Capitolo G40:
Spazi vettoriali di dimensioni finite

Contenuti delle sezioni

G40:0.01 Gli spazi vettoriali a dimensioni finite sul campo dei reali sono le strutture algebriche basilari per lo studio degli oggetti geometrici lineari (rette, piani, poligoni, poliedri, ...). e di altre configurazioni geometriche di grande rilevanza per la matematica e le sue applicazioni, a partire dalla fisica.

In questo capitolo sono esaminati gli spazi vettoriali ottenibili dalle sequenze finite di una determinata lunghezza le cui componenti sono elementi di un campo (B41:d). Ci si preoccupa anche di segnalare che molte ostruzioni e proprietà valgono anche quando queste componenti fanno parte di strutture algebriche più generali, come semianelli ed anelli (T15:h). Come minimo si chiede che le componenti delle sequenze appartengano ad una struttura algebrica munita di due operazioni che godono di proprietà formali vicine a quelle della somma e del prodotto dei numeri razionali (o dei reali, o dei complessi).

Gli spazi che studiamo sono generalizzazioni della retta razionale $\mathbb{Q}$, dei piani $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e di $\mathbb{R}^{\times 3}$ visti in precedenza (in B30, B31, G30 e G36). Nel seguito di questo capitolo, comunque, ci serviremo di esempi riguardanti quasi esclusivamente sequenze di numeri razionali; anzi spesso è sufficiente limitarsi a sequenze di numeri interi. Tuttavia gran parte delle costruzioni e delle proprietà che esporremo si applicano ad ogni campo (v. B41:) e quindi le considerazioni generali riguarderanno un campo generico che denoteremo con $\mathbb{F}$.

Per la portata del capitolo va tenuto presente che la geometria richiede di servirsi primariamente del campo dei numeri reali $\mathbb{R}_{Fld}$, ma che gli studi geometrico-algebrici, a cominciare dall'esame delle coniche, si servono anche del campo dei numeri complessi $\mathbb{C}_{Fld}$. Va segnalato anche che gli spazi vettoriali sulle classi di resti rivestono grande importanza per molti temi della matematic discreta (v. ad esempio C65: e C66:) .

G40:a. Spazi vettoriali, combinazioni lineari, basi

G40:a.01 Cominciamo con il ricordare (v. B30:c.08, B41:d) che in algebra per campo si intende una struttura della forma $\boldsymbol{F} = \langle F, +, -, 0, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ tale che $\langle F, +, -, 0\rangle$ e $\langle F \setminus 0, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ sono gruppi commutativi e l'operazione binaria $\cdot$, chiamata prodotto, è distributiva rispetto all'operazione binaria $+$, chiamata somma.

In parole povere per campo si intende un insieme di entità numeriche alle quali si chiede solo che possano essere composte con quattro operazioni (la somma, la moltiplicazione e le rispettive operazioni inverse sottrazione e divisione), per le quali valgono le proprietà dimostrate per i numeri razionali (v. B30:) .

Ricordiamo anche che campi particolari già incontrati sono il campo razionale (B30:c), il campo reale (B42:), il campo complesso (B50:) ed i campi delle classi di resti modulo p per p numero primo qualsiasi (B26:).

Per le segnalazioni sulle possibili generalizzazioni ricordiamo anche che diciamo semianello (T15h02) una struttura algebrica della forma $\langle R, \oplus, 0, \odot\rangle$, dove $\langle R, \oplus, 0\rangle$ è un monoide commutativo ed $\langle R, \odot\rangle$ è un semigruppo.

Tra le strutture più particolari o più ricche ricordiamo i semianelli commutativi (con $\odot$ commutativo), i semianelli unitali (che presentano una unità per $\odot$), gli pseudoanelli

G40:a.02 In questo capitolo con d, e ed f denotiamo numeri interi positivi e con $\mathbb{F}$ un campo. Consideriamo dunque $\mathbb{F}^{\times d}$, potenza cartesiana d-esima del campo $\mathbb{F}$, cioè l'insieme delle d-uple di numeri del campo $\langle a_1, a_2, \ldots, a_d\rangle$; in particolare per $d = 1$ si hanno le rette razionale $\mathbb{Q}$ e reale $\mathbb{R}$ e il piano $\mathbb{C}$, per $d = 2$ i piani $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e per $d = 3$ gli spazi tridimensionale $\mathbb{Q}^{\times 3}$ e $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Anche nelle pagine che seguono chiamiamo **scalari** gli elementi del campo e diciamo **vettori d-dimensionali** o **punti d-dimensionali** le d-uple di tali scalari.

I vettori sul campo reale e sul campo complesso si incontrano in una grande varietà di sviluppi della matematica e delle sue applicazioni e vengono denotati in vari modi: utilizzando lettere in grassetto come $\mathbf{x}$ o $\mathbf{b}_j$ e con simboli come $\underline{H}$, $\vec{E_\perp}$ o $|3\rangle$.

Se $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, ..., v_d\rangle$, le componenti di tale sequenza si dicono anche **coordinate cartesiane** del vettore o del punto $\mathbf{v}$.

Tra gli elementi di un campo $\mathbb{F}$ lo zero si distingue nettamente dagli altri e conviene servirsi di una notazione particolare per l'insieme degli elementi diversi da zero: scriviamo quindi:

$$(1) \qquad \mathbb{F}_{nz} \ := \ \mathbb{F} \setminus \{0\} \ .$$

Corrispondentemente, tra i vettori di $\mathbb{F}^{\times d}$ gioca un ruolo particolare la sequenza di d zeri del campo; questa d-upla viene denotata con $0^{\times d}$ o con $\mathbf{0}_d$ ed è chiamata **vettore nullo** o **vettore zero** di $\mathbb{F}^{\times d}$; quando non si hanno ambiguità se si trascura di segnalare la dimensione d la denotiamo semplicemente con $\mathbf{0}$.

Spesso interessa distinguere il vettore nullo da tutti gli altri vettori e conviene disporre di una notazione specifica per l'insieme dei vettori di $\mathbb{F}^{\times d}$ diversi da quello nullo: introduciamo quindi

$$(2) \qquad {\mathbb{F}^{\times d}}_{nz} \ := \ \mathbb{F}^{\times d} \setminus \{\mathbf{0}\} \ .$$

G40:a.03 Definiamo una struttura algebrica ottenuta arricchendo $\mathbb{F}^{\times d}$ con $\mathbb{F}$ e con le entità che seguono:

somma di due vettori $\mathbf{v} = \langle v_1, ..., v_d\rangle$ e $\mathbf{w} = \langle v_1, ..., v_d\rangle$, somma termine a termine delle due sequenze, cioè

$$\mathbf{v} +^{ce} \mathbf{w} := \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2, ..., v_d + w_d\rangle \ ;$$

passaggio all'opposto di un vettore $\mathbf{v} = \langle v_1, ..., v_d\rangle$

$$-^{ce}\mathbf{v} := \langle -v_1, ... - v_d\rangle \ ;$$

vettore nullo $\mathbf{0}_d$;

moltiplicazione di un vettore v per uno scalare α

$$\alpha \cdot^{ce} \mathbf{v} = \langle \alpha v_1, \alpha v_2, ..., \alpha v_d\rangle \ .$$

Inoltre consideriamo come equivalente alla precedente la scrittura $\mathbf{v} \cdot^{ce} c := c \cdot^{ce} \mathbf{v}$.

La struttura ottenuta $\langle \mathbb{F}^{\times d}, \mathbb{F}, +^{ce}, -^{ce}, \mathbf{0}_d, \cdot^{ce}\rangle$ viene detta **spazio vettoriale delle d-uple di elementi del campo $\mathbb{F}$** a anche **spazio vettoriale d-dimensionale su $\mathbb{F}$**.

Si verifica facilmente che valgono le proprietà che seguono.

(1) Associatività della somma:

$$\forall\ \mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u} \in \mathbb{F}^{\times d}\ \ :\quad \mathbf{v} +^{ce} (\mathbf{w} \boldsymbol{+} \mathbf{u}) = (\mathbf{v} +^{ce} \mathbf{w}) \boldsymbol{+} \mathbf{u}\ .$$

(2) Commutatività della somma:

$$\forall\ \mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{F}^{\times d}\ \ :\quad \mathbf{v} +^{ce} \mathbf{w} = \mathbf{w} +^{ce} \mathbf{v}\ .$$

(3) Il vettore nullo $\mathbf{0}_d \in \mathbb{F}^{\times d}$ è elemento neutro per la somma:

$$\forall\ \mathbf{v} \in \mathbb{F}^{\times d}\ \ :\quad \mathbf{v} +^{ce} \mathbf{0} = \mathbf{v} \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{0}_d +^{ce} \mathbf{v} = \mathbf{v}\ .$$

(4) Ad ogni vettore è associato un **vettore opposto** per la somma:

$$\forall\ \mathbf{v} \in \mathbb{F}^{\times d}\ :\ \exists -^{ce} \mathbf{v} \in \mathbb{F}^{\times d} \quad \text{tale che} \quad \mathbf{v} +^{ce} (-^{ce}\mathbf{v}) = (-^{ce}\mathbf{v}) +^{ce} \mathbf{v} = \mathbf{0}_d\ .$$

(5) Proprietà della moltiplicazione di un vettore per uno scalare:

$$\forall\ \mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{F}^{\times d}\ ,\ \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{F}\ :\ \alpha \cdot^{ce} (\mathbf{v} +^{ce} \mathbf{w}) = \alpha \cdot^{ce} \mathbf{v} + \alpha \cdot^{ce} \mathbf{w}\ ,\ (\alpha+\beta) \cdot^{ce} \mathbf{v} = \alpha \cdot^{ce} \mathbf{v} + \beta \cdot^{ce} \mathbf{v}\ ,$$
$$(\alpha\beta) \cdot^{ce} \mathbf{v} = \alpha \cdot^{ce} (\beta \cdot^{ce} \mathbf{v})\ ,\ 1 \cdot^{ce} \mathbf{v} = \mathbf{v}\ \ ,\quad 0 \cdot^{ce} \mathbf{v} = \mathbf{0}_d\ .$$

G40:a.04 Introduciamo ora con procedimento assiomatico gli spazi vettoriali ottenendo una specie di strutture nella quale si possono collocare anche gli spazi $\mathbb{F}^{\times d}$.

Per un qualsiasi campo $\mathbb{F}$ si dice **spazio vettoriale** su $\mathbb{F}$ una struttura $\boldsymbol{V} = \langle V, \mathbb{F}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \mathbf{0}, \perp\rangle$ costituita, oltre che da $\mathbb{F}$, da un insieme V chiamato terreno della struttura i cui elementi sono detti **vettori**, dall'operazione binaria su V chiamata **somma** $\boldsymbol{+} \in \{V \times V \longmapsto\!\triangleright V\}$, da un particolare **vettore nullo** $\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$, da una endofunzione $\boldsymbol{-} \in \{V \longmapsto V\}$ chiamata **passaggio al vettore opposto** e dalla legge di composizione $\perp \in \{F \times V \longmapsto\!\triangleright V\}$ chiamata **moltiplicazione per uno scalare di un vettore** per le quali valgono le proprietà che seguono.

[Vsp1] Associatività della somma:

$$\forall\ \mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u} \in \boldsymbol{V}\ :\quad \mathbf{v} \boldsymbol{+} (\mathbf{w} \boldsymbol{+} \mathbf{u}) = (\mathbf{v} \boldsymbol{+} \mathbf{w}) \boldsymbol{+} \mathbf{u}\ .$$

[Vsp2] Commutatività della somma:

$$\forall\ \mathbf{v},\mathbf{w} \in \boldsymbol{V}\ :\quad \mathbf{v} \boldsymbol{+} \mathbf{w} = \mathbf{w} \boldsymbol{+} \mathbf{v}\ .$$

[Vsp3] Neutralità per la somma del vettore nullo:

$$\forall\ \mathbf{v} \in \boldsymbol{V}\ :\quad \mathbf{v} \boldsymbol{+} \mathbf{0} = \mathbf{v} \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{0}_d \boldsymbol{+} \mathbf{v} = \mathbf{v}\ .$$

[Vsp4] Esistenza per ogni vettore di un **vettore opposto** per la somma:

$$\forall\ \mathbf{v} \in \boldsymbol{V}\ :\ \exists \boldsymbol{-}\mathbf{v} \in \boldsymbol{V} \quad \text{tale che} \quad \mathbf{v} \boldsymbol{+} (\boldsymbol{-}\mathbf{v}) = (\boldsymbol{-}\mathbf{v}) \boldsymbol{+} \mathbf{v} = \mathbf{0}_d\ .$$

[Vsp5] Proprietà della moltiplicazione per uno scalare:

$$\forall\ \mathbf{v},\mathbf{w} \in \boldsymbol{V}\ ,\ \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{F}\quad :\quad \alpha \perp (\mathbf{v} \boldsymbol{+} \mathbf{w}) = \alpha \perp \mathbf{v} + \alpha \perp \mathbf{w}\quad ,\quad (\alpha+\beta) \perp \mathbf{v} = \alpha \perp \mathbf{v} + \beta \perp \mathbf{v}\quad ,$$
$$(\alpha\beta) \perp \mathbf{v} = \alpha \perp (\beta \perp \mathbf{v})\quad ,\quad 1 \perp \mathbf{v} = \mathbf{v}\ \ ,\quad 0 \perp \mathbf{v} = \mathbf{0}_d\ .$$

G40:a.05 In seguito ci muoveremo su tre diversi livelli di generalità: quello più astratto e generale degli spazi vettoriali che soddisfano gli assiomi [Vsp1-5], quello degli spazi finitodimensionali e quello più specifico e più concretamente trattabile degli spazi $\mathbb{F}^{\times d}$.

Definiamo una famiglia molto comprensiva di spazi vettoriali. Terreni di questi spazi sono gli insiemi di funzioni della forma $\{D \longmapsto \mathbb{F}\}$ ove D è un qualsiasi insieme e $\mathbb{F}$ un arbitrario campo. Indici di questa famiglia sono D e $\mathbb{F}$ e il membro generico della famiglia lo denotiamo con $\mathsf{Vsp}_{fun}(D, \mathbb{F})$.
Vediamo come si definiscono le operazioni dello spazio $\mathsf{Vsp}_(fun)(D, \mathbb{F})$, assumendo che f e g siano due delle sue funzioni e che α sia un elemento di $\mathbb{F}$. Si definisce come somma di f e g la funzione che associa ad ogni $x \in D$ la somma dei loro valori $f(x) + g(x)$, cioè

$$f + g := \left\ulcorner x \in D \;|\!\!\!\rightarrow\; f(x) + g(x) \right\urcorner \ . \tag{1}$$

Si definisce come moltiplicazione della funzione f per lo scalare $\alpha \in \mathbb{F}$ la funzione che ad x associa $\alpha \cdot f(x)$:

$$\alpha \cdot f := \left\ulcorner x \in D \;|\!\!\!\rightarrow\; \alpha \cdot f(x) \right\urcorner \ . \tag{2}$$

Si definisce come vettore nullo dello spazio la funzione $\ulcorner x \in D \;|\!\!\!\rightarrow\; 0 \urcorner$.

Si verifica facilmente che tale spazio soddisfa le proprietà :a.03(1-5).

Si osserva che lo spazio vettoriale $\mathbb{F}^{\times d}$ delle sequenze di una data lunghezza d di elementi di $\mathbb{F}$ appartiene alla suddetta famiglia; infatti le sue sequenze si possono considerare le funzioni a valori in $\mathbb{F}$ aventi come dominio $\{1, 2, ..., d\}$, cioè l'insieme delle posizioni delle componenti di ciascuna sequenza. Dunque questo spazio si può individure come $\mathsf{Vsp}_(fun)(\{1, 2, ..., d\}, \mathbb{F})$.

G40:a.06 Due vettori non nulli v e w di uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ si dicono **proporzionali** o **collineari** sse esiste un $\alpha \in \mathbb{F}_{nz}$ tale che $\mathsf{v} = \alpha\,\mathsf{w}$. La proporzionalità tra vettori è un'equivalenza su $\boldsymbol{V}_{nz}$ e le classi di questa equivalenza si chiamano **raggi** dello spazio vettoriale.
Ad esempio allo stesso raggio di $\mathbb{F}^{\times 3}$ appartengono i vettori $\langle 1, 2, -3\rangle$, $\langle 2.5, 5, -7.5\rangle$ e $\langle -0.2, -0.4, 0.6\rangle$.
Il raggio che contiene il vettore v, cioè l'insieme di vettori $\{q \in \mathbb{F} :|\ q\mathsf{v}\}$, si denota anche concisamente con $\mathbb{F} \cdot \mathsf{v}$.

Consideriamo l'intero positivo k e l'insieme di k vettori di $\boldsymbol{V}$ $\{\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, ..., \mathsf{v}_k\}$. Si dice **combinazione lineare** di tali vettori ogni composizione della forma

$$\alpha_1\mathsf{v}_1 + \alpha_2\mathsf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathsf{v}_k = \sum_{h=1}^{k} \alpha_h\mathsf{v}_h \ , \tag{1}$$

dove per ogni $h = 1, 2, ..., k$ α_h denota uno scalare. Gli scalari che intervengono in una combinazione lineare sono detti **coefficienti** della combinazione stessa.
Di due vettori proporzionali è lecito affermare che uno è combinazione lineare dell'altro. Tra le combinazioni lineari di ogni insieme finito di vettori $\{\mathsf{w}_1, ..., \mathsf{w}_k\}$ si trova il vettore nullo: infatti questo si può ottenere con la combinazione lineare della forma $\displaystyle\sum_{h=1}^{k} \mathsf{w}_h \cdot 0 = \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$.
Le notazioni precedenti per le combinazioni lineari sono le più usate, ma noi useremo spesso anche le notazioni che consideriamo equivalenti

$$\mathsf{v}_1\alpha_1 + \mathsf{v}_2\alpha_2 + \cdots + \mathsf{v}_k\alpha_k = \sum_{h=1}^{k} \mathsf{v}_h\alpha_h \ , \tag{2}$$

così come abbiamo considerate equivalenti le scritture $\alpha\,\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}\,\alpha$. La notazione che pone i coefficienti a destra dei vettori conduce in maniera più semplice al sistema di espressioni riguardante le rappresentazioni matriciali delle trasformazioni che riteniamo preferibile e che vedremo nel paragrafo che segue.

G40:a.07 Come vedremo, molto spesso serve esprimere i vettori di uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ che si stanno esaminando come combinazioni lineari di vettori di $\boldsymbol{V}$ appartenenti a determinate collezioni. Anzi nella pratica risulta conveniente servirsi di certe particolari sequenze di vettori che in tal modo assumono il ruolo di vettori di riferimento. Cercheremo di individuare alcuni insiemi di riferimento convenienti per uno spazio $\mathbb{F}^{\times d}$.

Un insieme di vettori di $\boldsymbol{V}$ si dice costituire un **insieme di vettori linearmente indipendenti** sse non si può esprimere nessuno di essi come combinazione lineare degli altri. Viceversa un insieme di vettori tale che almeno uno di essi si può esprimere come combinazione lineare dei rimanenti si chiama **insieme di vettori linearmente dipendenti**.

Diamo alcuni esempi di insiemi di vettori linearmente dipendenti;
In $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$: $\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 2,-2\rangle\}$ e $\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,-1\rangle,\langle \alpha,\beta\rangle\}$ per α e β reali arbitrari.
In $\mathbb{Q}^{\times 3}$: $\{\langle 0,1,0\rangle,\langle 1,0,0\rangle,\langle 2,-2,0\rangle,\langle 1,2,5\rangle\}$ e $\{\langle 1,0,0\rangle,\langle 0,1,0\rangle,\langle 1,-1,0\rangle\langle -1,-1,-1\rangle\}$.
In qualsiasi spazio $\boldsymbol{V}$ l'insieme $\{\mathbf{u},\mathbf{u}c\}$, quali che siano $\mathbf{u}\in\boldsymbol{V}$ e $c\in\mathbb{F}$.
In qualsiasi spazio, $\left\{\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_{k-1},\sum_{h=1}^{k-1}\mathbf{u}_h\,\alpha_h\right\}$, quali che siano k e $\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_{k-1}\in\boldsymbol{V}$ ed $\alpha_1,...,\alpha_{k-1}\in\mathbb{F}$.

G40:a.08 Si osserva che aggiungendo qualche vettore ad un sistema di vettori linearmente dipendenti si ottiene ancora un sistema di vettori linearmente dipendenti. Similmente, eliminando una parte degli elementi da un sistema di vettori linearmente indipendenti si ottiene ancora un sistema di vettori linearmente indipendenti.

(1) Prop.: Un insieme finito di vettori $\{\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_k\}\subset\boldsymbol{V}$ costituisce un insieme di vettori linearmente indipendenti sse per ogni k-upla di scalari $\langle\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k\rangle$ diversa da $)^{\times d}$ che soddisfa l'uguaglianza lineare $\sum_{h=1}^{k}\mathbf{u}_h\alpha_h=\mathbf{0}$ deve essere $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_k=0$.

Dim.: Se esistesse una sequenza $\langle\alpha_{1,1}\,,\alpha_2,...,\alpha_{1,k}\rangle\neq 0^{\times k}$ per la quale $\sum_{h=1}^{k}\mathbf{u}_h\alpha_{1,h}=\mathbf{0}$, posto che sia $\alpha_j\neq 0$ per un particolare $j=1,2,...,k$, sarebbe possibile scrivere $\mathbf{u}_j=-\dfrac{1}{\alpha_j}\sum_{h=1,..,k\quad h\neq j}\mathbf{u}_h\alpha_h$, cioè non si avrebbe l'indipendenza lineare di $\{\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_k\}$ ∎

In uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ un insieme di vettori che consente di esprimere ogni altro vettore come loro combinazione lineare si dice **sistema completo di vettori** per $\boldsymbol{V}$ o **insieme di generatori** di $\boldsymbol{V}$ o anche **insieme spanning** di $\boldsymbol{V}$.

In $\mathbb{Q}^{\times 3}$ sono sistemi completi di vettori gli insiemi $\{\langle 1,1,0\rangle,\langle 1,0,1\rangle,\langle 0,-2,-2\rangle\}$ e
$\{\langle 1,0,-2\rangle,\langle -1.5,0,3.6\rangle,\langle 2,0,-2\rangle\}$.
Viceversa si constata che sono sistemi incompleti $\{\langle 1,1,0\rangle,\langle -0.5,2.3,0\rangle,\langle 2,-2,0\rangle\}$ e
$\{\langle 1,0,-2\rangle,\langle -1.5,0,3.6\rangle,\langle 2,0,-2\rangle\}$.
Si trova essere incompleto anche $\{\langle 1,-2,3\rangle,\langle 1,2,-3\rangle,\langle 0.5,-3,4.5\rangle,\langle 1,6,-9\rangle\}$.
In sequito individueremo procedimenti ben definiti che consentono di decidere la completezza o meno di ogni insieme di vettori sopra un campo calcolabile.

G40:a.09 Dato che togliendo qualche elemento da un sistema di vettori linearmente indipendenti si ha ancora un sistema di vettori linearmente indipendenti, tra questi insiemi di vettori hanno maggiore interesse quelli più estesi, in quanto tutti gli altri si ottengono da questi con eliminazioni di vettori scelti ad arbitrio, cioè con operazioni poco impegnative, che richiedono solo verifiche algoritmiche.

Simmetricamente aggiungendo qualche nuovo vettore ad un sistema di vettori linearmente dipendenti si ha ancora un sistema di vettori linearmente dipendenti. Tra questi insiemi di vettori quindi hanno maggiore interesse quelli estesi il meno possibile, in quanto gli altri si ottengono da questi con ampliamenti che si possono effettuare come si vuole.

Un sistema di vettori linearmente dipendenti come strumento per esprimere altri vettori mediante combinazioni lineari può risultare uno strumento ridondante e poco economico. Consideriamo ad esempio $\left\{\mathsf{u}_1, ..., \mathsf{u}_{k-1}, \sum_{h=1}^{k-1} \mathsf{u}_h\beta_h\right\}$ ed un vettore combinazione lineare $\mathsf{v} = \sum_{i=1}^{k} \mathsf{u}_i\alpha_h$; questo può esprimersi anche come $\sum_{h=1}^{k-1} \mathsf{u}_h\alpha_h + \alpha_k \left(\sum_{h=1}^{k-1} \mathsf{u}_h\beta_h\right) = \sum_{h=1}^{k-1} \mathsf{u}_h(\alpha_h + \beta_h)$, cioè come combinazione lineare di soli $k-1$ vettori.

Dunque un sistema di vettori linearmente dipendenti contiene qualche elemento del quale si può fare a meno. Quindi i sistemi di vettori linearmente indipendenti, in linea di massima, vanno considerati strumenti più essenziali dei sistemi di vettori linearmente dipendenti.

G40:a.10 Cerchiamo sistemi di vettori linearmente indipendenti nell'ambito di spazi $\mathsf{Vsp}_{fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Consideriamo le funzioni -RR $e^{\alpha\, x}$ e $e^{\beta\, x}$ con α e β reali diversi; per semplicità assumiamo $\alpha < \beta$.

Le due precedenti funzioni sono vettori linearmente indipendenti, in quanto l'uguaglianza $a\, e^{\alpha\, x} + b\, e^{\beta\, x} = 0$ con a e b reali implica che sia $a = b = 0$. Infatti dalla ugulianza segue $a + b\, e^{(\beta-\alpha)x} = 0$, ossia $a = -b\, e^{(\beta-\alpha)x}$ ed il secondo membro può essere costante solo se $b = 0$, fatto che comporta $a = 0$.

Considerazioni di questo genere si possono svolgere nell'ambito più ampio degli spazi $\mathsf{Vsp}_{fun}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, ma limitandosi alle funzioni univoche.

Si trova allora in particolare che sono linearmente indipendenti due funzioni della forma $e^{i\, m\, \phi}$ ed $e^{i\, n\, \phi}$ per ϕ variabile in $[0, 2\,\pi)$ e con m, n interi diversi.

L'indipendenza lineare rimane anche quando ci si riduce a considerare la parte reale o la parte immaginaria di funzioni linearmente indipendenti.

In tal modo si ottiene che sono linearmente indipendenti:

due funzioni della forma sin $m\,\phi$ per m interi positivi diversi, due funzioni della forma cos $m\,\phi$ per m interi naturali diversi, e due funzioni delle forme sin $m\,\phi$ e cos $n\,\phi$ con m ed n interi positivi.

G40:a.11 Si dice **base** per uno spazio $\boldsymbol{V}$ finitodimensionale ogni sistema completo di vettori linearmente indipendenti. Per le considerazioni precedenti le basi di uno spazio vettoriale sono da considerare strumenti convenienti per l'individuazione di combinazioni lineari, in quanto sistemi in graddo di esprimere ogni vettore e privi di ridondanze.

Consideriamo i d vettori di $\mathbb{F}^{\times d}$

$$(1) \qquad \mathsf{e}_1 = \langle 1, 0, ..., 0\rangle\ ,\ \ \mathsf{e}_2 = \langle 0, 1, ..., 0\rangle\ ,\ \ ...\ ,\ \ \mathsf{e}_d = \langle 0, 0, ..., 1\rangle\ .$$

Essi costituiscono un insieme di vettori linearmente indipendenti: infatti $\sum_{h=1}^{k} c_k\mathsf{e}_h = \langle c_1, c_2, ..., c_k\rangle = \mathbf{0}$ implica evidentemente $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. Ogni vettore d-dimensionale su $\mathbb{F}$ $\mathsf{v} = \langle v_1, v_2, \ldots, v_d\rangle$

si può esprimere come combinazione lineare di questi vettori:

(2) $$\langle v_1, v_2, \ldots, v_d\rangle = \sum_{i=1}^{d} \mathsf{e}_i v_i \ .$$

Quindi l'insieme $\mathfrak{B}_{can} := \{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, ..., \mathsf{e}_k\}$ costituisce una base di $\mathbb{F}^{\times d}$; tale base è detta **base canonica** dello spazio $\mathbb{F}^{\times d}$.

Per organizzare meglio molte esposizioni e varie costruzioni risulta opportuno servirsi di **basi ordinate**, cioè di sequenze di d vettori diversi tali che l'insieme dei suoi componenti costituisca una base per lo spazio. Fissata una base ordinata, ogni suo vettore si può individuare con l'intero che fornisce la sua posizione nella sequenza. In particolare quando si decide di fare riferimento ad una specifica base ordinata, ad esempio di trattare $\mathbb{F}^{\times d}$ servendosi della base ordinata canonica $\langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, ..., \mathsf{e}_d\rangle$, può essere comodo denotare i suoi componenti con i simboli $|1\rangle, |2\rangle, ...,$ e $|d\rangle$. Ciascuno di questi simboli è detto **ket** e fa parte delle cosiddette **notazioni di Dirac** per gli spazi vettoriali, notazioni che riprenderemo in :d .

G40:a.12 I vettori di molti spazi vettoriali sono strumenti di lavoro ampiamente usati e conviene servirsi per essi di diversi sistemi di notazioni.

In molte formule interviene la funzione delta di Kronecker, funzione che può considerarsi del genere $\{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longmapsto \{0, 1\}\}$ o di un genere $\{D \times D \longmapsto \{0, 1\}\}$ per un insieme finito D e in particolare di un genere $(d] \times (d] \longmapsto \{0, 1\}$ per un intero $d \geq 2$; le sue componenti sono definite dalla richiesta

(1) . $$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{sse } i = j \\ 0 & \text{sse } i \neq j \end{cases}$$

È anche utile ampliare la definizione della delta di Kronecker come la funzione valore binario avente come argomento una relazione dipendente da due parametri interi $\mathcal{R}_{i,j}$: $\delta_{i,j} := \mathsf{Bval}(\mathcal{R}_{i,j})$.
La usuale delta di Kronecker si può considerare il caso particolare relativo alla relazione uguaglianza dei due parametri interi, $\delta_{i,j} := \mathsf{Bval}(i = j)$.
La delta di Kronecker consente di esprimere per ogni $i = 1, 2, ..., d$ il vettore i-esimo della base canonica di $\mathbb{F}^{\times d}$ attraverso le sue componenti relative alla base stessa:

(2) $$\mathsf{e}_i = \langle \delta_{i,1}, \delta_{i,2}, ..., \delta_{i,d}\rangle \ .$$

I vettori specifici di uno spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ in molti casi si trattano vantaggiosamente mediante i cosiddetti vettori colonna, matrici di profilo $d \times 1$ (v. B14: e G42:a). Alcuni esempi di vettori colonna sono

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{bmatrix} \ .$$

Un esempio di combinazione lineare di vettori colonna è il seguente:

(3) $$\forall v_1, v_2, w_1, w_2, \alpha, \beta \in \mathbb{F} \ : \ \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 + \beta w_1 \\ \alpha v_2 + \beta w_2 \end{bmatrix} \ .$$

Molti insiemi di vettori di uno spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ si individuano mediante equazioni e disequazioni nelle quali intervengono variabili che riguardano le singole coordinate; tipicamente si denota con x_i la variabile per la componente i-esima, per $i = 1, 2, ..., d$. In alternativa se $d = 2, 3, 4$ o 5 si trova spesso comodo usare x invece di x_1, y invece di x_2, z invece di x_3, w invece di x_4 e t invece di x_5.

G40:a.13 Si dimostra in modo generale, servendosi del [[lemma di Zorn]] che ogni spazio vettoriale diverso da $\{\mathbf{0}\}$ possiede una base (v. Roman *Advanced Linear Algebra* p.37). Qui possiamo dimostrare che in uno spazio vettoriale che possiede un insieme spanning finito S ogni sistema linearmente indipendente ha cardinalità non superiore ad $|\mathsf{S}|$.

(1) Prop.: Siano $\boldsymbol{V}$ uno spazio vettoriale, $\mathsf{I} = \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, ..., \mathbf{i}_n\}$ un suo insieme di vettori linearmente indipendenti ed $\mathsf{S} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_d\}$ un sottoinsieme spanning (finito) di $\boldsymbol{V}$. Allora $n \leq d$.

Dim.: Facciamo riferimento a coppie di sequenze di vettori che modifichiamo attraverso successivi stadi [0], [1], ..., [n].

$$\mathbf{s}_1\ \mathbf{s}_2\ ...\ \mathbf{s}_d \qquad - \qquad \mathbf{i}_1\ \mathbf{i}_2\ ...\ \mathbf{i}_n \qquad [0]$$

$\mathbf{i}_1$ si può esprimere come combinazione lineare dei $\mathbf{s}_j$ con almeno un coefficiente diverso da zero; da questa combinazione si ricava un'espressione di uno dei $\mathbf{s}_j$ come combinazione dei rimanenti vettori di S e di $\mathbf{i}_1$. Si giunge quindi alla coppia di sequenze dello stadio [1]

$$\mathbf{i}_1\ \mathbf{s}_{2,1}\ ...\ \mathbf{s}_{d,1} \qquad - \qquad \mathbf{i}_2\ ...\ \mathbf{i}_n \qquad [1]$$

La prima sequenza riguarda ancora un insieme spanning nel quale il primo vettore dell'insieme I ha rimpiazzato uno dei vettori di $\mathcal{S}$; la seconda è stato semplicemente privata del primo vettore. Le notazioni $\mathbf{s}_{j,1}$ esprimono i vettori nella prima sequenza privata del vettore rimpiazzato da $\mathbf{i}_1$.

Si giunge allo stadio [2] considerando che $\mathbf{i}_2$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori della prima sequenza nella quale almeno uno dei coefficienti dei $\mathbf{s}_{j,1}$ è diverso da 0; infatti non si può esprimere un vettore $\mathbf{i}_i$ come combinazione lineare dei soli rimanenti vettori di I. Questo rende possibile sostituire uno di questi vettori di $\mathcal{S}$ con $\mathbf{i}_2$ ottenendo

$$\mathbf{i}_1\ \mathbf{i}_2\ \mathbf{s}_{3,2}\ ...\ \mathbf{s}_{d,2} \qquad - \qquad \mathbf{i}_3\ ...\ \mathbf{i}_n \qquad [2]$$

Ancora la prima sequenza costituisce un insieme spanning e risulta possibile esprimere $\mathbf{i}_3$ come combinazione lineare dei primi vettori nella quale almeno uno dei coefficienti dei $\mathbf{s}_{j,2}$ è diverso da 0.

Il procedimento può essere portato avanti fino allo stadio [n] con l'esaurimento dei vettori di I:

$$\mathbf{i}_1\ ...\ \mathbf{i}_n\ \mathbf{s}_{d-n,n}\ ...\ \mathbf{s}_{d,n} \qquad - \qquad [n]$$

Di conseguenza i vettori dell'insieme spanning S devono essere in numero non inferiore ad n ▮

G40:a.14 **(1) Coroll.**: Ogni spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ che possiede un insieme spanning finito ha tutte le basi della stessa cardinalità.

Dim.: Siano $\mathfrak{B}_1$ e $\mathfrak{B}_2$ due basi di $\boldsymbol{V}$. Il procedimento visto in :a.12 si può effettuare con $\mathfrak{B}_1$ nel ruolo di insieme spanning $\mathcal{S}$ e con $\mathfrak{B}_2$ nel ruolo di insieme di vettori linearmente indipendenti, fino a concludere che $|\mathfrak{B}_1| \geq |\mathfrak{B}_2|$. Ma esso si può effettuare anche con $\mathfrak{B}_2$ nel ruolo di insieme spanning $\mathcal{S}$ e con $\mathfrak{B}_1$ nel ruolo di insieme di vettori linearmente indipendenti fino a concludere che $|\mathfrak{B}_1| \leq |\mathfrak{B}_2|$ ▮

Ogni spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ che possiede un insieme spanning finito è caratterizzato dall'intero positivo che fornisce la cardinalità di tutte le sue basi. Questo si chiama **dimensione** dello spazio $\boldsymbol{V}$ e si denota con $\dim(\boldsymbol{V})$. Se $\dim(\boldsymbol{V}) =: d$, si dice che $\boldsymbol{V}$ è uno spazio d-dimensionale, ovvero che $\boldsymbol{V}$ ha d dimensioni. Lo spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ delle sequenze di lunghezza d ha d dimensioni, in quanto la sua base canonica è costituita dai d vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_d$ e quindi tutte le sue basi hanno cardinalità d.

Prescindendo dal particolare valore d, gli spazi vettoriali dotati di un insieme spanning finito si dicono **spazi finito-dimensionali** o **spazi di dimensioni finite**.

G40:a.15 Consideriamo uno spazio vettoriale d-dimensionale $\boldsymbol{V}$ e una sua base ordinata $\langle \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2, ..., \mathsf{u}_d \rangle$; ciascuno dei vettori di $\boldsymbol{V}$ si può esprimere in un unico modo come combinazione lineare dei vettori della base.

Quindi ogni spazio finito-dimensionale si può trattare come uno spazio vettoriale di sequenze di data lunghezza.

In altre parole, lo spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ è in grado di rappresentare in modo concreto ciascuno degli spazi d-dimensionali su $\mathbb{F}$ con il quale risulta isomorfo; esso si può quindi qualificare come rappresentazione standard di questi spazi.

G40:a.16 Spazi vettoriali di notevole interesse sono costituiti da polinomi. Per ogni n intero positivo denotiamo con $\mathbb{F}_{<n}[x]$ l'insieme dei polinomi in una variabile su un campo $\mathbb{F}$ di grado inferiore ad n; tale insieme costituisce uno spazio vettoriale di dimensione n. Infatti i polinomi di grado minore di n sono individuati dalle sequenze dei loro coefficienti che conviene considerare ordinati per potenze crescenti; una di queste sequenze relativa ad un polinomio di grado $m < n-1$ si può completare con $n-1-m$ componenti finali uguali a 0. In tal modo ogni polinomio di $\mathbb{F}_{<n}[x]$ viene individuato da una sequenza di n elementi del campo.

Ad esempio se trattiamo i polinomi di $\mathbb{R}_{<4}[x]$, polinomi a coefficienti reali nella variabile reale x di grado al più 3, il polinomio $1-x$ viene individuato dalla quaterna $\langle 1, -1, 0, 0\rangle$, il polinomio $3\,x + x^2$ dalla sequenza $\langle 0, 3, 1, 0\rangle$ e il polinomio $(x-2)^3$ da $\langle -8, 12, -6, 1\rangle$.

I polinomi possono essere sommati e moltiplicati per elementi del campo, ovvero possono essere combinati $\mathbb{F}$-linearmente. Si constata facilmente che le operazioni di somma e moltiplicazione per un elemento del campo soddisfano gli assiomi in :a.04 ; quindi il loro insieme può essere trattato come uno spazio vettoriale. Si vede in particolare che il polinomio nullo costituisce l'origine di ogni spazio di polinomi.

Si osserva anche che ogni polinomio di grado al più n si può esprimere come combinazione lineare dei monomi 1, x, x^2, ..., x^{n-1}, x^n; questi polinomi inoltre sono linearmente indipendenti. Quindi costituiscono una base dello spazio che risulta essere $n+1$-dimensionale.

G40:b. Sottospazi

G40:b.01 Consideriamo uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V} = \langle V, \mathbb{F}, +, \cdot, ...\rangle$; un sottoinsieme S del terreno V si dice **chiuso per combinazione lineare** sse ogni combinazione lineare di vettori di S appartiene a tale sottoinsieme, ossia sse:

(1) $$\forall n \in \mathbb{P} \ , \ \mathsf{v}_1, ..., \mathsf{v}_n \in S \ , \ c_1, ..., c_n \in \mathbb{F} \ \vdots \ \sum_{i=1}^{n} c_i\, \mathsf{v}_i \in S \ .$$

Munendo un tale insieme S con le opportune riduzioni delle operazioni somma e moltiplicazione per scalare, otteniamo la struttura della forma

(2) $$\boldsymbol{S} := \langle S, \mathbb{F}, +_{|S\times S}, \cdot_{|\mathbb{F}\times S}, ...\rangle \ .$$

Questa struttura costituisce a pieno titolo uno spazio vettoriale sopra il campo $\mathbb{F}$ e si dice che costituisce un **sottospazio** di $\boldsymbol{V}$.

Per esprimere il fatto che uno spazio vettoriale $\boldsymbol{S}$ è sottospazio di $\boldsymbol{V}$ scriviamo $\boldsymbol{S} \leq_{Vsp} \boldsymbol{V}$. Se S è sottoinsieme proprio di V si dice che $\boldsymbol{S}$ è **sottospazio proprio** di $\boldsymbol{V}$ e per esprimere questo fatto si usa la notazione più specifica $\boldsymbol{S} <_{Vsp} \boldsymbol{V}$.

Due particolari sottospazi di $\boldsymbol{V}$ sono quello che ha come terreno il solo $\{\mathbf{0}_d\}$, chiamato **sottospazio nullo**, e lo stesso $\boldsymbol{V}$, detto **sottospazio improprio** di $\boldsymbol{V}$

Altri semplici sottospazi sono i cosiddetti **sottospazi monodimensionali** che hanno come terreno un insieme della forma $\mathsf{v}\,\mathbb{F} = \{c \in \mathbb{F} :| \mathsf{v}\,c\}$, in biiezione con i vettori non nulli v; ciascuno di essi corrisponde ad un raggio di $\boldsymbol{V}$ cui si è aggiunto $\mathbf{0}$.

Si prova facilmente che $\boldsymbol{T} \leq_{Vsp} \boldsymbol{S} \leq_{Vsp} \boldsymbol{V}$ implica $\boldsymbol{T} \leq_{Vsp} \boldsymbol{V}$; in altre parole ogni sottospazio di un sottospazio di un dato spazio vettoriale ambiente è a sua volta sottospazio dell'ambiente.

Per rendere le esposizioni meno pesanti si tende a non distinguere tra le operazioni in uno spazio vettoriale e le riduzioni di queste ai suoi sottospazi e a non distinguere tra un sottospazio e il suo terreno. Le conseguenti semplificazioni del linguaggio e delle notazioni in genere non comportano confusione in quanto, ogni spazio ambiente $\boldsymbol{V}$ con il suo campo e le sue operazioni, insieme ad un qualsiasi suo sottoinsieme chiuso per combinazione lineare permettono di individuare senza problemi il sottospazio corrispondente con le relative operazioni.

G40:b.02 Per $\mathbb{F}^{\times d}$ con $d \geq 2$ è molto semplice individuare i sottospazi costituiti da d-uple le quali hanno determinate componenti uguali a 0 e le componenti rimanenti arbitrariamente variabili in $\mathbb{F}$. Per questi sottospazi usiamo il termine **sottospazi di annullamento di coordinate** e la corrispondente sigla sac.

Osserviamo esplicitamente che sono sac di $\mathbb{F}^{\times d}$ sia questo stesso spazio che il suo sottospazio nullo $\{\mathbf{0}_d\}$.

In $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$ sono sottospazi sac l'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate.

In $\mathbb{F}^{\times 3}$ sono sottospazi sac, oltre allo stesso spazio delle terne numeriche e ad $\{\mathbf{0}_3\}$:

$SAC_{011} := \{y, z \in \mathbb{F} :| \langle 0, y, z\rangle\}$, insieme individuato dall'equazione $x = 0$ e quindi chiamato piano $x = 0$ e denotato con Oyz;

$SAC_{101} := \{x, z \in \mathbb{F} :| \langle x, 0, z\rangle\}$, insieme individuato dall'equazione $y = 0$, chiamato piano $y = 0$ e denotato con Oxz;

$SAC_{110} := \{x, y \in \mathbb{F} :| \langle x, y, 0\rangle\}$, insieme individuato dall'equazione $z = 0$, chiamato piano $z = 0$ e denotato con Oxy;

$SAC_{100} := \{x \in \mathbb{F} :| \langle x, 0, 0\rangle\}$, insieme individuato dal sistema di equazioni $y = z = 0$, chiamato **asse della prima coordinata** (x) e denotato con Ox;

$SAC_{010} := \{y \in \mathbb{F} :| \langle 0, y, 0\rangle\}$, insieme individuato dal sistema di equazioni $x = z = 0$, chiamato **asse della seconda coordinata** (y) e denotato con Oy;

$SAC_{001} := \{z \in \mathbb{F} :| \langle 0, 0, z\rangle\}$, insieme individuato dal sistema di equazioni $x = y = 0$, chiamato **asse della terza coordinata** (z) e denotato con Oz.

Le precedenti notazioni si possono estendere per dimensioni superiori a 3 con scritture della forma $SAC_{b_1 b_2 \ldots b_d}$ aventi a deponente d-uple di cifre binarie; una di queste notazioni identifica il sac dei vettori la cui i esima coordinata vale 0 se il corrispondente $b_i = 0$ e può assumere qualsiasi valore di $\mathbb{F}$ se $b_i = 1$. Ad esempio per $\mathbb{F}^{\times 4}$ si hanno $SAC_{1101} := \{x, y, w \in \mathbb{F} :| \langle x, y, 0, w\rangle\}$ e $SAC_{1011} := \{x, z, w \in \mathbb{F} :| \langle x, 0, z, w\rangle\}$.

Evidentemente SAC_{0000} è il sottospazio nullo $\{\langle 0, 0, 0, 0\rangle\}$, mentre $SAC_{11111} = \mathbb{F}^{\times 5}$ è il sottospazio improprio.

G40:b.03 Un sac che riguarda l'annullamento di una sola coordinata, diciamo la i-esima, si individua anche con la semplice equazione $x_i = 0$. Un sac che corrisponde all'annullamento di più coordinate si individua con il sistema delle equazioni di annullamento di tali coordinate: ad esempio SAC_{1001} con il sistema di equazioni di annullamento

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Se si intersecano due sottospazi sac si ottiene un altro sottospazio dello stesso genere: ad esempio $SAC_{1101} \cap SAC_{1011} = \{x, w \in \mathbb{F} :| \langle x, 0, 0, w\rangle\} = SAC_{1001}$.

Si osserva che la intersezione di due sac si esprime con il sistema di equazioni di annullamento di coordinate costituito dall'unione delle equazioni che compaiono nei sistemi che individuano i due sottospazi che vengono uniti.

Ad esempio per l'intersezione dei due sac

$$SAC_{10010} \quad : \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad SAC_{01010} \quad : \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

si ha

$$SAC_{00010} \quad : \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

L'unione di due sac non confrontabili come insiemi non è un sac, ma solo un sottoinsieme del sac caratterizzato dalla d-upla binaria ottenuta come somma binaria delle somme dei due sac in esame.

G40:b.04 In generale anche l'intersezione di due sottospazi qualsiasi $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ di uno spazio $\boldsymbol{V}$ è un sottospazio. Infatti scelti come si vuole l'intero positivo k, i vettori v_1, ..., v_k in $S_1 \cap S_2$, e altrettanti scalari α_1, ..., α_k, la combinazione lineare $\displaystyle\sum_{h=1}^{k} \mathsf{v}_h \alpha_h$ deve appartenere ad entrambi i sottospazi e quindi anche alla loro intersezione.

Se si confrontano due sottospazi $\boldsymbol{S}_1$ ed $\boldsymbol{S}_2$ di $\boldsymbol{V}$ propri e non nulli deve verificarsi una ed una sola delle seguenti situazioni:

(1) $\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{S}_2$;

(2) $\boldsymbol{S}_1 <_{Vsp} \boldsymbol{S}_2$, relazione equivalente alla $\boldsymbol{S}_1 \cap \boldsymbol{S}_2 = S_1$, a sua volta equivalente alla $\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_2$;

(3) $\boldsymbol{S}_2 <_{Vsp} \boldsymbol{S}_1$, relazione equivalente alla $\boldsymbol{S}_1 \cap \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_2$, a sua volta equivalente alla $\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_1$;

(4) $\boldsymbol{S}_1 \cap \boldsymbol{S}_2 = \{\mathsf{0}_d\}$;

(5) $\emptyset <_{Vsp} \boldsymbol{S}_1 \cap \boldsymbol{S}_2 <_{Vsp} \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$.

Nei primi tre casi $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ si dicono **sottospazi confrontabili**; nei due casi restanti **sottospazi nonconfrontabili** e in tal caso esistono vettori di $\boldsymbol{S}_1$ che non appartengono ad $\boldsymbol{S}_2$ e vettori di $\boldsymbol{S}_2$ che non appartengono ad $\boldsymbol{S}_1$, ovvero si può scrivere $\boldsymbol{S}_1 \setminus \boldsymbol{S}_2 \neq \{\mathsf{0}\}$ e $\boldsymbol{S}_2 \setminus \boldsymbol{S}_1 \neq \{\mathsf{0}\}$.

Esempi piuttosto dvidenti delle precedenti situazioni si ottengono con sottospazi sac di ogni $\mathbb{F}^{\times d}$:

$$SAC_{1010} <_{Vsp} SAC_{1011} \quad , \quad SAC_{10101} >_{Vsp} SAC_{00100} \quad ,$$
$$\{\mathsf{0}_6\} \ <_{Vsp} \ SAC_{011010} \ = \ SAC_{011110} \cap SAC_{111011} \ <_{Vsp} \ SAC_{011110} \ , \ SAC_{111010} \ .$$

G40:b.05 Dato un $E \subset V$, si dice **chiusura lineare** di E l'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi di E; per tale insieme scriviamo

(1) $$\boldsymbol{span}(E) := \{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F} \ , \ \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in E :| \ \alpha_1 \mathsf{u}_1 + \alpha_2 \mathsf{u}_2\} \ .$$

Evidentemente la chiusura lineare di un qualsiasi insieme di vettori di V porta ad un sottospazio dello spazio ambiente $\boldsymbol{V}$, cioè $\boldsymbol{span}(E) \leq_{Vsp} \boldsymbol{V}$: infatti la combinazione lineare di due vettori che sono combinazioni lineari di vettori di un dato insieme E si può riscrivere come combinazione lineari di vettori di E. Questo fatto può essere chiarito dalla seguente formula, riguardante l'insieme di vettori $E = \{\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, ..., \mathsf{v}_k\}$

$$(2) \qquad \forall \alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_k, \gamma, \delta \in \mathbb{F} \ : \ \left(\sum_{h=1}^{k} \mathsf{v}_h \alpha_h\right) \gamma + \left(\sum_{h=1}^{k} \mathsf{v}_h \beta_h\right) \delta \ = \ \sum_{h=1}^{k} \mathsf{v}_h (\alpha_h \gamma + \beta_h \delta) \ .$$

Un insieme di vettori chiusura lineare della forma $\boldsymbol{span}(E)$ viene chiamato anche **sottospazio sotteso** dall'insieme di vettori E.

La scrittura $\boldsymbol{span}$ individua, per ogni $\boldsymbol{V}$, una funzione che ha come dominio $\mathcal{B}(\boldsymbol{V})$, la collezione di tutti i sottoinsiemi di $\boldsymbol{V}$, e come codominio l'insieme di tutti i sottospazi di VBi; questo insieme lo denotiamo con $\boldsymbol{Subvsp}(\boldsymbol{V})$. La $\boldsymbol{span}$ evidentemente è una funzione ampliamento: per ogni $E \subseteq \boldsymbol{V}$ si ha $\boldsymbol{span}(E) \supseteq E$.

È anche evidente che essa è una funzione idempotente:

$$(3) \qquad \forall E \subseteq V \ : \ \boldsymbol{span}(\boldsymbol{span}(E)) = \boldsymbol{span}(E) \ .$$

Va segnalato che la chiusura lineare dell'insieme E si può definire in due altri modi equivalenti: come il più ridotto dei sottospazi che contiene tale E e come intersezione di tutti i sottospazi che contengono E:

$$(4) \qquad \boldsymbol{span}(E) = \bigcap \left\{ \boldsymbol{S} \in \boldsymbol{Subvsp}(\mathbb{F}^{\times d}) \rrbracket \ \boldsymbol{S} \supseteq E \right\} \ .$$

G40:b.06 Consideriamo due sottospazi $\boldsymbol{S}_1$ ed $\boldsymbol{S}_2$ e la loro unione $U := \boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2$. Ovviamente se essi sono confrontabili la loro unione coincide con il più esteso dei due.

Se invece essi sono nonconfrontabili U non è un sottospazio. Un controesempio evidente si osserva già in due dimensioni: due sottospazi nonconfrontabili sono due rette diverse passanti per l'origine; queste rette hanno in comune solo l'origine, mentre la somma di due vettori non nulli, il primo appartenente solo alla prima retta, il secondo solo alla seconda, non può appartenere a nessuna delle due rette.

Altri semplici controesempi sono forniti da opportune coppie di sac; consideriamo SAC_{1100} e SAC_{0110}; $\mathsf{v} = \alpha\, \mathsf{e}_1 + \beta\, eSd_2 \in SAC_{1100}$, $\mathsf{w} = \gamma\, eSd_2 + \delta\, \mathsf{e}_3 \in SAC_{0110}$, mentre $\mathsf{v} + \mathsf{w} = \alpha\, \mathsf{e}_1 + (\beta + \gamma)\mathsf{e}_2 + \delta\, \mathsf{e}_3$ non appartiene a $SAC_{1100} \cup SAC_{0110}$ se $\gamma \neq -\beta$.

In generale si possono considerare i due vettori $\mathsf{v}_1 \in \boldsymbol{S}_1 \setminus \boldsymbol{S}_2$ e $\mathsf{v}_2 \in \boldsymbol{S}_2 \setminus \boldsymbol{S}_1$ e $\mathsf{v}_1 + \mathsf{v}_2$ non può appartenere ad $\boldsymbol{S}_1$, perchè in tal caso si avrebbe $\mathsf{v}_2 = (\mathsf{v}_1 + \mathsf{v}_2) - \mathsf{v}_1 \in \boldsymbol{S}_1$, contro l'ipotesi $\mathsf{v}_2 \in \boldsymbol{S}_2 \setminus \boldsymbol{S}_1$. Per simmetria tale vettore non può appartenere neppure ad $\boldsymbol{S}_2$ e dunque $\mathsf{v}_1 + \mathsf{v}_2 \notin \boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2$.

È invece sottospazio la chiusura lineare dell'unione di due sottospazi, cioè $\boldsymbol{span}(\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2)$. Ad esempio, riprendendo i due sottospazi precedenti, accade che $\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_3 \in \boldsymbol{span}(SAC_{1100} \cup SAC_{0110}) = SAC_{1110}$.

Il sottospazio $\boldsymbol{span}(\boldsymbol{S}_1 \cup \boldsymbol{S}_2)$ si dice anche **somma dei sottospazi** $\boldsymbol{S}_1$ ed $\boldsymbol{S}_2$ in quanto esso si può esprimere come $\{\mathsf{v}_1 \in \boldsymbol{S}_1, \mathsf{v}_2 \in \boldsymbol{S}_2 :| \ \mathsf{v}_1 + \mathsf{v}_2\}$. Esso si denota anche con $\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$.

Talora è utile considerare la somma di tre e più sottospazi.

L'operazione di somma di sottospazi è chiaramente commutativa ed associativa, come la somma di vettori.

I sac forniscono anche semplici esempi di somme di sottospazi:

$$SAC_{0101} + SAC_{0110} = SAC_{0111} \quad , \quad SAC_{010100} + SAC_{010011} + SAC_{101011} = \mathbb{R}^{\times 6} \ .$$

In generale se b_1 e b_2 denotano due sequenze binarie della stessa lunghezza d, si ha

(1) $$SAC_{\mathsf{b}_1} + SAC_{\mathsf{b}_2} = SAC_{\max(\mathsf{b}_1,\mathsf{b}_2)} \quad , \quad SAC_{\mathsf{b}_1} \cap SAC_{\mathsf{b}_2} = SAC_{\min(\mathsf{b}_1,\mathsf{b}_2)} \; .$$

G40:b.07 Siano $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{T}$ due sottospazi propri dello spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ tali che $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{T}$ e che inoltre $\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{T} = \{\mathsf{0}_d\}$; in tal caso si dice che $\boldsymbol{V}$ è esprimibile come **somma diretta** di $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{T}$ e si scrive $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S} \oplus \boldsymbol{T}$. In questo caso si dice anche che $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{T}$ sono **sottospazi complementari** entro $\boldsymbol{V}$.
Anche per le somme dirette è spesso utile considerare composizioni di tre o più sottospazi; anche la somma diretta è un'operazione commutativa ed associativa.

Semplici esempi di sottospazi complementari e di somme dirette sono forniti dalle seguenti espressioni
$$SAC_{101100} \oplus SAC_{010011} = \mathbb{F}^{\times 6} \quad , \quad SAC_{10110011} \oplus SAC_{01001100} \oplus SAC_{01001100} = \mathbb{F}^{\times 8}$$
Altri esempi abbastanza intuitivi si trovano nel piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e nello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$. Due rette del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ diverse e passanti per l'origine sono sottospazi monodimensionali complementari entro il piano sui reali.
Una retta e un piano passanti per l'origine tali che la retta non appartiene al piano costituiscono sottospazi complementari di $\mathbb{R}^{\times 3}$.
Dato un $\boldsymbol{S}$ sottospazio proprio di $\boldsymbol{V}$, sono molti i sottospazi suoi complementari in $\boldsymbol{V}$. Ad esempio nel piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sono sottospazi complementari dell'asse delle ascisse Ox tutte le rette per l'origine esprimibili con le equazioni $x \cos\theta + y \sin\theta = 0$ per $0 < \theta < \pi$.
Per ogni spazio $\boldsymbol{V}$ ed ogni suo sottospazio proprio $\boldsymbol{S}$ denotiamo con $Compl_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{S})$ la collezione dei sottospazi propri di $\boldsymbol{V}$ complementari di $\boldsymbol{S}$.
Tre esempi interessanti di coppie di sottospazi complementari sono forniti da sottospazi dello spazio delle matrici di ordine d (v. G42:c.07): sono coppie di sottospazi complementari:
- il sottospazio delle matrici simmetriche e quello dalle matrici antisimmetriche;
- il sottospazio delle matrici triangolari superiori e il sottospazio delle matrici strettamente triangolari inferiori;
- il sottospazio delle matrici triangolari inferiori e il sottospazio delle matrici strettamente triangolari superiori.

G40:b.08 (1) Prop.: Ogni sottospazio proprio $\boldsymbol{S} <_{Vsp} \boldsymbol{V}$ possiede un complemento in $\boldsymbol{V}$.
Dim.: Sia $\boldsymbol{V}$ che $\boldsymbol{S}$ possiedono una base; sia $\{\mathsf{v}_1, ..., \mathsf{v}_d\}$ una base di $\boldsymbol{V}$ ed $\{\mathsf{s}_1, ..., \mathsf{s}_r\}$ una base di $\boldsymbol{S}$. Con successivi scambi di un s_h con un opportuno v_k si ottiene una base di $\boldsymbol{V}$ della forma $\{\mathsf{s}_1, ..., \mathsf{s}_r, \mathsf{v}'_{r+1}, ..., \mathsf{v}'_d\}$, cioè una base che estende la base del sottospazio. Un complemento di $\boldsymbol{S}$ è fornito da $\boldsymbol{span}(\mathsf{v}'_{r+1}, ..., \mathsf{v}'_d)$ ▮
(2) Prop.: Un insieme di vettori $\{\mathsf{v}_1, ..., \mathsf{v}_d\}$ dello spazio $\boldsymbol{V}$ è una sua base sse $\boldsymbol{V}$ si può esprimere mediante la somma diretta
$$\boldsymbol{V} = \mathsf{v}_1\mathbb{F} \oplus \cdots \oplus \mathsf{v}_d\mathbb{F} \;▮$$
Ad esempio $\langle 0, 1\rangle\mathbb{R} \oplus \langle -1, -1\rangle\mathbb{R} \;=\; \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

G40:b.09 In varie circostanze risulta utile fare riferimento a sottospazi di uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ privati dell'origine $\mathsf{0}_{\boldsymbol{V}}$. Per uno di questi sottoinsiemi di $\boldsymbol{V}$ verrà usato il termine **sottospazio-nz**. Corrispondentemente talora è utile servirsi della scrittura $\boldsymbol{span}_{nz}$ per la funzione che ad un sottoinsieme $S \subseteq \boldsymbol{V}_{nz}$ associa $\boldsymbol{span}_{nz}(S) \;=\; \boldsymbol{span}(S) \setminus \{\mathsf{0}_{\boldsymbol{V}}\}$.
Chiaramente per ogni sottospazio-nz N si ha $\boldsymbol{span}(N) = N \dot\cup \{\mathsf{0}_{\boldsymbol{V}}\}$; questo sottospazio si dice semplicemente **chiusura del sottospazio-nz**. Per ogni $S \subseteq \boldsymbol{V}$ si constata $\boldsymbol{span}(\boldsymbol{span}_{nz}(S)) = \boldsymbol{span}(S)$. Dunque

la corrispondenza fra sottospazi-nz N e sottospazi loro chiusure, $\boldsymbol{span}(N)$, è biunivoca. Essa rende ragionevole attribuire ad un sottospazio-nz la dimensione del corrispondente sottospazio chiusura e chiamare **sottospazi-nz complementari** due di questi sottoinsiemi di vettori le cui chiusure sono sottospazi complementari. Evidente anche che l'intersezione di due sottospazi-nz è un sottospazio-nz e la somma diretta di due sottospazi-nz è un sottospazio-nz.

G40:c. Trasformazioni lineari

G40:c.01 Consideriamo due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{F}$, $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$. Si dice **trasformazione $\mathbb{F}$-lineare** da $\boldsymbol{V}$ in $\boldsymbol{W}$ ogni funzione del genere $L \in \{\boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}\}$ tale che,

$$(1) \qquad \forall\, \mathsf{v}, \mathsf{u} \in \mathrm{dom}(L) \subseteq \boldsymbol{V}\ ,\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}\ :\ L(\mathsf{v}\alpha + \mathsf{u}\beta) = L(\mathsf{v})\alpha + L(\mathsf{u})\beta\ .$$

L'insieme di queste funzioni si denota con $\{\boldsymbol{V} \longrightarrow_{\mathbb{F}-lin} \boldsymbol{X}\}$.
Nella pratica è necessario fare riferimento esplicitamente al campo quando si trattano spazi vettoriali su campi diversi. Molto più spesso si fa riferimento ad un unico campo e quindi più semplicemente si parla di **trasformazione lineare** e si usano notazioni come $\{\boldsymbol{V} \longrightarrow_{lin} \boldsymbol{W}\}$.

La proprietà data viene chiamata **rispetto della combinazione lineare** e si dice anche che una trasformazione lineare è una funzione tra due spazi vettoriali che mantiene la combinazione lineare.

Una trasformazione come la precedente L si chiama anche **omomorfismo di spazi vettoriali** o **omomorfismo lineare** da $\boldsymbol{V}$ in $\boldsymbol{W}$. Questi termini sono preferiti quando si trattano questioni algebriche riguardanti diverse specie di strutture. Un altro termine usato spesso nell'analisi funzionale e nella meccanica quantistica è **operatore lineare**.

G40:c.02 La definizione di trasformazione lineare L implica anche che ogni combinazione lineare di vettori appartenenti a $\mathrm{dom}(L)$ appartiene allo stesso $\mathrm{dom}(L)$, cioè che $\boldsymbol{span}(\mathrm{dom}(L)) = \mathrm{dom}(L)$, ovvero che $\mathrm{dom}(L) \in \boldsymbol{Subvsp}(\boldsymbol{V})$. Dunque una trasformazione lineare ha come dominio un sottospazio.

Inoltre si trova che anche $\mathrm{cod}(L)$ è chiuso rispetto alla combinazione lineare, cioè che $\mathrm{cod}(L) \in \boldsymbol{Subvsp}(\boldsymbol{W})$. Infatti, quali che siano $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathrm{cod}(L)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, se v e w sono due vettori di $\mathrm{dom}(L)$ tali che $L(\mathsf{v}) = \mathsf{x}$ e $L(\mathsf{w}) = \mathsf{y}$, segue che $\mathsf{x}\alpha + \mathsf{y}\beta = L(\mathsf{v}\alpha + \mathsf{w}\beta) \in \mathrm{cod}(L)$.

Dunque le trasformazioni lineari sono funzioni che hanno come domini e codomini dei sottospazi. Questo fatto implica che gran parte delle considerazioni su insiemi di trasformazioni lineari della forma $\{\boldsymbol{V} \longrightarrow_{lin} \boldsymbol{W}\}$ si possono ridurre a insiemi di trasformazioni della forma $\{\boldsymbol{V} \longmapsto\!\!\triangleright_{lin} \boldsymbol{W}\}$.

G40:c.03 Le trasformazioni lineari si incontrano in moltissimi sviluppi della matematica e delle sue applicazioni e vengono studiate e utilizzate ampiamente. Qui approfondiamo solo lo studio delle trasformazioni lineari tra due spazi di sequenze $\boldsymbol{V} = \mathbb{F}^{\times d}$ e $\boldsymbol{W} = \mathbb{F}^{\times e}$, ma è opportuno segnalare che si studiano trasformazioni di spazi i cui vettori sono funzioni di variabili reali o complesse con particolari proprietà. Queste trasformazioni sono utilizzate in numerosi campi applicativi: fisica atomica, chimica molecolare, meccanica, svariate tecnologie, modellistica, statistica, economia ... .

Negli spazi di funzioni reali derivabili, la derivazione è una trasformazione lineare, grazie alla proprietà

$$\frac{d}{dx}\,[\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)] = \alpha\,\frac{d}{dx} f(x) + \beta\,\frac{d}{dx} g(x)\ .$$

Negli spazi di funzioni reali integrabili in un intervallo $[a,b]$, l'integrazione definita in tale intervallo è una trasformazione lineare che porta allo spazio (monodimensionale) dei numeri reali, grazie alla

$$\int_a^b dx\ [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)] \ = \ \alpha \int_a^b dx\, f(x) + \beta \int_a^b dx\, g(x)\ .$$

Vi sono inoltre spazi di funzioni per le quali si possono definire delle cosiddette trasformate integrali della forma $\int_a^b dx L(y,x) f(x)$; queste trasformate sono trasformazioni lineari grazie a proprietà come

$$\int_a^b dx\, L(y,x)\, [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)] \ = \ \alpha \int_a^b dx\, L(y,x)\, f(x) + \beta \int_a^b dx\, L(y,x)\, g(x)\ .$$

È opportuno segnalare anche che l'importanza delle trasformazioni lineari è dovuta da un lato alla disponibilità di svariate tecniche di calcolo che consentono di risolvere vari problemi che le riguardano, dall'altro al fatto che molte trasformazioni non lineari possono essere approssimate proficuamente dalle lineari.

G40:c.04 Consideriamo ora le trasformazioni lineari entro uno spazio $\boldsymbol{V}$, funzioni che sono dette anche **operatori lineari** su $\boldsymbol{V}$ ed **endomorfismi lineari** di $\boldsymbol{V}$. Per l'insieme di tutti questi operatori ci serviremo della notazione **Lintr**$(\boldsymbol{V})$.

Per ogni $\omega \in \mathbb{F}_{nz}$ la funzione $\lceil \mathsf{v} \in \boldsymbol{V} \mapsto \mathsf{v} \cdot \omega \rceil$, cioè la moltiplicazione dei vettori di $\boldsymbol{V}$ per lo scalare ω, si dice anche **omotetia centrale** di fattore ω. Essa si denota con $Hmtt_{\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}},\omega}$ ed evidentemente è un operatore lineare.

Chiaramente una tale trasformazione lineare è invertibile e la trasformazione inversa della omotetia centrale di fattore ω è l'omotetia centrale di fattore ω^{-1}.

La moltiplicazione per 1 è l'**identità** o **trasformazione identica** di $\boldsymbol{V}$, $\mathrm{Id}_{\boldsymbol{V}}$; se si può sottintendere $\boldsymbol{V}$ l'identità si denota con $\hat{\mathbf{1}}$ e l'omotetia di fattore ω si denota con $\omega \cdot \hat{\mathbf{1}}$ o con $\hat{\omega}$. Se $\omega \in \mathbb{R}$ e $\omega > 1$ si parla di **dilatazione**; se invece $0 < \omega < 1$ simparla di **contrazione**. Per $\omega = -1$ l'omotetia è la $\lceil \mathsf{v} \mapsto -\mathsf{v} \rceil$, trasformazione chiamata **simmetria centrale** di centro **0**; nei testi di fisica, quando $\boldsymbol{V}$ rappresenta lo spazio fisico viene detta **inversione spaziale**.

Anche la moltiplicazione per il numero 0 può considerarsi una trasformazione lineare, in quanto il suo codominio è costituito dal solo vettore nullo $0_{\boldsymbol{V}}$ e si può considerare sottospazio di $\boldsymbol{V}$. Essa viene detta **trasformazione nulla** o **trasformazione annichilatrice** di $\boldsymbol{V}$; prescindendo da $\boldsymbol{V}$ si denota $\hat{\mathbf{0}}$.

G40:c.05 Altre trasformazioni lineari entro $\mathbb{F}^{\times d}$ molto semplici si individuano a partire dai vettori della base canonica e_1, e_2, ..., e_d.

Per ogni $i = 1, 2, ..., d$ si definisce **proiezione** o **proiettore** nel sottospazio $\mathsf{e}_i\mathbb{F}$ la trasformazione

$$\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_i} := \lceil \sum_{j=1}^{d} \mathsf{e}_j \alpha_j \mapsto \mathsf{e}_i \alpha_i \rceil\ .$$

Quando la base canonica si considera ordinata, il precedente proiettore si può denotare semplicemente con $\boldsymbol{Prj}_i$.

Si osserva che $\forall i = 1, 2, ..., d\ :\ \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_i}(\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_i}(\mathsf{v})) = \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_i}(\mathsf{v})$; questo fatto si esprime dicendo che i proiettori sono **operatori lineari idempotenti**. Ricordiamo che una endofunzione si dice idempotente sse applicata due volte fornisce lo stesso risultato che si ottiene applicandola una sola volta.

Si constata che la composizione di due proiettori relativi a due diversi vettori della base canonica è la trasformazione nulla.

Da questo segue che la somma di due o più proiettori relativi a diversi vettori canonici è un operatore lineare idempotente.
Ad esempio $(\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_1}+\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_2})^2 \ = \ {\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_1}}^2+{\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_2}}^2+\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_1}\circ\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_2}+\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_2}\circ\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_1} \ = \ \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_1}+\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_2}$.
Osserviamo anche che $\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_i}+\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_i} \ = \ 2\,\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_i}$.

G40:c.06 In generale chiamiamo **proiettore** nello spazio $\boldsymbol{V}$ ogni operatore lineare su tale spazio che è idempotente.
Esaminiamo un generico proiettore P, cioè un operatore tale che sia $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$; per questo scriviamo $\mathsf{C} := \mathrm{cod}(\mathsf{P})$.

(1) Prop.: L'operatore P ridotto al sottospazio C è l'identità di tale spazio.

Dim.: Sia x un qualsiasi vettore di C ed $\mathsf{y}\in\boldsymbol{V}$ tale che $\mathsf{P}(\mathsf{y})=\mathsf{x}$. $\mathsf{P}(\mathsf{x})=\mathsf{P}^2(\mathsf{y})=\mathsf{P}(\mathsf{y})=\mathsf{x}$ ▮

(2) Prop.: Anche $\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P}$ è un proiettore.

Dim.: $(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})^2=\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P}-\mathsf{P}+\mathsf{P}^2=\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P}$ ▮

Denotiamo con C' il codominio di $\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P}$, ossia introduciamo $\mathsf{C}' := (\hat{\mathbf{1}}=-PSSs)\,\boldsymbol{V}$.

(3) Prop.: P riduce ogni $\mathsf{y}\in\mathsf{C}'$ al vettore nullo.

Dim.: $\mathsf{P}\circ_{rl}(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})=\mathsf{P}-\mathsf{P}^2=\hat{\mathbf{0}}$ ▮

(4) Prop.: I sottospazi $\mathsf{C}=\mathsf{P}(\boldsymbol{V})$ e $\mathsf{C}' := (\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})(\boldsymbol{V})$ sono sottospazi complementari.

Dim.: Per ogni $\mathsf{v}\in\boldsymbol{V}$ si ha $\mathsf{v}=\mathsf{P}(\mathsf{v})+(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})(\mathsf{v})$ e si osserva che $\mathsf{P}(\mathsf{v})\in\mathsf{C}$ e $(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})(\mathsf{v})\in\mathsf{C}'$.
Inoltre se $\mathsf{y}\in\mathsf{C}\cap\mathsf{C}'$ devono valere entrambe le uguaglianze $\mathsf{P}(\mathsf{y})=\mathbf{0}$ e $(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})(\mathsf{y})=\mathbf{0}$ e da queste $\mathsf{y}=\hat{\mathbf{1}}(\mathsf{y})=\mathsf{P}(\mathsf{y})+(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})(\mathsf{y})=\mathbf{0}$, cioè $\mathsf{C}\cap\mathsf{C}'=\{\mathbf{0}\}$ ▮

Il proiettore $\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P}$ si chiama complementare di P; questo è giustificato dal fatto che $\hat{\mathbf{1}}-(\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P})=\mathsf{P}$, cioé che P è complementare di $\hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P}$; Per ogni coppia di proiettori complementari è tale anche la coppia riflessa.
Si osserva che ad ogni coppia di proiettori complementari è associata una coppia di sottospazi complementari; Vale anche il viceversa.

(5) Prop.: Ad ogni coppia di sottospazi complementari $\langle\mathsf{S},\mathsf{S}'\rangle$ è associata una coppia di proiettori complemetari.
Consideriamo un generico $\mathsf{v}\in\boldsymbol{V}$ e sia $\mathsf{v}=\mathsf{x}+\mathsf{x}'$ con $\mathsf{x}\in\mathsf{S}$ e $\mathsf{x}'\in\mathsf{S}'$. Definiamo $\mathsf{P} := \ulcorner\,\mathsf{v} \mapsto \mathsf{x}\,\urcorner$; questo è un proiettore ed è tale anche $\mathsf{P}' := \hat{\mathbf{1}}-\mathsf{P} = \ulcorner\,\mathsf{v} \mapsto \mathsf{x}'\,\urcorner$; $\langle\mathsf{P},\mathsf{P}'\rangle$ è la coppia di proiettori enunciata ▮

G40:c.07 Osserviamo che è frequente trattare proiezioni ortogonali in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^{\times 3}$. Queste proiezioni possono anche essere le cosiddette proiezioni oblique; queste proiezioni in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ si ottengono considerando due diverse rette per l'origine $\mathcal{R}$ e $\mathcal{D}$ e trasformando ogni punto -RR P nel punto in cui si intersecano $\mathcal{R}$ e la parallela a $\mathcal{D}$ passante per P.
In $\mathbb{R}^{\times 3}$ si hanno proiezioni oblique relative ad un piano per l'origine Π e ad una retta per l'origine $\mathcal{R}$ che non appartiene al piano e trasformando ogni punto -RRR P nel punto in cui si intersecano $\mathcal{R}$ e il piano parallelo a Π passante per P, oppure trasformando ogni punto -RRR P nel punto in cui si intersecano Π e la retta parallela alla $\mathcal{R}$ passante per P.
Va rilevato che qui sopra abbiamo fatto ricorso alla nozione di proiezione ortogonale solo su base intuitiva, mentre a rigore essa richiede la nozione di prodotto interno che definiremo solo nel capitolo che segue.

G40:c.08 Si osserva che le trasformazioni $\mathbb{F}$-lineari di un dato genere $\{\boldsymbol{V}\longmapsto_{\mathbb{F}-lin}\boldsymbol{W}\}$ possono essere moltiplicate per uno scalare del campo $\mathbb{F}$ e sommate, ovvero possono essere sottoposte a combinazioni lineari. Infatti si può dare la definizione

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}\ ,\ \forall L, M \in \{\, \boldsymbol{V} \longrightarrow_{\mathbb{F}-lin} \boldsymbol{W}\} \ \vdots\ \ (\alpha \cdot L + \beta \cdot M)(\mathsf{v}) := \alpha \cdot L(\mathsf{v}) + \beta \cdot M(\mathsf{v})\ .$$

Si osserva che questa definizione si può generalizzare a tutte le funzioni f e g aventi lo stesso dominio ed aventi come codominio un spazio vettoriale sul campo $\mathbb{F}$.

Si osserva inoltre che le trasformazioni lineari, potendo essere combinate linearmente, costituiscono a loro volta uno spazio vettoriale. L'elemento nullo di questo spazio è dato dalla trasformazione nulla, mentre la trasformazione opposta della $\lceil \mathsf{v} \mapsto L(\mathsf{v}) \rceil$ è la $\lceil \mathsf{v} \mapsto L(-\mathsf{v}) \rceil = \lceil \mathsf{v} \mapsto -L(\mathsf{v}) \rceil$.

Esempi semplici e significativi di somme di trasformazioni lineari di **Lintr**$(\mathbb{F}^{\times d})$, già usati in :c.??, sono le somme di proiettori sopra i sottospazi sottesi da insiemi di versori canonici.

Vediamo più esplicitamente come si può associare un proiettore ad ogni sac. Consideriamo la sequenza di d bits $\mathsf{b} = b_1 b_2 \cdots b_d$ e il corrispondente sottospazio SAC_{b}; si dice proiettore corrispondente a tale sac la trasformazione lineare

$$\left\lceil \sum_{j=1}^{d} \mathsf{e}_j \alpha_j \in \mathbb{F}^{\times d} \mapsto \sum_{j=1}^{d} \mathsf{e}_j b_j \alpha_j \right\rceil\ .$$

Ad esempio per $d = 3$ il proiettore relativo al sac caratterizzato dall'equazione $x_2 = 0$, cioè il proiettore sul piano Ox_1x_3, trasforma il generico vettore $\mathsf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ nel vettore $\langle v_1, 0, v_3 \rangle$.

È utile osservare che questo vettore è la somma dei vettori $\mathsf{e}_1 v_1$ ed $\mathsf{e}_3 v_3$ ottenibili, risp., applicando a v i proiettori $\boldsymbol{Prj}_1$ e $\boldsymbol{Prj}_3$. Questo conduce a considerare il precedente proiettore sul piano Ox_1x_3 come la somma dei precedenti proiettori su sottospazi monodimensionali: $\boldsymbol{Prj}_{101} = \boldsymbol{Prj}_1 + \boldsymbol{Prj}_3$.

In generale per il proiettore sopra SAC_{b} si ha $\boldsymbol{Prj}_{b_1 b_2 \ldots b_d} = \sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{Prj}_j b_j$.

G40:c.09 Introduciamo un sistema di termini che denotano collezioni di trasformazioni lineari tra due spazi $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$, eventualmente coincidenti, definite solo caratterizzando domini e codomini.

Denotiamo con $\{\, \boldsymbol{V} \longmapsto_{lin} \boldsymbol{W}\}$ l'insieme degli omomorfismi L dall'intero $\boldsymbol{V}$ in $\boldsymbol{W}$, cioè tali che $\text{dom}(L) = \boldsymbol{V}$. Questo insieme di trasformazioni si denota anche con **Lintr**$(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$.

Denotiamo con $\{\, \boldsymbol{V} \relbar\!\!\relbar\!\!\triangleright_{lin} \boldsymbol{W}\}$ l'insieme degli omomorfismi L da $\boldsymbol{V}$ sull'intero $\boldsymbol{W}$, cioè tali che $\text{cod}(L) = \boldsymbol{W}$; queste applicazioni suriettive sono dette anche **epimorfismi lineari**.

Denotiamo con $\{\, \boldsymbol{V} \vdash\!\!\relbar\!\!\triangleright_{lin} \boldsymbol{W}\}$ l'insieme degli omomorfismi L dall'intero $\boldsymbol{V}$ sull'intero $\boldsymbol{W}$, cioè tali che $\text{dom}(L) = \boldsymbol{V}$ e $\text{cod}(L) = \boldsymbol{W}$.

Denotiamo con $\{\, \boldsymbol{V} \longleftrightarrow_{lin} \boldsymbol{W}\}$ l'insieme degli omomorfismi L da $\boldsymbol{V}$ in $\boldsymbol{W}$ invertibili, cioè tali che esista $L^{-\mathbf{1}}$; essi sono detti anche **monomorfismi lineari**.

Denotiamo con $\{\, \boldsymbol{V} \vdash\!\!\relbar\!\!\triangleright_{lin} \boldsymbol{W}\}$ l'insieme degli omomorfismi L dall'intero $\boldsymbol{V}$ sull'intero $\boldsymbol{W}$, cioè tali che $\text{dom}(L) = \boldsymbol{V}$ e $\text{cod}(L) = \boldsymbol{W}$.

Denotiamo con $\{\, \boldsymbol{V} \triangleleft\!\!\relbar\!\!\triangleright_{lin} \boldsymbol{W}\}$ l'insieme dei monomorfismi L dall'intero $\boldsymbol{V}$ nell'intero $\boldsymbol{W}$, cioè tali che $\text{dom}(L) = \boldsymbol{V}$, $\text{cod}(L) = \boldsymbol{W}$ ed esista $L^{-\mathbf{1}}$; essi sono detti anche **isomorfismi lineari**.

Quando $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}$ si parla di **endomorfismi lineari** entro $\boldsymbol{V}$ e anche di **operatori lineari** su $\boldsymbol{V}$. La loro collezione si denota anche con **Lintr**$(\boldsymbol{V})$.

Gli endomorfismi entro $\boldsymbol{V}$ che sono isomorfismi (e quindi sono permutazioni di $\boldsymbol{V}$) si dicono **automorfismi lineari** di $\boldsymbol{V}$, o anche **operatori lineari invertibili** su $\boldsymbol{V}$.

G40:c.10 Lo studio di una trasformazione $L \in \{\, \boldsymbol{V} \longrightarrow_{lin} \boldsymbol{W}\}$ con $\text{dom}(L) <_{Vsp} \boldsymbol{V}$ e $\text{cod}(L) <_{Vsp} \boldsymbol{W}$ per vari scopi può essere vantaggiosamente ridotto allo studio della corrispondente trasformazione del genere $\{\text{dom}(L) \vdash\!\!\relbar\!\!\triangleright_{lin} \text{cod}(L)\}$, in quanto questa costituisce una trasformazione più essenziale.

In molti casi specifici tuttavia questa riduzione dell'ambiente non è facilmente precisabile. Occorre innanzi tutto tenere sotto controllo $\mathrm{dom}(L)$ e $\mathrm{cod}(L)$; in genere gli spazi $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ sono trattati concretamente attraverso loro basi specifiche $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ e la riduzione richiede di riferire in modo preciso $\mathrm{dom}(L)$ a $\mathcal{B}$ e $\mathrm{cod}(L)$ a $\mathcal{C}$. Queste operazioni sono riconducibili a cambiamenti di base e possono risultare impegnative.

Nel seguito tratteremo soprattutto le trasformazioni dei generi $\{\boldsymbol{V} \longrightarrow_{lin} \boldsymbol{W}\}$ e '$\{\mathbb{F}^{\times d} \longmapsto\!\!\triangleright_{lin} \mathbb{F}^{\times e}\}$ senza preoccuparci delle suddette difficoltà.

G40:d. Matrici di rasformazioni lineari

G40:d.01 Ogni trasformazione lineare L del genere $\{\mathbb{F}^{\times d} \longmapsto\!\!\triangleright_{lin} \mathbb{F}^{\times e}\}$ è determinata dai trasformati dei vettori di una base dello spazio dominio $\mathbb{F}^{\times d}$; in particolare è definita dalle sue azioni sui vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_i$ della base canonica di $\mathbb{F}^{\times d}$. Infatti se conosciamo i trasformati $L(\mathbf{e}_i)$ per $i = 1, 2, ..., d$, siamo in grado di determinare il trasformato da L di ogni vettore $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{d} \mathbf{e}_i v_i$, grazie all'espressione:

$$(1) \qquad L(\mathbf{v}) = L\left(\sum_{i=1}^{d} \mathbf{e}_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{d} L(\mathbf{e}_i) v_i \ .$$

Si pone dunque il problema del controllo dei vettori $L(\mathbf{e}_i)$; questo equivale alla conoscenza delle espressioni dei vettori $L(\mathbf{e}_i)$ come combinazioni lineari dei vettori della base canonica di $\mathbb{F}^{\times e}$ che denotiamo con $\mathbf{u}_h := \langle k \in (e] \,:\!|\, \delta_{h,k}\rangle$ per $h = 1, 2, ..., e$.

Supponiamo di conoscere queste combinazioni lineari che scriviamo $L(\mathbf{e}_i) =: \sum_{j=1}^{e} \mathbf{u}_j \ell_{j,i}$. Per il trasformato del generico vettore $\mathbf{v}$ abbiamo quindi

$$(2) \qquad L(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{d} L(\mathbf{e}_i) v_i = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{e} \mathbf{u}_h \ell_{j,i} v_i = \sum_{j=1}^{e} \mathbf{u}_j \left(\sum_{i=1}^{d} \ell_{j,i} v_i\right) \ .$$

L'azione della trasformazione L è quindi determinata dalla conoscenza del sistema dei $d \cdot e$ scalari $\ell_{j,i}$. Questi elementi del campo $\mathbb{F}$ possono essere disposti nelle caselle di una matrice di profilo $e \times d$; l'entrata relativa alla riga j e alla colonna i riguarda il coefficiente del vettore $\mathbf{u}_j$ dello sviluppo nella base canonica dello spazio codominio del trasformato del vettore $\mathbf{e}_i$ della base canonica dello spazio dominio.

La matrice così individuata si dice **matrice rappresentativa della trasformazione lineare nelle basi canoniche** degli spazi codominio e dominio. Le matrici rappresentative consentono di trattare le trasformazioni lineari con i metodi numerici sviluppati per i calcoli sulle matrici, con le procedure che li implementano ed anche con i dispositivi hardware che sono stati sviluppati per poter effettuare con efficienza calcoli matriciali pesantemente impegnativi.

G40:d.02 Grazie all'isomorfismo fra ogni spazio vettoriale a dimensioni finite sul campo $\mathbf{F}$ con uno spazio $\mathbb{F}^{\times d}$, dalla precedente formula :d.01(2) si ricava che, fissate una base $\mathcal{B} = \langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_d\rangle$ di $\mathbb{F}^{\times d}$ ed una base $\mathcal{C} = \langle \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_e\rangle$ di $\mathbb{F}^{\times e}$, ad ogni trasformazione lineare del genere $\{\boldsymbol{V} \longmapsto_{\mathbb{F}-lin} \boldsymbol{W}\}$, con $d := \dim(\boldsymbol{V})$ ed $e := \dim(\boldsymbol{W})$, risulta associata una matrice di profilo $e \times d$.

Dalla formula :c.10(2) si ricava anche che, facendo riferimento ad una base di $\mathbb{F}^{\times d}$ ed una base di $\mathbb{F}^{\times e}$, ogni matrice di $\mathsf{Mat}_{e,d;\mathbb{F}}$ individua una trasformazione lineare di $\{\,\boldsymbol{V} \longmapsto_{\mathbb{F}-lin} \boldsymbol{W}\}$. Matrici su un campo $\mathbb{F}$ e trasformazioni $\mathbb{F}$-lineari sono quindi entità fortemente collegate.

Dalla stessa :c.11(2) si ricava che l'azione di ogni trasformazione lineare fra spazi a finite dimensioni si può ottenere mediante calcoli matriciali. Preferenzialmente il vettore da trasformare, $\mathsf{v} \in \mathbb{F}^{\times d}$, lo si rappresenta con un vettore colonna di profilo $d \times 1$ formato dai suoi coefficienti c_i nella sua espressione come combinazione lineare dei vettori della base canonica, mentre la trasformazione si tratta attraverso la sua matrice rappresentativa nelle due basi canoniche di $\mathbb{F}^{\times d}$ ed $\mathbb{F}^{\times e}$. Il vettore trasformato viene allora rappresentato dal vettore colonna $e \times 1$ ottenuto come prodotto righe per colonne della suddetta matrice per il primo vettore colonna introdotto.

Diamo alcuni seguenti esempi di espressioni matriciali rappresentanti trasformazioni lineari.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\theta + \beta\tau \\ \gamma\theta + \delta\tau \end{bmatrix} \qquad , \qquad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 21 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + a_{1,3}v_3 \\ a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + a_{2,3}v_3 \\ a_{3,1}v_1 + a_{3,2}v_2 + a_{3,3}v_3 \end{bmatrix}$$

Si osserva inoltre che le matrici che individuano le trasformazioni di $\{\mathbb{F}^{\times d} \longmapsto \mathbb{F}^{\times e}\}$ sono in biiezione con le sequenze di $e \cdot d$ elementi del campo $\mathbb{F}$ e possono essere sottoposte a combinazioni $\mathbb{F}$-lineari; esse quindi possono essere considerate vettori di uno spazio vettoriale a $e \cdot d$-dimensioni.

G40:d.03 Consideriamo trasformazioni lineari del genere $\{\mathbb{F}^{\times d} \longmapsto \mathbb{F}^{\times d}\}$, cioè operatori lineari entro $\mathbb{F}^{\times d}$ denotandole con lettere maiuscole dotate di cappuccio $\hat{L}$, $\hat{M}$, $\hat{N}$ o con simboli simili. Le individueremo con le loro matrici rappresentative, cioè con matrici quadrate di ordine d.

Per le matrici dell'identità e delle omotetie si ha

$$\hat{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \hat{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} .$$

Le matrici dei proiettori relativi a vettori della base canonica sono

$$\boldsymbol{Prj}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{Prj}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots \qquad \boldsymbol{Prj}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} .$$

Le matrici dei proiettori sopra SAC_{101}, SAC_{1011}, SAC_{01110} sono, risp.,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Trasformazioni piuttosto semplici sono anche le combinazioni lineari di proiettori sui sottospazi sottesi dauna vettori della base canonica $D = \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{Prj}_i \lambda_i$; l'effetto di tale trasformazione è

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{Prj}_i \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{d} \mathsf{e}_j v_j \right) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i v_i \ .$$

Essa è rappresentata nella base canonica dalla matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_d \end{bmatrix} .$$

G40:d.04 Esaminiamo come le trasformazioni del genere $\{\mathbb{F}^{\times d} \longmapsto \mathbb{F}^{\times e}\}$ sono trattate mediante le matrici che le rappresentano nelle basi canoniche.

Matrici molto semplici sono quelle chiamate **diadi** o **matrici di transizione** che hanno tutte le entrate uguali a 0 eccettuata una uguale ad 1.

In particolare denotiamo con $Diad(j,i)$ la matrice binaria avente come unica entrata uguale a 1 nella riga $j \in (e]$ e nella colonna $i \in (d]$, cioè la matrice le cui componenti sono esprimibili come $Diad_{k,h}(j,i) = \delta_{k,j}\delta_{h,i}$, per $h \in (d]$ e $k \in (e]$.

Se $e = d$ tra le matrici delle diadi vanno considerate anche le matrici $Diad(i,i)$ che rappresentano i proiettori sui vettori della base canonica.

Le $e \cdot d$ matrici $Diad(j,i)$ costituiscono la base canonica dello spazio vettoriale delle matrici su $\mathbb{F}$ di profilo $e \times d$.

Si dice che la trasformazione rappresentata dalla matrice diade $Diad(j,i)$ avente la sola entrata uguale ad 1 nella casella $\langle j,i\rangle$ **annichila** tutti i vettori e_h della base canonica dello spazio dominio ad eccezione di e_i e trasforma questo nel vettore u_j della base canonica dello spazio codominio.

Vediamo due esempi di diadi rappresentanti trasformazioni del genere $\{\mathbb{Q}^{\times 4} \longmapsto \mathbb{Q}^{\times 3}\}$:

$$Diad(2,3)\mathsf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_3 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

G40:d.05 Vediamo ad esempio come si decompone una matrice 3×2 come combinazione lineare delle 6 matrici diadi 3×2:

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \ .$$

Nel caso di trasformazione di uno spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ in se, la diade corrispondente alla casella $\langle j,i\rangle$ trasforma il vettore della base canonica e_i nel vettore e_j e annichila ogni altro vettore della base; se in particolare $i = j$ la diade rappresenta il proiettore $\boldsymbol{Prj}_j$.

G40:d.06 Altre interessanti matrici particolari sono le **matrici permutative**, matrici quadrate binarie in biiezione con permutazioni di insiemi finiti di interi. Definiamo come matrice permutativa associata alla permutazione degli interi 1, 2, ..., d $\mathsf{p} = \downarrow\langle p_1, p_2, ..., p_d\rangle \in \mathsf{Perm}_{(d]}$ la matrice binaria di profilo $d \times d$

$$\mathsf{Mprm}(\mathsf{p}) := [i,j \in (d] :| \ \delta_{p_j,i}] \ .$$

Ad esempio alla permutazione $\downarrow\langle 2,3,4,1\rangle$ risulta associata $\mathsf{Mprm}\langle 2,3,4,1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Si constata che ogni matrice permutativa di profilo $d \times d$ si esprime nel modo seguente come somma di d diadi

$$\mathsf{Mprm}(\downarrow \langle p_1, ..., p_d\rangle) \;=\; \sum_{i=1}^{d} Diad(i, \mathsf{p}_i) \ .$$

L'applicazione della matrice $\mathsf{Mprm}(\mathsf{p})$ al vettore colonna binario che rappresenta $\mathbf{e}_i$ fornisce il vettore colonna binario che costituisce la sua colonna i e questo, per la definizione della matrice, rappresenta il vettore $\mathbf{e}_{p_i}$. Ad esempio

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ .$$

Dunque la matrice associata ad una permutazione di interi effettua la corrispondente permutazione dei vettori della base canonica.

Si vede subito che la permutazione identità è rappresentata dalla matrice $\hat{\mathbf{1}}_d$.

Inoltre il prodotto di due permutazioni di interi $\mathsf{q} \circ_{rl} \mathsf{p}$ viene rappresentato dal prodotto righe per colonne delle matrici permutative rappresentanti le due permutazioni:

$$\mathsf{Mprm}(\mathsf{q}_1 \circ \mathsf{p}) = \mathsf{Mprm}(\mathsf{q}) \cdot \mathsf{Mprm}(\mathsf{p}) \ .$$

Infatti

$$(\mathsf{q} \circ_{rl} \mathsf{p})(\mathsf{e}_i) = \mathsf{q}(\mathsf{e}_{\mathsf{p}(i)}) = \mathsf{e}_{\mathsf{q}(\mathsf{p}(i))} = \mathsf{e}_{\mathsf{q}_{p_i}} \ .$$

Inoltre la permutazione inversa è rappresentata dalla matrice trasposta:

$$\mathsf{Mprm}(\mathsf{p}^{-1}) = (\mathsf{Mprm}(\mathsf{p}))^{\top} \ .$$

G40:e. Forme lineari e notazioni alla Dirac

G40:e.01 Richiamiamo (B32a01-2) le notazioni concernenti i cosiddetti bra e ket, notazioni che [[Paul Dirac]] ha introdotte per i cosiddetti spazi di Hilbert (v. T34:), varianti infinitodimensionali degli spazi vettoriali nei quali viene formulata la [[meccanica quantistica]] (v. P70:).
Qui ci limitiamo ad utilizzarle per spazi vettoriali di dimensioni finite.
Nel seguito consideriamo le variabili intere positive i, j, h e $\overline{h}$ che corrono in intervalli come $(\mathrm{d}\ ]$ ed $(\mathrm{e}\ ]$.

Ogni vettore e_i della base canonica di $\mathbb{F}^{\times d}$ assumiamo che sia equivalentemente identificato anche dal simbolo $|i\rangle$ al quale viene dato il nome di **ket** i.
La base canonica di $\mathbb{F}^{\times d}$ si può dunque scrivere $\{|1\rangle, |2\rangle, ..., |d\rangle\}$. Dato che la componente h-esima del vettore e_i è $\delta_{i,h}$, si può scrivere

(1) $$|i\rangle \;:=\; \mathsf{e}_i \;=\; \langle h \in (d] :| \ \delta_{i,h}\rangle \;=:\; \delta_{(\mathrm{d}\ ],i} \ .$$

Il vettore ottenuto applicando a $|i\rangle$ la trasformazione lineare L, cioè $L(|i\rangle) = L^{\scriptscriptstyle\mathsf{F}}|i\rangle$, assumiamo si possa individuare anche con la scrittura concisa $L|i\rangle$.

Ogni matrice A di profilo $e \times d$ sul campo $\mathbb{F}$ si può considerare ottenuta sia affiancando d vettori colonna formati da e componenti, sia sovrapponendo d vettori riga ciascuno di e componenti. In particolare la matrice identità di ordine d, che scriviamo $\mathbf{1}_d$, si può considerare ottenuta sia dalla sovrapposizione dei d vettori riga corrispondenti ai successivi vettori della base canonica sia, traspostamente, come l'affiancamento dei corrispondenti vettori colonna; quindi si può scrivere

$$\mathbf{1}_d = [i,j \in (\mathrm{d}\ ] :|\ \delta_{i,j}]\ .$$

G40:e.02 Le trasformazioni del genere $\{\mathbb{F}^{\times d} \longmapsto_{FMb-lin} \mathbb{F}\}$ le chiamiamo **funzionali lineari** dello spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ o anche, secondo tradizione, **forme lineari** di $\mathbb{F}^{\times d}$.

Ogni f funzionale lineare su $\mathbb{F}^{\times d}$, come accade a tutte le trasformazioni lineari di un qualsiasi genere $\{\mathbb{F}^{\times d} \longmapsto \mathbb{F}^{\times e}\}$, si può individuare a partire dalla sequenza dei valori che esso associa ai successivi vettori della base canonica $\langle \mathsf{f}(\mathsf{e}_1), f(\mathsf{e}_2), ..., f(\mathsf{e}_d)\rangle$; infatti il valore assunto dalla f in corrispondenza del generico vettore $\mathsf{v} = \sum_{i=1}^{d} v_i\, \mathsf{e}_i$ per linearità è dato da

$$\mathsf{f}(\mathsf{v}) \ = \ \mathsf{f}\left(\sum_{i=1}^{d} v_i\, \mathsf{e}_i\right) \ = \ \sum_{i=1}^{d} v_i\, \mathsf{f}(\mathsf{e}_i)\ . \tag{1}$$

Qui emerge che le forme lineari su $\mathbb{F}^{\times d}$ si possono rappresentare mediante matrici $1 \times d$ (vettori riga), e quindi mediante sequenze di d elementi del campo, come accade ai vettori di $\mathbb{F}^{\times d}$.

Si osserva che le forme lineari, come tutte le trasformazioni lineari di un genere $\{\mathbb{F}^{\times d} \longmapsto \mathbb{F}^{\times e}\}$, possono essere sottoposte a combinazioni lineari e di conseguenza godono delle proprietà [Vsp1-5], ovvero costituiscono uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$.

G40:e.03 Il collegamento fra vettori di uno spazio vettoriale con base finita ed i suoi funzionali lineari va meglio precisato. Ad ogni vettore v dello spazio $\mathbb{F}^{\times d}$ si associa biunivocamente un funzionale lineare che chiamiamo **funzionale duale** o **forma duale** del vettore. Questa associazione chiediamo che sia $\mathbb{F}$-lineare e la chiamiamo **dualità lineare**, termine che nell'ambito dell'algebra lineare semplifichiamo con la sola parola **dualità**.
Per precisarla facciamo riferimento alla base canonica $\{|1\rangle, |2\rangle, ..., |d\rangle\}$; al ket $|i\rangle$ si associa il funzionale lineare che, seguendo Dirac, viene chiamato **bra**, viene denotato con la scrittura $\langle i|$ e viene definito ponendo:

$$\langle i| \ := \ \left\lceil\ \mathsf{v} = \sum_{h=1}^{d} |h\rangle v_h \in \mathbb{F}^{\times d} \ \ \mapsto \ \ v_i\ \right\rceil\ . \tag{2}$$

Abbreviamo la scrittura dei valori assunti dal funzionale $\langle i|$ in corrispondenza dei vari ket $\langle i|(|h\rangle)$ con la più concisa $\langle i|h\rangle$. Per la definizione deve essere $\forall i, h = 1, 2, ..., d\ :\ \langle i|h\rangle = \delta_{i,h}$.
Il funzionale lineare duale del generico vettore che riferito alla base canonica scriviamo $|\mathsf{w}\rangle = \sum_{i=1}^{d} |i\rangle\, w_i$, la denotiamo con $\langle \mathsf{w}|$. Esso si ottiene ricorrendo alla $\mathbb{F}$-linearità dell'applicazione dualità:

$$\langle \mathsf{w}| \ := \ \sum_{i=1}^{d} \langle i| w_i \ = \ \left\lceil\ \sum_{h=1}^{d} |h\rangle v_h \ \mapsto \ \sum_{i=1}^{d} w_i \langle i| \left(\sum_{h=1}^{d} |h\rangle v_h\right)\ \right\rceil \ =$$

$$\left\lceil\ \sum_{h=1}^{d} |h\rangle v_h \ \mapsto \ \sum_{i,h=1}^{d} w_i \langle i|h\rangle v_h\ \right\rceil \ = \ \left\lceil\ \sum_{h=1}^{d} v_h |h\rangle \ \mapsto \ \sum_{i=1}^{d} w_i v_i\ \right\rceil\ . \tag{3}$$

A questo punto abbreviamo $\langle \mathsf{w}|(|\mathsf{v}\rangle)$ con $\langle \mathsf{w}|\mathsf{v}\rangle$, estendendo l'abbreviazione adottatta per gli elementi delle basi. Possiamo quindi scrivere in modo compatto:

$$(4) \qquad \forall \mathsf{w}, \mathsf{v} \in \mathbb{F}^{\times d} \ \vdots \ \langle \mathsf{w}|\mathsf{v}\rangle = \sum_{i=1}^{d} w_i v_i \ .$$

G40:e.04 L'insieme delle forme lineari sopra uno spazio finitodimensionale $\boldsymbol{V}$ su $\mathbb{F}$ munito della somma e della moltiplicazione per elementi di FMb si dice **spazio vettoriale duale** di $\boldsymbol{V}$ e in genere si denota con $\boldsymbol{V}^*$. Gli elementi di $\mathbb{F}^{\times d^*}$, spazio duale di $\mathbb{F}^{\times d}$ sono raggiunti dai vettori di $\boldsymbol{V}$ applicando la dualità lineare $\ulcorner |\mathsf{v}\rangle \mapsto \langle \mathsf{v}| \urcorner$.

La dualità tra spazi finitodimensionali è una biiezione che al livello delle rappresentazioni mediante sequenze viene ottenuta dalla corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei vettori colonna (che rappresentano i ket $|\mathsf{v}\rangle$) e l'insieme dei vettori riga con ugual numero di componenti che rappresentano i bra $\langle \mathsf{v}|$ loro duali. Essa quindi si risolve in una trasposizione.

A questo punto si può sospettare che l'introduzione della dualità sia solo una inutile complicazione. Vedremo invece che la distinzione tra vettori e funzionali lineari permette di servirsi di espressioni algoritmicamente efficaci. Inoltre la dualità lineare, che come si è visto, si può applicare ad ogni spazio vettoriale finitodimensionale sopra un qualsiasi campo, si può introdurre con vantaggi riguardanti l'espressività e la mneggvolezza delle formule per spazi vettoriali infinitodimensioneli (v. ad esempio gli spazi di Hilbert in T34). La dualità in questi spazi è più impegnativa di quella in dimensione finita e pone problemi tutt'altro che banali.

G40:e.05 Conviene ora riprendere con qualche variante notazionale la considerazioni sulla possibilità di determinare ogni forma lineare dalle sue azioni sui vettori di una base, a somiglianza della possibilità di determinare ogni vettore attraverso le sue componenti in una base.

Consideriamo un vettore (ket) e identifichiamolo con il vettore colonna che consideriamo suo rappresentante canonico.

$$(1) \qquad |\mathsf{v}\rangle \ = \ \sum_{i=1}^{d} |i\rangle v_i \ = \ \sum_{i=1}^{d} |i\rangle\langle i|\mathsf{v}\rangle \ = \ \begin{bmatrix} \langle 1|\mathsf{v}\rangle \\ \langle 2|\mathsf{v}\rangle \\ \vdots \\ \langle d|\mathsf{v}\rangle \end{bmatrix} \ .$$

Consideriamo anche un funzionale lineare (bra) identificandolo con il corrispondente vettore riga che consideriamo suo rappresentante canonico.

$$(2) \qquad \langle \mathsf{w}| \ = \ \sum_{j=1}^{d} w_i \langle j| \ = \ \sum_{j=1}^{d} \langle \mathsf{w}|j\rangle \ = \ [\, \langle \mathsf{w}|1\rangle \quad \langle \mathsf{w}|2\rangle \quad \ldots \quad \langle \mathsf{w}|d\rangle \,] \ .$$

Il valore assunto dal bra $\langle \mathsf{w}|$ in corrispondenza del ket $|\mathsf{v}\rangle$ risulta quindi espresso dal prodotto righe per colonne del vettore riga del bra con il vettore colonna del ket.

Inoltre l'applicazione dualità viene rappresentata dalla semplice trasformazione dei vettori riga nei vettori colonna loro trasposti.

G40:e.06 Vediamo come alcune trasformazioni riguardanti la base canonica si possono esprimere vantaggiosamente mediante i bra e i ket. Definiamo per ogni $i = 1, 2, ..., d$ la trasformazione lineare

$$|i\rangle\langle i| \ := \ \ulcorner \ \sum_{h=1}^{d} \langle i|h\rangle v_h \in \mathbb{F}^{\times d} \ \mapsto \ |i\rangle \left(\langle i| \left(\sum_{h=1}^{d} \langle i|h\rangle v_h \right) \right) \ \urcorner \ =$$

$$\left\ulcorner \sum_{h=1}^{d} |h\rangle v_h \;\; \mapsto\!\!\!\!\!\mapsto \;\; |i\rangle \sum_{h=1}^{d} \langle i|h\rangle v_h \right\urcorner \;=\; \left\ulcorner \sum_{h=1}^{d} |h\rangle v_h \;\mapsto\!\!\!\!\!\mapsto\; |i\rangle v_i \right\urcorner \in \{\mathbb{F}^{\times d} \longmapsto\!\!\!\triangleright \mathbb{F}|i\rangle\} \;.$$

Questo operatore quindi è il proiettore relativo ad $\mathbf{e}_i$:

(1) $$|i\rangle\langle i| = \boldsymbol{Prj}_i \;.$$

Più in generale, per ogni $i, j = 1, 2, ..., d$ si definisce come **operatore di transizione** $i - j$

(2) $$|j\rangle\langle i| := \left\ulcorner \sum_{h=1}^{d} |h\rangle v_h \in \mathbb{F}^{\times d} \mapsto\!\!\!\!\!\mapsto |j\rangle \sum_{h=1}^{d} \langle i|h\rangle v_h \right\urcorner = \left\ulcorner \sum_{h=1}^{d} |h\rangle v_h \mapsto\!\!\!\!\!\mapsto |j\rangle v_i \right\urcorner \in \{\mathbb{F}^{\times d} \longmapsto\!\!\!\triangleright |j\rangle\mathbb{F}\} \;.$$

Per $i \neq j$ questo operatore quindi ha l'effetto della proiezione $\boldsymbol{Prj}_j$ seguita dalla trasformazione (rotazione) che porta il raggio $|j\rangle\mathbb{F}$ su $|i\rangle\mathbb{F}$, cioè è la diade $Diad(j, i)$ (:d.03).

G40:e.07 Le notazioni di Dirac consentono di facilitare vari sviluppi formali anche per le trasformazioni lineari fra due spazi vettoriali $\mathbb{F}^{\times d}$ e $\mathbb{F}^{\times e}$ di dimensioni possibilmente diverse.

Trattiamo trattare una tale trasformazione $\hat{L} \in \{\mathbb{F}^{\times d} \longmapsto_{\mathbb{F}-lin} \mathbb{F}^{\times e}\}$ facendo riferimento alle basi canoniche ordinate dei due spazi. Mentre per la prima usiamo la solita notazione $\big\langle |1\rangle, |2\rangle, ..., |d\rangle \big\rangle$, per la base del secondo spazio scriviamo $\big\langle |\overline{1}\rangle, |\overline{2}\rangle, ..., |\overline{e}\rangle \big\rangle$: i ket con il numero progressivo sovrabarrato sono quindi vettori e-dimensionali.

Risultano assai convenienti le decomposizioni mediante proiettori delle identità di $\mathbb{F}^{\times d}$ e di $\mathbb{F}^{\times e}$:

(1) $$\hat{\mathbf{1}}_d = \sum_{i=1}^{d} |i\rangle\langle i| \qquad \text{e} \qquad \hat{\mathbf{1}}_e = \sum_{\overline{j}=1}^{e} |\overline{j}\rangle\langle \overline{j}| \;.$$

Il formalismo dei bra e dei ket consente semplificazioni di scrittura consistenti nell'eliminazione di parentesi di argomenti di funzioni. Dopo aver semplificato la scrittura $\hat{L}(|\mathsf{v}\rangle)$ nella $\hat{L}|\mathsf{v}\rangle$, semplifichiamo anche la scrittura $\langle \mathsf{w}| \left(\hat{L}(|\mathsf{v}\rangle)\right)$ nella $\langle \mathsf{w}|(\hat{L}|\mathsf{v}\rangle)$ e quindi nella $\langle \mathsf{w}|\hat{L}|\mathsf{v}\rangle$.

Di conseguenza semplifichiamo una espressione come la $\langle j|(\mathsf{v})$ nella $\langle j|\mathsf{v}\rangle$. Inoltre le entrate della matrice che rappresenta la trasformazione $\hat{L}$ facendo riferimento alle basi canoniche degli spazi dominio e codominio sono denotate con $\langle j|\hat{L}|i\rangle$.

Con questo formalismo l'azione di una trasformazione sopra un vettore v espressa dalla :d.01(2) si riscrive come

(2) $$\hat{L}|\mathsf{v}\rangle = \mathbf{1}_e\,\hat{L}\,\mathbf{1}_d\,|\mathsf{v}\rangle = \sum_{\overline{j}=1}^{e} |\overline{j}\rangle\langle\overline{j}|\hat{L}\left(\sum_{i=1}^{d} |i\rangle\langle i|(|\mathsf{v}\rangle)\right) = \sum_{\overline{j}=1}^{e}\sum_{i=1}^{d} |\overline{j}\rangle\,\langle\overline{j}|\hat{L}|i\rangle\,\langle i|\mathsf{v}\rangle \;.$$

Osserviamo che in questo sviluppo compaiono i vettori delle basi canoniche di due spazi e dei loro duali contraddistinti dall'uso di lettere, l'una sovrabbarrata l'altra no, che corrono su insiemi diversi.

G40:e.08 **Eserc.** Si consideri una permutazione dell'insieme $\{1, 2, ..., d\}$ $\mathsf{p} = \langle_{perm} p_1, p_2, ..., p_d\rangle$ e la corrispondente matrice permutativa $\mathsf{Mprm}(\mathsf{p})$; dimostrare che

$$\mathsf{Mprm}\langle p_1, p_2, ..., p_d\rangle = \sum_{i=1}^{d} |p_i\rangle\langle i| \;.$$

G40:f. Prodotti di trasformazioni lineari

G40:f.01 Anche per esprimere i prodotti di composizione di trasformazioni $\mathbb{F}$-lineari è possibile ricondursi al prodotto delle matrici che le rappresentano in una data base (che ora ci limitiamo a considerare canonica).

Preliminarmente precisiamo che per la composizione di due trasformazioni lineari M ed L qui ci serviamo della definizione

(1) $$M \circ_{rl} L := \lceil \mathsf{v} \mapsto M(L(\mathsf{v})) \rceil \quad \text{ovvero della} \quad (M \circ_{rl} L)\mathsf{v} := M(L(\mathsf{v})) \ .$$

Inoltre conveniamo di scrivere $\mathsf{w} := L(\mathsf{v})$ e $\mathsf{x} := M(\mathsf{w}) = M(L(\mathsf{v}))$.

Cominciamo con il considerare due trasformazioni $\mathbb{F}$-lineari entro $\mathbb{F}^{\times d}$ e riferiamo questo spazio alla base canonica che denotiamo equivalentemente con $\{i \in (d\,] :| \,|i\rangle\}$, con $\{h \in (d\,] :| \,|h\rangle\}$ o con $\{j \in (d\,] :| \,|j\rangle\}$. Ci serviremo di due scritture per decomposizioni dell'identità dello spazio d-dimensionale:

(2) $$\hat{\mathbf{1}}_d = \sum_{i=1}^{d} |i\rangle\langle i| = \sum_{h=1}^{d} |h\rangle\langle h| = \sum_{j=1}^{d} |j\rangle\langle j| \ .$$

Al fine di esprimere in relazione alla base le componenti del vettore $|\mathsf{x}\rangle$ si utilizza il seguente sviluppo che si richiede valga per ogni $j = 1, 2, ..., d$ e che si serve di due delle precedenti decomposizioni dell'identità:

(3) $$\langle j|\mathsf{x}\rangle = \langle j|(M \circ L)(\mathsf{v})\rangle = \langle j|M\hat{\mathbf{1}}_d L\hat{\mathbf{1}}_d|\mathsf{v}\rangle = \sum_{h,i=1}^{d} \langle j|M|h\rangle\langle h|L|i\rangle\langle i|\mathsf{v}\rangle \ .$$

Questa relazione è opportuno rappresentarla mediante matrici: al primo membro abbiamo una matrice colonna $d \times 1$, al secondo membro il prodotto di due matrici $d \times d$ e di una matrice colonna $d \times 1$. La associatività del prodotto di matrici rende chiaro il collegamento tra le matrici quadrate e le due trasformazioni entro $\mathbb{F}^{\times d}$ (cioè i due operatori lineari, ovvero i due endomorfismi lineari) L ed M ed i vettori colonna che sono posti in corrispondenza.

La precedente formula mostra che la composizione di trasformazioni lineari si può trattare fedelmente mediante il prodotto di matrici, operazione effetiva concretamente implementabile.

G40:f.02 Estendiamo ora le considerazioni precedenti considerando che L sia una trasformazione $\mathbb{F}$-lineare di uno spazio $\boldsymbol{V}$ d-dimensionale in uno spazio $\boldsymbol{W}$ e-dimensionale e che U sia una trasformazione $\mathbb{F}$-lineare dello spazio $\boldsymbol{W}$ in uno spazio $\boldsymbol{X}$ f-dimensionale.
Fissate una base per $\boldsymbol{V}$, una per $\boldsymbol{W}$ e una per $\boldsymbol{X}$, gli omomorfismi di $\{\boldsymbol{V} \longmapsto \boldsymbol{W}\}$ sono rappresentati fedelmente da matrici $e \times d$, mentre gli omomorfismi di $\{\boldsymbol{W} \longmapsto \boldsymbol{X}\}$ sono rappresentati fedelmente da matrici $f \times e$.
Ora, oltre a denotare con $\{i \in (d\,] :| \,|i\rangle\}$ una base per $\boldsymbol{V}$, denotiamo con $\{\overline{j} \in (e\,] :| \,|\overline{j}\rangle\}$ una base per $\boldsymbol{W}$ e denotiamo con $\{k' \in (f\,] :| \,|k'\rangle\}$ una base per $\boldsymbol{X}$. In questo modo usiamo simboli ben distinguibili per gli indici correnti, al fine di evidenziare il fatto che riguardano variabili che corrono sulle sequenze di vettori di tre diverse basi. Queste nelle appliocazioni potrebbero essere costruite con procedimenti ben diversi.

Introdotti ancora $\mathsf{w} := L(\mathsf{v})$ ed $\mathsf{x} := M(\mathsf{w})$, vogliamo trovare un'espressione delle componenti del ket $|\mathsf{x}\rangle$ di $\boldsymbol{X}$, cosa che si ottiene con uno sviluppo molto simile al precedente. Per farlo dobbiamo utilizzare la decomposizione canonica dell'identità di $\boldsymbol{W}$ e la decomposizione dell'identità di $\boldsymbol{V}$:

$$(1) \qquad \mathrm{Id}_{\boldsymbol{W}} = \sum_{\overline{h}=1}^{e} |\overline{h}\rangle\langle\overline{h}| \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Id}_{\boldsymbol{V}} = \sum_{j=1}^{d} |j\rangle\langle j| \ .$$

In tal modo si ottiene lo sviluppo valido per ogni $k' = 1, 2, ..., f$:

$$\langle k'|\mathsf{x}\rangle = \langle k'|M \circ L|\mathsf{v}\rangle = \langle k'|(M \circ \mathrm{Id}_{\boldsymbol{W}} \circ L \circ \mathrm{Id}_{\boldsymbol{V}})|\mathsf{v}\rangle = \sum_{\overline{j}=1}^{e}\sum_{i=1}^{d} \langle k'|M|\overline{j}\rangle\langle\overline{j}|L|i\rangle\langle i|\mathsf{v}\rangle \ .$$

Anche questa espressione può interpretarsi come prodotto di matrici: qui si hanno due matrici rettangolari: la più a sinistra di profilo $f \times e$ riguarda la trasformazione da $\boldsymbol{W}$ ad $\boldsymbol{X}$ (la seconda da effettuare); la più a destra di profilo $e \times d$ riguarda la trasformazione da $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{W}$ (la prima da eseguire). Si hanno inoltre il vettore colonna $d \times 1$ rappresentante il vettore di partenza v e il vettore colonna $f \times 1$ rappresentante il vettore di arrivo x.

G40:g. Cambiamenti di base

G40:g.01 Consideriamo uno spazio vettoriale a d dimensioni $\boldsymbol{V}$ e una sua base ordinata $\mathcal{B} = \langle \mathsf{b}_1, ..., \mathsf{b}_d\rangle$; denotiamo inoltre con $\mathsf{v} = \sum_{j=1}^{d} v_j \mathsf{b}_j$ un suo generico vettore.
Per ogni vettore b_h della $\mathcal{B}$ si definisce come **proiezione sulla direzione b_h** del vettore v il vettore proporzionale al vettore di base $v_h \mathsf{b}_h$.

Più in generale si può considerare un sottoinsieme $\mathcal{D}$ della base, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$, il corrispondente insieme di indici $D \subseteq \{1, 2, ..., d\}$ e il sottospazio $\boldsymbol{span}(\mathcal{D})$ sotteso dai vettori di $\mathcal{D}$; si tratta evidentemente di un sottospazio sac. Si definisce come **proiezione sul sottospazio $\boldsymbol{span}(\mathcal{D})$** di v il vettore $\sum_{h \in D} \mathsf{b}_h v_h$.

Di un vettore generico v si può definire la proiezione su ogni sottospazio. Infatti in ogni sottospazio S si può individuare una base ed ogni base dello spazio ambiente può essere modificata in una base un sottoinsieme della quale costituisce una base di S. Questa base contiene meno di d vettori sse il sottospazio è proprio.
I proiettori sui diversi sottospazi sac propri sono operatori lineari non invertibili. Infatti due vettori che differiscono solo per una componente nella base $\mathcal{B}$ hanno la stessa proiezione.

G40:g.02 Consideriamo un automorfismo $\mathsf{P} \in \{\boldsymbol{V} \triangleleft\!\!-\!\!\!\!-\!\!\triangleright_{lin} \boldsymbol{V}\}$ e la sua azione sopra una base ordinata $\mathcal{B} = \langle \mathsf{b}_1, ..., \mathsf{b}_d\rangle$ di $\boldsymbol{V}$, azione individuata dalla sequenza $\mathcal{C} = \langle \mathsf{c}_1, ..., \mathsf{c}_d\rangle$ con $\mathsf{c}_i := \mathsf{P}(\mathsf{b}_i)$ per $i = 1, ..., d$. Anche questa sequenza di vettori costituisce una base ordinata di $\boldsymbol{V}$.
Infatti per un generico $\mathsf{v} = \sum_{i=1}^{d} \mathsf{b}_i \, \nu_i \in \boldsymbol{V}$ si ha $\mathsf{P}(\mathsf{v}) = \sum_{i=1}^{d} \mathsf{P}(\mathsf{b}_i \, \nu_i$; per ogni $\mathsf{w} = \sum_{i=1}^{d} \mathsf{b}_i \, \omega_i \in \boldsymbol{V}$ abbiamo $\mathsf{w} = \sum_{i=1}^{d} \mathsf{P}(\mathsf{b}_i) \, \nu_i$.

Viceversa, data una coppia $\langle \mathcal{B}, \mathcal{C}\rangle$ di basi ordinate di $\boldsymbol{V}$ con $\mathcal{B} = \langle \mathsf{b}_1, ..., \mathsf{b}_d\rangle$ e $\mathcal{C} = \langle \mathsf{c}_1, ..., \mathsf{c}_d\rangle$, chiamiamo **automorfismo associato** a tale coppia la trasformazione $\mathfrak{C}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ definita ponendo

$$(1) \qquad \forall \mathsf{v} = \sum_{i=1}^{d} \mathsf{b}_i \, \nu_i \in \boldsymbol{V} \ \vdots \ \ \mathfrak{C}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathsf{v}) \ := \ \sum_{i=1}^{d} \mathsf{c}_i \, \nu_i \ .$$

Chiaramente tale trasformazione è un automorfismo di $\boldsymbol{V}$.

La trasformazione $\mathfrak{C}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ si dice anche **trasformazione della base** $\mathcal{B}$ nella $\mathcal{C}$; queste trasformazioni collettivamente vengono chiamate **cambiamenti di base**.

Osserviamo che i deponenti che identificano i cambiamenti di base fanno riferimento al procedere da destra a sinistra delle modifiche.

(1) Prop.: Il cambiamento di base $\mathfrak{C}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ è una trasformazione invertibile e la sua trasformazione inversa è la

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \left\lceil \sum_{i=1}^{d} \mathsf{c}_h w_h \mapsto \sum_{h=1}^{d} \mathsf{b}_h w_h \right\rceil \ .$$

Dim.: Per ogni $i = 1, ..., d$ si ha $\mathfrak{C}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathsf{c}_i) = \mathsf{b}_i$, mentre $\mathfrak{C}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathsf{b}_i) = \mathsf{c}_i$; dalla linearità delle trasformazioni e dalla possibilità di esprimere ogni vettore di $\boldsymbol{V}$ come combinazione lineare dei vettori di ciascuna delle due basi segue l'asserto ▮

G40:g.03 Per due basi qualsiasi di uno spazio d-dimensionale dalle uguaglianze

$$(1) \qquad \mathfrak{C}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \circ_{rl} \mathfrak{C}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \;=\; \mathfrak{C}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \circ_{rl} C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \;=\; \hat{\mathbf{1}}_d \ ,$$

segue che in ogni base la matrice che rappresenta il cambiamento dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$ è la inversa della matrice che rappresenta il cambiamento inverso dalla base $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$.

Se si considerano più di due basi si hanno uguaglianze concernenti successivi cambiamenti di base. Se denotiamo con $\mathcal{D}$ una terza base ordinata $\langle \mathsf{d}_1, ..., \mathsf{d}_d \rangle$ dello spazio si trova la seguente uguaglianza

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{D},\mathcal{C}} \circ \mathfrak{C}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathfrak{C}_{\mathcal{D},\mathcal{B}} \ .$$

G40:g.04 Particolari cambiamenti di base sono le permutazioni delle componenti di una base ordinata. Un tale cambiamento di base relativamente alla base ordinata che permuta viene rappresentato da una matrice permutativa. Ad esempio la permutazione della base canonica $\langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3 \rangle$ di $\mathbb{R}^{\times 3}$ che trasforma la precedente sequenza di vettori nella $\langle \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3, \mathsf{e}_1 \rangle$ nella stessa base canonica è rappresentata da

$$(1) \qquad \left[i, j = 1, 2, 3 :| \ \langle j | \mathfrak{C}_{\langle \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3, \mathsf{e}_1 \rangle, \langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3 \rangle} | i \rangle \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathsf{Mprm}(1 \ 2 \ 3) \ .$$

In generale se p donota una permutazione qualsiasi di $\{1, ..., d\}$, si può scrivere

$$(2) \qquad \mathfrak{C}_{\mathsf{p}(\mathcal{B}),\mathcal{B}} = \sum_{h=1}^{d} |\mathsf{p}(\mathsf{b}_h)\rangle \langle \mathsf{b}_h| = \sum_{h=1}^{d} |\mathsf{b}_{\mathsf{p}(h)}\rangle \langle \mathsf{b}_h| \quad \text{e} \quad \langle j | \mathfrak{C}_{\mathsf{p}(\mathcal{B}),\mathcal{B}} | i \rangle = \mathsf{Mprm}_{j,i}(\mathsf{p}) \ .$$

G40:g.05 Vogliamo ora utilizzare le notazioni di Dirac per gli oggetti che riguardano i cambiamenti di base. Scriviamo quindi $|h\rangle$ invece di b_h, con $h = 1, ..., d$, per il generico vettore della base $\mathcal{B}$ e $|\overline{h}\rangle$ invece di $\mathsf{c}_{\overline{h}}$, con $\overline{h} = 1, ..., d$, per il generico vettore della $\mathcal{C}$.

I collegamenti fra le due basi sono dati da

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} |h\rangle \;=\; |\overline{h}\rangle \quad \text{e} \quad \mathfrak{C}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} |\overline{h}\rangle \;=\; |h\rangle \quad \text{per} \qquad h = 1, ..., d \ .$$

I vettori della base $\mathcal{C}$ nella base $\mathcal{B}$ e i vettori della base $\mathcal{B}$ nella base $\mathcal{C}$ sono espressi dalle uguaglianze

$$|\overline{h}\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{d} |i\rangle \langle i|\overline{h}\rangle \quad \text{e} \quad |h\rangle \;=\; \sum_{\overline{i}=1}^{d} |\overline{i}\rangle \langle i|h\rangle \ .$$

La matrice che rappresenta $\mathfrak{C}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ nella base $\mathcal{B}$ e la matrice rappresenta $\mathfrak{C}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ nella base $\mathcal{B}$ sono, risp.,

$$[h,i \in (d\,] :|\ \langle h|\mathfrak{C}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}|i\rangle] \;=\; [h,i\in (d\,] :|\ \langle h|\bar{i}\rangle] \quad \text{e} \quad [\bar{h},\bar{i}\in (d\,] :|\ \langle \bar{h}|\mathfrak{C}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}|\bar{i}\rangle] \;=\; [\bar{h},\bar{i}\in (d\,] :|\ \langle \bar{h}|i\rangle]\ .$$

Queste matrici quindi sono l'una la trasposta dell'altra; vedremo in G41:f che si tratta delle cosiddette matrici ortogonali.

G40:g.06 Consideriamo due spazi $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ aventi lo stesso numero di dimensioni, che denotiamo con d; consideriamo anche un qualsiasi isomorfismo $P \in \{\boldsymbol{V} \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright \boldsymbol{W}\}$.

Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\boldsymbol{V}$, l'isomorfismo P la trasforma in una base di $\boldsymbol{W}$. Se si prescinde dalle costruzioni che hanno portato ai due spazi, dato che essi sono isomorfi, si può mettere in atto una astrazione che giustifichi l'adozione di un linguaggio secondo il quale i due spazi vengono identificati.

A questo livello di considerazioni ogni isomorfismo di spazi con un dato numero d di dimensioni si può identificare con un automorfiosmo e quindi con un cambiamento di una base di d vettori in un'altra.

G40:h. Nucleo, nullità e rango di trasformazioni e matrici

G40:h.01 Consideriamo un omomorfismo lineare $L \in \{\boldsymbol{V} \longrightarrow_{lin} \boldsymbol{W}\}$ e ricordiamo la distinzione fra omomorfismi suriettivi (ossia epimorfismi) o meno e la distinzione fra omomorfismi iniettivi (ossia invertibili) o meno. Ricordiamo anche che la trasformazione lineare L manda ogni sottospazio $\boldsymbol{S}$ di $\boldsymbol{V}$ in un sottospazio del suo codominio $L(\boldsymbol{S}) \leq_{Vsp} \text{cod}(L)$.

È spesso importante saper distinguere il caso in cui $\dim(L(\boldsymbol{S})) = \dim(\boldsymbol{S})$ da quello in cui $\dim(L(\boldsymbol{S})) < \dim(\boldsymbol{S})$; in particolare interessa saper distinguere il caso $\dim(\text{cod}(L)) = \dim(\boldsymbol{V})$ da quello in cui $\dim(\text{cod}(L)) < \dim(\boldsymbol{V})$.

(1) Prop.: L'omomorfismo L trasforma ogni sottospazio $\boldsymbol{S}$ del suo dominio in un sottospazio del suo codominio; in formula $\forall \boldsymbol{S} \leq_{Vsp} \text{dom}(L) \ :\ L(\boldsymbol{S}) \leq_{Vsp} \text{cod}(L)$, ovvero $\boldsymbol{span}(L(\boldsymbol{S})) = L(\boldsymbol{S})$.

Dim.: Scegliamo arbitrariamente $\mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2 \in L(\boldsymbol{S})$ ed $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$; in $\boldsymbol{S}$ si trovano almeno un v_1 tale che $L(\mathsf{v}_1) = \mathsf{w}_1$ e almeno un v_2 tale che $L(\mathsf{v}_2) = \mathsf{w}_2$. Applicando la trasformazione lineare L ad $\alpha_1\mathsf{v}_1 + \alpha_2\mathsf{v}_2$ si ottiene $\alpha_1 L(\mathsf{v}_1) + \alpha_2 L(\mathsf{v}_2) = \ \alpha_1\mathsf{w}_1) + \alpha_2\mathsf{w}_2 \in L(\boldsymbol{S})$ ▮

Le considerazioni precedenti consentono anche di affermare

$$\forall E \subseteq \text{dom}(L) \ :\ L(\boldsymbol{span}(E)) = \boldsymbol{span}(L(E))\ .$$

(2) Prop.: Sia $\boldsymbol{T} \leq_{Vsp} \text{cod}(L)$; la coimmagine di $\boldsymbol{T}$ per L, cioè $\boldsymbol{coim}_L(\boldsymbol{T}) := \{\mathsf{v} \in \boldsymbol{V} \rrbracket\, L(\mathsf{v}) \in \boldsymbol{T}\}$, è sottospazio di $\text{dom}(L)$, ovvero $\boldsymbol{span}(\boldsymbol{coim}_L(\boldsymbol{T})) = \boldsymbol{coim}_L(\boldsymbol{T})$.

Dim.: Consideriamo $\mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2 \in \boldsymbol{T}$; $\boldsymbol{coim}_L(\boldsymbol{T}) \ni \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2$ tali che $L(\mathsf{v}_1) = \mathsf{w}_1$ e $L(\mathsf{v}_2) = \mathsf{w}_2$.

Occorre dimostrare che $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F} \ :\ \alpha_1\mathsf{v}_1 + \alpha_2\mathsf{v}_2 \in \boldsymbol{coim}_L(\boldsymbol{T})$.

Per questo applichiamo L a tale combinazione lineare ottenendo $L(\alpha_1\mathsf{v}_1 + \alpha_2\mathsf{v}_2) = \alpha_1\mathsf{w}_1 + \alpha_2\mathsf{w}_2 \in \boldsymbol{T}$, fatto che consente di affermare che $\alpha_1\mathsf{v}_1 + \alpha_2\mathsf{v}_2 \in \boldsymbol{coim}_L(\boldsymbol{T})$ ▮

G40:h.02 Si dice **nucleo** o **kernel** della trasformazione lineare $L \in \{\boldsymbol{V} \longrightarrow_{lin} \boldsymbol{W}\}$ il sottoinsieme $\boldsymbol{ker}(L) := \boldsymbol{coim}_L(\{\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}\})$.

Si osserva che scelti ad arbitrio $\mathsf{z}_1, \mathsf{z}_2 \in \boldsymbol{ker}(L)$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$, si ha

$$L(\alpha_1\mathsf{z}_1 + \alpha_2\mathsf{z}_2) \;=\; \alpha_1\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} + \alpha_2\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} = \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}\ .$$

Quindi, in accordo con la :g.01(2), il kernel è un sottospazio del dominio della L. Si usa anche dire che i vettori di $\boldsymbol{ker}(L)$ sono i vettori per i quali l'omomorfismo L agisce da **annichilatore**.

Per la comprensione degli effetti di una trasformazione lineare L sono necessarie due conoscenze: la individuazione del suo kernel e la determinazione delle caratteristiche dell'azione della L su qualche sottospazio di $\text{dom}(L)$ complementare del kernel.

La caratteristica più rilevante di un kernel è il numero delle sue dimensioni. Questo numero naturale si dice **nullità** della trasformazione lineare L e lo si denota con

(1) $$\text{nlty}(L) := \dim(\boldsymbol{ker}(L)) \ .$$

Ad esempio in $\mathbb{R}^{\times 6}$ il proiettore sul sottospazio SAC_{110110} annulla tutti i vettori che appartengono al sottospazio complementare SAC_{001001}; questo è il nucleo bidimensionale del proiettore che quindi ha nullità 2.

Più in generale, per il proiettore sopra il sac individuato dalla sequenza binaria b si ha

$$\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{b}}) = d - \sum_{i=1}^{d} b_i \ .$$

G40:h.03 (1) Prop.: Una trasformazione lineare L è iniettiva sse ha nullità uguale a 0.

Dim.: Riformuliamo l'enunciato come segue.

$\forall \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2 \in \text{dom}(L) \ :\ L(\mathsf{v}_1) = L(\mathsf{v}_2) \Longrightarrow \mathsf{v}_1 = \mathsf{v}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{ker}(L) = \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{W}}\}$.

Dim.: Osserviamo che $L(\mathsf{v}_1) = L(\mathsf{v}_2) \iff L(\mathsf{v}_1 - \mathsf{v}_2) = \mathbf{0}_{\boldsymbol{W}} \iff \mathsf{v}_1 - \mathsf{v}_2 \in \boldsymbol{ker}(L)$.

Quindi se L è iniettiva, allora $\boldsymbol{ker}(L) = \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{W}}\}$.

Viceversa se $\boldsymbol{ker}(L) = \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{W}}\}$, allora $L(\mathsf{v}_1) = L(\mathsf{v}_2) \Longrightarrow \mathsf{v}_1 = \mathsf{v}_2$ ▮

G40:h.04 Torniamo al caso generale di un omomorfismo $\mathbb{F}$-lineare $L \in \{\boldsymbol{V} \longrightarrow_{\mathbb{F}-lin} \boldsymbol{W}\}$ con $\boldsymbol{ker}(L)$ costituente un sottospazio del dominio della L. Per ogni $E \subseteq V$ denotiamo con $\boldsymbol{Cmplsp}(E)$ e chiamiamo sottospazio complementare di E l'insieme (sottospazio) dei vettori di $\boldsymbol{V}$ ortogonali a tutti gli elementi di E.

Consideriamo un sottospazio $C q_{vsp} \boldsymbol{Cmplsp}(\boldsymbol{ker}(L))$ e la riduzione di L a tale sottospazio $\searrow$ $L_{\mathrm{R}_C} \in \{C \longmapsto_{\mathbb{F}-lin} \text{cod}(L)\}$, in modo che sia $\text{dom}(L) = \boldsymbol{ker}(L) \oplus L_{\mathrm{R}_C}$. Per quanto riguarda le dimensioni dei sottospazi si ha

(1) $$\dim(\text{dom}(L)) = \text{nlty}(L) + \dim(C) \ .$$

Prendiamo in esame L_{R_C}; questo operatore è iniettivo, in quanto $\boldsymbol{ker}(L_{\mathrm{R}_C}) = \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{W}}\}$.

Inoltre è suriettivo; infatti se $\mathsf{v} \in \text{dom}(L) = \boldsymbol{ker}(L) \oplus L_{\mathrm{R}_C}$ si può scrivere $\mathsf{v} = \mathsf{k} + \mathsf{c}$, con $\mathsf{k} \in \boldsymbol{ker}(L)$ e $\mathsf{c} \in C$.

Applicando la L si ha per ogni $\mathsf{v} \in \boldsymbol{V}$, $L(\mathsf{v}) = L(\mathsf{k}) + L(\mathsf{c}) = L(\mathsf{c}) \in \text{cod}(L_{\mathrm{R}_C})$.

Quindi, data l'arbitrarietà di $\mathsf{v} \in \text{dom}(L)$, si ha $\text{cod}(L_{\mathrm{R}_C}) = \text{cod}(L)$.

Di conseguenza L_{R_C} è una trasformazione lineare invertibile di $\{C \,{\triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright}_{\mathbb{F}-lin} \text{cod}(L)\}$ ed ogni complemento di $\boldsymbol{ker}(L)$ è isomorfo a $\text{cod}(L)$.

Si dice **rango** dell'omomorfismo lineare L la dimensione del suo codominio e denotiamo tale intero naturale con

(2) $$\text{rnk}(L) \ := \ \dim(\text{cod}(L)) \ .$$

Si può allora concludere con la relazione dimensionale

(3) $$\forall L \in \{\boldsymbol{V} \longrightarrow_{\mathbb{F}-lin} \boldsymbol{W}\} \ :\ \text{nlty}(L) + \text{rnk}(L) = \dim(\text{dom}(L) \ .$$

Alberto Marini