1

Capitolo G37
poliedri convessi

Contenuti delle sezioni

21 pagine

G370.01 In questo capitolo presentiamo le nozioni di base sui poliedri convessi e qualche fatto riguardante loro generalizzazioni.

Inizialmente introduciamo nozioni basilare e di portata generale sui poliedri convessi con particolare attenzione a quelli che presentano caratteristiche che conferiscono regolarità,

Si procede poi a trattare il loro scheletro e la relazione di dualità tra queste figure solide; questo ci permetterà di dimostrare la basilare uguaglianza di Eulero sui numeri dei loro vertici, dei loro spigoli e delle loro facce.

Successivamente tratteremo i poliedri più famosi, i poliedri regolari, noti anche come solidi platonici; di essi esamineremo i parametri combinatorici, i parametri metrici, le simmetrie ed i collegamenti con altri oggetti geometrici lineari.

Presenteremo quindi una classificazione dei poliedri convessi, esponendo una certa gamma di fatti che per la maggior parte ci limiteremo a enunciare.
L'ultima sezione segnalao alcuni fatti che riguardano i poliedri in generale, convessi e nonconvessi.

G370.02 Occorre segnalare che, come per molti altri capitoli, il presente attualmente manca del tutto di figure, molto utili per gli argomenti qui toccati.
Ora dobbiamo limitarci a segnalare che figure molto utili si possono reperire in varie pagine del Web, in particolare nelle versioni italiana e inglese di Wikipedia e in MathWorld.

G37 a. poliedri convessi [1]

G37a.01 Definiamo qui **poliedro convesso** un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{\times 3}$ convesso e delimitato da un insieme finito di poligoni piani convessi chiamati **facce del poliedro**, due delle quali aut posseggono un solo punto in comune che viene detto **vertice del poliedro**, aut posseggono un segmento in comune che viene chiamato **spigolo del poliedro** o anche **lato del poliedro**, aut non posseggono punti in comune.

Un poliedro convesso è quindi una figura tridimensionale nella quale si distinguono punti costituenti i suoi vertici, segmenti costituenti i suoi spigoli, facce costituenti poligoni che fanno parte della sua frontiera e suoi punti interni.

Un poliedro convesso è inoltre una figura tridimensionale limitata, in quanto l'unione delle sue facce(insiemi limitati e in numero finito) è un insieme limitato.

Tale figura dal punto di vista fisico-matematico viene attribuita alle "figure solide" e quindi viene anche chiamata "figura solida convessa a facce piane".

Sottolineiamo due caratteristiche basilari degli spigoli di un poliedro: [a] ogni spigolo ha due vertici come estremità; [b] ogni spigolo connette esattamente due facce, ovvero è l'intersezione di due facce chiuse.

Questo porta a considerare tre **relazioni di incidenza** che riguardano, risp., gli spigoli e i vertici che sono loro estremità, gli spigolo e le facce che delimitano, i vertici e le facce alle quali appartengono.

Ogni vertice V di un poliedro è incidente con un certo numero g_V di spigoli e con un ugual numero di facce; g_V è chiamato **valenza del vertice**.
Ogni faccia F di un poliedro è incidente con un certo numero g_F di spigoli e quindi con altrettanti vertici; essa quindi costituisce un g_F-agono.

In certe argomentazioni è necessario distinguere tra facce aperte e facce chiuse e distinguere tra spigolo aperti e spigoli chiusi.
Spesso invece è possibile fare riferimento, più comprensivamente, a classi-m?? di facce e di spigoli.

G37a.02 Per trattare i poliedri è importante utilizzare con cura, ma anche con elasticità, un sistema di notazioni piuttosto elaborato.

Dato un poliedro P denotiamo con $\boldsymbol{Vrtx}(\mathsf{P})$ l'insieme dei suoi vertici, con $\boldsymbol{Edg}(\mathsf{P})$ l'insieme dei suoi spigoli e con $\boldsymbol{Face}(\mathsf{P})$ l'insieme delle sue facce.

Caratteristiche rilevanti di ogni poliedro P sono i cardinali dei tre suddetti insiemi dei componenti per i quali adottiamo le seguenti notazioni:

$NoE(\mathsf{P}) := |\boldsymbol{Vrtx}(\mathsf{P})|$ per il numero dei suoi vertici;

$NoE(\mathsf{P}) := |\boldsymbol{Edg}(\mathsf{P})|$ per il numero dei suoi spigoli;

$NoF(\mathsf{P}) := |\boldsymbol{Face}(\mathsf{P})|$ per il numero delle sue facce.

Definiamo inoltre come **terna-VEF** del poliedro P $\boldsymbol{VEF}(\mathsf{P}) := \left\langle NoE(\mathsf{P}), NoE(\mathsf{P}), NoF(\mathsf{P})\right\rangle$.

Spesso per esaminare poliedri generici o specifici risulta conveniente servirsi di notazioni semplificate e di notazioni locali.
In particolare per un poliedro P scriveremo $\boldsymbol{V}(\mathsf{P})$ per l'insieme dei suoi vertici, $\boldsymbol{E}(\mathsf{P})$ per l'insieme dei suoi spigoli e $\boldsymbol{F}(\mathsf{P})$ per l'insieme delle sue facce.

Per i poliedri convessi e più in generale per i poliedri non necessariamente convessi, dimostreremo in :c l'uguaglianza lineare dovuta ad Eulero $NoE(\mathsf{P}) + NoF(\mathsf{P}) = NoE(\mathsf{P}) + 2$.

Quindi per questi poliedri una delle le tre componenti della terna-VEF è ridondante e questa terna può scriversi, per esempio, come $\langle NoE(\mathsf{P}), NoE(\mathsf{P}) + NoF(\mathsf{P}) - 2, NoF(\mathsf{P})\rangle$.

Vedremo che molte delle terne-VEF individuano più “tipi di poliedri”, ovvero più classi di poliedri equivalenti per trasformazione bicontinua.

G37a.03 Talora bisogna presentare ordinatamente i vertici, gli spigoli e le facce di P e per essi useremo le seguenti notazioni:

V_1, V_2, ... , V_{N_V} per i vertici;

E_1, E_2, ... , E_{N_E} per gli spigoli.

F_1, F_2, ... , F_{N_F} per le facce;

Dovremo inoltre esaminare dei poliedri specifici; per determinarli talora potranno essere utilizzate vantaggiosamente le coordinate cartesiane dei loro vertici, in altri casi saranno preferibili modalità particolari che si avvalgono di specifiche peculiarità geometriche.

Le relazioni di incidenza tra vertici, facce e spigoli sono di importanza primaria e determinano la cosiddetta **struttura combinatoria del poliedro**.

Per le tre **relazioni di incidenza che caratterizzano un poliedro** P useremo le seguenti notazioni:

$\mathcal{PI}ve_{\mathsf{P}}$ per la relazione di incidenza tra vertici e spigoli;

$\mathcal{PI}ef_{\mathsf{P}}$ per la relazione di incidenza tra facce e spigoli;

$\mathcal{PI}vf_{\mathsf{P}}$ per la relazione di incidenza tra vertici e facce.

Evidentemente $\mathcal{PI}ve_{\mathsf{P}} \subset \boldsymbol{Vrtx}(\mathsf{P}) \times \boldsymbol{Edg}(\mathsf{P})$, $\mathcal{PI}ef_{\mathsf{P}} \subset \boldsymbol{Edg}(\mathsf{P}) \times \boldsymbol{Face}(\mathsf{P})$ e $\mathcal{PI}vf_{\mathsf{P}} \subset \boldsymbol{Vrtx}(\mathsf{P}) \times \boldsymbol{Face}(\mathsf{P})$.

G37a.04 Dalle relazioni di incidenza si deducono le cosiddette **relazioni di adiacenza del poliedro** tra vertici, tra facce e tra spigoli.

Si dicono **vertici adiacenti di un poliedro** due suoi vertici che sono le due estremità di uno spigolo. I duetti di vertici adiacenti si possono ricavare dalla relazione $\mathcal{PI}ve_{\mathsf{P}}$.

Si dicono **facce adiacenti di un poliedro** due sue facce che hanno uno spigolo in comune. La relazione di adiacenza tra facce si può desumere da $\mathcal{PI}ef_{\mathsf{P}}$.

Si dicono **spigoli adiacenti di un poliedro** due suoi spigoli che hanno un vertice in comune. La relazione di adiacenza tra spigoli è ottenibile da $\mathcal{PI}ve_{\mathsf{P}}$.

Evidentemente ciascuna delle relazioni di adiacenza è una relazione simmetrica.

Esse inoltre tendenzialmente presentano poche terne transitive. Si hanno terne transitive di vertici e di spigoli sse tali vertici e tali spigoli sono incidenti ad una faccia triangolare, terne transitive di spigoli che incidono in un vertice di valenza 3; queste terne sono evidenti per esempio nei prismi a base triangolare e nelle piramidi.

//input pG37a04

G37a.05 Nello studio dei poliedri si possono distinguere:

le proprietà geometriche che riguardano i singoli poliedri in quanto insiemi di punti che si distribuiscono in quanto appartenenti a significativi sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{\times 3}$, in particolare a segmenti, poligoni e angoli-s diedri;

le proprietà metriche, cioè le proprietà invarianti per movimenti rigidi (traslazioni, rotazioni e riflessioni): queste caratterizzano le cosiddette **classi metriche dei poliedri**;

le proprietà invarianti per movimenti rigidi e omotetie che caratterizzano le cosiddette **classi di similitudine dei poliedri**;

le proprietà combinatorie invarianti per tutte le trasformazioni (in particolare per le trasformazioni lineari invertibili ed anche per trasformazioni bicontinue) che mantengono le relazioni di incidenza e di adiacenza tra facce, vertici e spigoli; queste caratterizzano le cosiddette **classi combinatorie di poliedri**.

G37a.06 Un esempio di singolo poliedro è fornito dal cubo che denotiamo con $\mathfrak{Q}_2$ i cui 8 vertici sono dati da terne di coordinate cartesiane della forma $\langle \pm 1, \pm 1, \pm 1 \rangle$. Le sue proprietà metriche riguardano la lunghezza dei suoi spigoli uguale a 2, la posizione del suo centro coincidente con l'origine, dei centri delle sue facce e dei punti medi dei suoi spigoli.

La classe metrica di $\mathfrak{Q}_2$ è costituita dai cubi di lato 2 ottenibili da esso mediante traslazioni e rotazioni. La classe di similitudine di $\mathfrak{Q}_2$ è invece costituita dalle figure ottenibili dalle precedenti applicando loro delle omotetie; sono queste classi che insieme alle figure che costituiscono i loro elementi che vengono chiamate genericamente "cubi".

La classe combinatoria di cui fa parte $\mathfrak{Q}_2$ è ancor più estesa, in quanto contiene le figure ottenuta dai cubi applicando loro biiezioni lineari di $\mathbb{R}^{\times 3}$ (come omotetie unidirezionali e slittamenti): a essa quindi appartengono i vari tipi di cuboidi e di parallelepipedi.

G37a.07 Nella pratica della presentazione dei poliedri, come per ogni altro genere di figure geometriche, si usano varie semplificazioni del linguaggio consistenti in abbreviazioni e riduzioni dei termini e delle espressioni matematiche per le quali si confida nella possibilità di precisare gli enunciati sulla base dei significati del contesto.

In particolare spesso si parla genericamente di "poliedro" confidando che il lettore del contesto sappia riconoscere quando si è implicitamente trascurata la specificazione "poliedro complesso", quando si parla di classi metriche, quando di classi di similitudine, quando di classi combinatorie.

G37a.08 I poliedri hanno una notevole varietà di applicazioni, sia all'interno della matematica (studi delle figure geometrici e delle simmetrie), sia in molteplici campi scientifici e tecnologici. Tra questi segnaliamo la fisica, la cristallografia, la chimica molecolare (fullereni), la biologia molecolare, lo studio dei virus (HIV), la zoologia (protozoi radiolari), la computer grafica, l'architettura e il disegno industriale.

Tendenzialmente rivestono maggior interesse i poliedri, non necessariamente convessi, che presentano buone caratteristiche di simmetria.
Grande importanza hanno quindi i gruppi di simmetria delle diverse classi di similitudine dei poliedri. Un ruolo fondamentale hanno inoltre i gruppi di simmetria delle classi combinatorie, ossia le simmetrie delle relazioni di incidenza riguardanti vertici, facce e spigoli, fondamentali per la determinazione delle simmetrie delle classi di similitudine.

Sulle caratteristiche delle classi metriche e sulle caratteristiche dei singoli poliedri ci limitiamo a osservare che si possono dedurre dalle caratteristiche delle classi di similitudine con operazioni elementari e comunemente automatizzabili di dilatazione, traslazione e rotazione.

G37a.09 In effetti le considerazioni sulle simmetrie sono determinanti per le classificazioni dei poliedri più interessanti in ambito matematico e pervarieapplicazioni.

Per la precisione si dovrebbero distinguere le simmetrie di un ben determinato poliedro, quelle che riguardano una classe metrica, le simmetrie di una classe di similitudine e quelle che concernono una classe combinatoria.
Spesso per ciascuno di questi campi di azione si usa il termine **simmetria di un poliedro** confidando che il contesto consenta di individuarne il significato e la portata.

Le simmetrie di un poliedro o di una classe di tali figure, che genericamente denotiamo con P costituiscono un gruppo, come accade per ogni genere di oggetti matematici. Questo gruppo è detto **gruppo simmetrico del poliedro** P e viene denotato con $\mathsf{Sym}_{\mathsf{P}}$.

Le simmetrie vengono spesso determinate a partire dalle permutazioni dei loro vertici; per molti poliedri tuttavia possono servire le permutazioni dei loro spigoli e delle loro facce, soprattutto quando queste si possono vedere come trasformazioni dotate di evidenza geometrica.

G37a.10 Il gruppo simmetrico di un poliedro deve essere isomorfo ad un sottogruppo finito del gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^{\times 3}$.
Le trasformazioni che costituiscono $\mathsf{Sym}_{\mathsf{P}}$ devono essere rotazioni intorno a rette, che quindi costituiscono assi di simmetria del poliedro, oppure riflessioni rispetto a piani che quindi hanno il ruolo dei piani di simmetria di P, oppure essere una simmetria centrale rispetto a un punto che assume il ruolo di centro di simmetria.

Si distinguono i poliedri che presentano simmetrie speculari da quelli che non posseggono piani di simmetria. Ogni riflessione cambia l'orientazione del poliedro, mentre l'applicazione di due riflessioni la lascia invariata; di conseguenza cambia l'orientazione del poliedro sse si attua un numero dispari di riflessioni. Per questo la simmetria centrale, equivalente a tre riflessioni, cambia l'orientazione.

Il gruppo di simmetria di un poliedro con m simmetrie speculari deve presentare m sottogruppi isomorfi al gruppo di ordine 2, concretamente esprimibile come gruppo moltiplicativo di $\{1, -1\}$; inoltre deve avere almeno un sottogruppo costituito da rotazioni.

Si distinguono anche i **poliedri chirali**, poliedri che non sono simili ai loro riflessi, dai **poliedri nonchirali**; tra questi si conviene di collocare anche i poliedri privi di piani di simmetria.
I poliedri chirali si dice che si presentano in due forme chiamate **forma levomorfa del poliedro chirale** e **forma destromorfa del poliedro chirale**.

G37a.11 I primi elementi per la determinazione delle simmetrie dei poliedri riguardano le regolarità delle loro facce e le proprietà di permutabilità per i loro vertici, per le loro facce e per i loro spigoli.

Le simmetrie di un poliedro permutano i suoi vertici, permutano le sue facce e permutano i suoi spigoli; esse quindi determinano tre relazioni di equivalenza, una tra i vertici, una tra le facce e una tra gli spigoli.
Due vertici V_1 e V_2 si dicono nella relazione R sse esiste una trasformazione di simmetria che porta V_1 in V_2; l'identità del poliedro va considerata tra queste trasformazioni e questo comporta la riflessibilità della R; l'invertibilità delle trasformazioni di simmetria comporta il carattere simmetrico della relazione R e la componibilità delle trasformazioni di simmetria comporta le sue transitività.
È quindi lecito dire che V_1 e V_2 sono **vertici equivalenti del poliedro**.

Considerazioni simili valgono per facce e spigoli.

Le classi di equivalenza di vertici, spigoli e facce di un poliedro P sono le orbite dell'azione del gruppo $\mathsf{Sym}_{\mathsf{P}}$ risp. su $\boldsymbol{Vrtx}(\mathsf{P})$, su $\boldsymbol{Edg}(\mathsf{P})$ e su $\boldsymbol{Face}(\mathsf{P})$.

G37a.12 Consideriamo un poliedro convesso P. Due suoi vertici equivalenti devono presentare le stesse caratteristiche combinatorie e metriche: lo stesso accade per due spigoli equivalenti e per due facce equivalenti.

Ad ogni vertice V si associa una cosiddetta **piramide locale**, classe combinatoria delle piramidi aventi come apice lo stesso V e come base il poligono i cui vertici si ottengono dalla sezione del poliedro con un piano tale da separare V da tutti gli altri vertici di P.

Ad ogni faccia F si associa un cosiddetto **tronco di cono locale**, classe combinatoria comprendente un tronco di cono ottenuto dalla intersezione di P con un piano parallelo al piano di F e tale da separare i vertici di F dai restanti vertici di $\mathbf{V}(\mathsf{P})$.

Ad ogni spigolo E si associa una cosiddetta **cupoloide locale**, classe combinatoria comprendente una cupoloide ottenuta intersecando P con un piano parallelo ad E e tale da separare i vertici di E da tutti i restanti vertici di P.

A due vertici equivalenti deve essere possibile associare la stessa piramide locale; in particolare essi devono avere la stessa valenza.
A due spigoli equivalenti deve essere possibile associare la stessa cupoloide locale; in particolare essi devono avere la stessa lunghezza e devono appartenere a due diedri con la stessa ampiezza angolare.
A due facce equivalenti deve essere posssibile associare lo stesso tronco di cono locale; essi innparticolare devono essere congruenti.

G37a.13 Un poliedro convesso si dice **poliedro regolare sui vertici** o poliedro isogonale sse tutti i suoi vertici appartengono a un'unica classe di equivalenza.
Un poliedro convesso si dice **poliedro regolare sulle facce** sse tutte le sue facce appartengono a un'unica classe di equivalenza.
Un poliedro convesso si dice **poliedro regolare sugli spigoli** sse tutti i suoi spigoli appartengono a un'unica classe di equivalenza.

G37a.14 Alcuni poliedri hanno la proprietà di avere tutti i vertici appartenenti a una sfera; una tale sfera viene detta **circumsfera del poliedro**, mentre il centro di tale sfera viene detto **circumcentro del poliedro** e il suo raggio **circumraggio del poliedro**.

Vi sono poi poliedri che hanno tutti gli spigoli tangenti a una sfera; una tale sfera viene detta **mesosfera del poliedro**, mentre il centro di tale sfera viene detto **mesocentro del poliedro** e il suo raggio **mesoraggio del poliedro**.

Inoltre alcuni poliedri presentano una sfera che è tangente a tutte le facce del poliedro; una tale sfera viene detta **insfera del poliedro**, mentre il centro di tale sfera viene detto **incentro del poliedro** e il suo raggio **inraggio del poliedro**.

Vi sono poliedri che non possiedono alcuna di queste sfere, altri che ne possiedono solo una, altri che ne posseggono due e altri che ne possiedono tre. Come vedremo i poliedri regolari possiedono le tre sfere e in questo caso queste hanno lo stesso centro; questo punto che fa da circumcentro, da mesocentro e da incentro viene detto **centro del poliedro**.

La presenza di una circumsfera, di una mesosfera o di una insfera è una caratteristiche che consente di semplificare alcune costruzioni sopra il poliedro che la possiede. Inoltre una tale presenza favorisce l'esistenza di simmetrie rotazionali; ciascuna di queste deve avere l'asse delle rotazioni passante per il centro della sfera presente.

G37a.15 Si dimostra facilmente, servendosi del solo teorema di Pitagora, che un cubo di lato $2\,s$ possiede le tre sfere introdotte sopra ed ha inraggio di lunghezza r, mesoraggio di lunghezza $\sqrt{2}\,s$ e circumraggio di lunghezza $\sqrt{3}\,r$.

Quasi altrettanto semplicemente si tratta il tetraedro regolare: il suo circumraggio misura $\sqrt{\frac{3}{8}}\ s$, il suo mesoraggio $\frac{1}{\sqrt{8}}\ s$ ed il suo inraggio $\frac{1}{\sqrt{24}}\ s$.

G37 b. dualità tra poliedri convessi

G37b.01 In generale, dato un poliedro P si dice suo **poliedro duale** un poliedro che si denota con P^* e che si ottiene con una biiezione β che porta i vertici di P nelle facce di P^*, le facce di P nei vertici di P^* e gli spigoli di P negli spigoli di P^* rispettando le relazioni di incidenza, cioè per ogni duetto $\{C, C'\}$ di componenti (vertici, facce o spigoli) di P accade che

$$\beta(C) \text{ e } \beta(C') \text{ sono incidenti su } \mathsf{P}^* \quad \text{sse} \quad C \text{ e } C' \text{ sono incidenti su } \mathsf{P} \ .$$

Più esplicitamente abbiamo che la biiezione

$$(1) \qquad \beta \in \left\lceil \boldsymbol{Vrtx}(\mathsf{P}) \times \boldsymbol{Edg}(\mathsf{P}) \times \boldsymbol{Face}(\mathsf{P}) \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright \boldsymbol{Face}(\mathsf{Q}) \times \boldsymbol{Edg}(\mathsf{Q}) \times \boldsymbol{Vrtx}(\mathsf{Q}) \right\rceil$$

associa al poliedro P un poliedro Q suo duale sse

$$\forall V \in \boldsymbol{Vrtx}(\mathsf{P}) \ , \ E \in \boldsymbol{Edg}(\mathsf{P}) \ \ : \ \ V \, \mathcal{PI}ve_{\mathsf{P}} \, E \iff \beta(V) \mathcal{PI}ef_{\mathsf{Q}} \beta(E) \quad \wedge$$

$$(2) \qquad \forall F \in \boldsymbol{Face}(\mathsf{P}) \ , \ E \in \boldsymbol{Edg}(\mathsf{P}) \ \ : \ \ F \, \mathcal{PI}ef_{\mathsf{P}} \, E \iff \beta(F) \mathcal{PI}ve_{\mathsf{Q}} \beta(E) \quad \wedge$$

$$\forall V \in \boldsymbol{Face}(\mathsf{P}) \ , \ F \in \boldsymbol{Edg}(\mathsf{P}) \ \ : \ \ V \, \mathcal{PI}vf_{\mathsf{P}} \, F \iff \beta(F) \mathcal{PI}vf_{\mathsf{Q}} \beta(V) \ .$$

Bisogna avvisare eplicitamente che ad un poliedro si possono associare più poliedri duali: banalmente se un poliedro duale di uno dato viene sottoposto a una omotetia oppure a una qualsiasi trasformazione che ne mantiene la struttura combinatoria si ottiene un altro poliedro duale di quello dato.

G37b.02 Presentiamo una costruzione che a un qualsiasi poliedro convesso P associa un poliedro duale che denotiamo con Q e che come insieme di punti-RRR è un sottoinsieme del precedente.

Per ogni faccia F_i di P associamo un suo punto interno W_i; ad ogni duetto di facce adiacenti $\{F_i, F_{i'}\}$, oppure, equivalentemente, a ogni spigolo $E_j := F_i \cap F_{i'}$ associamo uno spigolo $G_j := \overline{W_i \, W_{i'}}$ di Q.

Di conseguenza alla biiezione tra facce di P e vertici di Q si aggiunge una corrispondenza biunivoca tra gli spigoli di P e gli spigoli di Q.

Al generico vertice V_h di P associamo la faccia di Q, determinata dagli spigoli associati agli spigoli di P che incidono in V_h; anche questa corrispondenza è biunivoca.

Le tre corrispondenze biunivoche precedente comportano una corrispondenza biunivoca tra figure come quella richiesta dalla definizione.
Si mostra facilmente che il poliedro Q è anch'esso convesso.

Se applichiamo lo stesso genere di costruzione a Q otteniamo un terzo poliedro convesso che presenta componenti in biiezione con quelle di P e tra le quali sussistono relazioni di incidenza equivalenti a quelle di P.

G37b.03 La costruzione precedente individua una trasformazione della classe combinatoria di P nella classe combinatoria di Q. Se denotiamo con $\boldsymbol{P}$ la classe combinatoria di P, per la classe combinatoria di Q scriviamo $\boldsymbol{P}^{\triangle}$.
Con tale scrittura la suddetta trasformazione risulta individuata dal segno Δ collocato come suffisso esponente.

La classe combinatoria $\boldsymbol{P}^{\triangle}$ viene detta **classe combinatoria duale** della $\boldsymbol{P}$.
Questo termine è giustificato dal fatto che la trasformazione di classi combinatorie gode le proprietà del genere di trasformazioni che abbiamo chiamato dualità; questa trasformazione viene quindi chiamata **dualità combinatoria**.

L'ultima considerazione del paragrafo precedente dice che la dualità combinatoria è una involuzione per l'insieme delle classi combinatorie di poliedri convessi.

G37b.04 Un poliedro P si dice **poliedro semplicemente connesso** sse ogni poligonale chiusa interamente costituita da suoi punti interni si può trasformare con spostamenti continui dei suoi vertici in un suo punto interno.

Ogni poliedro convesso è semplicemente connesso.

Un poliedro che non è semplicemente connesso è il solido che si può ottenere come unione di tre cunei i quali presentino facce triangolari coincidenti a coppie.

Più semplice da descrivere mediante coordinate cartesiane è il poliedro che si può vedere come unione di 4 cunei che presenta i seguenti vertici

$$V_0 = \langle 2,2,2\rangle,\ V_1 = \langle -2,2,2\rangle,\ V_2 = \langle -2,-2,2\rangle,\ V_3 = \langle 2,-2,2\rangle,$$
$$V_{4+i} := V_i - 4\mathbf{e}_z \text{ per } i = 0,1,2,3$$
$$V_8 := \langle 4,4,0\rangle\ ,\ V_9 := \langle -4,4,0\rangle\ ,\ V_{10} := \langle -4,-4,0\rangle\ ,\ V_{11} := \langle 4,-4,0\rangle$$

e che presenta 4 facce quadrate: $\mathbf{Q}(V_0, V_1, V_5, V_4)$ e le altre 3 facce ottenute ruotando intorno ad Oz di $\pi/2$, π e $3\pi/2$ radianti, 4 facce trapezoidali $\mathbf{Q}(V_0, V_8, V_9, V_1)$ e le altre tre ottenute con le rotazioni suddette e altre 4 facce trapezoidali ottenute dalle precedenti per riflessione rispetto a Oxy.

La poligonale chiusa che unisce i punti del ciclo $\left\langle_{cy} \langle 3,3,0\rangle\ ,\ \langle -3,3,0v\rangle\ ,\ \langle -3,-3,0\rangle\ ,\ \langle 3,-3,0\rangle\right.$ non può ridursi a un punto applicando spostamenti continui dei suoi nodi.
Il gruppo fondamentale di questo poliedro è isomorfo a $\mathbb{Z}_{ga}$.

Ogni poliedro semplicemente connesso si può ridurre a poliedro convesso equivalente combinatorio.
Può essere utile osservare la possibilità di trasformare con movimenti continui dei vertici un prisma a base quadrilatera nonconvessa in un prisma a base quadrilatera convessa, in particolare a base quadrata.

G37b.05 Introduciamo **scheletro di un poliedro semplicemente connesso** effettuando (1) la sua trasformazione in convesso, (2) proiezione dei suo vertici sopra una sfera e (3) proiezione stereografica della sfers sopra un piano dei vertici e degli spigoli in modo da ottenere grafo planare.

G37b.06 Gli scheletri di un poliedro P e del suo duale combinatorio P^Δ sono isomorfi: in effetti ciascun nodo di tali grafi corrisponde biunivocamente ad uno spigolo di P, e quindi a uno spigolo di P^Δ.
Il duale di un grafo planare è un grafo planare. esso è lo scheletro di poliedro duale combinatorio.

G37b.07 Per descrivere un poliedro convesso può essere molto utile presentare uno dei suoi cosiddetti **sviluppi piani del poliedro**.
Gli sviluppi piani di un poliedro si possono ottenere a partire dal suo scheletro e ricavando i sottoalberi spanning di questo grafo.

G37b.08 Sono interessanti le più semplici raffigurazioni piane dei grafi planari dei poliedri più semplici, in particolare dei regolari.

Si è visto che il tetraedro ha due sviluppi piani. Non è difficile rendersi conto che sono 11 gli sviluppi piani di un cubo (e altrettanti quelli dell'ottaedro regolare.
Segnaliamo che gli sviluppi piani del dodecaedro e dell'icosaedro regolari sono 3???.

G37 c. formula di Eulero per i poliedri convessi

G37c.01 Questa celebre relazione la consideriamo qui nella versione che segue.

Per ogni poliedro convesso P vale l'uguaglianza

(1) $$N_{V,\mathsf{P}} + N_{V,\mathsf{P}} \;=\; N_{V,\mathsf{P}} + 2\ .$$

In effetti la relazione precedente vale anche per i poliedri semplicemente connessi, mentre per figure tridimensionali più generali si definisce una più generale `caratteristica di Euler (wi)` o caratteristica di Euler-Poincaré.

(2) $$\chi \;:=\; N_{V,\mathsf{P}} + N_{V,\mathsf{P}} - N_{V,\mathsf{P}}\ .$$

G37c.02 L'insieme degli scheletri dei poliedri convessi, cioè i grafi planari, si possono organizzare in un digrafo ordinato.

Ciascuno degli spigoli di un grafo planare si può modificare e ciascuna delle facce di un grafo planare si può dividere in due con piccole modifiche

Similmente a ogni poliedro convesso si possono applicare operazioni di intersezione con semispazi che contengono un solo vertice ed escludono tutti i rimanenti e di intersezione con semispazi che contengono interamente un solo spigolo e non toccano alcun vetice.

Con queste operazioni si aumenta il numero delle componenti e si possono organizzare tutte le classi combinatorie dei poliedri convessi in un digrafo ordinato numerabile limitato inferiormente.
Nella posizione dell'elemeno minimo si trova il tetraedro la cui terna-VEF è $\langle 4, 6, 4\rangle$.
Questo digrafo si può organizzare per numero delle facce crescente.
Al di sopra si trovano pentaedri.

G37c.03 La dimostrazione della formula di Eulero si può condurre constatando che vale per il tetraedro e dimostrando che rimane valida per tutte le operazioni che fanno passare da uno scheletro di poliedro convesso a uno più ricco.

G37 d. poliedri regolari

G37d.01 I poliedri regolari sono i poliedri convessi che presentano le maggiori simmetrie; qui ci limitiamo ai regolari convessi.

In genere viene definito come **poliedro regolare convesso** un poliedro le cui facce sono poligoni regolari congruenti e che presentano tutti i vertici con la stessa valenza. Essi sono detti anche poliedri platonici e **solidi platonici**.
Si tratta di 5 poliedri: tetraedro regolare, cubo, ottaedro regolare, dodecaedro regolare e icosaedro regolare (evidentemente abbiamo usato termini semplificati per evitare di parlare di 5 classi combinatorie di poliedri regolari).

Queste figure tridimensionali, grazie alle loro proprietà geometriche, e in forza delle loro numerose simmetrie, hanno affascinato ed appassionato fin dall'antichità (sono stati ritrovati in Scozia modelli in pietra dei 5 poliedri regolari risalenti intorno al 1500 a.C.) ed hanno indotto molti a studiarli da vari punti di vista. In particolare essi costituiscono un tema importante negli *Elementi di Euclide*.

Le loro forme eleganti e suggestive hanno anche indotto molti a caricarle di significati nascosti, di valenze occulte e di poteri esoterici, al di fuori della razionalità della matematica.
Essi inoltre hanno ispirato e sostenuto con le loro proprietà una vasta gamma di realizzazioni artistiche, in particolare nella pittura e nell'architettura, per non parlare della bigiotteria e della sempre fiorente produzione di amuleti.

G37d.02 Intendiamo ora individuare i poliedri regolari con le loro proprietà combinatorie facendo riferimento alle loro terne-VEF e ad alcuni altri parametri numerici.

Ogni poliedro regolare P è caratterizzato dal suo **simbolo di Schlaefli** [Schlaefli], notazione della forma $\{p, q\}$ esprimente il numero p dei lati di ciascuna delle sue facce e la valenza q di ciascuno dei suoi vertici.

(1) Prop.: Per i numeri dei lati delle facce dei poliedri regolari sono accettabili solo i valori 3, 4 e 5.

Dim.: Gli angoli interni dei triangoli, dei quadrati e dei pentagoni misurano, risp., 60°, 90° e 108°; le facce che incidono in un vertice devono presentare somme degli angoli interni inferiori a 360° 4 quindi si possono avere dolo vertici nei quali incidono 3, 4 o 5 triangoli regolari, 3 quadrati o 3 pentagoni. Viceversa poligoni congruenti con 6 o più lati non possono incidere in un vertice di un poliedro regolare ▮

G37d.03 **(1) Prop.**: I poliedri regolari possono presentare solo 5 combinazioni per i simboli di Schlaefli ed N_E:

$$\{3,3\} \;\; N_E = 6 \;\; , \;\; \{4,3\} \;\; N_E = 12 \;\; , \;\; \{3,4\} \;\; N_E = 12 \;\; , \;\; \{5,3\} \;\; N_E = 30 \;\; , \;\; \{3,5\} \;\; N_E = 30 \; .$$

Dim.: Occorre esaminare le possibilità consentite per i simboli di Schlaefli $\{p, q\}$ combinati con le terne-VEF $\langle N_V, N_E, N_F\rangle$.
Il numero dei duetti dati da uno spigolo e da una delle due facce incidenti è dato da $2\,N_E$. Tale numero per la congruenza delle facce deve coincidere con il prodotto del numero delle facce per il numero dei lati per ogni faccia. Inoltre, per la omogeneità dei vertici, deve coincidere con il prodotto del numero dei vertici per la valenza di ciascun vertice.

Alle suddette uguaglianze aggiungiamo l'uguaglianza di Euler ottenendo le relazioni costituenti vincoli

(2) $$N_F = \frac{2\,N_E}{p} \quad , \quad N_V = \frac{2\,N_E}{q} \quad , \quad N_V + N_F - N_E = 2 \; .$$

Queste sono riassumibili nella $\dfrac{2\,N_E}{q} + \dfrac{2\,N_E}{p} - N_E = 2$, ossia nella

(3) $$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2} = \frac{1}{N_E} \ .$$

Se $p = 3$ la (3) diventa $\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{N_E}$.
Questa consente i seguenti gruppi di valori numerici:

$$\{3,3\} \quad N_E = 6 \quad , \quad \{3,4\} \quad N_E = 12 \quad , \quad \{3,5\} \quad N_E = 30 \ .$$

Se $p = 4$ dalla (3) si ottiene $\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{N_E}$. Dovendo essere $1/N_E > 0$ è possibile solo $q = 3$ e quindi rimane solo la possibilità $\{4,3\}$ con $N_E = 12$.
Se $p = 5$ la (3) implica $\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{N_E}$ e questa lascia solo la possibilità $\{5,3\}$ con $N_E = 30$ ▮

G37d.04 Dunque possono esistere solo cinque poliedri regolari che presentano i simboli di Schlaefli e le terne-VEF dati dalla seguente tabella.

nome	$\{p,q\}$	N_V	N_E	N_F
tetraedro regolare	$\{3,3\}$	4	6	4
cubo, esaedro regolare	$\{4,3\}$	8	12	6
ottaedro regolare	$\{3,4\}$	6	12	8
dodecaedro regolare	$\{5,3\}$	20	32	12
icosaedro regolare	$\{3,5\}$	12	32	20

Alla conclusione enunciata si giunge con 5 costruzioni geometriche che per ciascuna delle possibilità consentite da d02 conducono a individuare uno alla volta i poliedri regolari segnalati sopra.

G37d.05 Si osserva che il cubo e l'ottaedro regolare presentano il numero dei vertici e il numero delle facce scambiati; lo stesso accade per il dodecaedro e l'icosaedro. In effetti si tratta di due duetti di poliedri duali.

Si osserva anche che il tetraedro regolare, relativo al simbolo di Schlaefli $\{3,3\}$, simmetrico, è un poliedro autoduale.

G37 e. volumi dei poliedri convessi

G37e.01 Richiamiamo brevemente la nozione di volume di una figura solida, cioè per un sottoinsieme limitato dello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Si tratta di una valutazione di quella che intuitivamente possiamo chiamare "quantità di spazio occupata dalla figura".
Si chiede che questa valutazione sia assegnabile alla gamma di figure più ampia possibile, ma si riconosce che non tutte le figure solide sono valutabili. Più specificamente si dicono **figure cubabili** le figure solide S alle quali si può assegnare un volume che si denota con $\boldsymbol{Vol}(S)$.

Alla valutazione volume chiediamo precisi requisiti.

Come primo requisito si chiede l'invarianza rispetto alle trasformazioni isometriche, cioè nei confronti di traslazioni, rotazioni e riflessioni.

Si chiede poi l'additività: il volume di una figura che si può scomporre in due figure cubabili è la somma dei volumi delle due figure.

Occorre poi fissare una unità di misura per i volumi e di solito si conviene che il volume del cubo canonico sia uguale ad 1.

G37e.02 In conseguenza del requisito di additività si ha che il volume di una figura che si può considerare l'unione di k cubi di lato 1 è k.

Sempre in sintonia con il requisito di additività si ha che il volume di un cubo di lato $1/2$ è $1/8$ e che il volume di un cubo di lato $1/2^h$ è pari a $\dfrac{1}{2^{3\,h}}$.
Questa conclusione consente di assegnare un volume a tutte le figure che si possono considerare ottenute come unioni di cubetti anche molto

Dalla additività segue anche la **proporzionalità unidimensionale**, cioè la proporzionalità rispetto a una **omotetia unidirezionale**. Questa proprietà si ottiene considerando proporzionalità intera, proporzionalità razionale e per continuità proporzionalità reale.

La suddetta proporzionalità si estende facilmente a una prevedibile proporzionalità tridimensionale.
Da questa si può anche ricavare la possibilità di modificare l'unità di misura dei volumi.

Attraverso la nozione di limite gestibile con la tecnica (ϵ, δ), Si riesce ad assegnare un volume a tutte le figure delimitate da superfici esprimibili come unioni di superfici esprimibili con funzioni delle forme $z = f3(x, y)$, $x = f1(y, z)$ e $y = f2(x, z)$, che siano sufficientemente regolari (ad esempio continue a pezzi insieme alle loro derivate parziali).

G37e.03 Le accennate estensioni della nozione di volume e di figura cubabile si possono trovare con una certa facilità i volumi di molte figure della geometria elementare e di molti poliedri.

Si trova senza difficoltà che il volume del cuboide $\mathsf{Cbd}_{a,b,c}$, cioè avente lati a, b e c, è abc.

Prisma retto con base triangolare di area B e altezza h: volume $B\,h$.
Per additività questo vale per ogni prisma retto.
Invarianza del volume di un prisma rispetto a slittamento parallelo a una base ricavata da additività a partire da parallelepipedi.
Prisma con basi parallele distanti h e di area B: volume $B\,h$.

G37e.04 Calcoliamo i volumi delle piramidi.

Si osserva che un cubo di lato a è decomponibile in sei piramidi congruenti la cui base, quadrata, coincide con una faccia del cubo e il cui apice coincide con il centro del cubo. ciascuna di queste piramidi ha l'area della base pari ad a^2 e altezza $a/2$.

Dunque per il volume V_P di ciascuna di queste piramidi congruenti valgono le due espressioni che portano all'uguaglianza

$$(1) \qquad V_P \;=\; \frac{1}{6\,a^3} \;=\; \frac{1}{3}\,(a^2)\,\frac{a}{2}$$

Si può dunque enunciare che il volume di queste piramidi è dato da $1/3$ del prodotto dell'area della propria base per l'altezza.

In alternativa alla precedente argomentazione basata su una simmetria si può osservare che il cubo di lato a si può decomporre in tre piramidi congruenti aventi come basi le tre facce dal cubo che hanno in comune un vertice v e come quinto vertice il vertice del cubo opposto a v. Anche in tal modo si giunge ad affermare che il volume di queste piramidi è dato da $1/3$ del prodotto dell'area della propria base per l'altezza.

Considerazioni di equivalenza e di variazione per omotetia unidirezionale conducono ad affermare che ogni piramide con base quadrata di lato a e altezza h ha volume espresso da $\frac{1}{3}\,a^2\,h$

G37e.05 Per dimezzamento in parti ottenibili per riflessione volume di piramide a base triangolo rettangolo isoscele ha volume $\frac{1}{6}\,a^2\,h$. Si può leggere ancora $1/3$ del prodotto dell'area base per l'altezza.

Per proporzionalità unidimensionale l'espressione trovata vale per ogni triangolo rettangolo di base; per slittamento vale per ogni slittamento di apice su piano parallelo alla base; in particolare apice sulla verticale di angolo retto.

Per slittamento di un vertice di base su piano parallelo al piano della faccia opposta vale per ogni tetraedro a base triangolare con apice sulla verticale di un vertice di base.

Per slittamento del suddetto apice su piano parallelo alla base originaria si ha che il volume di ogni tetraedro vale un terzo dell'area di una base per l'altezza corrispondente.

Un tetraedro ha associato a ciascuno dei suoi 4 vertici un parallelepipedo, quello definito dai tre suoi lati che incidono nel vertice dato. Quindi si ottiene anche che il volume di un tetraedro vale un sesto del volume di ciascuno di questi 4 parallelepipedi.

Il volume di ogni piramide a base anche nonconvessa vale un terzo della area di base per l'altezza: infatti una tale piramide si ripartisce facilmente in tetraedri a partire dalla ripartizione del poligono di base in triangoli.

//input pG37e05

G37e.06 Prismi a base triangolare e basi non necessariamente ortogonali ai lati tra le basi hanno volume uguale a base per altezza corrispondente.

G37e.07 Riduzione del numero degli spigoli per aggiunta di tetraedri.

G37e.08 Volumi dei poliedri regolari con spigoli di lunghezza a.

Tetraedro $\frac{\sqrt{2}}{12}\,a^3$

Cubo a^3
Ottaedro $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\,a^3$
Dodecaedro $\dfrac{15+7\sqrt{5}}{4}\,a^3$
Icosaedro $\dfrac{5}{6}\,\varphi^2\,a^3$, dove con $\varphi := \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ denotiamo il numero chiamato **sezione aurea** o anche **numero di Fidia**. o `sezione aurea (wi)`

G37e.09 Presentiamo anche una formula per il volume dei poliedri orientabili ottenuta da procedimenti dell'analisi infinitesimale.

Ricordiamo il teorema della divergenza, o teorema di Ostrogradsky. Consideriamo una regione di $\mathbb{R}^{\times 3}$ $\boldsymbol{R}$ compatta e delimitata da una superficie liscia a pezzi $S := \partial\boldsymbol{R}$ il cui versore normale locale denotiamo con n e sia $\mathsf{F}(\mathsf{x})$ un campo vettoriale continuamente differenziabile in un intorno di $\boldsymbol{R}$.
Vale la seguente uguaglianza tra un integrale di volume ed un integrale di superficie

$$\int\int\int_{\boldsymbol{R}} \mathrm{d}_3\mathsf{x}\ \nabla\cdot\mathsf{F}(\mathsf{x}) \ = \ \int\int_S \mathrm{d}_2 S\ \mathsf{F}(\mathsf{x})\cdot\mathsf{n}\ . \tag{1}$$

Se $\mathsf{F}(\mathsf{x}) \ = \ \dfrac{1}{3}\,\mathsf{x}$, abbiamo

$$\boldsymbol{Vol}(\boldsymbol{R}) \ = \ \int\int_S \mathrm{d}_2 S\ \mathsf{F}(\mathsf{x})\cdot\mathsf{n}\ . \tag{2}$$

Se $\boldsymbol{R}$ è un poliedro P semplicemente connesso (in particolare un poliedro convesso), abbiamo

$$\boldsymbol{Vol}(\mathsf{P}) \ = \ \frac{1}{3}\sum_{F_i\in\boldsymbol{Face}(\mathsf{P})} \mathsf{x}_i\cdot\mathsf{n}_i\ \boldsymbol{Area}(F_i)\ . \tag{3}$$

dove x_i varia sulla faccia F_i ed n_i denota il versore normale alla faccia diretto all'interno del poledro.

G37 f. tassonomia dei poliedri convessi

G37f.01 Ricordiamo brevemente le varie famiglie di poliedri convessi introdotte in precedenza.

Poliedri regolari, esaminati in :d.

piramidi: poliedri individuabili da un poligono che costituisce la sua cosiddetta base e da un ulteriore vertice (non appartenente alla base) chiamato **apice della piramide**; le facce di una piramide, oltre alla base, sono facce triangolari i cui vertici sono l'apice e due vertici adiacenti della base.

bipiramidi convesse: solidi ottenibili da due piramidi con basi congruenti fondendo le stesse basi e tenendo i due apici nei due diversi semispazi delimitati dal piano nel quale si collocano le basi.

tronchi di piramide: ciascuno ottenibile intersecando una piramide la cui base denotiamo con B con il semispazio contenente la B delimitato da un piano parallelo alla stessa B; ciascuno di questi solidi ha una faccia ottenibile applicando alla sua base una contraazione, ossia una omotetia riduttiva.

prismi: ciascuno caratterizzato da due facce che giacciono su due piani paralleli e che possono essere trasformate l'una nell'altra da una traslazione T; queste facce di un prisma le chiamiamo basi e le rimanenti sono parallelogrammi con due lati opposti appartenenti alle due basi uno dei quali ottenibile applicando la T all'altro.

antiprismi: caratterizzati (come i prismi) da due facce poligonali che giacciono su due piani paralleli e sono congruenti, ma l'una di esse è ottenibile dall'altra con una traslazione seguita da una rotazione intorno a un suo punto interno; oltre alle due facce suddette chiamate basi il cui numero di lati denotiamo con n, un antiprisma possiede $2\,n$ facce triangolari con un vertice su una base e il lato opposto costituente un lato dell'altra base.

tendoedri: ciascuno è caratterizzato da un poligono base e da uno spigolo detto apicale che denotiamo con $\mathsf{a} = \overline{A_1\,A_2}$ estraneo al piano della base, possibilmente parallelo ad esso. Denotiamo il ciclo dei vertici della base con

$$\left\langle_{cy} B_1, B_2, ..., B_{1+h}, B_{2+h}, B_{3+h}, ..., B_{2+h+k}\right\rangle \text{ con } h, k \geq 1 \;;$$

chiediamo inoltre che sia $\overline{B_1\,B_2} /\!\!/ \overline{B_{h+1}\,B_{h+2}} /\!\!/ \mathsf{a}$.

Tra le facce diverse dalla base, che chiamiamo facce laterali, vi sono i due trapezi aventi come duetti di spigoli paralleli, risp., $\left\{\overline{A_1\,A_2}, \overline{B_1, B_2}\right\}$ e $\left\{\overline{A_1\,A_2}, \overline{B_{h+1}, B_{h+2}}\right\}$; le restanti facce laterali sono triangoli: h hanno come vertice A_1 e come lato opposto uno dei lati $B_{1+i}\,B_{2+i}$ per $i = 1, ..., h$, mentre k hanno un vertice in A_2 e come lato opposto uno dei lati B_{1+h+j}, B_{2+h+j} per $j = 1, ..., k$.

G37f.02 Definiamo alcune altre famiglie di poliedri convessi.

cupole: ciascuna individuata da due poligoni su piani paralleli, le basi, uno con n lati, l'altro con $2\,n$ lati; per i cicli dei vertici scriviamo, risp., $\left\langle_{cy} V_0, V_1, ..., V_{n-1}\right\rangle$ e $\left\langle_{cy} W_0, W_1, W_2, W_3, ..., W_{2\,n-2}, W_{2\,n-1}\right\rangle$. Per le facce laterali si chiede che n siano triangoli ed n rettangoli e procedendo sulle facce consecutive si incontrino $\Delta(V_0, W_0, W_1)$, $\mathbb{Q}\,(V_0, W_1, W_2, V_1)$, $\Delta(V_1, W_2, W_3)$, $\mathbb{Q}\,(V_1, W_3, W_4, V_2)$, ... , $\Delta(V_{n-1}, W_{2n-2}, W_{2n-1})$, $\mathbb{Q}\,(V_{n-1}, W_{2n-1}, W_0, V_0)$. Una cupola le cui basi presentano n e $2\,n$ spigoli viene chiamata **cupola n-agonale**.

cupoloidi: ciascuna caratterizzata da due poligoni su facce parallele che in genere non sono congruenti e non hanno lo stesso numero di lati; contrariamente ai tronchi di piramide non congruenti le facce chiamate laterali, le diverse dalle basi, sono in parte quadrilateri e in parte triangoli; possono considerarsi varianti più generali dei tronchi di piramidi e delle cupole.

cunei: per cuneo si intende un pentaedro avente due facce triangolari e tre facce consistenti in trapezi. Ogni cuneo ha 6 vertici e 9 spigoli, dei quali 3 costituiscono i lati obliqui di un trapezio. Un cuneo si può assegnare all'insieme dei tendoedri e può chiamarsi anche **cupola digonale**.

G37f.03 Si dice **prismatoide** ogni poliedro i cui vertici appartengono a due piani paralleli.

Della classe dei prismatoidi convessi fanno parte svariate famiglie di poliedri: le più note sono costituite da piramidi, tronchi di piramide, prismi, antiprismi, tendoedri (e in particolare cunei) e cupoloidi (e in particolare cupole).

Tra i prismatoidi si trovano anche tre poliedri regolari: i tetraedri regolari (asieme ai non regolari), gli ottaedri regolari e i cubi.
Talune tassonomie dei poliedri però escludono dai prismatoidi i poliedri platonici.
Sono prismatoidi anche tutti i parallelepipedi, oltre a tutti i tetraedri.

In genere i prismatoidi non presentano elevate regolarità e presentano al più un asse di simmetria ortogonale ai piani delle basi.
Qualche regolarità in più possono presentare i prismatoidi le cui facce sono poligoni regolari (non necessariamente con lo stesso numero di lati, ma con numeri di lati proporzionali, in particolare con n e $h\,n$ lati) e con i vertici di ciascuna base aventi la stessa valenza.

G37f.04 Osserviamo esplicitamente che tra i prismatoidi esaedrali con facce quadrilatere si trovano: i parallelepipedi (e in particolare i cuboidi e tra questi i cubi), i romboedri, i trapezoedri trigonali, ed i tronchi di piramide quadrilaterali.

I prismatoidi le cui basi hanno lo stesso numero di vertici e le cui facce laterali sono parallelogrammi o trapezi sono chiamati **prismoidi**. Tra i prismoidi si trovano prismi, tronchi di piramide e antiprismi.

Si dimostra che il volume di tutti i prismatoidi è ottenibile da una unica espressione.

(1) Prop.: Si abbia un prismatoide P le cui basi abbiano, risp., le aree A_1 ed A_3 e sia h la sua altezza, cioè la distanza tra i piani delle basi; si conosca inoltre l'area A_2 del poligono ottenuto intersecando P con il piano parallelo a quelli delle basi ed equidistante da essi. Il volume di P è ottenibile dalla espressione:

$$(1)\ . \qquad V = \frac{h}{6}\,(A_1 + 4\,A_2 + A_3)$$

Dim.: Si considera la funzione $A(x)$ per $0 \le x \le h$ che fornisce l'area del poligono ottenuto intersecando P con un piano parallelo ai piani (paralleli) delle basi e distante x da uno di essi. Quest'area è al più quadratica nella x e quindi si può applicare la regola di Simpson per ottenere il valor esatto e questa fornisce l'espressione enunciata ▮

G37f.05 Si dice **poliedro archimedeo** o **solido archimedeo** o **poliedro semiregolare** un poliedro convesso che non sia né un poliedro regolare, né un prisma, né un antiprisma, le cui facce sono poligoni regolari di due o più tipi e i cui vertici sono omogenei.

Un poliedro archimedeo non può avere tutte le simmetrie di un poliedro regolare (questi hanno tutte le facce regolari e congruenti), ma possiede un numero piuttosto elevato di simmetrie; da qui l'aggettivo semiregolare. I prismi con facce laterali quadrate e gli antiprismi con facce laterali consistenti in triangoli regolari sono considerati nonarchimedei a causa delle loro simmetrie ridotte.

I vertici di un poliedro archimedeo, essendo ottenibili l'uno dall'altro con una simmetria, presentano tutti una stessa piramide locale e quindi una stessa valenza.

Gli spigoli di un poliedro archimedeo hanno tutti la stessa lunghezza, a causa della regolarità delle facce e all'esistenza di spigoli che sono adiacenti alle facce di tutti i duetti di tipi di facce. Di conseguenza se denotiamo con a la lunghezza di uno spigolo, l'area totale del poliedro è proporzionale ad a^2 ed il suo volume è proporzionale ad a^3.

G37f.06 Vi sono 13 poliedri archimedei, due dei quali sono chirali, cioè non sono equivalenti ai rispettivi trasformati per riflessione; se si distinguono anche questi poliedri riflessi si ottengono 15 classi combinatorie di poliedri archimedei.

Segue un quadro dei poliedri archimedei con alcune loro caratteristiche; un quadro più completo in `Poliedro archimedeo#Classificazione (wi)`.

cubottaedro: 14 facce, 8 triangoli e 6 quadrati;

icosidodecaedro: 32 facce, 20 triangoli e 12 pentagoni;

tetraedro troncato: 8 facce, 4 triangoli e 4 esagoni;

cubo troncato: 14 facce, 8 triangoli e 6 ottagoni;

ottaedro troncato: 14 facce, 6 quadrati, 8 esagoni;

dedecaedro troncato: 32 facce, 20 triangoli, 12 decagono;

icosaedro troncato: 32 facce, 12 pentagoni, 20 esagoni;

rombicubottaedro: 26 facce, 8 triangoli, 18 quadrati

cubottaedro troncato: 26 facce, 12 quadrati, 8 esagoni, 6 ottagoni

rombicosidodecaedro: 62 facce, 20 triangoli, 30 quadrati, 12 pentagoni;

icosidodecaedro troncato: 62 facce, 30 quadrati, 20 esagoni, 12 decagoni;

cubo camuso: 38 facce, 32 triangoli, 6 quadrati;

dodecaedro camuso: 92 facce, 80 triangoli, 12 pentagoni.

Il cubottaedro e l'icosiottaedro appartengono alla classe dei cosiddetti poliedri quasiregolari, poliedri che hanno sia i vertici che gli spigoli omogenei.

Il cubo camuso e il dodecaedro camuso sono i due poliedri archimedei chirali.

G37f.07 Si dice **poliedro di Catalan** un poliedro convesso duale di un poliedro archimedeo. Dato che sono duali degli archimedei e dato che la dualità scambia i ruoli dei vertici e delle facce, i poliedri di Catalan hanno le facce uniformi (cioè per ogni duetto di facce esiste una simmetria che trasforma una di esse nell'altra), mentre presentano vertici con valenze diverse.

Le facce di un poliedro di Catalan non sono poligoni regolari, mentre i vertici sono caratterizzati da piramidi locali aventi le basi regolari ma con diversi numeri di vertici.

G37f.08 Presentiamo un quadro dei poliedri di Catalan, analogo a quello riguardante i poliedri archimedei in f05 .

dodecaedro rombico, duale del cubottaedro, con 12 rombi per facce;

triacontaedro rombico, duale dell'icosidodecaedro, con 30 rombi per facce;

triacistetraedro, duale del tetraedro troncato, con 12 triangoli isosceli per facce;

triacisottaedro, duale del cubo troncato, con 24 triangoli isosceli per facce;

tetracisesaedro, duale dell'ottaedro troncato, con 24 triangoli isosceli per facce;

triacisicosaedro, duale del dedecaedro troncato, con 60 triangoli isosceli per facce;

pentacisdodecaedro, duale dell'icosaedro troncato, con 60 triangoli isosceli per facce;

icositetraedro trapezoidale, duale del rombicubottaedro, con 24 aquiloni per facce;

esacisottaedro, duale del cubottaedro troncato, con 48 triangoli scaleni per facce;

esacontaedro trapezoidale, duale del rombicosidodecaedro, con 60 aquiloni per facce;

esacisicosaedro, duale del icosidodecaedro troncato, con 120 triangoli scaleni per facce;

icositetraedro pentagonale, duale del cubo camuso, con 24 pentagoni irregolari per facce;

esacontaedro pentagonale, duale del dodecaedro camuso, con 60 pentagoni irregolari per facce.

Anche gli ultimi due poliedri di Catalan sono chirali e ciascuno di essi si presenta sia nella forma levomorfa che nella forma destromorfa.

G37f.09 Si dice **poliedro di Johnson** o **solido di Johnson** un poliedro convesso che non sia né un poliedro regolare, né un prisma, né un antiprisma, né un poliedro archimedeo le cui facce sono poligoni regolari ma non necessariamente con lo stesso numero di lati.

Come in ogni poliedro convesso, in ogni vertice incidono almeno 3 facce e la somma delle ampiezze dei loro angoli deve essere inferiore a 360°; quando tutte le facce sono poligoni regolari, dato che questi presentano angoli di ampiezze maggiori o uguali a 60°, si conclude che in un vertice di un poliedro di Johnson possono incidere solo 3, 4 o 5 facce.

L'analisi delle possibilità consentite dalla definizione ha portato Norman Johnson nel 1966 a individuare 92 poliedri e a congetturare che non ve ne fossero altri. Questa congettura è stata dimostrata valida da Victor Zalgaller nel 1969.

I 92 poliedri di Johnson sono individuati dalle sigle J_1,J_2,..., J_{92}.

Per una tavola con tutti i poliedri di Johnson rinviamo a `Solido di Johnson (wi)`. Qui ci limitiamo a poche osservazioni.

G37f.10 Gli unici poligoni regolari che risultano essere facce dei poliedri di Johnson presentano 3, 4, 5, 6, 8 o 10 lati.

I nomi in uso sono stati scelti da Johnson per essere il più possibile descrittivi, ma in molti casi alla prima lettura risultano inutilmente complicati.
Bisogna però osservare che molti poliedri di Johnson non sono semplici da definire e possono essere ragionevolmente descritti considerandoli ottenuti da poliedri più semplici attraverso modifiche di vari tipi, ma descrivibili senza complicazioni.

Tra i poliedri di Johnson più semplici vi sono le piramidi quadrata e pentagonale e le cupole triangolare, quadrata e pentagonale.

Conviene segnalare anche la **rotunda pentagonale**, solido con una base decagonale ai cui lati sono adiacenti 5 pentagoni laterali e 5 triangoli laterali che si alternano; i vertici dei 5 pentagoni laterali opposti al lato facente parte del decagono di base sono vertici di una faccia pentagonale parallela al decagono di base; ciascuno dei lati di questa faccia è in comune con un triangolo che è adiacente anche a due pentagoni laterali ed è incidente con un triangolo laterale.
Gli altri poliedri di Johnson sono ripartiti in piramidi modificate, cupole e rotunde modificate, prismi aumentati, poliedri regolari modificati, poliedri archimedei modificati; altri 9 sono segnalati come poco classificabili e sono chiamatpoliedri di Johnson misti.

G37f.11 Da ultimo limitiamoci a segnalare alcune altre classi di poliedri.

deltaedri: poliedri le cui facce sono triangoli equilateri. In particolare si ottengono poliedri di questa classe dai poliedri regolari modificando ciascuna delle sue facce, F, con l'aggiunta o con l'eliminazione di una piramide con la base coincidente con la F e le cui facce laterali sono triangoli equilateri.

simmetroedri: poliedri le cui facce per la maggior parte sono poligoni regolari di due o più tipi, mentre le rimanenti presentano poche altre forme e che sono dotati di tutte le simmetrie tetraedrali, cubottaedrali e icosidodecaedrali.

poliedri nobili: si tratta di poliedri isoedrali e isogonali. I poliedri nobili convessi sono costituiti dai poliedri regolari e dai tetraedri disfenoidi, tetraedri le cui facce sono triangoli acutangoli congruenti.

G37 g. generalizzazioni dei poliedri convessi [0]

G37g.01 Come si è già accennato, vengono studiate svariate figure tridimensionali delimitate da facce piane chiamate poliedri alle quali non si chiede la proprietà della convessità.

Bisogna segnalare che per tali solidi vengono proposte diverse definizioni non equivalenti che individuano insiemi di figure tridimensionali che presentano differenze che vanno esaminate con attenzione.

G37g.02 Osserviamo che i poliedri si possono considerare le figure tridimensionali che estendono i poligoni in quanto figure bidimensionali delimitate da segmenti lineari.

Una nozione che generalizza le due precedenti è quella di **politopo**; questo oggetto geometrico si colloca in spazi vettoriali a d dimensioni con d che può assumere valori interi anche superiori a 2 e 3, e viene delimitato da oggetti geometrici lineari di $d-1$ dimensioni.

Per i politopi collocati in $\mathbb{R}^{\times 4}$, politopi delimitati da poliedri, si usa il termine **policoro**.

Purtroppo anche per il termine politopo vengono proposte diverse definizioni non equivalenti che individuano insiemi di figure che presentano differenze non trascurabili.

G37 g.03 I poliedri più noti hanno la superficie

G37 g.04