Capitolo G37:
Poliedri convessi

Contenuti delle sezioni

a. Nozioni basilari sui poliedri convessi p.1 b. Dualità tra poliedri p.6 c. Formula di Eulero per i poliedri p.8 d. Poliedri regolari p.8 e. Volumi dei poliedri p.10 f. Classi di poliedri p.12 g. Cenno ai poliedri in generale p.16

G37:0.01 In questo capitolo presentiamo le nozioni di base sui poliedri convessi e qualche fatto riguardante i poliedri rimanenti.
Inizialmente introduciamo nozioni di portata generale sui poliedri con particolare attenzione a quelli convessi con caratteristiche di regolarità,
Si procede poi a trattare il loro scheletro e la relazione di dualità fra queste figure solide; questo ci permetterà di dimostrare la basilare uguaglianza di Eulero sui numeri dei loro vertici, delle loro facce e dei loro spigoli.
Successivamente tratteremo i poliedri più famosi, i poliedri regolari, noti anche come solidi platonici; di essi esamineremo i parametri combinatorici, i parametri metrici, le simmetrie ed i collegamenti con altri oggetti geometrici lineari.
Presenteremo quindi una classificazione dei poliedri convessi, esponendo una certa gamma di fatti che per la maggior parte ci limiteremo ad enunciare.
Concluderemo segnalando alcuni fatti che riguardano poliedri nonconvessi.

G37:0.02 Occorre segnalare che attualmente il capitolo manca del tutto di figure. Figure molto utili si possono però reperire in varie pagine del Web, in particolare nelle versioni italiana e inglese di Wikipedia e in MathWorld.

G37:a. Nozioni basilari sui poliedri convessi

G37:a.01 Definiamo qui **poliedro convesso** un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{\times 3}$ convesso delimitato da un insieme finito di poligoni piani convessi chiamati **facce**, due delle quali aut posseggono un solo punto in comune che viene detto **vertice**, aut posseggono un segmento in comune che viene chiamato **spigolo** o anche **lato**, aut non posseggono punti in comune.
Un poliedro convesso è una figura tridimensionale limitata, in quanto l'insieme delle sue facce è un insieme limitato. Tale figura viene attribuita alle "figure solide" e viene detta anche figura solida convessa a facce piane.

Sottolineiamo due caratteristiche basilari degli spigoli di un poliedro: [a] ogni spigolo ha due vertici come estremità; [b] ogni spigolo connette esattamente due facce.

Ogni vertice V di un poliedro è incidente con un certo numero g_V di spigoli e con un ugual numero di facce; g_V è chiamato **valenza del vertice**. Ogni faccia F di un poliedro è incidente con un certo numero g_F di spigoli e quindi con altrettanti vertici; essa quindi è un g_F-agono.

I vertici, gli spigoli e le facce di un poliedro P collettivamente saranno chiamati **componenti** di P.

G37:a.02 Nel seguito dovremo trattare sistematicamente poliedri generici o specifici; per queste figure risulta conveniente servirsi di varie notazioni locali.
Se denotiamo un poliedro con P, scriveremo $\mathbf{V}(\mathsf{P})$ per l'insieme dei suoi vertici, $\mathbf{E}(\mathsf{P})$ per l'insieme dei suoi spigoli e $\mathbf{F}(\mathsf{P})$ per l'insieme delle sue facce. Utilizzeremo anche le notazioni:

$N_{V,\mathsf{P}} := |\mathbf{V}(\mathsf{P})|$ per il numero dei suoi vertici,

$N_{E,\mathsf{P}} := |\mathbf{E}(\mathsf{P})|$ per il numero dei suoi spigoli.

$N_{F,\mathsf{P}} := |\mathbf{F}(\mathsf{P})|$ per il numero delle sue facce,

Definiamo inoltre come **terna VEF** del poliedro P $VEF(\mathsf{P}) := \langle N_{V,\mathsf{P}}, N_{E,\mathsf{P}}, N_{F,\mathsf{P}}\rangle$.
Per i poliedri convessi e più in generale per i poliedri che chiameremo semplicemente connessi, dimostreremo in :c l'uguaglianza lineare dovuta ad Eulero $N_{V,\mathsf{P}} + N_{F,\mathsf{P}} = N_{E,\mathsf{P}} + 2$.
Quindi per questi poliedri una delle le tre componenti della terna VEF è ridondante e questa terna può scriversi, ad esempio, come $\langle N_{V,\mathsf{P}}, N_{V,\mathsf{P}} + N_{F,\mathsf{P}} - 2, N_{F,\mathsf{P}}\rangle$.

Vedremo che molte delle terne VEF individuano più "tipi" (classi combinatorie) di poliedri.

Segnaliamo esplicitamente che in molte argomentazioni il contesto consentirà di semplificare le notazioni ora introdotte lasciando implicita l'indicazione del poliedro in discussione.

G37:a.03 Talora bisogna presentare ordinatamente i vertici, gli spigoli e le facce di P e per essi useremo le seguenti notazioni:

$V_1, V_2, \ldots , V_{N_V}$ per i vertici;

$E_1, E_2, \ldots , E_{N_E}$ per gli spigoli.

$F_1, F_2, \ldots , F_{N_F}$ per le facce;

Dovremo inoltre esaminare dei poliedri specifici; per determinarli talora potranno essere utilizzate vantaggiosamente le coordinate cartesiane dei loro vertici, in altri casi saranno preferibili modalità particolari che si avvalgono di specifiche peculiarità geometriche.

Le relazioni di incidenza tra vertici, facce e spigoli sono di importanza primaria e determinano la cosiddetta **struttura combinatoria** del poliedro.
Per le tre **relazioni di incidenza** che caratterizzano un poliedro P useremo le seguenti notazioni:

$\mathcal{I}ve_{\mathsf{P}}$ per la relazione di incidenza fra vertici e spigoli;

$\mathcal{I}fe_{\mathsf{P}}$ per la relazione di incidenza fra facce e spigoli;

$\mathcal{I}vf_{\mathsf{P}}$ per la relazione di incidenza fra vertici e facce.

Evidentemente $\mathcal{I}ve_{\mathsf{P}} \subset \mathbf{V}_{\mathsf{P}} \times \mathbf{E}_{\mathsf{P}}$, $\mathcal{I}fe_{\mathsf{P}} \subset \mathbf{F}_{\mathsf{P}} \times \mathbf{E}_{\mathsf{P}}$ e $\mathcal{I}vf_{\mathsf{P}} \subset \mathbf{V}_{\mathsf{P}} \times \mathbf{F}_{\mathsf{P}}$.

G37:a.04 Dalle relazioni di incidenza si deducono le cosiddette **relazioni di adiacenza** fra vertici, fra facce e fra spigoli.
Si dicono **vertici adiacenti** di un poliedro due suoi vertici che sono le due estremità di uno spigolo. I duetti di vertici adiacenti si possono ricavare dalla relazione $\mathcal{I}ve_{\mathsf{P}}$.
Si dicono **facce adiacenti** di un poliedro due sue facce che hanno uno spigolo in comune. La relazione di adiacenza tra facce si può desumere da $\mathcal{I}fe_{\mathsf{P}}$.

Si dicono **spigoli adiacenti** di un poliedro due suoi spigoli che hanno un vertice in comune. La relazione di adiacenza tra spigoli è ottenibile da $\mathcal{I}ve_{\mathsf{P}}$.

Evidentemente ciascuna delle relazioni di adiacenza è una relazione simmetrica.

Esse inoltre tendenzialmente presentano poche terne transitive. Si hanno terne transitive di vertici e di spigoli che sono incidenti ad una faccia triangolare, terne transitive di spigoli che incidono in un vertice di valenza 3; queste terne sono evidenti ad esempio nei prismi a base triangolare e nelle piramidi.

G37:a.05 Occorre distinguere:

le proprietà geometriche che riguardano i singoli poliedri in quanto insiemi di punti in ben determinate posizioni di $\mathbb{R}^{\times 3}$;

le proprietà metriche, cioè le proprietà invarianti per movimenti rigidi (traslazioni, rotazioni e riflessioni): queste caratterizzano le cosiddette **classi metriche dei poliedri**;

le proprietà invarianti per movimenti rigidi ed omotetie che caratterizzano le cosiddette **classi di similitudine dei poliedri**;

le proprietà combinatorie invarianti per tutte le trasformazioni (in particolare per le trasformazioni lineari invertibili ed anche per deformazioni continue) che mantengono le relazioni di incidenza fra facce, vertici e spigoli; queste caratterizzano le cosiddette **classi combinatorie di poliedri**.

G37:a.06 Un esempio di singolo poliedro è fornito dal cubo che denotiamo con $\mathfrak{Q}_2$ i cui 8 vertici sono dati da terne di coordinate cartesiane della forma $\langle \pm 1, \pm 1, \pm 1 \rangle$. Le sue proprietà metriche riguardano la lunghezza dei suoi spigoli uguale a 2, la posizione del suo centro coincidente con l'origine, dei centri delle sue facce e dei punti medi dei suoi spigoli.

La classe metrica di $\mathfrak{Q}_2$ è costituita dai cubi di lato 2 ottenibili da esso mediante traslazioni e rotazioni.

La classe di similitudine di $\mathfrak{Q}_2$ è invece costituita dalle figure ottenibili dalle precedenti applicando loro delle omotetie; le sue figure sono dette genericamente "cubi".

La classe combinatoria è ancor più estesa, in quanto contiene le figure ottenuta dai cubi applicando loro biiezioni lineari di $\mathbb{R}^{\times 3}$: ad essa quindi appartengono i vari tipi di cuboidi e di parallelepipedi.

G37:a.07 Nella pratica dell'esposizione dei poliedri, come per ogni altro genere di figure geometriche, si usano varie semplificazioni del linguaggio consistenti in abbreviazioni e semplificazioni per le quali si confida nella possibilità di precisare gli enunciati sulla base dei significati del contesto.

In particolare spesso si parla genericamente di "poliedro" confidando che il lettore del contesto sappia riconoscere quando si è lasciato implicita la specificazione "poliedro complesso", quando si parla di classi metriche, quando di classi di similitudine, quando di classi combinatorie.

G37:a.08 I poliedri hanno una notevole varietà di applicazioni, sia all'interno della matematica (studi geometrici e delle simmetrie), sia in molteplici campi scientifici e tecnologici. Tra questi segnaliamo la fisica, la cristallografia, la chimica molecolare (fullereni), la biologia molecolare, lo studio dei virus (HIV), la zoologia (protozoi radiolari), la computer grafica, l'architettura e il disegno industriale.

Tendenzialmente rivestono maggior interesse i poliedri, convessi o meno, che presentano buone caratteristiche di simmetria. Grande importanza hanno quindi i gruppi di simmetria delle diverse classi di similitudine dei poliedri. Un ruolo fondamentale hanno inoltre i gruppi di simmetria delle classi combinatorie, ossia le simmetrie delle relazioni di incidenza riguardanti vertici, facce e spigoli, fondamentali per la determinazione delle simmetrie delle classi di similitudine.

Sulle caratteristiche delle classi metriche e sulle caratteristiche dei singoli poliedri ci limitiamo ad osservare che si possono dedurre dalle caratteristiche delle classi di similitudine con operazioni elementari ed automatizzabili di dilatazione, traslazione e rotazione.

G37:a.09 Dunque le considerazioni sulle simmetrie sono determinanti per le classificazioni dei poliedri più interessanti in ambito matematico o per le applicazioni.

Per la precisione si dovrebbero distinguere le simmetrie di un ben determinato poliedro, quelle che riguardano una classe metrica, le simmetrie di una classe di similitudine e quelle che concernono una classe combinatoria. Spesso per ciascuno di questi campi di azione si usa il termine **simmetria di un poliedro** confidando che il contesto consenta di individuarne il significato e la portata.

Le simmetrie di un poliedro o di una classe di tali figure, che genericamente denotiamo con P costituiscono un gruppo, come accade per ogni genere di oggetti matematici. Questo gruppo è detto **gruppo simmetrico** di P e denotato con Sym_{P}.

Le simmetrie vengono spesso determinate a partire dalle permutazioni dei loro vertici; per molti poliedri tuttavia possono servire le permutazioni dei loro spigoli e delle loro facce, soprattutto quando si possono associare a trasformazioni con evidenza geometrica.

G37:a.10 Il gruppo simmetrico di un poliedro deve essere isomorfo ad un sottogruppo finito del gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^{\times 3}$. Le trasformazioni che costituiscono Sym_{P} non possono che essere rotazioni intorno a rette, che quindi costituiscono assi di simmetria del poliedro e riflessioni rispetto a piani che quindi hanno il ruolo dei piani di simmetria di P.

Si distinguono i poliedri che presentano simmetrie speculari da quelli che non posseggono piani di simmetria. Ogni riflessione cambia l'orientazione del poliedro, mentre l'applicazione di due riflessioni non la cambia; di conseguenza cambia l'orientazione del poliedro sse si attua un numero dispari di riflessioni.

Il gruppo di simmetria di un poliedro con m simmetrie speculari deve presentare m sottogruppi isomorfi al gruppo di ordine 2, concretamente esprimibile come gruppo moltiplicativo di $\{1, -1\}$; inoltre deve avere almeno un sottogruppo costituito da rotazioni.

Si distinguono anche i **poliedri chirali**, poliedri che non sono simili ai loro riflessi, dai **nonchirali**; tra questi si conviene di collocare anche i poliedri senza piani di simmetria.
I poliedri chirali si dice che si presentano in due forme, nella **forma levomorfa** e nella **forma destromorfa**.

G37:a.11 I primi elementi per la determinazione delle simmetrie dei poliedri riguardano le regolarità delle loro facce e le proprietà di permutabilità per i loro vertici, le loro facce ed i loro spigoli.

Le simmetrie di un poliedro permutano i suoi vertici, permutano le sue facce e permutano i suoi spigoli; esse determinano tre relazioni di equivalenza, una tra i vertici, una tra le facce ed una tra gli spigoli.
Due vertici V_1 e V_2 si dicono nella relazione R sse esiste una simmetria che porta V_1 in V_2; l'identità del poliedro si considera una simmetria e questo comporta la riflessibilità della R; l'invertibilità delle simmetrie comporta la simmetria della R e la componibilità delle simmetrie comporta la sue transitività.
È quindi lecito dire che V_1 e V_2 sono **vertici equivalenti**.
Enunciati simili valgono per facce e spigoli.

Le classi di equivalenza di ciascuno dei tipi di componenti di un poliedro sono le orbite dell'azione del gruppo di simmetria sulle componenti del tipo in considerazione.

G37:a.12 Consideriamo un poliedro convesso P. Due suoi vertici equivalenti devono presentare le stesse caratteristiche combinatorie e metriche: lo stesso accade per due facce equivalenti e per due spigoli equivalenti.

Ad ogni vertice V si associa una cosiddetta **piramide locale**, classe combinatoria delle piramidi aventi come apice lo stesso V e come base il poligono i cui vertici si ottengono dalla sezione del poliedro con un piano tale da separare V da tutti gli altri vertici di P.

Ad ogni faccia F si associa un cosiddetto **tronco di cono locale**, classe combinatoria comprendente un tronco di cono ottenuto dalla intersezione di P con un piano parallelo al piano di F e tale da separare i vertici di F dai restanti vertici di $\mathbf{V}(\mathsf{P})$.

Ad ogni spigolo E si associa una cosiddetta **cupoloide locale**, classe combinatoria comprendente una cupoloide ottenuta intersecando P con un piano parallelo ad E e tale da separare i vertici di E da tutti i restanti vertici di P.

Due vertici equivalenti devono avere la stessa piramide locale ed in particolare la stessa valenza.

Due spigoli equivalenti devono possedere la stessa cupoloide locale, devono avere la stessa lunghezza e devono appartenere a due diedri con la stessa ampiezza angolare.

Due facce equivalenti devono avere lo stesso tronco di cono locale e devono essere congruenti.

G37:a.13 Un poliedro si dice **regolare sui vertici** o **isogonale** sse tutti i suoi vertici appartengono ad un'unica classe di equivalenza.

Un poliedro si dice **regolare sulle facce** sse tutte le sue facce appartengono ad un'unica classe di equivalenza.

Un poliedro si dice **regolare sugli spigoli** sse tutti i suoi spigoli appartengono ad un'unica classe di equivalenza.

G37:a.14 Alcuni poliedri hanno la proprietà di avere tutti i vertici appartenenti ad una sfera; una tale sfera viene detta **circumsfera** del poliedro, mentre il centro di tale sfera viene detto **circumcentro** dl poliedro ed il suo raggio **circumraggio**.

Vi sono poi poliedri che hanno tutti gli spigoli tangenti ad una sfera; una tale sfera viene detta **mesosfera** del poliedro, mentre il centro di tale sfera viene detto **mesocentro** del poliedro ed il suo raggio **mesoraggio**.

Inoltre alcuni poliedri presentano una sfera che è tangente a tutte le facce del poliedro; una tale sfera viene detta **insfera** del poliedro, mentre il centro di tale sfera viene detto **incentro** del poliedro ed il suo raggio **inraggio**.

Vi sono poliedri che non possiedono alcuna di queste sfere, altri che ne possiedono solo una, altri che ne posseggono due e altri che ne possiedono tre. Come vedremo i poliedri regolari possiedono le tre sfere e in questo caso queste hanno lo stesso centro; questo punto che fa da circumcentro, dam mesocentro e da incentro viene detto **centro del poliedro**.

La presenza di una circumsfera, di una mesosfera o di una insfera è una caratteristiche che consente di semplificare alcune costruzioni sopra il poliedro che la possiede. Inoltre una tale presenza favorisce l'esistenza di simmetrie rotazionali; ciascuna di queste deve avere l'asse delle rotazioni passante per il centro della sfera presente.

G37:a.15 Si dimostra facilmente, servendosi del solo teorma di Pitagora, che un cubo di lato $2\,s$ possiede le tre sfere introdotte sopra ed ha inraggio di lunghezza r, mesoraggio di lunghezza $\sqrt{2}\,s$ e circumraggio di lunghezza $\sqrt{3}\,r$.

Quasi altrettanto semplicemente si tratta il tetraedro regolare: il suo circumraggio misura $\sqrt{\dfrac{3}{8}}\,s$, il suo mesoraggio $\dfrac{1}{\sqrt{8}}\,s$ ed il suo inraggio $\dfrac{1}{\sqrt{24}}\,s$.

G37:b. Dualità tra poliedri

G37:b.01 In generale, dato un poliedro P si dice suo **poliedro duale** un poliedro P^* ottenuto con una biiezione β che porta i vertici di P nelle facce di P^*, le facce di P nei vertici di P^* e gli spigoli di P negli spigoli di P^* rispettando le relazioni di incidenza, cioè per ogni duetto $\{C, C'\}$ di componenti (vertici, facce o spigoli) di P accade che

$$\beta(C) \text{ e } \beta(C') \text{ sono incidenti su } \mathsf{P}^* \quad \text{sse} \quad C \text{ e } C' \text{ sono incidenti su } \mathsf{P} \ .$$

Più esplicitamente abbiamo che la biiezione

(1) $$\beta \in \{\mathbf{V}_{\mathsf{P}} \times \mathbf{E}_{\mathsf{P}} \times \mathsf{F}_{\mathsf{P}} \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright \mathbf{F}_{\mathsf{Q}} \times \mathbf{E}_{\mathsf{Q}} \times \mathbf{V}_Q Ss\}$$

associa al poliedro Q un poliedro Q suo duale sse

(2) $$\begin{gathered}\forall V \in \mathbf{V}_{\mathsf{P}} \ , \ E \in \mathbf{E}_{\mathsf{P}} \ \ \vdots \ \ V\,\mathcal{I}ve_{\mathsf{P}}\,E \iff \beta(V)\,\mathcal{I}fe_{\mathsf{Q}}\,\beta(E) \quad \wedge \\ \forall F \in \mathbf{F}_{\mathsf{P}} \ , \ E \in \mathbf{E}_{\mathsf{P}} \ \ \vdots \ \ F\,\mathcal{I}fe_{\mathsf{P}}\,E \iff \beta(F)\,\mathcal{I}ve_{\mathsf{Q}}\,\beta(E) \quad \wedge \\ \forall V \in \mathbf{F}_{\mathsf{P}} \ , \ F \in \mathbf{E}_{\mathsf{P}} \ \ \vdots \ \ V\,\mathcal{I}vf_{\mathsf{P}}\,F \iff \beta(F)\,\mathcal{I}vf_{\mathsf{Q}}\,\beta(V) \ .\end{gathered}$$

Ad un poliedro si possono associare più poliedri duali: banalmente se un poliedro duale di uno dato viene sottoposto ad una omotetia o ad una qualsiasi trasformazione che ne mantiene la struttura combinatoria conduce ad un altro poliedro duale di quello dato.

G37:b.02 Presentiamo una costruzione che ad un qualsiasi poliedro convesso P associa un poliedro duale che denotiamo con Q e che come insieme di punti -RRR è un sottoinsieme del precedente.

Per ogni faccia F_i di P associamo un suo punto interno W_i; ad ogni duetto di facce adiacenti $\{F_i, F_{i'}\}$, oppure, equivalentemente, ad ogni spigolo $E_j := F_i \cap F_{i'}$ associamo uno spigolo $G_j := \overline{W_i W_{i'}}$ di Q.

Di conseguenza alla biiezione fra facce di P e vertici di Q si aggiunge una corrispondenza biunivoca tra gli spigoli di P e gli spigoli di Q.

Al generico vertice V_h di P associamo la faccia di Q, determinata dagli spigoli associati agli spigoli di P che incidono in V_h; anche questa corrispondenza è biunivoca.

Le tre corrispondenze biunivoche comportano una corrispondenza biunivoca come quella richiesta dalla definizione.
Si mostra facilmente che il poliedro Q è anch'esso convesso.

Se applichiamo lo stesso genere di costruzione a Q otteniamo un terzo poliedro convesso che presenta componenti in biiezione con quelle di P e tra le quali sussistono relazioni di incidenza equivalenti a quelle di P.

G37:b.03 La costruzione precedente individua una trasformazione della classe combinatoria di P nella classe combinatoria di Q. Se denotiamo con $\boldsymbol{P}$ la classe combinatoria di P, per la classe combinatoria di Q scriviamo $\boldsymbol{P}^{\Delta}$.
Con tale scrittura la suddetta trasformazione risulta individuata dal segno Δ collocato come suffisso esponente.

La classe combinatoria $\boldsymbol{P}^{\Delta}$ viene detta **duale combinatoria** della $\boldsymbol{P}$.
Questo termine è giustificato dal fatto che la trasformazione di classi combinatorie gode le proprietà del genere di trasformazioni che abbiamo chiamato dualità; questa trasformazione viene quindi chiamata **dualità combinatoria**.

L'ultima considerazione del paragrafo precedente dice che la dualità combinatoria è una involuzione per l'insieme delle classi combinatorie di poliedri convessi.

G37:b.04 Un poliedro P si dice **semplicemente connesso** sse ogni poligonale chiusa interamente costituita da punti interni ntenuta nel poliedro stesso si può trasformare con spostamenti continui dei suoi vertici in un punto interno.

Ogni poliedro convesso è semplicemente connesso.

Un poliedro che non è semplicemente connesso è il solido che si può ottenere come unione di tre cunei i quali presentino facce triangolari coincidenti a coppie.

Più semplice da descrivere mediante coordinate cartesiane è il poliedro che si può vedere come unione di 4 cunei il quale e che presenta i seguenti vertici $V_0 = \langle 2,2,2\rangle$, $V_1 = \langle -2,2,2\rangle$, $V_2 = \langle -2,-2,2\rangle$, $V_3 = \langle 2,-2,2\rangle$,

$V_{4+i} := V_i - 4\mathbf{e}_z$ per $i = 0,1,2,3$

$V_8 := \langle 4,4,0\rangle$, $V_9 := \langle -4,4,0\rangle$, $V_{10} := \langle -4,-4,0\rangle$, $V_{11} := \langle 4,-4,0\rangle$

e che presenta 4 facce quadrate $\mathbf{Q}(V_0,V_1,V_5,V_4)$ e le altre 3 facce ottenute ruotando intorno ad Oz di $\pi/2$, π e $3\pi/2$, 4 facce trapezoidali $\mathbf{Q}(V_0,V_8,V_9,V_1)$ e le altre tre ottenute con le rotazioni precedenti e altre 4 facce trapezoidali ottenute dalle precedenti per riflessione riapetto a Oxy.

La poligonale chiusa che unisce i punti del ciclo $\big\langle_{cycl}\langle 3,3,0\rangle, \langle -3,3,0\rangle, \langle -3,-3,0\rangle, \langle 3,-3,0\rangle$, non può ridursi ad un punto applicando spostamenti continui dei suoi nodi.

Gruppo fondamentale isomorfo a $\mathbb{Z}_{ga}$

Ogni poliedro semplicemente connesso si può ridurre a poliedro convesso equivalente combinatorio.

Può essere utile osservare la possibilità di trasformare con movimenti continui dei vertici un prisma a base quadrilatera nonconvessa in prisma a base quadrilatera convessa, magari quadrata

G37:b.05 Introduciamo **scheletro di un poliedro semplicemente connesso** applicando (1) sua trasformazione in convesso, (2) proiezione dei suo vertici sopra una sfera e (3) proiezione stereografica sopra un piano dei vertici e degli spigoli in modo da ottenere grafo planare.

G37:b.06 Gli scheletri di un poliedro P e del suo duale combinatorio P^Δ sono isomorfi: in effetti ciascun nodo di tali grafi corrisponde biunivocamente ad uno spigolo di P, e quindi ad uno spigolo di P^Δ.

Il duale di un grafo planare è un grafo planare. esso è lo scheletro di poliedro duale combinatorio.

G37:b.07 Per descrivere un poliedro convesso può essere molto utile presentare uno dei suoi cosiddetti **sviluppi piani**.

Gli sviluppi piani di un poliedro si possono ottenere a partire dal suo scheletro e ricavando i sottoalberi spanning di questo grafo.

G37:b.08 Sono interessanti le più semplici raffigurazioni piane dei grafi planari dei poliedri più semplici, in particolare dei regolari.

Si è visto che il tetraedro ha due sviluppi piani. Non è difficile rendersi conto che sono 11 gli sviluppi piani di un cubo (e altrettanti quelli dell'ottaedro regolare.

Segnaliamo che gli sviluppi piani del dodecaedro e dell'icosaedro regolari sono 3???.

G37:c. Formula di Eulero per i poliedri

G37:c.01 Questa celebre relazione la consideriamo qui nella versione che segue.
Per ogni poliedro convesso P vale l'uguaglianza

$$N_{V,\mathsf{P}} + N_{V,\mathsf{P}} = N_{V,\mathsf{P}} + 2 \ . \tag{1}$$

In effetti la relazione precedente vale anche per i poliedri semplicemente connessi, mentre per figure tridimensionali più generali si definisce una più generale [[caratteristica di Eulero]] o caratteristica di Eulero-Poincaré.

$$\chi := N_{V,\mathsf{P}} + N_{V,\mathsf{P}} - N_{V,\mathsf{P}} \ . \tag{2}$$

G37:c.02 L'insieme degli scheletri dei poliedri convessi, cioè i grafi planari, si possono organizzare in un digrafo ordinato.
Ciascuno degli spigoli di un grafo planare si può modificare a delle facce di un grafo planare si può dividere in due con piccole modifiche
Similmente ad ogni poliedro convesso si possono applicare operazioni di intersezione con semispazi che contengono un solo vertice ed escludono tutti i rimanenti e di intersezione con semispazi che contengono interamente un solo spigolo e non toccano alcun vetice.
Con queste operazioni si aumenta il numero delle componenti e si possono organizzare tutte le classi combinatorie dei poliedri convessi in un digrafo ordinato numerabile limitato inferiormente. Nella posizione dell'elemeno minimo si trova il tetraedro la cui terna VEF è $\langle 4, 6, 4\rangle$.
Questo digrafo si può organizzare per numero delle facce crescente.
Al di sopra pentaedri.

G37:c.03 La dimostrazione della formula di Eulero si può condurre constatando che vale per il tetraedro e dimostrando che rimane valida per tutte le operazioni che fanno passare da uno scheletro di poliedro convesso ad uno più ricco.

G37:d. Poliedri regolari

G37:d.01 I poliedri regolari sono i poliedri convessi che presentano le maggiori simmetrie; qui ci limitiamo ai regolari convessi.
In genere viene definito come **poliedro regolare convesso** un poliedro le cui facce sono poligoni regolari congruenti e che presentano tutti i vertici con la stessa valenza. Essi sono detti anche **poliedri platonici** e **solidi platonici**.
Essi sono 5: tetraedro regolare, cubo, ottaedro regolare, dodecaedro regolare e icosaedro regolare (a rigore si dovrebbe parlare di 5 classi combinatorie di poliedri regolari).

Queste figure tridimensionali, grazie alle loro proprietà geometriche, in particolare in forza delle loro simmetrie, hanno affascinato ed appassionato fin dall'antichità (sono stati ritrovati in Scozia modelli in pietra dei 5 poliedri regolari risalenti intorno al 1500 a. C.) ed hanno spinto molti a studiarli da molti punti di vista. In particolare essi costituiscono un tema importante negli [[Elementi di Euclide]].

Le loro forme eleganti e suggestive hanno anche indotto molti a caricarle di significati nascosti, di valenze occulte e di poteri esoterici, al di là della razionalità matematica. Essi inoltre hanno ispirato e sostenuto con le loro proprietà una vasta gamma di realizzazioni artistiche, in particolare nella pittura e nell'architettura, per non parlare della bigiotteria e della produzione di amuleti.

G37:d.02 Intendiamo ora individuare i poliedri regolari con le loro proprietà combinatorie facendo riferimento alle loro terne VEF e ad alcuni altri parametri numerici.
Ogni poliedro regolare P è caratterizzato dal suo **simbolo di Schläfli**, notazione esprimente la coppia composta dal numero dei lati di ciascuna delle sue facce, p, e dalla valenza di ciascuno dei suoi vertici, q; a questa notazione si da la forma $\{p, q\}$.

(1) Prop.: Per i numeri dei lati delle facce dei poliedri regolari sono accettabili solo i valori 3, 4 e 5.

Dim.: Gli angoli interni dei triangoli, dei quadrati e dei pentagoni misurano, risp., 60°, 90° e 108°; si possono quindi avere vertici nei quali incidono 3, 4 o 5 triangoli regolari, 3 quadrati o 3 pentagoni. Viceversa poligoni con 6 o più lati non possono incidere in un vertice ▮

G37:d.03 **(1) Prop.**: I poliedri regolari possono presentare solo 5 combinazioni per i simboli di Schläfli ed N_E:

$$\{3,3\} \;\; N_E = 6 \;\;,\;\; \{4,3\} \;\; N_E = 12 \;\;,\;\; \{3,4\} \;\; N_E = 12 \;\;,\;\; \{5,3\} \;\; N_E = 30 \;\;,\;\; \{3,5\} \;\; N_E = 30 \;.$$

Dim.: Occorre esaminare le possibilità consentite per i simboli di Schläfli $\{p, q\}$ combinati con le terne VEF $\langle N_V, N_E, N_F$.
Il numero dei duetti dati da uno spigolo e da una delle due facce incidenti è dato da $2\,N_E$. Tale numero per la congruenza delle facce deve coincidere con il prodotto del numero delle facce per il numero dei lati per ogni faccia. Inoltre, per la omogeneità dei vertici, deve coincidere con il prodotto del nuneto dei vertici per la valenza di ciascun vertice.
Alle suddette uguaglianze aggiungiamo l'uguaglianza di Eulero ottenendo le relazioni costituenti vincoli

(2) $$N_F = \frac{2\,N_E}{p} \qquad , \qquad N_V = \frac{2\,N_E}{q} \qquad , \qquad N_V + N_F - N_E = 2 \;.$$

Queste sono riassumibili nella $\dfrac{2N_E}{q} + \dfrac{2N_E}{p} - N_E = 2$, ossia nella

(3) $$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2} = \frac{1}{N_E} \;.$$

Se $p = 3$ la (4) diventa $\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{N_E}$.
Questa consente i seguenti gruppi di parametri:

$$\{3,3\} \;\; N_E = 6 \;\;,\;\; \{3,4\} \;\; N_E = 12 \;\;,\;\; \{3,5\} \;\; N_E = 30 \;.$$

Se $p = 4$ dalla (4) si ottiene $\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{N_E}$. Dovendo essere $1/N_E > 0$ è possibile solo $q = 3$ e quindi solo la possibilità $\{4,3\}$ con $N_E = 12$.
Se $p = 5$ la (4) implica $\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{N_E}$ e questa lascia solo la possibilità $\{5,3\}$ con $N_E = 30$ ▮

G37:d.04 Esistono cinque poliedri regolari che presentano i simboli di Schläfli e le terne VEF dati dalla seguente tabella.

tetraedro regolare	$\{3,3\}$	4	6	4
cubo, esaedro regolare	$\{4,3\}$	8	12	6

ottaedro regolare	$\{3,4\}$	6	12	8
dodecaedro regolare	$\{5,3\}$	20	32	12
icosaedro regolare	$\{3,5\}$	12	32	20

Alla conclusione enunciata si giunge con 5 costruzioni geometriche che per ciascuna delle possibilità consentite da :d.02 conducono di ottenere gradualmente i poliedri regolari indicati sopra.

G37:d.05 Si osserva che il cubo e l'ottaedro regolare presentano il numero dei vertici e il numero delle facce scambiati; lo stesso accade per il dodecaedro e l'icosaedro. In effetti si tratta di due duetti di poliedri duali.

G37:e. Volumi dei poliedri

G37:e.01 Nozioni di volume di un solido
Chiediamo invarianza per isometrie (traslazioni, rotazioni, riflessioni).
Chiediamo additività.
Stabiliamo, per fissare una unità di volume, che il volume del cubo canonico sia uguale ad 1.
Volume di un cubo di lato a è a^3;
Dalla additività segue la **proporzionalità unidimensionale**, cioè la proporzionalità rispetto ad una **omotetia unidirezionale**. La cosa si sviluppa considerando proporzionalità intera, proporzionalità razionale e per continuità proporzinalità reale.
Collegabile a una modifica di una unità di misura.

G37:e.02 Si estende a composizione di proporzionalità unidirezionali.
Si trova che il volume del cuboide $Cbd_{a,b,c}$, cioè avente lati a, b e c, è abc.
Prisma retto con base triangolare di area B e altezza h: volume Bh.
Per additività questo vale per ogni prisma retto.
Invarianza del volune di un prisma rispetto a slittamento parallelo a una base ricavata da additività a partire da parallelepipedi.
Prisma con basi parallele distanti h e di area B: volume Bh.

G37:e.10 Calcoliamo i volumi delle piramidi.
Si osserva che un cubo di lato a è decomponibile in sei piramidi congruenti la cui base, quadrata, coincide con una faccia del cubo e il cui apice coincide con il centro del cubo. ciascuna di queste piramidi ha l'area della base pari ad a^2 e altezza $a/2$.
Dunque per il volume V_P di ciascuna di queste piramidi congruenti valgono le due espressioni che portano all'uguaglianza

$$V_P = \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}(a^2)\frac{a}{2} \qquad (1)$$

Si può dunque enunciare che il volume di queste piramidi è dato da 1/3 del prodotto dell'area della propria base per l'altezza.

In alternativa alla precedente argomentazione basata su una simmetria si può osservare che il cubo di lato a si può decomporre in tre piramidi congruenti aventi coma basi le tre facce dal cubo che hanno in comune un vertice v e come quinto vertice il vertice del cubo opposto a v. Anche in tal modo si

giunge ad affermare che il volume di queste piramidi è dato da 1/3 del prodotto dell'area della propria base per l'altezza.
Considerazioni di equivalenza e di variazione per omotetia unidirezionale conducono ad effermare che ogni piramide con base quadrata di lato a e altezza h ha volume espresso da $\frac{1}{3}a^2h$
Per dimezzamento in parti ottenibili per riflessione volume di piramide a base triangolo rettangolo isoscele ha volume $\frac{1}{6}a^2h$. Si può leggere ancora 1/3 del prodotto dell'area base per l'altezza.
Per proporzionalità unidimensionale vale per ogni triangolo rettangolo di base; per slittamento vale per ogni sittamento di apice su piano parallelo alla base; in particolare apice sulla verticale di angolo retto. Per slittamento di un vertice di base su piano parallelo al piano della faccia opposta vale per ogni tetraedro a base triangolare con apice sulla verticale di un vertice di base. Per slittamento del suddetto apice su piano parallelo alla base originaria si ha: il volume di ogni tetraedro vale un terzo di una base per l'altezza corrispondente.
Un tetraedro ha associato a ciascuno dei suoi 4 vertici un parallelepipedo, quello definito dai tre suoi lati che incidono nel vertice dato. Si osserva anche che il volume di un tetraedro vale un sesto del volume di ciascuno di questi 4 parallelepipedi.
Il volume di ogni piramide a base anche nonconvessa vale un terzo della area di base per l'altezza: infatti una tale piramide si ripartisce in tetraedri.

G37:e.14 Prismi a base triangolare e basi non necessariamente ortogonali ai lati tra le basi hanno volume uguale a base per altezza corrispondente.

G37:e.16 Riduzione del numero degli spigoli per aggiunta di tetraedri.

G37:e.17 Volumi dei poliedri regolari con spigoli di lunghezza a.
Tetraedro $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$
Cubo a^3
Ottaedro $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
Dodecaedro $\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$
Icosaedro $\frac{5}{6}\phi^2a^3$, dove $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ è il [[numero di Fidia]] o [[sezione aurea]].

G37:e.18 Presentiamo anche una formula per il volume dei poliedri orientabili ottenuta da procedimenti dell'analisi infinitesimale.

Ricordiamo il teorema della divergenza, o teorema di Ostrogradsky. Consideriamo una regione di $\mathbb{R}^{\times 3}$ $\boldsymbol{V}$ compatta e delimitata da una superficie liscia a pezzi $S := \partial\boldsymbol{V}$ il cui versore normale locale denotiamo con $\mathbf{n}$ e $\mathbf{F}(\mathsf{x})$ un campo vettoriale continuamente differenziabile in un intorno di $\boldsymbol{V}$; vale la seguente uguaglianza fra un integrale di volume ed un integrale di superficie

$$(1) \qquad \int\int\int_{\boldsymbol{V}} \mathrm{d}_3\mathsf{x}\ \nabla\cdot\mathbf{F}(\mathsf{x}) \ = \ \int\int_S \mathrm{d}_2S\ \mathbf{F}(\mathsf{x})\cdot\mathbf{n}\ .$$

Se $\mathbf{F}(\mathsf{x}) = \frac{1}{3}\mathsf{x}$ abbiamo

$$(2) \qquad vol(\boldsymbol{V}) \ = \ \int\int_S \mathrm{d}_2S\ \mathbf{F}(\mathsf{x})\cdot\mathbf{n}\ .$$

Se S è un poliedro P semplicemente connesso (inn particolare un poliedro convesso,

(3) $$vol(\mathsf{P}) = \frac{1}{3} \sum_{F_i \in \mathbf{F}_{\mathsf{P}}} \mathsf{x}_i \cdot \mathbf{n}_i \; area(F_i) \; .$$

dove x_i $\mathbf{n}_i$ A_i

G37:f. Classi di poliedri

G37:f.01 Ricordiamo brevemente le varie famiglie di poliedri convessi introdotte in precedenza.

Poliedri regolari, esaminati in :d.

Piramidi: ciascuna è individuabile da un poligono chiamato base e da un ulteriore vertice (non appartenente alla base) chiamato apice; le facce di una piramide, oltre alla base, sono facce triangolari i cui vertici sono l'apice e due vertici della base.

Bipiramidi convesse: solidi ottenibili da due piramidi con basi congruenti fondendo le stesse basi tenendo i due apici nei due diversi semispazi delimitati dal piano nel quale si collocano le basi.

Tronchi di piramide: ciascuno ottenibile intersecando una piramide la cui base denotiamo con B con il semispazio contenente la B delimitato da un piano parallelo alla stessa B; ciascuno di questi solidi ha una faccia ottenibile applicando alla sua base una omotetia riduttiva.

Prismi: ciascuno caratterizzato da due facce che giacciono su due piani paralleli e che possono essere trasformate l'una nell'altra da una traslazione T; queste facce di un risma le chiamiamo basi e le rimanenti sono parallelogrammi con due lati opposti appartenenti alle due basi uno dei quali ottenibile applicando la T all'altro.

Antiprismi: caratterizzati (come i prismi) da due facce che giacciono su due piani paralleli e sono congruenti, ma l'una di esse è ottenibile dall'altra con una traslazione seguita da una rotazione intorno a un suo punto interno; oltre alle due facce suddette chiamate basi, un antiprisma possiede facce triangolari con un vertice si una base e il lato opposto spigolo dell'altra base.

Tendoedri: ciascuno è caratterizzato da un poligono base e da uno spigolo detto apicale $a = \overline{A_1A_2}$ estraneo al piano della base. Denotiamo il ciclo dei vertici della base

$$\left\langle_{cycl} B_1, B_2, ..., B_{1+h}, B_{2+h}, B_{3+h}, ..., , B_{2+h+k} \right\rangle \text{ con } h, k \geq 1 \; ;$$

chiediamo inoltre che sia $B_1 /\!\!/ B_{2+h} /\!\!/ a$. Tra le facce diverse dalla base, che chiamiamo laterali, vi sono i due trapezi aventi come duetto di spigoli paralleli, risp., $\{a, B_1\}$ e $\{a, B_{2+h}\}$; le restanti facce laterali sono triangoli: h hanno come vertice A_1 e come lato opposto uno dei lati B_{1+i} per $i = 1, ..., h$, mentre k hanno un vertice in A_2 e come lato opposto uno dei lati B_{2+h+j} per $j = 1, ..., k$.

G37:f.02 Definiamo alcune altre famiglie di poliedri convessi.

Cupole: ciascuna individuata da due poligoni su piani paralleli, le basi, uno con n lati, l'altro con $2n$ lati; per i cicli dei vertici scriviamo, risp., $\left\langle_{cycl} V_0, V_1, ..., V_{n-1} \right\rangle$ e $\left\langle_{cycl} W_0, W_1, W_2, W_3, ..., W_{2n-2}, W_{2n-1} \right\rangle$. Per le facce laterali si chiede che n siano triangoli ed n rettangoli e procedendo sulle facce consecutive si incontrino $\Delta(V_0, W_0, W_1)$, $\mathbb{Q}\,(V_0, W_1, W_2, V_1)$, $\Delta(V_1, W_2, W_3)$, $\mathbb{Q}\,(V_1, W_3, W_4, V_2)$, ... , $\Delta(V_{n-1}, W_{2n-2}, W_{2n-1})$, $\mathbb{Q}\,(V_{n-1}, W_{2n-1}, W_0, V_0)$. Una cupola le cui basi presentano n e $2n$ spigoli si dice **cupola n-gonale**.

Cupoloidi: ciascuna caratterizzata da due poligoni su facce parallele che in genere non sono congruenti e non hanno lo stesso numero di lati; contrariamente ai tronchi di piramide non congruenti le facce non basi sono in parte quadrilateri e in parte triangoli; possono considerarsi varianti più generali dei tronchi di piramidi e delle cupole.

Cunei: per cuneo si intende un pentaedro avente due facce triangolari e tre facce consistenti in trapezi. Ogni cuneo ha 6 vertici e 9 spigoli, dei quali 3 paralleli. Un cuneo appartiene all'insieme dei tendoidi e può chiamarsi anche **cupola digonale**.

G37:f.03 Si dice **prismatoide** un poliedro i cui vertici appartengono a due piani paralleli.

Della classe dei prismatoidi convessi fanno parte svariate famiglie di poliedri: le più note sono costituite da piramidi, tronchi di piramide, prismi, antiprismi, tendoedri (e in particolare cunei) e cupoloidi (e in particolare cupole).

Tra i prismatoidi si trovano tre poliedri regolari: i tetraedri regolari, gli ottaedri regolari ed i cubi. Taluni però vogliono escludere dai prismatoidi i poliedri platonici. Sono prismatoidi anche tutti i tetraedri e tutti i parallelepipedi.

In genere i prismatoidi non presentano elevate regolarità e presentano al più un asse di simmetria ortogonale ai piani delle basi. Regolarità abbastanza buone presentano i prismatoidi le cui facce sono poligoni regolari (non necessariamente dello stesso tipo) ed i cui vertici sono omogenei.

Osserviamo esplicitamente che fra i prismatoidi esaedrali con facce quadrilatere si trovano: i parallelepipedi (e in particolare i cuboidi e tra questi i cubi), i romboedri, i trapezoedri trigonali, ed i tronchi di piramide quadrilaterali.

I prismatoidi le cui basi hanno lo stesso numero di vertici e le cui facce laterali sono parallelogrammi o trapezi sono chiamati **prismoidi**. Tra i prismoidi si trovano prismi, tronchi di piramide e antiprismi.

Si dimostra che il volume di tutti i prismatoidi è ottenibile da una unica espressione.

(1) Prop.: Si abbia un prismatoide P le cui basi abbiano, risp., le aree A_1 ed A_3 e sia h la sua altezza, cioè la distanza fra i piani delle basi; si conosca inoltre l'area A_2 del poligono ottenuto intersecando P con il piano parallelo a quelli delle basi ed equidistante da essi. Il volume di P è ottenibile dalla espressione:

(1) . $$V = \frac{h}{6}(A_1 + 4A_2 + A_3)$$

Dim.: Si considera la funzione $A(x)$ per $0 \leq x \leq h$ che fornisce l'area del poligono ottenuto intersecando P con un piano parallelo al piano delle basi e distante x da uno di essi. Quest'area è al più quadratica nella x e quindi si può applicare la regola di Simpson per ottenere il valor esatto e questa fornisce l'espressione enunciata ▮

G37:f.04 Si dice **poliedro archimedeo** o **solido archimedeo** o **poliedro semiregolare** un poliedro convesso che non sia nè un poliedro platonico, nè un prisma, nè un antiprisma, le cui facce sono poligoni regolari di due o più tipi ed i cui vertici sono omogenei.

Un poliedro archimedeo non può essere neppure un poliedro platonico (questi hanno tutte le facce regolari e congruenti), ma possiede un numero piuttosto elevato di simmetrie; da qui l'aggettivo semiregolare. I prismi con facce laterali quadrate e gli antiprismi con facce laterali consistenti in triangoli regolari sono considerati non archimedei a causa delle loro simmetrie ridotte.

I vertici di un poliedro archimedeo, essendo ottenibili l'uno dall'altro con una simmetria, presentano tutti una stessa piramide locale.

Gli spigoli di un poliedro archimedeo hanno tutti la stessa lunghezza, a causa della regolarità delle facce e all'esistenza di spigoli che sono adiacenti alle facce di tutti i duetti di tipi di facce. Di conseguenza se denotiamo con a la lunghezza di uno spigolo, l'area totale dl poliedro è proporzionale ad a^2 ed il uo volume è proporzionale ad a^3.

G37:f.05 Vi sono 13 poliedri archimedei, due dei quali sono chirali, cioè non sono equivalenti ai rispettivi trasformati per riflessione; se si distinguono anche questi poliedri riflessi si ottengono 15 classi combinatorie di poliedri archimedei.

Segue un quadro dei poliedri archimedei con alcune loro caratteristiche; un quadro più completo in [[Poliedro archimedeo#Classificazione]].

cubottaedro: 14 facce, 8 triangoli e 6 quadrati;

icosidodecaedro: 32 facce, 20 triangoli e 12 pentagoni;

tetraedro troncato: 8 facce, 4 triangoli e 4 esagoni;

cubo troncato:m 14 facce, 8 triangoli e 6 ottagoni;

ottaedro troncato: 14 facce, 6 quadrati, 8 esagoni;

dedecaedro troncato: 32 facce, 20 triangoli, 12 decagono;

icosaedro troncato: 32 facce, 12 pentagoni, 20 esagoni;

rombicubottaedroedro: 26 facce, 8 triangoli, 18 quadrati

cubottaedro troncato: 26 facce, 12 quadrati, 8 esagoni, 6 ottagoni

rombicosidodecaedro: 62 facce, 20 triangoli, 30 quadrati, 12 pentagoni;

icosidodecaedro troncato: 62 facce, 30 quadrati, 20 esagoni, 12 decagoni;

cubo camuso: 38 facce, 32 triangoli, 6 quadrati;

dodecaedro camuso: 92 facce, 80 triangoli, 12 pentagoni.

Il cubottaedro e l'icosiottaedro appartengono alla classe dei cosiddetti poliedri quasiregolari, poliedri che hanno sia i vertici che gli spigoli omogenei.
Il cubo camiso e il dodecaedro camuso sono i due poliedri archimedei chirali.

G37:f.06 Si dice **poliedro di Catalan** un poliedro convesso duale di un poliedro archimedeo. Dato che sono duali degli archimedei e dato che la dualità scambia i ruoli dei vertici e delle facce, i poliedri di Catalan hanno le facce uniformi (cioè per ogni duetto di facce esiste una simmetria che trasforma una di esse nell'altra), mentre presentano vertici con valenze diverse.

Le facce di un poliedro di Catalan non sono poligoni regolari, mentre i vertici sono caratterizzati da piramidi locali aventi le basi regolari ma con diversi numeri di vertici.

G37:f.07 Presentiamo un quadro dei poliedri di Catalan, analogo a quello riguardante i poliedri archimedei in :f.05 .

dodecaedro rombico, duale del cubottaedro, con 12 rombi per facce;

triacontaedro rombico, duale dell'icosidodecaedro, con 30 rombi per facce;

triacistetraedro, duale del tetraedro troncato, con 12 triangoli isosceli per facce;

triacisottaedro, duale del cubo troncato, con 24 triangoli isosceli per facce;

tetracisesaedro, duale dell'ottaedro troncato, con 24 triangoli isosceli per facce;

triacisicosaedro, duale del dedecaedro troncato, con 60 triangoli isosceli per facce;

pentacisdodecaedro, duale dell'icosaedro troncato, con 60 triangoli isosceli per facce;

icositetraedro trapezoidale, duale del rombicubottaedroedro, con 24 aquiloni per facce;

esacisottaedro, duale del cubottaedro troncato, con 48 triangoli scaleni per facce;

esacontaedro trapezoidale, duale del rombicosidodecaedro, con 60 aquiloni per facce;

esacisicosaedro, duale del icosidodecaedro troncato, con 120 triangoli scaleni per facce;

icositetraedro pentagonale, duale del cubo camuso, con 24 pentagoni irregolari per facce;

esacontaedro pentagonale, duale del dodecaedro camuso, con 60 pentagoni irregolari per facce.

Anche gli ultimi due poliedri di Catalan sono chirali e ciascuno di essi si presenta nella forma levomorfa e nella forma destromorfa.

G37:f.07 Si dice **poliedro di Johnson** o **solido di Johnson** un poliedro convesso che non sia nè un poliedro platonico, nè un prisma, nè un antiprisma, nè un poliedro archimedeo le cui facce sono poligoni regolari (non dello stesso tipo).

Come in ogni poliedro convesso, in ogni vertice incidono almeno 3 facce e la somma delle ampiezze dei loro angoli deve essere inferiore a 360°; quando tutte le facce sono poligoni regolari, dato che questi presentano angoli di ampiezze maggiori o uguali a 60°, si conclude che in un vertice di un poliedro di Johnson possono incidere solo 3, 4 o 5 facce.

L'analisi delle possibilità consentite dalla definizione ha portato Norman Johnson nel 1966 ad individuare 92 poliedri ed a congetturare che non ve ne fossero altri. Questa congettura è stata dimostrata da Victor Zalgaller nel 1969.

Per una tavola con tutti i poliedri di Johnson rinviamo a [[Solido di Johnson]]. Qui ci limitiamo ad alcune osservazioni.

I 92 poliedri di Johnson sono individuati dalle sigle J_1,J_2,..., J_{92}.

Gli unici poligoni regolari che risultano essere facce dei poliedri di Johnson presentano 3, 4, 5, 6, 8 o 10 lati.

I nomi in uso sono stati scelti da Johnson per essere il più possibile descrittivi ma in molti casi a prima vista risultano inutilmente complicati. Bisogna però osservare che molti poliedri di Johnson non sono semplici da definire e possono essere ragionevolmente descritti considerandoli ottenuti da poliedri più semplici attraverso modifiche di vari tipi.

Tra i poliedri di Johnson più semplici vi sono le piramidi quadrata e pentagonale e le cupole triangolare, quadrata e pentagonale.

Conviene segnalare anche la **rotunda pentagonale**, solido con una base decagonale ai cui lati sono adiacenti 5 pentagoni laterali e 5 triangoli laterali che si alternano; i vertici dei 5 pentagoni laterali opposti al lato facente parte del decagono di base sono vertici di una faccia pentagonale parallela al detto decagono; ciascuno dei lati di questa faccia è in comune con un triangolo che è adiacente anche a due pentagoni laterali ed è incidente con un triangolo laterale. Gli altri poliedri sono ripartiti in piramidi modificate, cupole e rotunde modificate, prismi aumentati, poledri platonici modificati, poliedri archimedei modificati; altri 9 sono segnalati come misti.

G37:f.08 Da ultimo limitiamoci a segnalare qualche altra classe di poliedri.

Deltaedri: poliedri le cui facce sono triangoli equilateri. In particolare si ottengono poliedri di questa classe dai poliedri regolari modificando ciascuna delle sue facce, F, con l'aggiunta o con l'eliminazione di una piramide con la base coincidente con la F e le cui facce laterali sono triangoli equilateri.

Simmetroedri: poliedri le cui facce per la maggior parte sono poligoni regolari di due o più tipi, mentre le rimanenti presentano poche altre forme e che sono dotati di tutte le simmetrie tetraedrali, cubottaedralie ed icosidodecaedrali.

Poliedri nobili: poliedri isoedrali ed isogonali. I poliedri nobili convessi sono costituiti dai poliedri regolari e dai tetraedri disfenoidi, tetraedri le cui facce sono triangoli acutangoli congruenti.

G37:g. Cenno ai poliedri in generale

G37:g.01 Come si è già accennato, sono studiate svariate figure tridimensionali delimitate da facce piane e chiamate poliedri e prive della proprietà di convessità. Bisogna segnalare che per tali solidi vengono proposte diverse definizioni non equivalenti che individuano insiemi di figure tridimensionali che presentano differenze da esaminare con attenzione.

G37: g.02 I poliedri più noti hanno la superficie

G37: g.03

G37:g.04 Osserviamo che i poliedri si possono considerare le figure tridimensionali che corrispondono ai poligoni in quanto figure bidimensionali delimitate da segmenti lineari.
Una nozione che generalizza le due precedenti è quella di **politopo**; questo oggetto geometrico si colloca in spazi vettoriali a d dimensioni con d che può assumere valori interi anche superiori a 2 e 3, e viene delimitato da oggetti geometrici lineari di $d-1$ dimensioni.
Per i politopi collocati in $\mathbb{R}^{\times 4}$, politopi delimitati da poliedri, si usa il termine **policoro**.
Purtroppo anche per il termine politopo vengono proposte diverse definizioni non equivalenti che individuano insiemi di figure che presentano differenze anche rilevanti.