}$ l'identità si denota con $\hat{1}$ e l'omotetia di fattore $\omega$ corrisponde a $\omega \cdot \hat{1}$ e si denota più concisamente con $\hat{\omega}$.
Se $\omega \in \mathbb{R}$ e $\omega > 1$ si parla di **dilatazione**, mentre se $0 < \omega < 1$ si parla di **contrazione**.
Per $\omega = -1$ l'omotetia è la $\lceil \mathsf{v} \mapsto -\mathsf{v} \rceil$, trasformazione chiamata **simmetria centrale** di centro $\mathbf{0}$; nei testi di fisica, quando $\boldsymbol{V}$ rappresenta lo spazio fisico viene detta **inversione spaziale** o anche "parità".

Anche la moltiplicazione per il numero 0 può considerarsi una trasformazione lineare, in quanto il suo codominio è costituito dal solo vettore nullo $0_{\boldsymbol{V}}$ e che si può considerare sottospazio di $\boldsymbol{V}$.
Essa viene detta **trasformazione nulla dello spazio** o **trasformazione annichilatrice dello spazio** $\boldsymbol{V}$; in genere si può prescindere da $\boldsymbol{V}$ e la si denota con $\hat{1}$.

**G40 c.05** Altre trasformazioni lineari entro $\mathbb{F}^{\times d}$ molto semplici si individuano a partire dai vettori della base canonica $\mathsf{e}_1$, $\mathsf{e}_2$, ..., $\mathsf{e}_d$.

Per ogni $i = 1, 2, ..., d$ si definisce **proiezione sul sottospazio** o **proiettore sul sottospazio** $\mathsf{e}_i\mathbb{F}$ la trasformazione

$$\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_i} \ :=\ \left\lceil \sum_{j=1}^{d} \mathsf{e}_j\, \alpha_j \ \mapsto\ \mathsf{e}_i \alpha_i \right\rceil\ .$$

Quando si fa riferimento ad una base canonica ordinata, il precedente proiettore si può denotare semplicemente con $\boldsymbol{Prj}_i$.

Si osserva che $\forall i = 1, 2, ..., d\ :\ \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_i}(\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_i}(\mathsf{v})) = \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_i}(\mathsf{v})$ ; questo fatto si esprime anche dicendo che i proiettori sono **operatori lineari idempotenti**.
Ricordiamo che una endofunzione si dice idempotente sse applicata due volte fornisce lo stesso risultato che si ottiene applicandola una sola volta.

Si constata che la composizione di due proiettori relativi a due diversi vettori della base canonica è la trasformazione nulla.
Da questo segue che la somma di due o più proiettori relativi a diversi vettori canonici è un operatore lineare idempotente.
Per esempio $(\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{e}_1}+\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{e}_2})^2 = \boldsymbol{Prj}_{\mathbf{e}_1}{}^2+\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{e}_2}{}^2+\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{e}_1}\circ\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{e}_2}+\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{e}_2}\circ\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{e}_1} = \boldsymbol{Prj}_{\mathbf{e}_1}+\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{e}_2}$.
Osserviamo anche che $\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{e}_i}+\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{e}_i} = 2\,\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{e}_i}$ e che $\left(\alpha\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{e}_i}\right)(\mathsf{v}) = \alpha\left(\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{e}_i}(\mathsf{v})\right)$.

**G40 c.06** In generale chiamiamo **proiettore nello spazio** $\boldsymbol{V}$ ogni operatore lineare su tale spazio che è idempotente.

Esaminiamo un generico proiettore di questo tipo $\mathsf{P}$, cioè un operatore tale che $\mathsf{P}^2=\mathsf{P}$; introduciamo inoltre la notazione $\mathsf{C}:=\mathsf{cod}(\mathsf{P})$.

**(1) Prop.**: L'operatore $\mathsf{P}$ ridotto al sottospazio $\mathsf{C}$ è l'identità di tale spazio.

**Dim.**: Sia $\mathsf{x}$ un qualsiasi vettore di $\mathsf{C}$ ed $\mathsf{y}\in\boldsymbol{V}$ uno dei vettori tale che $\mathsf{P}(\mathsf{y})=\mathsf{x}$. $\mathsf{P}(\mathsf{x})=\mathsf{P}^2(\mathsf{y})=\mathsf{P}(\mathsf{x})=\mathsf{x}$ ∎

**(2) Prop.**: Anche $\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P}$ è un proiettore.
**Dim.**: $(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})^2=\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P}-\mathsf{P}+\mathsf{P}^2=\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P}$ ∎

Denotiamo con $\mathsf{C}'$ il codominio di $\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P}$, ossia introduciamo $\mathsf{C}':=(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})\,\boldsymbol{V}$.

**(3) Prop.**: $\mathsf{P}$ riduce ogni $\mathsf{y}\in\mathsf{C}'$ al vettore nullo.
**Dim.**: $\mathsf{P}\circ_{rl}(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})=\mathsf{P}-\mathsf{P}^2=\hat{\mathbf{0}}$ ∎

**(4) Prop.**: I sottospazi $\mathsf{C}=\mathsf{P}(\boldsymbol{V})$ e $\mathsf{C}':=(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})(\boldsymbol{V})$ sono sottospazi complementari.
**Dim.**: Per ogni $\mathsf{v}\in\boldsymbol{V}$ si ha $\mathsf{v}=\mathsf{P}(\mathsf{v})+(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})(\mathsf{v})$ e si osserva che $\mathsf{P}(\mathsf{v})\in\mathsf{C}$ e $(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})(\mathsf{v})\in\mathsf{C}'$.
Inoltre se $\mathsf{y}\in\mathsf{C}\cap\mathsf{C}'$ devono valere entrambe le uguaglianze $\mathsf{P}(\mathsf{y})=\mathbf{0}$ e $(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})(\mathsf{y})=\mathbf{0}$ e queste implicano $\mathsf{y}=\hat{\mathbf{1}}(\mathsf{y})=\mathsf{P}(\mathsf{y})+(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})(\mathsf{y})=\mathbf{0}$, cioè $\mathsf{C}\cap\mathsf{C}'=\{\mathbf{0}\}$ ∎

Il proiettore $\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P}$ si chiama proiettore complementare di $\mathsf{P}$; questo è giustificato dal fatto che $\hat{\mathbf{1}}-(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})=\mathsf{P}$, cioè dal fatto che $\mathsf{P}$ è complementare di $\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P}$;
Data una qualsiasi coppia di proiettori complementari, anche la sua copia riflessa costituisce una coppia di proiettori complementari.

Abbiamo dimostrato che a ogni coppia di proiettori complementari è associata una coppia di sottospazi complementari, la coppia dei rispettivi codomini.
Vale anche il viceversa.

**(5) Prop.**: Ad ogni coppia di sottospazi complementari $\langle\mathsf{S},\mathsf{S}'\rangle$ è associata una coppia di proiettori complemetari.

Consideriamo un generico $\mathsf{v}\in\boldsymbol{V}$ e sia $\mathsf{v}=:\mathsf{x}+\mathsf{x}'$ con $\mathsf{x}\in\mathsf{S}$ e $\mathsf{x}'\in\mathsf{S}'$. Definiamo $\mathsf{P}:=\lceil\,\mathsf{v}\mapsto\mathsf{x}\,\rceil$; questo è un proiettore ed è tale anche $\mathsf{P}':=\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P}=\lceil\,\mathsf{v}\mapsto\mathsf{x}'\,\rceil$; $\langle\mathsf{P},\mathsf{P}'\rangle$ è la coppia di proiettori enunciata ∎

**G40 c.07** Osserviamo che operando su oggetti di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e di $\mathbb{R}^{\times 3}$ accade spesso di dovere utilizzare delle proiezioni ortogonali.

Queste proiezioni possono anche essere le cosiddette proiezioni oblique; queste proiezioni in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ si ottengono considerando due diverse rette per l'origine $\mathsf{R}$ e $\mathsf{D}$(non necessariamente ortogonali) e trasformando qualche punto-RR $P$ nel punto in cui si intersecano $\mathsf{R}$ e la parallela a $\mathsf{D}$ passante per $P$.
In $\mathbb{R}^{\times 3}$ si hanno proiezioni oblique relative a un piano per l'origine $\Pi$ e a una retta per l'origine $\mathcal{R}$ che non appartiene al piano e trasformando ogni punto-RRR $P$ nel punto in cui si intersecano $\mathcal{R}$ e il piano

parallelo a $\Pi$ passante per $P$, oppure trasformando ogni punto-RRR $P$ nel punto in cui si intersecano $\Pi$ e la retta parallela alla $\mathcal{R}$ passante per $P$.

Va rilevato che qui sopra abbiamo fatto ricorso alla nozione di proiezione ortogonale solo su base intuitiva, mentre a rigore essa richiede la nozione di prodotto interno che definiremo solo nel capitolo che segue.

**G40 c.08** Si osserva che le trasformazioni lineari-$\mathbb{F}$ di un dato genere $\lceil\, \boldsymbol{V} \longmapsto_{Lin-\mathbb{F}} \boldsymbol{W} \,\rceil$ possono essere moltiplicate per uno scalare del campo $\mathbb{F}$ e sommate, ovvero possono essere sottoposte a combinazioni lineari-$\mathbb{F}$. Infatti si può dare la definizione

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}\ ,\ \forall L, M \in \lceil\, \boldsymbol{V} \longrightarrow_{Lin-\mathbb{F}} \boldsymbol{W} \,\rceil\ :\ (\alpha \cdot L + \beta \cdot M)(\mathsf{v})\ :=\ \alpha \cdot L(\mathsf{v}) + \beta \cdot M(\mathsf{v})\ .$$

Si osserva che questa definizione si può generalizzare a tutte le funzioni $f$ e $g$ aventi lo stesso dominio e aventi come codominio un spazio vettoriale sul campo $\mathbb{F}$.

Si osserva inoltre che le trasformazioni lineari, potendo essere combinate linearmente, costituiscono a loro volta uno spazio vettoriale. L'elemento nullo di questo spazio è dato dalla trasformazione nulla, mentre la trasformazione opposta della $\lceil \mathsf{v} \mapsto L(\mathsf{v}) \rceil$ è la $\lceil \mathsf{v} \mapsto L(-\mathsf{v}) \rceil = \lceil \mathsf{v} \mapsto -L(\mathsf{v}) \rceil$ .

Esempi semplici e significativi di somme di trasformazioni lineari di $\mathsf{Lintr}(\mathbb{F}^{\times d})$, già usati in c05 e in c06, sono le somme di proiettori sopra i sottospazi sottesi da insiemi di versori canonici o da insiemi di vettori appartenenti a una base dello spazio.

Vediamo più esplicitamente come si può associare un proiettore ad ogni sscz. Consideriamo la sequenza di $d$ bits $\mathsf{b} = b_1 b_2 \cdots b_d$ e il corrispondente sottospazio $\mathsf{Sscz}_{\mathsf{b}}$; si dice proiettore corrispondente a tale sscz la trasformazione lineare

$$\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{b}}\ :=\ \left\lceil\, \sum_{j=1}^{d} \mathsf{e}_j\, \alpha_j \in \mathbb{F}^{\times d} \mapsto \sum_{j=1}^{d} \mathsf{e}_j\, b_j\, \alpha_j \,\right\rceil\ .$$

Per esempio per $d = 3$ il proiettore relativo all'sscz caratterizzato dall'equazione $x_2 = 0$, cioè il proiettore sul piano $\mathsf{Ox}_1x_3$, trasforma il generico vettore $\mathsf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ nel vettore $\langle v_1, 0, v_3 \rangle$.

È utile osservare che questo vettore è la somma dei vettori $\mathsf{e}_1\, v_1$ ed $\mathsf{e}_3\, v_3$ ottenibili, risp., applicando a $\mathsf{v}$ i proiettori $\boldsymbol{Prj}_1$ e $\boldsymbol{Prj}_3$. Questo conduce a considerare il precedente proiettore sul piano $\mathsf{Ox}_1x_3$ come la somma dei precedenti proiettori su sottospazi monodimensionali: $\boldsymbol{Prj}_{101} = \boldsymbol{Prj}_1 + \boldsymbol{Prj}_3$.

In generale per il proiettore sopra $\mathsf{Sscz}_{\mathsf{b}}$ si ha

$$\boldsymbol{Prj}_{b_1 b_2 \ldots b_d}\ :=\ \sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{Prj}_j\, b_j\ . \tag{2}$$

In effetti vale il seguente enunciato.

**(1) Prop.**: Se $\mathsf{P}_1$ e $\mathsf{P}_2$ sono due proiettori e $\mathsf{P}_1 \circ \mathsf{P}_2 = \hat{\mathbf{0}}$, allora $\mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2$ è un proiettore ∎

Due proiettori si dicono **proiettori ortogonali** sse la loro composizione è la trasformazione annichilatrice.

**G40 c.09** Introduciamo un sistema di termini e notazioni che riguardano collezioni di trasformazioni lineari tra due spazi $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$, eventualmente coincidenti, definite caratterizzando solo i loro domini e codomini.

Denotiamo con $\lceil\, \boldsymbol{V} \longmapsto_{Lin} \boldsymbol{W} \,\rceil$ l'insieme degli omomorfismi $L$ dall'intero $\boldsymbol{V}$ in $\boldsymbol{W}$, cioè tali che $\mathsf{dom}(L) = \boldsymbol{V}$. Questo insieme di trasformazioni si denota anche con $\mathsf{Lintr}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$.

Denotiamo con $\lceil\, \boldsymbol{V} \longrightarrow\!\!\triangleright_{Lin} \boldsymbol{W} \,\rceil$ l'insieme degli omomorfismi $L$ da $\boldsymbol{V}$ sull'intero $\boldsymbol{W}$, cioè tali che $\mathsf{cod}(L) = \boldsymbol{W}$; queste applicazioni suriettive sono dette anche **epimorfismi lineari**.

Denotiamo con $\lceil\, \boldsymbol{V} \longmapsto\!\!\triangleright_{Lin} \boldsymbol{W} \,\rceil$ l'insieme degli omomorfismi $L$ dall'intero $\boldsymbol{V}$ sull'intero $\boldsymbol{W}$, cioè tali che $\mathsf{dom}(L) = \boldsymbol{V}$ e $\mathsf{cod}(L) = \boldsymbol{W}$.

Denotiamo con $\lceil\, \boldsymbol{V} \longleftrightarrow_{Lin} \boldsymbol{W} \,\rceil$ l'insieme degli omomorfismi $L$ da $\boldsymbol{V}$ in $\boldsymbol{W}$ invertibili, cioè tali che esista $L^{-\mathbf{1}}$; essi sono detti anche **monomorfismi lineari**.

Denotiamo con $\lceil\, \boldsymbol{V} \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Lin} \boldsymbol{W} \,\rceil$ l'insieme dei monomorfismi $L$ dall'intero $\boldsymbol{V}$ nell'intero $\boldsymbol{W}$, cioè tali che $\mathsf{dom}(L) = \boldsymbol{V}$, $\mathsf{cod}(L) = \boldsymbol{W}$ ed esista $L^{-\mathbf{1}}$; essi sono detti anche **isomorfismi lineari**.

Quando $\boldsymbol{V} = \ WBi$ si parla di **endomorfismi lineari** entro $\boldsymbol{V}$ e anche di **operatori lineari** su $\boldsymbol{V}$. La loro collezione si denota anche con $\mathbf{Lintr}(\boldsymbol{V})$.

Gli endomorfismi entro $\boldsymbol{V}$ che sono isomorfismi (e quindi sono permutazioni di $\boldsymbol{V}$) si dicono **automorfismi lineari** di $\boldsymbol{V}$, o anche **operatori lineari invertibili** su $\boldsymbol{V}$. La loro collezione si denota anche con $\mathbf{Autlin}(\boldsymbol{V})$.

**G40 c.10** Lo studio di una trasformazione $L \in \lceil\, \boldsymbol{V} \longrightarrow_{Lin} \boldsymbol{W} \,\rceil$ con $\mathsf{dom}(L) <_{Vsp} \boldsymbol{V}$ e $\mathsf{cod}(L) <_{Vsp} \boldsymbol{W}$ per vari scopi può essere vantaggiosamente ricondotto allo studio della corrispondente trasformazione del genere $\lceil\, \mathsf{dom}(L) \longmapsto\!\!\triangleright_{Lin} \mathsf{cod}(L) \,\rceil$, in quanto questa costituisce una trasformazione più essenziale.

In molti casi specifici tuttavia questa restrizione dell'ambiente non è facilmente precisabile e quindi risulta poco utile.

Occorre innanzi tutto tenere sotto controllo $\mathsf{dom}(L)$ e $\mathsf{cod}(L)$; in genere gli spazi $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ sono trattati concretamente attraverso loro basi specifiche $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ e la restrizione richiede di riferire in modo preciso $\mathsf{dom}(L)$ a $\mathfrak{B}$ e $\mathsf{cod}(L)$ a $\mathfrak{C}$.

Queste operazioni spesso richiedono cambiamenti di base e risultanodifficoltose.

Nelle prossime sezioni tratteremo soprattutto le trasformazioni dei generi $\lceil\, \boldsymbol{V} \longrightarrow_{Lin} \boldsymbol{W} \,\rceil$ e $\lceil\, \mathbb{F}^{\times d} \longmapsto\!\!\triangleright_{Lin} \mathbb{F}^{\times e} \,\rceil$ senza preoccuparci delle suddette difficoltà.

## G40 d. matrici di trasformazioni lineari

**G40 d.01** Ogni trasformazione lineare $L$ del genere $\lceil\, \mathbb{F}^{\times d} \longmapsto_{Lin} \mathbb{F}^{\times e} \,\rceil$ è determinata dai trasformati dei vettori di una base dello spazio dominio $\mathbb{F}^{\times d}$; in particolare è definita dalle sue azioni sui vettori $\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, ..., \mathsf{e}_i$ della base canonica $\mathfrak{B}$ di $\mathbb{F}^{\times d}$.
Infatti se conosciamo i trasformati $L(\mathsf{e}_i)$ per $i = 1, 2, ..., d$, siamo in grado di determinare il trasformato da $L$ di ogni vettore $\mathsf{v} = \sum_{i=1}^{d} \mathsf{e}_i\, v_i$ servendoci dell'espressione:

$$L(\mathsf{v}) \;=\; L\left(\sum_{i=1}^{d} \mathsf{e}_i\, v_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{d} L(\mathsf{e}_i)\, v_i \;. \tag{1}$$

Si pone dunque il problema del controllo dei vettori $L(\mathsf{e}_i)$; questo è assicurato dalla conoscenza delle espressioni dei vettori $L(\mathsf{e}_i)$ come combinazioni lineari dei vettori della base canonica $\mathfrak{C}$ di $\mathbb{F}^{\times e}$ che qui denotiamo con $\mathsf{u}_h := \langle k \in (\mathrm{e}\,] :| \delta_{h,k} \rangle$ per $h = 1, 2, ..., e$.

Supponiamo di conoscere queste combinazioni lineari che scriviamo $L(\mathsf{e}_i) =: \sum_{j=1}^{e} \mathsf{u}_j\, \ell_{j,i}$ .

Per il trasformato del generico vettore $\mathsf{v}$ abbiamo quindi

$$L(\mathsf{v}) \;=\; \sum_{i=1}^{d} L(\mathsf{e}_i) v_i \;=\; \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{e} \mathsf{u}_h\, \ell_{j,i}\, v_i \;=\; \sum_{j=1}^{e} \mathsf{u}_j \left(\sum_{i=1}^{d} \ell_{j,i}\, v_i\right) \;. \tag{2}$$

L'azione della trasformazione $L$ è quindi determinata dalla conoscenza del sistema dei $d \cdot e$ scalari $\ell_{j,i}$. Questi elementi del campo $\mathbb{F}$ possono essere disposti nelle caselle di una matrice di profilo $e \times d$; l'entrata relativa alla riga $j$ e alla colonna $i$ riguarda il coefficiente del vettore $\mathsf{u}_j$ dello sviluppo nella base canonica dello spazio codominio del trasformato del vettore $\mathsf{e}_i$ della base canonica dello spazio dominio.

La matrice così individuata si dice **matrice rappresentativa della trasformazione lineare nella base canonica** degli spazi codominio e dominio. Le matrici rappresentative consentono di trattare le trasformazioni lineari con i metodi numerici sviluppati per i calcoli sulle matrici, con le procedure che li implementano e anche con i dispositivi hardware che sono stati sviluppati per poter effettuare con efficienza calcoli matriciali massicciamente impegnativi.

**G40 d.02** Grazie all'isomorfismo tra ogni spazio vettoriale a dimensioni finite su un campo $\mathsf{F}$ con uno spazio $\mathbb{F}^{\times d}$, dalla precedente formula d01(2) si ricava che, fissate una base $\mathfrak{B} = \langle \mathsf{e}_1, ..., \mathsf{e}_d \rangle$ di $\mathbb{F}^{\times d}$ ed una base $\mathfrak{C} = \langle \mathsf{u}_1, ..., \mathsf{u}_e \rangle$ di $\mathbb{F}^{\times e}$, ad ogni trasformazione lineare del genere $\lceil\, \boldsymbol{V} \longmapsto_{Lin-\mathbb{F}} \boldsymbol{W} \,\rceil$, con $d := \dim(\boldsymbol{V})$ ed $e := \dim(\boldsymbol{W})$, risulta associata una matrice di profilo $e \times d$.

Dalla formula c10(2) si ricava anche che, facendo riferimento a una base di $\mathbb{F}^{\times d}$ e una base di $\mathbb{F}^{\times e}$, ogni matrice di $\mathsf{Mat}_{e,d;\mathbb{F}}$ individua una trasformazione lineare di $\lceil\, \boldsymbol{V} \longmapsto_{Lin-\mathbb{F}} \boldsymbol{W} \,\rceil$.
Matrici su un campo $\mathbb{F}$ e trasformazioni lineari-$\mathbb{F}$ sono quindi entità fortemente collegate.

Dalla c11(2) si ricava anche che l'azione di ogni trasformazione lineare tra spazi a finite dimensioni si può ottenere mediante calcoli matriciali. Preferenzialmente il vettore da trasformare, $\mathsf{v} \in \mathbb{F}^{\times d}$, lo si rappresenta con un vettore colonna di profilo $d \times 1$ formato dai suoi coefficienti $c_i$ nella sua espressione come combinazione lineare dei vettori della base canonica, mentre la trasformazione si tratta attraverso la sua matrice rappresentativa nelle due basi canoniche di $\mathbb{F}^{\times d}$ ed $\mathbb{F}^{\times e}$.

Il vettore trasformato viene allora rappresentato dal vettore colonna $e \times 1$ ottenuto come prodotto righe per colonne della suddetta matrice per il primo vettore colonna introdotto.

**G40 d.03** Diamo alcuni seguenti esempi di espressioni matriciali rappresentanti trasformazioni lineari.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\theta + \beta\tau \\ \gamma\theta + \delta\tau \end{bmatrix} \qquad , \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 21 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + a_{1,3}v_3 \\ a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + a_{2,3}v_3 \\ a_{3,1}v_1 + a_{3,2}v_2 + a_{3,3}v_3 \end{bmatrix}$$

Per familiarizzarsi con le rappresentazioni matriciali delle trasformazioni lineari può essere utile tenere presenti schemi visivi come i seguenti.

Si osserva inoltre che le matrici che individuano le trasformazioni di $\lceil\, \mathbb{F}^{\times d} \longmapsto \mathbb{F}^{\times e} \,\rceil$ sono in biiezione con le sequenze di $e \cdot d$ elementi del campo $\mathbb{F}$ e possono essere sottoposte a combinazioni lineari-$\mathbb{F}$; esse quindi possono essere considerate vettori di uno spazio vettoriale a $e \cdot d$-dimensioni.

**G40 d.04** Consideriamo trasformazioni lineari del genere $\lceil\, \mathbb{F}^{\times d} \longmapsto \mathbb{F}^{\times d} \,\rceil$, cioè operatori lineari entro $\mathbb{F}^{\times d}$ denotandole con lettere maiuscole dotate di cappuccio $\hat{L}$, $\hat{M}$, $\hat{N}$ o con simboli simili.
Le identificheremo con le loro matrici rappresentative, cioè con matrici quadrate di ordine $d$.

Per le matrici dell'identità e delle omotetie di fattore $\lambda \in \mathbb{F}$ abbiamo, risp.

$$\hat{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \hat{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} .$$

Le matrici dei proiettori relativi a vettori della base canonica sono

$$\boldsymbol{Prj}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{Prj}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots \qquad \boldsymbol{Prj}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} .$$

Le matrici dei proiettori sopra $\mathsf{Sscz}_{101}$, $\mathsf{Sscz}_{1011}$, $\mathsf{Sscz}_{01110}$ sono, risp.,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad , \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Trasformazioni piuttosto semplici sono anche le combinazioni lineari di proiettori sui sottospazi sottesi da una parte dei vettori della base canonica $D = \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{Prj}_i \, \lambda_i$ ; l'effetto di tale trasformazione è

$$\sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{Prj}_i \, \lambda_i \left( \sum_{j=1}^{d} \mathsf{e}_j \, v_j \right) \; = \; \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \, v_i \; . \tag{1}$$

Essa è rappresentata nella base canonica dalla matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_d \end{bmatrix} .$$

**G40 d.05** Esaminiamo come altre trasformazioni del genere $\lceil\, \mathbb{F}^{\times d} \longmapsto \mathbb{F}^{\times e} \,\rceil$ sono trattate mediante le matrici che le rappresentano nelle basi canoniche.

Matrici molto semplici sono quelle chiamate **diadi** o **matrici di transizione** che hanno tutte le entrate uguali a 0 eccettuata una uguale ad 1.

Denotiamo con $\mathsf{Diad}^{[e,d]}(j,i)$ la matrice binaria di profilo $e \cdot e$ avente come unica entrata uguale a 1 nella riga $j \in$ (e ] e nella colonna $i \in$ (d ], cioè la matrice le cui componenti sono espresse da

$$\Big(\mathsf{Diad}^{[e,d]}(j,i)\Big)_{k,h} \;:=\; \delta_{k,j}\,\delta_{h,i}, \text{ per } h \in \text{(d ] e } k \in \text{(e ] .}$$

La notazione precedente è piuttosto pesante e quando ci si concentra su un unico genere di trasformazioni lineari $\lceil\, \mathbb{F}^{\times d} \longrightarrow_{Lin} \mathbb{F}^{\times e} \,\rceil$ si può ridurre alla $\mathsf{Diad}(j,i)$.

Si dice che la trasformazione rappresentata dalla matrice diade $\mathsf{Diad}(j,i)$ avente la sola entrata uguale ad 1 nella casella $\langle j,i\rangle$ annichila tutti i vettori $\mathsf{e}_h$ della base canonica dello spazio dominio a eccezione di $\mathsf{e}_i$ e trasforma questo nel vettore $\mathsf{u}_j$ della base canonica dello spazio codominio.

Vediamo due esempi di diadi rappresentanti trasformazioni del genere $\lceil\, \mathbb{Q}^{\times 4} \longmapsto \mathbb{Q}^{\times 3} \,\rceil$:

$$\mathsf{Diad}(2,3)\mathsf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathsf{Diad}(3,4)\mathsf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_4 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

**G40 d.06** Le $e \cdot d$ matrici $\mathsf{Diad}^{[e,d]}(j,i)$ costituiscono la base canonica dello spazio vettoriale delle matrici su $\mathbb{F}$ di profilo $e \times d$.
In altre parole le $\mathsf{Diad}^{[e,d]}(j,i)$ rappresentano gli elementi di una base dello spazio delle trasformazioni lineari rappresentate dalle matrici di profilo $d \times e$.

Vediamo per esempio come si decompone una matrice $3 \times 2$ come combinazione lineare delle 6 matrici diadi $3 \times 2$:

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u .$$

Nel caso di trasformazione di uno spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ in se (caso in qui $e = d$), la diade corrispondente alla casella $\langle j,i\rangle$ trasforma il vettore della base canonica $\mathsf{e}_i$ nel vettore $\mathsf{e}_j$ e annichila ogni altro vettore della base; se in particolare $i = j$ la diade $\mathsf{Diad}(i,i)$ rappresenta il proiettore $\boldsymbol{Prj}_i$.

**G40 d.07** Altre interessanti matrici sono le **matrici permutative**, matrici quadrate binarie in biiezione con permutazioni di insiemi finiti di interi.

Consideriamo una permutazione $\mathsf{p}$ degli interi 1, 2, ..., $d$ $\langle_{prm} p_1, p_2, ..., p_d\rangle \;=:\; \mathsf{p} \in \mathsf{Perm}_{\text{(d ]}}$ .
Si definisce come matrice permutativa associata alla permutazione $\mathsf{p}$ la matrice binaria di profilo $d \times d$

$$\mathsf{Mprmt}(\mathsf{p}) \;:=\; [i,j \in \text{(d ]} :|\; \delta_{p_j,i}] .$$

Per esempio alla permutazione $\downarrow\langle 2,3,4,1\rangle$ risulta associata la matrice $\mathsf{Mprmt}\langle 2,3,4,1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Si constata che ogni matrice permutativa di profilo $d \times d$ si esprime nel modo seguente come somma di $d$ diadi

$$\mathsf{Mprmt}\big(\downarrow\langle p_1, ..., p_d\rangle\big) \;=\; \sum_{i=1}^{d} \mathsf{Diad}^{[d,d]}(i, \mathsf{p}_i) \;.$$

L'applicazione della matrice $\mathsf{Mprmt}(\mathsf{p})$ al vettore colonna binario che rappresenta $\mathbf{e}_i$ fornisce il vettore colonna binario che costituisce la sua colonna $i$ e questo, per la definizione della matrice, rappresenta il vettore $\mathbf{e}_{p_i}$. Per esempio

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;.$$

Dunque la matrice associata a una permutazione di interi effettua la corrispondente permutazione dei vettori della base canonica.

Si vede subito che la permutazione identità è rappresentata dalla matrice $\hat{\mathbf{1}}_d$.

Inoltre il prodotto di due permutazioni di interi $\mathsf{q} \circ_{rl} \mathsf{p}$ viene rappresentato dal prodotto righe per colonne delle matrici permutative rappresentanti le due permutazioni:

$$\mathsf{Mprmt}(\mathsf{q} \circ_{rl} \mathsf{p}) \;=\; \mathsf{Mprmt}(\mathsf{q}) \cdot \mathsf{Mprmt}(\mathsf{p}) \;.$$

Infatti

$$(\mathsf{q} \circ_{rl} \mathsf{p})(\mathbf{e}_i) \;=\; \mathsf{q}(\mathbf{e}_{\mathsf{p}(i)}) \;=\; \mathbf{e}_{\mathsf{q}(\mathsf{p}(i))} \;=\; \mathbf{e}_{\mathsf{q}_{p_i}} \;.$$

Inoltre la permutazione inversa è rappresentata dalla matrice trasposta:

$$\mathsf{Mprmt}(\mathsf{p}^{-\mathbf{1}}) \;=\; \big(\mathsf{Mprmt}(\mathsf{p})\big)^{\mathsf{T}} \;.$$

## G40 e. forme lineari e notazioni alla Dirac

**G40 e.01** Richiamiamo [B32a01 e B32a01] le notazioni concernenti i cosiddetti bra e ket, notazioni che Paul Dirac ha introdotte per gli spazi di Hilbert [T34], varianti infinitodimensionali degli spazi vettoriali nei quali viene formulata la `meccanica quantistica (wi)` [P70].
Qui ci limitiamo a utilizzarle per spazi vettoriali di dimensioni finite.

Nel seguito consideriamo le variabili intere positive $i, j, h$ e $\overline{h}$ che corrono in intervalli come $(\mathrm{d}\,]$ ed $(\mathrm{e}\,]$.

Ogni vettore $\mathsf{e}_i$ della base canonica di $\mathbb{F}^{\times d}$ assumiamo che sia equivalentemente identificato anche dal simbolo $\big|i\big\rangle$ al quale viene dato il nome di **ket** $i$.

La base canonica di $\mathbb{F}^{\times d}$ si può dunque scrivere $\mathfrak{B} \;=\; \big\{\big|1\big\rangle, \big|2\big\rangle, ..., \big|d\big\rangle\big\}$ .
Dato che la componente $h$-esima del vettore $\mathsf{e}_i$ è $\delta_{i,h}$, si può scrivere

$$\big|i\big\rangle \;:=\; \mathsf{e}_i \;=\big\langle h \in (\mathrm{d}\,] :|\; \delta_{i,h}\big\rangle \;=:\; \delta_{(\mathrm{d}\,],i} \;. \tag{1}$$

Il vettore ottenuto applicando a $\big|i\big\rangle$ la trasformazione lineare $L$, cioè $L\left(\big|i\big\rangle\right) = L_{\mathrm{i}}\big|i\big\rangle$ , assumiamo sia individuato anche dalla scrittura concisa $L\,\big|i\big\rangle$ .

Ogni matrice $A$ di profilo $e \times d$ sul campo $\mathbb{F}$ si può considerare ottenuta sia affiancando $d$ vettori colonna formati da $e$ componenti, sia sovrapponendo $d$ vettori riga ciascuno di $e$ componenti.
In particolare la matrice identità di ordine $d$, che scriviamo $\mathbf{1}_d$, si può considerare ottenuta sia dalla sovrapposizione dei $d$ vettori riga corrispondenti ai successivi vettori della base canonica sia, trasposta-mente, come l'affiancamento dei corrispondenti vettori colonna; quindi si può scrivere

$$\mathbf{1}_d \;=\; \big[i, j \in (\mathrm{d}\,] :|\; \delta_{i,j}\big] \;.$$

**G40 e.02** Le trasformazioni del genere $\lceil\, \mathbb{F}^{\times d} \longmapsto_{Lin-\mathbb{F}} \mathbb{F} \,\rceil$ le chiamiamo **funzionali lineari** dello spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ o anche, secondo tradizione, **forme lineari** di $\mathbb{F}^{\times d}$.

Ogni $\mathsf{f}$ funzionale lineare su $\mathbb{F}^{\times d}$, come accade a tutte le trasformazioni lineari di un qualsiasi genere $\lceil\, \mathbb{F}^{\times d} \longmapsto \mathbb{F}^{\times e} \,\rceil$, si può individuare a partire dalla sequenza dei valori che esso associa ai successivi vettori della base canonica $\big\langle \mathsf{f}(\mathsf{e}_1), f(\mathsf{e}_2), ..., f(\mathsf{e}_d)\big\rangle$; infatti il valore assunto dalla $\mathsf{f}$ in corrispondenza del generico vettore $\mathsf{v} = \sum_{i=1}^{d} v_i\, \mathsf{e}_i$ grazie alla linearità è dato da

$$\mathsf{f}(\mathsf{v}) \;=\; \mathsf{f}\left(\sum_{i=1}^{d} v_i\, \mathsf{e}_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{d} v_i\, \mathsf{f}(\mathsf{e}_i) \;. \tag{1}$$

Qui emerge che le forme lineari su $\mathbb{F}^{\times d}$ si possono rappresentare mediante matrici $1 \times d$ (vettori riga), e quindi mediante sequenze di $d$ elementi del campo, come accade ai vettori di $\mathbb{F}^{\times d}$.

Si osserva che le forme lineari, come tutte le trasformazioni lineari di un genere $\lceil\, \mathbb{F}^{\times d} \longmapsto \mathbb{F}^{\times e} \,\rceil$, possono essere sottoposte a combinazioni lineari e di conseguenza godono delle proprietà [Vsp 1]—[Vsp 5], ovvero costituiscono uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$.

**G40 e.03** Il collegamento tra vettori di uno spazio vettoriale con base finita ed i suoi funzionali lineari va meglio precisato. Ad ogni vettore $\mathsf{v}$ dello spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ si associa biunivocamente un funzionale lineare che chiamiamo **funzionale duale del vettore** o **forma duale del vettore**.
Questa associazione chiediamo che sia lineare-$\mathbb{F}$ e la chiamiamo **dualità lineare**, termine che nell'ambito dell'algebra lineare semplifichiamo con **dualità-lin**.

Per precisarla facciamo riferimento alla base canonica $\{|1\rangle, |2\rangle, ..., |d\rangle\}$; al ket $|i\rangle$ si associa il funzionale lineare che, seguendo Dirac, viene chiamato **bra**, viene denotato con la scrittura $\langle i|$ e viene definito ponendo:

$$\langle i| \;:=\; \left\lceil\, \mathbf{v} = \sum_{h=1}^{d} |h\rangle v_h \in \mathbb{F}^{\times d} \;\; \mapsto \;\; v_i \,\right\rceil \;. \tag{2}$$

Abbreviamo la scrittura dei valori assunti dal funzionale $\langle i|$ in corrispondenza dei vari ket $\langle i|(|h\rangle)$ con la più concisa $\langle i \,|\, h\rangle$.
Per la definizione deve essere $\forall i, h = 1, 2, ..., d \;:\; \langle i \,|\, h\rangle \;=\; \delta_{i,h}$.
Il funzionale lineare duale del generico vettore che facendo riferimento alla base canonica scriviamo $|\mathbf{w}\rangle = \sum_{i=1}^{d} |i\rangle\, w_i$ , la denotiamo con $\langle \mathbf{w}|$. Esso si ottiene ricorrendo alla inearità-$\mathbb{F}$ dell'applicazione dualità:

$$\langle \mathbf{w}| \;:=\; \sum_{i=1}^{d} \langle i| w_i \;=\; \left\lceil\, \sum_{h=1}^{d} |h\rangle v_h \;\; \mapsto \;\; \sum_{i=1}^{d} w_i \langle i| \left( \sum_{h=1}^{d} |h\rangle v_h \right) \,\right\rceil \;=$$

$$\left\lceil\, \sum_{h=1}^{d} |h\rangle v_h \;\; \mapsto \;\; \sum_{i,h=1}^{d} w_i \langle i \,|\, h\rangle v_h \,\right\rceil \;=\; \left\lceil\, \sum_{h=1}^{d} v_h |h\rangle \;\; \mapsto \;\; \sum_{i=1}^{d} w_i v_i \,\right\rceil \;. \tag{3}$$

A questo punto abbreviamo $\langle \mathbf{w}|(|\mathbf{v}\rangle)$ con $\langle \mathbf{w} \,|\, \mathbf{v}\rangle$, estendendo l'abbreviazione adottata per gli elementi delle basi. Possiamo quindi scrivere in modo compatto:

$$\forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^{\times d} \;:\; \langle \mathbf{w} \,|\, \mathbf{v}\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{d} w_i \, v_i \;. \tag{4}$$

**G40 e.04** L'insieme delle forme lineari sopra uno spazio finitodimensionale $\boldsymbol{V}$ sul campo $\mathbb{F}$ munito della somma e della moltiplicazione per elementi di $FMb$ si dice **spazio vettoriale duale** di $\boldsymbol{V}$ e in genere si denota con $\boldsymbol{V}^*$.
Gli elementi di $\mathbb{F}^{\times d^*}$, spazio duale di $\mathbb{F}^{\times d}$ sono raggiunti dai vettori di $\boldsymbol{V}$ applicando la dualità lineare $\lceil\, |\mathbf{v}\rangle \;\mapsto\; \langle \mathbf{v}| \,\rceil$ .

La dualità tra spazi finitodimensionali è una biiezione che al livello delle rappresentazioni mediante sequenze viene ottenuta dalla corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei vettori colonna (che rappresentano i ket $|\mathbf{v}\rangle$) e l'insieme dei vettori riga con ugual numero di componenti che rappresentano i bra $\langle \mathbf{v}|$ loro duali. Essa quindi si riduce a una trasposizione.

A questo punto si può sospettare che l'introduzione della dualità sia solo una inutile complicazione formale. Vedremo invece che la distinzione tra vettori e funzionali lineari permette di servirsi di espressioni algoritmicamente efficaci. Inoltre la dualità lineare, che come si è visto, si può applicare a ogni spazio vettoriale finitodimensionale sopra un qualsiasi campo, e la sua adozione può portare sensibili vantaggi riguardanti l'espressività e la maneggevolezza delle formule per spazi vettoriali infinitodimensionali [e.g. gli spazi di Hilbert in T34].
La dualità in questi spazi risulta sensibilmente più impegnativa di quella nelle dimensioni finite e pone problemi tutt'altro che banali.

**G40 e.05** Conviene ora riprendere con qualche variante notazionale la considerazioni sulla possibilità di determinare ogni forma lineare dalle sue azioni sui vettori di una base, come corrispondente della possibilità di determinare ogni vettore attraverso le sue componenti in una base.

Consideriamo un vettore (ket) e identifichiamolo con il vettore colonna che consideriamo suo rappresentante canonico.

$$(1) \qquad \big|\mathsf{v}\big\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{d} \big|i\big\rangle\, v_i \;=\; \sum_{i=1}^{d} \big|i\big\rangle\, \big\langle i\,\big|\,\mathsf{v}\big\rangle \;=\; \begin{bmatrix} \big\langle 1\,\big|\,\mathsf{v}\big\rangle \\ \big\langle 2\,\big|\,\mathsf{v}\big\rangle \\ \vdots \\ \big\langle d\,\big|\,\mathsf{v}\big\rangle \end{bmatrix} \quad .$$

Consideriamo anche un funzionale lineare (bra) identificandolo con il corrispondente vettore riga che consideriamo suo rappresentante canonico.

$$(2) \qquad \big\langle\mathsf{w}\big| \;=\; \sum_{j=1}^{d} w_i\, \big\langle j\big| \;=\; \sum_{j=1}^{d} \big\langle\mathsf{w}\,\big|\,j\big\rangle \;=\; \big[\,\big\langle\mathsf{w}\,\big|\,1\big\rangle \quad \big\langle\mathsf{w}\,\big|\,2\big\rangle \quad \ldots \quad \big\langle\mathsf{w}\,\big|\,d\big\rangle\,\big] \quad .$$

Il valore assunto dal bra $\big\langle\mathsf{w}\big|$ in corrispondenza del ket $\big|\mathsf{v}\big\rangle$ risulta quindi espresso dal prodotto righe per colonne del vettore riga del bra con il vettore colonna del ket.

Inoltre l'applicazione dualità viene rappresentata dalla semplice trasformazione dei vettori riga nei vettori colonna loro trasposti.

**G40 e.06** Vediamo come alcune trasformazioni riguardanti la base canonica si possono esprimere vantaggiosamente mediante i bra e i ket.
Definiamo per ogni $i = 1, 2, ..., d$ la trasformazione lineare

$$\big|i\big\rangle\big\langle i\big| \;:=\; \Big\lceil\; \sum_{h=1}^{d} \big\langle i\,\big|\,h\big\rangle v_h \in \mathbb{F}^{\times d} \;\;\mapsto\;\; \big|i\big\rangle \left( \big\langle i\big| \left( \sum_{h=1}^{d} \big\langle i\,\big|\,h\big\rangle v_h \right) \right) \;\Big\rceil \;=$$

$$\Big\lceil\; \sum_{h=1}^{d} \big|h\big\rangle v_h \;\;\mapsto\;\; \big|i\big\rangle \sum_{h=1}^{d} \big\langle i\,\big|\,h\big\rangle v_h \;\Big\rceil \;=\; \Big\lceil\; \sum_{h=1}^{d} \big|h\big\rangle v_h \mapsto \big|i\big\rangle v_i \;\Big\rceil \;\in\; \big\lceil\, \mathbb{F}^{\times d} \longmapsto\!\triangleright\, \mathbb{F}\big|i\big\rangle \,\big\rceil \;.$$

Questo operatore quindi è il proiettore relativo ad $\mathsf{e}_i$:

$$(1) \qquad \big|i\big\rangle\big\langle i\big| = \boldsymbol{Prj}_i \;.$$

Più in generale, per ogni $i, j = 1, 2, ..., d$ si definisce come **operatore di transizione** $i - j$
(2)

$$\big|j\big\rangle\big\langle i\big| \;:=\; \Big\lceil\; \sum_{h=1}^{d} \big|h\big\rangle v_h \in \mathbb{F}^{\times d} \;\mapsto\; \big|j\big\rangle \sum_{h=1}^{d} \big\langle i\,\big|\,h\big\rangle v_h \;\Big\rceil \;=\; \Big\lceil\; \sum_{h=1}^{d} \big|h\big\rangle v_h \;\mapsto\; \big|j\big\rangle v_i \;\Big\rceil \;\in\; \big\lceil\, \mathbb{F}^{\times d} \longmapsto\!\triangleright\, \big|j\big\rangle\mathbb{F} \,\big\rceil \;.$$

Per $i \neq j$ questo operatore quindi ha l'effetto della proiezione $\boldsymbol{Prj}_j$ seguita dalla trasformazione (rotazione) che porta il raggio $\big|j\big\rangle\mathbb{F}$ su $\big|i\big\rangle\mathbb{F}$, cioè è la diade $\mathsf{Diad}(j, i)$ [d05] .

**G40 e.07** Le notazioni di Dirac consentono di facilitare vari sviluppi formali anche per le trasformazioni lineari tra due spazi vettoriali $\mathbb{F}^{\times d}$ e $\mathbb{F}^{\times e}$ di dimensioni possibilmente diverse.

Ci proponiamo di trattare una tale trasformazione $\hat{L} \in \big\lceil\, \mathbb{F}^{\times d} \longmapsto_{lin-\mathbb{F}} \mathbb{F}^{\times e} \,\big\rceil$ facendo riferimento alle basi canoniche ordinate dei due spazi.
Mentre per la prima usiamo la solita notazione $\big\langle\big|1\big\rangle, \big|2\big\rangle, ..., \big|d\big\rangle\big\rangle$ , per la base del secondo spazio scriviamo $\big\langle\big|\overline{1}\big\rangle, \big|\overline{2}\big\rangle, ..., \big|\overline{e}\big\rangle\big\rangle$ : i ket con il numero progressivo sovrabbarrato sono quindi vettori $e$-dimensionali.

Risultano immediate e utili le decomposizioni mediante proiettori delle identità di $\mathbb{F}^{\times d}$ e di $\mathbb{F}^{\times e}$:

$$(1) \qquad \hat{\mathbf{1}}_d = \sum_{i=1}^{d} \big|i\big\rangle\big\langle i\big| \qquad \text{e} \qquad \hat{\mathbf{1}}_e = \sum_{\overline{j}=1}^{e} \big|\overline{j}\big\rangle\big\langle\overline{j}\big| \;.$$

Il formalismo dei bra e dei ket consente semplificazioni di scrittura consistenti nell'eliminazione di parentesi di argomenti di funzioni.
Dopo aver alleggerita la scrittura $\hat{L}(\big|\mathsf{v}\big\rangle)$ nella $\hat{L}\big|\mathsf{v}\big\rangle$, conveniamo di semplificare anche la scrittura $\big\langle\mathsf{w}\big|\left(\hat{L}(\big|\mathsf{v}\big\rangle)\right)$ riducendola alla $\big\langle\mathsf{w}\big|(\hat{L}\big|\mathsf{v}\big\rangle)$ e ancor più alla $\big\langle\mathsf{w}|\hat{L}|\mathsf{v}\big\rangle$ .

Di conseguenza semplifichiamo una espressione come la $\big\langle j\big|(\mathsf{v})$ nella $\big\langle j\,\big|\,\mathsf{v}\big\rangle$. Inoltre le entrate della matrice che rappresenta la trasformazione $\hat{L}$ facendo riferimento alle basi canoniche degli spazi dominio e codominio sono denotate con $\big\langle\overline{j}|\hat{L}|i\big\rangle$.

Con questo formalismo l'azione di una trasformazione sopra un vettore $\mathsf{v}$ espressa dalla $\mathsf{d01}(2)$ si riscrive come

$$\hat{L}\big|\mathsf{v}\big\rangle \;=\; \mathbf{1}_e\,\hat{L}\,\mathbf{1}_d\,\big|\mathsf{v}\big\rangle \;=\; \sum_{\overline{j}=1}^{e}|\overline{j}\big\rangle\big\langle\overline{j}|\hat{L}\left(\sum_{i=1}^{d}|i\big\rangle\big\langle i|(\big|\mathsf{v}\big\rangle)\right) \;=\; \sum_{\overline{j}=1}^{e}\sum_{i=1}^{d}|\overline{j}\big\rangle\,\big\langle\overline{j}|\hat{L}|i\big\rangle\,\big\langle i\,\big|\,\mathsf{v}\big\rangle\ . \tag{2}$$

Osserviamo che in questo sviluppo compaiono i vettori delle basi canoniche di due spazi e dei loro duali contraddistinti dall'uso di lettere, per i primi lettere sovrabbarrate, per le seconde lettere senza segni diacritici; inoltre si sottintende la convenzione che i due tipi di indici corrono suintervalli numerici diversi.

**G40 e.08 Eserc.** Si consideri una permutazione dell'insieme $\{1,2,...,d\}$ $\mathsf{p}=\big\langle_{perm}p_1,p_2,...,p_d\big\rangle$ e la corrispondente matrice permutativa $\mathsf{Mprmt}(\mathsf{p})$; dimostrare che

$$\mathsf{Mprmt}\big\langle p_1,p_2,...,p_d\big\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{d}\big|p_i\big\rangle\big\langle i\big|\ .$$

## G40 f. prodotti di trasformazioni lineari

**G40 f.01** Per esprimere i prodotti di composizione di trasformazioni lineari-$\mathbb{F}$ è possibile servirsi del prodotto delle matrici che le rappresentano in una qualsiasi base (che qui ci limitiamo a supporre canonica).

Preliminarmente dobbiamo precisare che per la composizione di due trasformazioni lineari $M$ ed $L$ qui ci basiamo sulla definizione

$$M \circ_{rl} L \;:=\; \lceil\!\lceil\, \mathsf{v} \mapsto M(L(\mathsf{v}))\, \rceil\!\rceil \quad \text{ovvero della} \quad (M \circ_{rl} L)\mathsf{v} \;:=\; M(L(\mathsf{v}))\;. \tag{1}$$

Inoltre conveniamo di scrivere $\mathsf{w} := L(\mathsf{v})$ e $\mathsf{x} := M(\mathsf{w}) = M(L(\mathsf{v}))$.

Cominciamo con il considerare due trasformazioni lineari-$\mathbb{F}$ entro $\mathbb{F}^{\times d}$ e riferiamo questo spazio alla base canonica che ci riserviamo di denotare con divere notazioni equivalenti:

$$\{i \in (\mathrm{d}\,] :| \,|i\rangle\} \;=\; \{h \in (\mathrm{d}\,] :| \,|h\rangle\} \;=\; \{j \in (\mathrm{d}\,] :| \,|j\rangle\}\;.$$

Ci serviremo di più scritture anche per decomporre l'identità dello spazio $d$-dimensionale:

$$\hat{\mathbf{1}}_d \;=\; \sum_{i=1}^{d} |i\rangle\langle i| \;=\; \sum_{h=1}^{d} |h\rangle\langle h| \;=\; \sum_{j=1}^{d} |j\rangle\langle j|\;. \tag{2}$$

**G40 f.02** Al fine di esprimere in relazione alla base le componenti del vettore $|\mathsf{x}\rangle$ si utilizza il seguente sviluppo che si richiede valga per ogni $j = 1, 2, ..., d$ e che si serve di due delle precedenti decomposizioni dell'identità:

$$\langle j\,|\,\mathsf{x}\rangle \;=\; \langle j\,|\,(M \circ L)(\mathsf{v})\rangle \;=\; \langle j|M\hat{\mathbf{1}}_d L\hat{\mathbf{1}}_d|\mathsf{v}\rangle \;=\; \sum_{h,i=1}^{d} \langle j|M|h\rangle\,\langle h|L|i\rangle\,\langle i\,|\,\mathsf{v}\rangle\;. \tag{1}$$

Questa catena di relazioni risulta più leggibile se viene rappresentata mediante matrici: al primo membro abbiamo una matrice colonna $d \times 1$, all'ultimo membro il prodotto di due matrici $d \times d$ e di una matrice colonna $d \times 1$.

La associatività del prodotto di matrici rende chiaro il collegamento tra le matrici quadrate e le due trasformazioni entro $\mathbb{F}^{\times d}$ (cioè i due operatori lineari, ovvero i due endomorfismi lineari) $L$ ed $M$ e i vettori colonna che sono posti in corrispondenza.

La precedente formula mostra che la composizione di trasformazioni lineari si può trattare fedelmente mediante il prodotto di matrici, operazione effettiva concretamente implementabile.

**G40 f.03** Estendiamo le considerazioni precedenti considerando che $L$ sia una trasformazione lineare-$\mathbb{F}$ di uno spazio $\boldsymbol{V}$ $d$-dimensionale in uno spazio $\boldsymbol{W}$ $e$-dimensionale e che $U$ sia una trasformazione lineare-$\mathbb{F}$ dello spazio $\boldsymbol{W}$ in uno spazio $\boldsymbol{X}$ $f$-dimensionale.

Fissate una base per $\boldsymbol{V}$, una per $\boldsymbol{W}$ e una per $\boldsymbol{X}$, gli omomorfismi di $\lceil\!\lceil\, \boldsymbol{V} \longmapsto \boldsymbol{W}\, \rceil\!\rceil$ sono rappresentati fedelmente da matrici di profilo $e \times d$, mentre gli omomorfismi di $\lceil\!\lceil\, \boldsymbol{W} \longmapsto \boldsymbol{X}\, \rceil\!\rceil$ sono rispecchiati da matrici $f \times e$.

Ora, oltre a denotare con $\{i \in (\mathrm{d}\,] :| \,|i\rangle\}$ una base per $\boldsymbol{V}$, denotiamo con $\{\bar{j} \in (\mathrm{e}\,] :| \,|\bar{j}\rangle\}$ una base per $\boldsymbol{W}$ e denotiamo con $\{k' \in (\mathrm{f}\,] :| \,|k'\rangle\}$ una base per $\boldsymbol{X}$. Queste scelte di adottare simboli ben

distinguibili per gli indici correnti riguardanti spazi diversi consentono di evidenziare il fatto che si trattano variabili che corrono sulle sequenze di vettori di tre diverse basi.

Queste nelle applicazioni potrebbero essere definite o costruite con procedimenti molto diversi.

**G40 f.04** Introdotti come per il caso dello spazio unico $\mathsf{w} := L(\mathsf{v})$ ed $\mathsf{x} := M(\mathsf{w})$, vogliamo trovare un'espressione delle componenti del ket $\big|\mathsf{x}\big\rangle$ di $\boldsymbol{X}$, cosa che si ottiene con uno sviluppo molto simile al precedente. Per farlo dobbiamo utilizzare la decomposizione canonica dell'identità di $\boldsymbol{W}$ e la decomposizione dell'identità di $\boldsymbol{V}$:

$$\mathsf{Id}_{\boldsymbol{W}} = \sum_{\overline{h}=1}^{e} |\overline{h}\rangle\langle\overline{h}| \qquad \text{e} \qquad \mathsf{Id}_{\boldsymbol{V}} = \sum_{j=1}^{d} |j\rangle\langle j| \ . \tag{1}$$

In tal modo si ottiene lo sviluppo valido per ogni $k' = 1, 2, ..., f$:

$$\big\langle k' \,\big|\, \mathsf{x}\big\rangle = \big\langle k'|M \circ L|\mathsf{v}\big\rangle = \big\langle k'|(M \circ \mathsf{Id}_{\boldsymbol{W}} \circ L \circ \mathsf{Id}_{\boldsymbol{V}})|\mathsf{v}\big\rangle = \sum_{\overline{j}=1}^{e}\sum_{i=1}^{d}\big\langle k'|M|\overline{j}\big\rangle\big\langle\overline{j}|L|i\big\rangle\big\langle i \,\big|\, \mathsf{v}\big\rangle \ .$$

Anche questa espressione conviene interpretarla come prodotto di matrici: qui si hanno due matrici rettangolari: la più a sinistra di profilo $f \times e$ riguarda la trasformazione da $\boldsymbol{W}$ ad $\boldsymbol{X}$ (la seconda da effettuare); la più a destra di profilo $e \times d$ riguarda la trasformazione da $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{W}$ (la prima da eseguire). Si hanno inoltre il vettore colonna $d \times 1$ rappresentante il vettore di partenza $\mathsf{v}$ e il vettore colonna $f \times 1$ rappresentante il vettore di arrivo $\mathsf{x}$.

/input pG40f04

## G40 g. cambiamenti di base

**G40 g.01** Consideriamo uno spazio vettoriale a $d$ dimensioni $\boldsymbol{V}$ e una sua base ordinata $\mathfrak{B} = \langle \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_d \rangle$; denotiamo inoltre con $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{d} v_j \, \mathbf{b}_j$ un suo generico vettore.
Per ogni vettore $\mathbf{b}_h$ della $\mathfrak{B}$ si definisce come **proiezione sulla direzione $\mathbf{b}_h$** del vettore $\mathbf{v}$ il vettore proporzionale al vettore di base $v_h \, \mathbf{b}_h$.

Più in generale si può considerare un sottoinsieme $\mathfrak{D}$ della base, $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}$, il corrispondente insieme di indici $D \subseteq \{1, 2, ..., d\}$ e il sottospazio $\boldsymbol{span}(\mathfrak{D})$ sotteso dai vettori di $\mathfrak{D}$; si tratta evidentemente di un sottospazio sscz. Si definisce come **proiezione sul sottospazio $\boldsymbol{span}(\mathfrak{D})$** di $\mathbf{v}$ il vettore $\sum_{h \in D} \mathbf{b}_h \, v_h$.

Di un vettore generico $\mathbf{v}$ si può definire la proiezione su ogni sottospazio. Infatti in ogni sottospazio $S$ si può individuare una base e ogni base dello spazio ambiente può essere modificata in una base un sottoinsieme della quale costituisce una base di $S$.
Questa base contiene meno di $d$ vettori sse il sottospazio è proprio.

I proiettori sui diversi sottospazi sscz propri sono operatori lineari non invertibili.
Infatti due vettori che differiscono solo per una componente nella base $\mathfrak{B}$ non facente parte della $\mathfrak{D}$ hanno la stessa proiezione.

**G40 g.02** Consideriamo un automorfismo $\mathsf{P} \in \lceil \boldsymbol{V} \lhd\!\!-\!\!\rhd_{Lin} \boldsymbol{V} \rceil$ e la sua azione sopra una base ordinata $\mathfrak{B} = \langle \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_d \rangle$ di $\boldsymbol{V}$, azione individuata dalla sequenza dei vettori di riferimento trasformati $\mathfrak{C} = \langle \mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_d \rangle$ con $\mathbf{c}_i := \mathsf{P}(\mathbf{b}_i)$ per $i = 1, ..., d$. Anche questa sequenza di vettori costituisce una base ordinata di $\boldsymbol{V}$.
Infatti per un generico $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{d} \mathbf{b}_i \, \nu_i \in \boldsymbol{V}$ si ha $\mathsf{P}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{d} \mathsf{P}(\mathbf{b}_i) \, \nu_i$ .
Inoltre per ogni $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{d} \mathbf{b}_i \, \omega_i \in \boldsymbol{V}$ abbiamo $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{d} \mathsf{P}(\mathbf{b}_i) \, \nu_i$ .

Viceversa, data una coppia $\langle \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \rangle$ di basi ordinate di $\boldsymbol{V}$ con $\mathfrak{B} = \langle \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_d \rangle$ e $\mathfrak{C} = \langle \mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_d \rangle$ , chiamiamo **automorfismo associato** a tale coppia la trasformazione $\mathbf{Autlin}_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}$ definita ponendo

$$\forall \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{d} \mathbf{b}_i \, \nu_i \in \boldsymbol{V} \; : \; Autlin_{\mathfrak{C},\mathfrak{B}}(\mathbf{v}) \; := \; \sum_{i=1}^{d} \mathbf{c}_i \, \nu_i \; . \tag{1}$$

Che tale trasformazione sia un automorfismo di $\boldsymbol{V}$ è evidente.

La trasformazione $\mathbf{Autlin}_{\mathfrak{C},\mathfrak{B}}$ si dice anche **trasformazione della base $\mathfrak{B}$ nella $\mathfrak{C}$**.
Le trasformazioni di questo genere vengono chiamate spesso **cambiamenti di base**.

**G40 g.03** Osserviamo che i deponenti che identificano i cambiamenti di base dicono che si sta trattando il passaggio dalla base scritta a destra alla base scritta a sinistra.

**(1) Prop.**: Il cambiamento di base $\boldsymbol{C}_{\mathfrak{C},\mathfrak{B}} := \mathbf{Autlin}_{\mathfrak{C},\mathfrak{B}}$ è una trasformazione invertibile e la sua trasformazione inversa è la

$$\boldsymbol{C}_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} \; = \; \mathbf{Autlin}_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} \left\lceil \; \sum_{i=1}^{d} \mathbf{c}_h \, w_h \; \mapsto \; \sum_{h=1}^{d} \mathbf{b}_h \, w_h \; \right\rceil \; .$$

**Dim.:** Per ogni $i = 1, ..., d$ si ha $\boldsymbol{C}_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}(\mathsf{c}_i) = \mathsf{b}_i$, mentre $\boldsymbol{C}_{\mathfrak{C},\mathfrak{B}}(\mathsf{b}_i) = \mathsf{c}_i$; dalla linearità delle trasformazioni e dalla possibilità di esprimere ogni vettore di $\boldsymbol{V}$ come combinazione lineare dei vettori di ciascuna delle due basi segue l'asserto ∎

Per due basi qualsiasi $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ di uno spazio $d$-dimensionale dalle uguaglianze

$$\boldsymbol{C}_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} \circ_{rl} \boldsymbol{C}_{\mathfrak{C},\mathfrak{B}} \;=\; \boldsymbol{C}_{\mathfrak{C},\mathfrak{B}} \circ_{rl} C_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} \;=\; \hat{\mathbf{1}}_d \;, \tag{1}$$

segue che la matrice che rappresenta inuna qualsiasi base il cambiamento dalla base $\mathfrak{B}$ alla base $\mathfrak{C}$ è la inversa della matrice che rappresenta il cambiamento inverso dalla base $\mathfrak{C}$ alla base $\mathfrak{B}$.

Se si considerano più di due basi si hanno uguaglianze concernenti successivi cambiamenti di base. Se denotiamo con $\mathfrak{D}$ una terza base ordinata $\langle \mathsf{d}_1, ..., \mathsf{d}_d \rangle$ dello spazio si trova la seguente uguaglianza

$$\boldsymbol{C}_{\mathfrak{D},\mathfrak{C}} \circ_{rl} \boldsymbol{C}_{\mathfrak{C},\mathfrak{B}} \;=\; \boldsymbol{C}_{\mathfrak{D},\mathfrak{B}} \;.$$

**G40 g.04** Particolari cambiamenti di base sono le permutazioni delle componenti di una base ordinata. Un tale cambiamento di base viene rappresentato nella base ordinata che viene permutata da una matrice permutativa.

Per esempio la permutazione della base canonica di $\mathbb{R}^{\times 3}$ $\mathfrak{B} := \langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3 \rangle$ che trasforma la precedente sequenza di vettori nella $\langle \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3, \mathsf{e}_1 \rangle$ nella stessa base $\mathfrak{B}$ è rappresentata dalla matrice

$$\left[ i, j = 1, 2, 3 \,\middle|\, \langle j | \boldsymbol{C}_{\langle \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3, \mathsf{e}_1 \rangle, \langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3 \rangle} | i \rangle \right] \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \;=\; \mathbf{Mprmt}(1\ 2\ 3) \;. \tag{1}$$

In generale se $\mathsf{p}$ denota una permutazione qualsiasi di $\{1, ..., d\}$, si può scrivere

$$\boldsymbol{C}_{\mathsf{p}(\mathfrak{B}),\mathfrak{B}} \;=\; \sum_{h=1}^{d} |\mathsf{p}(\mathsf{b}_h)\rangle\langle \mathsf{b}_h| \;=\; \sum_{h=1}^{d} |\mathsf{b}_{\mathsf{p}(h)}\rangle\langle \mathsf{b}_h| \;=\; \Big(\mathbf{Mprmt}(\mathsf{p})\Big)_{j,i} \;. \tag{2}$$

**G40 g.05** Vogliamo ora utilizzare le notazioni di Dirac per le espressioni che governano i cambiamenti di base.

Scriviamo quindi $|h\rangle$ invece di $\mathsf{b}_h$, con $h = 1, ..., d$, per il generico vettore della base $\mathfrak{B}$ e $|\overline{h}\rangle$ invece di $\mathsf{c}_{\overline{h}}$, con $\overline{h} = 1, ..., d$, per il generico vettore dellabase $\mathcal{C}$.

I collegamenti tra le due basi sono espressi da

$$\boldsymbol{C}_{\mathfrak{C},\mathfrak{B}} |h\rangle \;=\; |\overline{h}\rangle \quad \text{e} \quad \boldsymbol{C}_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} |\overline{h}\rangle \;=\; |h\rangle \quad \text{per} \qquad h = 1, ..., d \;.$$

I vettori della base $\mathfrak{C}$ nella base $\mathfrak{B}$ e i vettori della base $\mathfrak{B}$ nella base $\mathfrak{C}$ sono espressi, risp., dalle uguaglianze

$$|\overline{h}\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{d} |i\rangle\langle i \,|\, \overline{h}\rangle \quad \text{e} \quad |h\rangle \;=\; \sum_{\overline{i}=1}^{d} |\overline{i}\rangle\langle i \,|\, h\rangle \;.$$

La matrice che rappresenta $\boldsymbol{C}_{\mathfrak{C},\mathfrak{B}}$ nella base $\mathfrak{B}$ è

$$\Big[ h, i \in (\mathrm{d}\ ] :| \ \langle h | \boldsymbol{C}_{\mathfrak{C},\mathfrak{B}} | i \rangle \Big] \;=\; \Big[ h, i \in (\mathrm{d}\ ] :| \ \langle h \,|\, \overline{i} \rangle \Big] \;.$$

La matrice rappresenta $\boldsymbol{C}_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}$ nella base $\mathfrak{B}$ è invece

$$\Big[ \overline{h}, \overline{i} \in (\mathrm{d}\ ] :| \ \langle \overline{h} | \boldsymbol{C}_{\mathfrak{B},\mathfrak{C}} | \overline{i} \rangle \Big] \;=\; \Big[ \overline{h}, \overline{i} \in (\mathrm{d}\ ] :| \ \langle \overline{h} \,|\, i \rangle \Big] \;.$$

Queste matrici quindi sono l'una la trasposta dell'altra; vedremo in G41f che si tratta delle cosiddette matrici ortogonali.

**G40 g.06** Consideriamo due spazi $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ aventi lo stesso numero di dimensioni, che denotiamo con $d$; consideriamo anche un qualsiasi isomorfismo $P \in \lceil \boldsymbol{V} \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd_{Lin} \boldsymbol{W} \rceil$ .

Fissata una base $\mathfrak{B}$ di $\boldsymbol{V}$, l'isomorfismo $P$ la trasforma in una base di $\boldsymbol{W}$.

Se non si presta attenzione alle costruzioni che hanno portato ai due spazi, dato che essi sono isomorfi, si può adottare una astrazione che giustifichi l'adozione di un linguaggio secondo il quale i due spazi possono essere identificati.

A questo livello di considerazioni ogni isomorfismo di spazi vettoriali con un dato numero $d$ di dimensioni si può identificare con un automorfismo lineare e quindi con un cambiamento di una base di $d$ vettori in un'altra.
Evidentemente questo genere di astrazioni consente di organizzare molti calcoli con un approccio più organico.

## G40 h. nucleo, nullità e rango di trasformazioni e di matrici

**G40 h.01** Consideriamo un omomorfismo lineare $L \in \lceil\!\lceil \boldsymbol{V} \longrightarrow_{Lin} \boldsymbol{W} \rceil\!\rceil$ e ricordiamo la distinzione tra omomorfismi suriettivi (ossia epimorfismi) e nonsuriettivi e la distinzione tra omomorfismi iniettivi (ossia invertibili) e noniniettivi.
Ricordiamo anche che la trasformazione lineare $L$ manda ogni sottospazio $\boldsymbol{S}$ di $\boldsymbol{V}$ in un sottospazio del suo codominio, ossia ricordiamo la relazione $L(\boldsymbol{S}) \leq_{Vsp} \mathsf{cod}(L)$ .

È spesso importante saper distinguere il caso in cui $\dim(L(\boldsymbol{S})) = \dim(\boldsymbol{S})$ da quello in cui invece $\dim(L(\boldsymbol{S})) < \dim(\boldsymbol{S})$ ; in particolare interessa saper distinguere il caso $\dim(\mathsf{cod}(L)) = \dim(\boldsymbol{V})$ da quello in cui $\dim(\mathsf{cod}(L)) < \dim(\boldsymbol{V})$.

**(1) Prop.**: L'omomorfismo $L$ trasforma ogni sottospazio $\boldsymbol{S}$ del suo dominio in un sottospazio del suo codominio; in formula $\forall \boldsymbol{S} \leq_{Vsp} \mathsf{dom}(L) \ : \ L(\boldsymbol{S}) \leq_{Vsp} \mathsf{cod}(L)$ , ovvero $\boldsymbol{span}(L(\boldsymbol{S})) = L(\boldsymbol{S})$ .

**Dim.:** Scegliamo arbitrariamente $\mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2 \in L(\boldsymbol{S})$ ed $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$; in $\boldsymbol{S}$ si trovano almeno un $\mathsf{v}_1$ tale che $L(\mathsf{v}_1) = \mathsf{w}_1$ e almeno un $\mathsf{v}_2$ tale che $L(\mathsf{v}_2) = \mathsf{w}_2$.
Applicando la trasformazione $L$ ad $\alpha_1\mathsf{v}_1 + \alpha_2\mathsf{v}_2$ si ottiene $\alpha_1 L(\mathsf{v}_1) + \alpha_2 L(\mathsf{v}_2) = \alpha_1\mathsf{w}_1) + \alpha_2\mathsf{w}_2 \in L(\boldsymbol{S})$ ∎

Le considerazioni precedenti consentono anche di affermare

$$\forall E \subseteq \mathsf{dom}(L) \ : \ L(\boldsymbol{span}(E)) = \boldsymbol{span}(L(E)) \ . \tag{2}$$

**(3) Prop.**: Sia $\boldsymbol{T} \leq_{Vsp} \mathsf{cod}(L)$ ; la coimmagine di $\boldsymbol{T}$ per $L$, cioè $\boldsymbol{Coim}_L(\boldsymbol{T}) := \{\mathsf{v} \in \boldsymbol{V} \,|\!]\, L(\mathsf{v}) \in \boldsymbol{T}\}$ , è sottospazio di $\mathsf{dom}(L)$, ovvero $\boldsymbol{span}(\boldsymbol{Coim}_L(\boldsymbol{T})) = \boldsymbol{Coim}_L(\boldsymbol{T})$ .

**Dim.:** Consideriamo $\mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2 \in \boldsymbol{T}$; $\boldsymbol{Coim}_L(\boldsymbol{T}) \ni \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2$ tali che $L(\mathsf{v}_1) = \mathsf{w}_1$ e $L(\mathsf{v}_2) = \mathsf{w}_2$.
Occorre dimostrare che $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F} \ : \ \alpha_1\mathsf{v}_1 + \alpha_2\mathsf{v}_2 \in \boldsymbol{Coim}_L(\boldsymbol{T})$ .
Per questo applichiamo $L$ a tale combinazione lineare ottenendo $L(\alpha_1\mathsf{v}_1 + \alpha_2\mathsf{v}_2) = \alpha_1\mathsf{w}_1 + \alpha_2\mathsf{w}_2 \in \boldsymbol{T}$.
Questo fatto consente di affermare che $\alpha_1\,\mathsf{v}_1 + \alpha_2\,\mathsf{v}_2 \in \boldsymbol{Coim}_L(\boldsymbol{T})$ ∎

**G40 h.02** Si dice **nucleo della trasformazione lineare** o **kernel della trasformazione lineare** $L \in \lceil\!\lceil \boldsymbol{V} \longrightarrow_{Lin} \boldsymbol{W} \rceil\!\rceil$ il sottoinsieme

$$\boldsymbol{ker}(L) := \boldsymbol{Coim}_L\big(\{\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}\}\big) \ .$$

Si osserva che scelti ad arbitrio $\mathsf{z}_1, \mathsf{z}_2 \in \boldsymbol{ker}(L)$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$, si ha

$$L(\alpha_1\,\mathsf{z}_1 + \alpha_2\,\mathsf{z}_2) \ = \ \alpha_1\,\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} + \alpha_2\,\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} \ = \ \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} \ .$$

Quindi, in accordo con la g01(2), il kernel è un sottospazio del dominio della $L$. Si usa anche dire che i vettori di $\boldsymbol{ker}(L)$ sono i vettori per i quali l'omomorfismo $L$ agisce da annichilatore.

Per la comprensione degli effetti di una trasformazione lineare $L$ sono essenziali due conoscenze: la individuazione del suo kernel e la determinazione delle caratteristiche dell'azione della $L$ sopra qualche sottospazio di $\mathsf{dom}(L)$ complementare del kernel.

La caratteristica più rilevante di un kernel di una trasformazione lineare è il numero delle sue dimensioni. Questo numero naturale si dice **nullità della trasformazione lineare** $L$ e lo si denota con

$$\mathrm{nlty}(L) \ := \ \dim\big(\boldsymbol{ker}(L)\big) \ . \tag{1}$$

Per esempio in $\mathbb{R}^{\times 6}$ il proiettore sul sottospazio $\mathsf{Sscz}_{110110}$ annulla tutti i vettori che appartengono al sottospazio complementare $\mathsf{Sscz}_{001001}$; questo è il nucleo bidimensionale del proiettore che quindi possiede nullità 2.

Più in generale, per il proiettore sopra il sscz individuato dalla sequenza binaria $\mathbf{b} := \langle b_1, b_2, ..., b_d \rangle$ abbiamo

$$\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{b}}) \;=\; \sum_{i=1}^{d} (1 - b_i) \;.$$

**G40 h.03 (1) Prop.**: Una trasformazione lineare $L$ è iniettiva sse ha nullità uguale a 0.

**Dim.**: Riformuliamo l'enunciato come segue.
$\forall \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2 \in \mathsf{dom}(L) \;:\; L(\mathsf{v}_1) = L(\mathsf{v}_2) \Longrightarrow \mathsf{v}_1 = \mathsf{v}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{ker}(L) = \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{W}}\}$ .
Osserviamo che $L(\mathsf{v}_1) = L(\mathsf{v}_2) \iff L(\mathsf{v}_1 - \mathsf{v}_2) = \mathbf{0}_{\boldsymbol{W}} \iff \mathsf{v}_1 - \mathsf{v}_2 \in \boldsymbol{ker}(L)$ .
Quindi se $L$ è iniettiva, allora $\boldsymbol{ker}(L) \;=\; \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{W}}\}$ .
Viceversa se $\boldsymbol{ker}(L) = \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{W}}\}$ , allora $L(\mathsf{v}_1) = L(\mathsf{v}_2) \implies \mathsf{v}_1 = \mathsf{v}_2$ ∎

**G40 h.04** Torniamo al caso generale di un omomorfismo lineare-$\mathbb{F}$ $L \in \lceil\, \boldsymbol{V} \longrightarrow_{Lin-\mathbb{F}} \boldsymbol{W} \,\rceil$ con $\boldsymbol{ker}(L)$ costituente un sottospazio del dominio della $L$. Per ogni $E \subseteq V$ denotiamo con $\boldsymbol{Cmplsp}(E)$ e chiamiamo sottospazio complementare di $E$ l'insieme (sottospazio) dei vettori di $\boldsymbol{V}$ ortogonali a tutti gli elementi di $E$.

Consideriamo un sottospazio $C \leq_{Vsp} \boldsymbol{cmplosp}\big(\boldsymbol{ker}(L)\big)$ e la restrizione di $L$ a tale sottospazio $L\big|_C \in \lceil\, C \longmapsto_{Lin-\mathbb{F}} \mathsf{cod}(L) \,\rceil$, in modo che sia $\mathsf{dom}(L) = \boldsymbol{ker}(L) \oplus L\big|_C$.
Per le dimensioni dei sottospazi abbiamo

$$\dim(\mathsf{dom}(L)) \;=\; \mathrm{nlty}(L) + \dim(C) \;. \tag{1}$$

Prendiamo in esame $L\big|_C$; questo operatore è iniettivo, in quanto $\boldsymbol{ker}\Big(L\big|_C\Big) \;=\; \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{W}}\}$ .
Inoltre $L\big|_C$ è suriettivo; infatti se $\mathsf{v} \in \mathsf{dom}(L) = \boldsymbol{ker}(L) \oplus L\big|_C$ si può scrivere $\mathsf{v} = \mathsf{k} + \mathsf{c}$, con $\mathsf{k} \in \boldsymbol{ker}(L)$ e $\mathsf{c}$ $in C$.
Applicando la $L$ si ha per ogni $\mathsf{v} \in \boldsymbol{V}$, $L(\mathsf{v}) \;=\; L(\mathsf{k}) + L(\mathsf{c}) \;=\; L(\mathsf{c}) \in \mathsf{cod}\Big(L\big|_C\Big)$.
Quindi, data l'arbitrarietà di $\mathsf{v} \in \mathsf{dom}(L)$, si ha $\mathsf{cod}\Big(L\big|_C\Big) \;=\; \mathsf{cod}(L)$ .
Di conseguenza $L\big|_C$ è una trasformazione lineare invertibile appartenente a $\lceil\, C \lhd\!\rhd_{Lin-\mathbb{F}} \mathsf{cod}(L) \,\rceil$ e ogni complemento di $\boldsymbol{ker}(L)$ è isomorfo a $\mathsf{cod}(L)$.

**G40 h.05** Diciamo **rango dell'omomorfismo lineare** $L$ la dimensione del suo codominio e denotiamo tale intero naturale con

$$\mathrm{rnk}(L) \;:=\; \dim(\mathsf{cod}(L)) \;. \tag{2}$$

Si può allora enunciare la relazione dimensionale

$$\forall L \in \lceil\, \boldsymbol{V} \longrightarrow_{Lin-\mathbb{F}} \boldsymbol{W} \,\rceil \;:\; \mathrm{nlty}(L) + \mathrm{rnk}(L) \;=\; \dim\big(\mathsf{dom}(L)\big) \;. \tag{1}$$

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php