

Capitolo G36: Elementi di geometria lineare dello spazio

Contenuti delle sezioni

a. Terne, assi e piani di riferimento; prodotto scalare, distanza e isometrie p.1 b. Piani nello spazio p.6 c. Piani, semispazi e angoli diedri p.10 d. Figure solide convesse a facce piane p.11 e. Prodotto vettore e prodotto misto di vettori p.17 f. Linee rette nello spazio p.20 g. Altri problemi relativi a rette e piani nello spazio p.22 h. Rassegna di trasformazioni lineari e matrici degli ordini 2 e 3 p.26

G36:0.01 In questo capitolo presentiamo le nozioni di base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\times 3}$ munito del prodotto scalare canonico. Questo è lo spazio con prodotto interno al quale risulta utile collegare la geometria euclidea e con la quale è utile sviluppare la fisica classica; esso viene chiamato anche **spazio tridimensionale**, **spazio ordinario** e **spazio fisico**.

In queste pagine ci trattano solo gli oggetti geometrici lineari, cioè le figure che si possono definire utilizzando equazioni solo lineari: esempi di tali oggetti sono i segmenti, le rette, le semirette, i piani ed i semipiani.

G36:a. Terne, assi e piani di riferimento; prodotto scalare, distanza e isometrie

G36:a.01 Consideriamo i più semplici elementi e sottoinsiemi notevoli dello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$, anche ripetendo alcune cose già dette per avere discorsi più autonomi.

Gli elementi di questo spazio, cioè le terne $\langle x, y, z \rangle$ possono venire trattati equivalentemente con tono geometrico e chiamate **punti -RRR** o con tono algebrico considerandole come i vettori esprimibili come combinazioni lineari dei tre **versori canonici** di $\mathbb{R}^{\times 3}$, cioè dei tre vettori di lunghezza 1 costituenti la sua base canonica.

Per ciascuno di questi vettori useremo tre notazione equivalenti:

$$(1) \quad \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_1 = \mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_2 = \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3 = \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle .$$

Scriviamo $\mathbf{0}_3$ o più semplicemente O l'origine dello spazio, cioè il punto -RRR $\langle 0, 0, 0 \rangle$.

L'insieme dei vettori proporzionali ad \mathbf{e}_x , cioè l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : \langle x, 0, 0 \rangle\}$, viene chiamato **primo asse di riferimento** e viene denotato con Ox . Esso viene individuato anche dall'espressione $\mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_x$.

Similmente l'insieme dei vettori proporzionali ad \mathbf{e}_y si può scrivere $\{y \in \mathbb{R} : \langle 0, y, 0 \rangle\} = Oy = \mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_y$ e chiamare **secondo asse di riferimento**; a sua volta l'insieme dei vettori proporzionali ad \mathbf{e}_z si può individuare come $\{z \in \mathbb{R} : \langle 0, 0, z \rangle\} = Oz = \mathbb{R} \cdot \mathbf{e}_z$ e chiamare **terzo asse di riferimento**.

Si dicono **piani di riferimento** di $\mathbb{R}^{\times 3}$ i seguenti insiemi:

$$Oxy = Oyx := \{x, y \in \mathbb{R} : \langle x, y, 0 \rangle\} = \{\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \mathbf{e}_x + \beta \mathbf{e}_y\} ;$$

$$\begin{aligned} Oyz = Ozy &:= \{y, z \in \mathbb{R} : \langle 0, y, z \rangle\} = \{\beta, \gamma \in \mathbb{R} : \beta \mathbf{e}_y + \gamma \mathbf{e}_z\}; \\ Ozx = Oxz &:= \{x, z \in \mathbb{R} : \langle x, 0, z \rangle\} = \{\gamma, \alpha \in \mathbb{R} : \gamma \mathbf{e}_z + \alpha \mathbf{e}_x\}. \end{aligned}$$

Questi insiemi, risp., si possono definire anche come chiusure lineari dei duetti di versori $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$, $\{\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ e $\{\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x\}$.

Come vedremo si possono anche definire, risp., come insiemi delle soluzioni delle equazioni $z = 0$, $x = 0$ e $y = 0$.

G36:a.02 Definiamo sei proiettori dei punti -RRR.

Si dice **proiettore sull'asse** Ox la funzione $\mathbf{Prj}_{Ox} := \mathbb{F} \langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^{\times 3} \mapsto \langle x, 0, 0 \rangle \mathbb{T}$;
 si dice **proiettore sull'asse** Oy la funzione $\mathbf{Prj}_{Oy} := \mathbb{F} \langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^{\times 3} \mapsto \langle 0, y, 0 \rangle \mathbb{T}$;
 si dice **proiettore sull'asse** Oz la funzione $\mathbf{Prj}_{Oz} := \mathbb{F} \langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^{\times 3} \mapsto \langle 0, 0, z \rangle \mathbb{T}$.
 si dice **proiettore sul piano** Oxy la funzione $\mathbf{Prj}_{Oxy} := \mathbb{F} \langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^{\times 3} \mapsto \langle x, y, 0 \rangle \mathbb{T}$;
 si dice **proiettore sul piano** Oyz la funzione $\mathbf{Prj}_{Oyz} := \mathbb{F} \langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^{\times 3} \mapsto \langle 0, y, z \rangle \mathbb{T}$;
 Si dice **proiettore sul piano** Ozx la funzione $\mathbf{Prj}_{Ozx} := \mathbb{F} \langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^{\times 3} \mapsto \langle x, 0, z \rangle \mathbb{T}$.

Le precedenti notazioni sono usate anche per le corrispondenti estensioni booleane, cioè per proiettori di intere figure geometriche.

Sopra queste endofunzioni entro $\mathbb{R}^{\times 3}$ si dimostrano i fatti che seguono.

- (1) **Prop.:** tutti i proiettori sono endofunzioni lineari: $\mathbf{Prj}_{\mathfrak{X}}(\alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{q}) = \alpha \mathbf{Prj}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{p}) + \beta \mathbf{Prj}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{q}) \blacksquare$
- (2) **Prop.:** tutti i proiettori sono endofunzioni idempotenti: $\mathbf{Prj}_{\mathfrak{X}}^{\circ 2} = \mathbf{Prj}_{\mathfrak{X}} \blacksquare$
- (3) **Prop.:** $\mathbf{Prj}_{Oxy} = \mathbf{Prj}_{Ox} + \mathbf{Prj}_{Oy}$, $\mathbf{Prj}_{Oyz} = \mathbf{Prj}_{Oy} + \mathbf{Prj}_{Oz}$, $\mathbf{Prj}_{Ozx} = \mathbf{Prj}_{Oz} + \mathbf{Prj}_{Ox} \blacksquare$
- (4) **Prop.:** $\text{Id}_{\mathbb{R}^{\times 3}} = \mathbf{Prj}_{Ox} + \mathbf{Prj}_{Oy} + \mathbf{Prj}_{Oz} = \mathbf{Prj}_{Ox} + \mathbf{Prj}_{Oyz} = \mathbf{Prj}_{Oy} + \mathbf{Prj}_{Ozx} = \mathbf{Prj}_{Oz} + \mathbf{Prj}_{Oxy} \blacksquare$
- (5) **Prop.:** $\mathbf{Prj}_{Ox} \circ_{lr} \mathbf{Prj}_{Oyz} = \mathbf{Prj}_{Oyz} \circ_{lr} \mathbf{Prj}_{Ox} = \mathbf{Prj}_{Oy} \circ \mathbf{Prj}_{Ozx} = \mathbf{Prj}_{Oz} \circ \mathbf{Prj}_{Oxy} = \mathbb{F} \langle x, y, z \rangle \mapsto \mathbf{0}_3 \mathbb{T} \blacksquare$

G36:a.03 Definiamo ora tre endofunzioni di $\mathbb{R}^{\times 3}$ associate ai tre piani di riferimento:

$$\begin{aligned} \text{riflessione rispetto al piano } Oxy &: \text{Mirr}_{Oxy} = \text{Mirr}_{(z=0)} := \mathbb{F} \langle x, y, z \rangle \mapsto \langle x, y, -z \rangle \mathbb{T} ; \\ \text{riflessione rispetto al piano } Oyz &: \text{Mirr}_{Oyz} = \text{Mirr}_{(x=0)} := \mathbb{F} \langle x, y, z \rangle \mapsto \langle -x, y, z \rangle \mathbb{T} ; \\ \text{riflessione rispetto al piano } Oxz &: \text{Mirr}_{Oxz} = \text{Mirr}_{(y=0)} := \mathbb{F} \langle x, y, z \rangle \mapsto \langle x, -y, z \rangle \mathbb{T} . \end{aligned}$$

Si mostra facilmente che anche queste endofunzioni sono trasformazioni lineari e involuzioni entro $\mathbb{R}^{\times 3}$. Inoltre è evidente che per ciascuna delle riflessioni $\text{Mirr}_{Ox_i x_j}$ l'insieme dei punti fissi è il piano $Ox_i x_j$.

Definiamo anche tre endofunzioni di $\mathbb{R}^{\times 3}$ associate ai tre assi di riferimento:

$$\begin{aligned} \text{riflessione rispetto all'asse } Ox &: \text{Mirr}_{Ox} := \mathbb{F} \langle x, y, z \rangle \mapsto \langle x, -y, -z \rangle ; \\ \text{riflessione rispetto all'asse } Oy &: \text{Mirr}_{Oy} := \mathbb{F} \langle x, y, z \rangle \mapsto \langle -x, y, -z \rangle ; \\ \text{riflessione rispetto all'asse } Oz &: \text{Mirr}_{Oz} := \mathbb{F} \langle x, y, z \rangle \mapsto \langle -x, -y, z \rangle . \end{aligned}$$

Da queste espressioni si ricava che anche queste riflessioni Mirr_{Ox_i} sono trasformazioni lineari e involuzioni entro $\mathbb{R}^{\times 3}$. Inoltre è evidente che per ciascuna delle Mirr_{Ox_i} l'insieme dei punti fissi è l'asse Ox_i .

Si dimostrano facilmente anche le seguenti uguaglianze:

- (1) **Prop.:** $\text{Mirr}_{Ox} = \text{Mirr}_{Oxy} \circ_{lr} \text{Mirr}_{Ozx} = \text{Mirr}_{Ozx} \circ_{lr} \text{Mirr}_{Oxy} \blacksquare$
- (2) **Prop.:** $\text{Mirr}_{Oy} = \text{Mirr}_{Oyz} \circ_{lr} \text{Mirr}_{Oxy} = \text{Mirr}_{Oxy} \circ_{lr} \text{Mirr}_{Oyz} \blacksquare$
- (3) **Prop.:** $\text{Mirr}_{Oz} = \text{Mirr}_{Ozx} \circ_{lr} \text{Mirr}_{Oyz} = \text{Mirr}_{Oyz} \circ_{lr} \text{Mirr}_{Ozx} \blacksquare$

Esse esprimono la commutatività fra due riflessioni rispetto a due piani ortogonali.

Si definisce **simmetria centrale** o **inversione degli assi** di $\mathbb{R}^{\times 3}$ l'endofunzione

$$CentrSymm_3 := \lceil \langle x, y, z \rangle \mapsto \langle -x, -y, -z \rangle \rceil .$$

Evidentemente la simmetria centrale è esprimibile mediante le riflessioni nei seguenti modi:

$$(1) \quad CentrSymm_3 = Mirr_{Oxy} \circ Mirr_{Oyz} \circ Mirr_{Ozx}$$

A questo punto tra i tre versori canonico \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 ed \mathbf{e}_3 vi è completa simmetria; quindi ciascuna delle sei permutazione dei tre indici 1, 2 e 3 trasforma un enunciato valido in altri sei enunciati validi (in qualche caso tuttavia vi sono alcuni di questi enunciati che coincidono); molte formule si possono provare servendosi di questa simmetria.

In seguito avremo risultati che dipendono dall'ordine ciclico dei tre indici e la deducibilità delle relazioni conseguenti dovrà limitarsi alle tre permutazioni cicliche degli indici.

G36:a.04 Ad ogni vettore $\mathbf{t} = \langle t_x, t_y, t_z \rangle \in \mathbb{R}^{\times 3}$ si associa una traslazione relativa allo spostamento \mathbf{t} :

$$(1) \quad Trsl_{\mathbf{t}} := \lceil P \in \mathbb{R}^{\times 3} \mapsto P + \mathbf{t} \rceil = \lceil \langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^{\times 3} \mapsto \langle x + t_x, y + t_y, z + t_z \rangle \rceil .$$

Chiaramente la corrispondenza fra vettori con il ruolo di spostamento e traslazioni è biunivoca. Più precisamente le traslazioni entro $\mathbb{R}^{\times 3}$ sono operatori lineari che commutano tra di loro. Di esse inoltre possono essere definite le combinazioni lineari:

$$(2) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathbf{t}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\times 3} : \alpha Trsl_{\mathbf{t}} + \beta Trsl_{\mathbf{u}} := \lceil P \in \mathbb{R}^{\times 3} \mapsto P + \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{u} \rceil .$$

Le traslazioni di $\mathbb{R}^{\times 3}$ possono esprimersi come combinazioni lineari delle tre traslazioni associate ai tre versori canonici:

$$(3) \quad \forall \mathbf{t} = \langle t_x, t_y, t_z \rangle \in \mathbb{R}^{\times 3} : Trsl_{\mathbf{t}} = t_x Trsl_{\mathbf{e}_x} + t_y Trsl_{\mathbf{e}_y} + t_z Trsl_{\mathbf{e}_z} .$$

Le traslazioni in $\mathbb{R}^{\times 3}$ quindi costituiscono uno spazio vettoriale e si dimostra che evidentemente è isomorfo allo stesso spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\times 3}$.

G36:a.05 Introduciamo le rotazioni di $\mathbb{R}^{\times 3}$ limitandoci per ora a quelle con centro nell'origine e intorno ad uno degli assi di riferimento.

Se ϕ esprime un'ampiezza angolare misurata in radianti, poniamo

$$Rot_{\phi \mathbf{e}_x} := \lceil \langle x, y, z \rangle \mapsto \langle x, \cos \phi y + \sin \phi z, \sin \phi y + \cos \phi z \rangle \rceil ;$$

$$Rot_{\phi \mathbf{e}_y} := \lceil \langle x, y, z \rangle \mapsto \langle -\sin \phi z + \cos \phi x, y, \cos \phi z + \sin \phi x \rangle \rceil ;$$

$$Rot_{\phi \mathbf{e}_z} := \lceil \langle x, y, z \rangle \mapsto \langle \cos \phi x + \sin \phi y, -\sin \phi x + \cos \phi y, z \rangle \rceil .$$

Si vede che la riduzione al piano Oxy della $Rot_{\phi \mathbf{e}_x}$ non è che la rotazione del piano -RR intorno all'origine di ampiezza angolare ϕ . Lo stesso accade alla riduzione della $Rot_{\phi \mathbf{e}_y}$ al piano Oxz e alla riduzione della $Rot_{\phi \mathbf{e}_z}$ al piano Oxy .

Da questo segue che le precedenti endofunzioni sono trasformazioni lineari, che le rotazioni intorno ad un unico asse costituiscono un gruppo isomorfo al gruppo delle rotazioni del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e quindi commutano tra di loro.

Non commutano invece due rotazioni intorno a diversi assi di riferimento: infatti ad esempio si trovano le espressioni

$$(1) \quad Rot_{\pi/2, \mathbf{i}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{i} & \mathbf{k} & -\mathbf{j} \end{vmatrix}, \quad Rot_{\pi/2, \mathbf{j}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\mathbf{k} & \mathbf{j} & -\mathbf{i} \end{vmatrix}, \quad Rot_{\pi/2, \mathbf{k}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\mathbf{j} & -\mathbf{i} & \mathbf{k} \end{vmatrix},$$

e da queste si ricava

$$(2) \quad Rot_{\pi/2, \mathbf{i}} \circ_{lr} Rot_{\pi/2, \mathbf{j}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{i} & \mathbf{k} & -\mathbf{j} \end{vmatrix} \neq Rot_{\pi/2, \mathbf{j}} \circ_{lr} Rot_{\pi/2, \mathbf{i}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} \end{vmatrix} .$$

Osserviamo esplicitamente che, in accordo con le definizioni, le rotazioni sono descrivibili come meccanismi che agiscono sopra elementi di $\mathbb{R}^{\times 3}$ spazio ed in particolare sulla sua terna di riferimento e provocano i loro spostamenti. Questo modo di vedere lo chiamiamo “punto di vista attivo delle permutazioni”.

Rileviamo anche che le rotazioni intorno all’origine si caratterizzano significativamente con le loro azioni sulla terna di riferimento, azioni chiarite dalle relazioni (1).

Osserviamo infine che i tre tipi di rotazioni introdotti sono permutazioni di $\mathbb{R}^{\times 3}$ che lasciano invariato un asse (risp. Ox , Oy e Oz) e le distanze relative a tutti i duetti di punti.

G36:a.06 Consideriamo due vettori $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ di $\mathbb{R}^{\times 3}$ e definiamo come loro **prodotto scalare**

$$(1) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} := \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 .$$

Questa composizione è una funzione del genere $\{\mathbb{R}^{\times 3} \times \mathbb{R}^{\times 3} \mapsto \mathbb{R}\}$ per la quale si dimostrano facilmente le seguenti proprietà

- (i) $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\times 3} : \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ (**simmetria**)
- (ii) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\times 3} : (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + b\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ (**linearità a sinistra**)
- (iii) $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\times 3} : (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \text{ e } \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}_3)$ (**definitezza positiva**).

Dalla simmetria e dalla linearità a sinistra segue la **linearità a destra**, cioè

$$(iv) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\times 3} : \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + b\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

Il prodotto scalare viene quindi qualificato come **forma bilineare simmetrica definita positiva**.

Osserviamo inoltre che le riflessioni rispetto ad un piano di riferimento lasciano invariato il prodotto scalare: ad esempio

$$Mirr_{Oxy}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = Mirr_{Oxy}(\mathbf{v}) \cdot Mirr_{Oxy}(\mathbf{w}) = v_x w_x + (-v_y)(-w_y) + (-v_z)(-w_z) = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z .$$

Di conseguenza lasciano invariato il prodotto scalare anche le riflessioni rispetto agli assi di riferimento e la riflessione centrale.

G36:a.07 Il prodotto scalare definito sopra consente di definire come **lunghezza** o **norma** di un vettore \mathbf{v} :

$$(1) \quad \|\mathbf{v}\| := \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} .$$

Ricordiamo che si dice **spazio metrico** (B46:a.01) un insieme S munito di una funzione del genere $d \in \{S \times S \mapsto \mathbb{R}_{0+}\}$ per la quale valgono le seguenti proprietà

- (i) $\forall P, Q \in S : d(Q, P) = d(P, Q)$ (**simmetria**);
- (ii) $\forall P, Q \in S : d(P, Q) \geq 0 \text{ e } d(Q, P) = 0 \iff P = Q$ (**definitezza positiva**);
- (iii) $\forall P, Q, R \in S : d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$ (**disuguaglianza triangolare**).

La funzione d viene detta **distanza** o **metrica** dello spazio metrico $\langle S, d \rangle$.

Si definisce come **distanza euclidea** tra due vettori $P = \langle x_P, y_P, z_P \rangle$ e $Q = \langle x_Q, y_Q, z_Q \rangle$ di $\mathbb{R}^{\times 3}$ la norma della loro differenza

$$(2) \quad \text{dist}_2(P, Q) = \|\overrightarrow{Q - P}\| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2} .$$

Si verifica facilmente che questa funzione soddisfa le proprietà precedenti, fatto che giustifica l'adozione del sostantivo distanza. Quindi $\mathbb{R}^{\times 3}$ munito della distanza euclidea costituisce uno spazio metrico.

Si constata facilmente che la distanza euclidea fra due punti è invariante per le riflessioni viste in :a.03 e per le traslazioni definite in :a.04.

G36:a.08 La distanza euclidea consente di definire un primo tipo di figure geometriche tridimensionali. Per ogni coppia $\langle C, r \rangle$ con $C = \langle x_C, y_C, z_C \rangle \in \mathbb{R}^{\times 3}$ ed $r \in \mathbb{R}_{0,+}$ si dice **superficie sferica** di centro C e raggio r l'insieme

$$(1) \quad \begin{aligned} \text{sphr}(C, r) &:= \{P \in \mathbb{R}^{\times 3} \mid \text{dist}_2(P, C) = r\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{\times 3} \mid \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2} = r\} . \end{aligned}$$

Si dice invece **sfera aperta** di centro C e raggio r l'insieme

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{Sphr}(C, r) &:= \{P \in \mathbb{R}^{\times 3} \mid \text{dist}_2(P, C) < r\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{\times 3} \mid \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2} < r\} . \end{aligned}$$

Si dice inoltre **sfera chiusa** di centro C e raggio r l'insieme

$$(2) \quad \begin{aligned} \overline{\text{Sphr}}(C, r) &:= \{P \in \mathbb{R}^{\times 3} \mid \text{dist}_2(P, C) \leq r\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{\times 3} \mid \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2} \leq r\} . \end{aligned}$$

Per le sfere con centro nell'origine useremo anche la notazione $\text{sph}_r := \text{sphr}(\mathbf{0}_3, r)$. Inoltre chiameremo **sfera canonica** di $\mathbb{R}^{\times 3}$ la sfera di centro nell'origine e raggio uguale ad 1 e la denoteremo anche con $\text{sph} := \text{sph}_1$.

Chiaramente per ogni $r \in \mathbb{R}_+$ applicando la dilatazione di fattore r con centro in $\mathbf{0}_3$ alla sph si ottiene sph_3 .

Consideriamo le seguenti funzioni

$$(1) \quad \begin{aligned} & \{ C \in \mathbb{R}^{\times 3} , r \in \mathbb{R}_+ : \text{sphr}(C, r) \mapsto \text{Sphr}(C, r) \} , \\ & \{ C \in \mathbb{R}^{\times 3} , r \in \mathbb{R}_+ : \text{sphr}(C, r) \mapsto \overline{\text{Sphr}(C, r)} \} , , \\ & \{ C \in \mathbb{R}^{\times 3} , r \in \mathbb{R}_+ : \text{Sphr}(C, r) \mapsto \overline{\text{Sphr}(C, r)} \} . \end{aligned}$$

Si tratta evidentemente di biiezioni: le superfici sferiche, le sfere aperte e le sfere chiuse sono mutuamente in biiezione. Da punto di vista del controllo delle strutture evidentemente, la individuazione di una delle precedenti strutture conoscenza Questo rende lecito in molti contesti di parlare genericamente di sfera senza distinguere se si tratta di una superficie sferica, di una sfera aperta o di una sfera chiusa.

Evidentemente le riflessioni introdotte in :a.03 e le rotazioni definite in :a.05 trasformano le sfere con centro nell'origine in se stesse.

Inoltre per ogni $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{\times 3}$ si ha $\text{Trsl}_{\mathbf{t}}(\text{sphr}(\mathbf{0}_3, r)) = \text{sphr}(\mathbf{t}, r)$.

Di conseguenza tutte le sfere di $\mathbb{R}^{\times 3}$ si possono ottenere applicando ad sph una traslazione e una omotetia:

$$(1) \quad \forall r \in \mathbb{R}_+ , \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{\times 3} : \text{sphr}(\mathbf{t}, r) = \text{sph} \circ \text{Trsl}_{\mathbf{t}} \circ \text{Dil}_{\mathbf{t}, r} = \text{sph} \circ \text{Dil}_{\mathbf{t}, r} \circ \text{Trsl}_{\mathbf{t}} .$$

Possiamo anche affermare che tutte le sfere sono figure simili.

G36:a.09 Si dice **isometria** di uno spazio metrico $\langle S, d \rangle$ ogni funzione I del genere $\{S \mapsto S\}$ che lascia invariate le distanza tra i suoi punti.

Qui interessano in particolare le isometrie di \mathbb{R}^3 , cioè le funzioni $I \in \{\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}\}$ tali che

$$(1) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}_2(I(\mathbf{v}), I(\mathbf{w})) = \text{dist}_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) .$$

Si verifica facilmente che sono isometrie di \mathbb{R}^3 le traslazioni, le riflessioni rispetto ai piani Oxy , Oxz e Oyz , le riflessioni rispetto agli assi di riferimento e le rotazioni intorno agli assi di riferimento.

Chiaramente sono isometrie tutte le composizioni delle suddette permutazioni. Questa considerazione estende molto la conoscenza delle isometrie e sul piano computazionale pone il problema di individuare espressioni e meccanismi in grado di determinare convenientemente gli effetti di queste trasformazioni. In seguito dovremo precisare molti di questi meccanismi.

In particolare dovremo analizzare le rotazioni in generale definendole come isometrie che lasciano (almeno) un punto fisso. Troveremo che ogni rotazione con punto fisso in C si può esprimere come rotazione di un opportuno angolo intorno ad una retta passante per C e come composizione di tre rotazioni intorno a tre assi opportuni.

Preciseremo che dell'insieme delle isometrie di \mathbb{R}^3 fanno parte anche le rotazioni, quale che sia il punto -RRR che costituisce il loro centro, quale che sia la retta orientata passante per il proprio che costituisca il loro asse di rotazione e quale che sia l'ampiezza angolare che caratterizza l'angolo di rotazione.

Si trova anche che le isometrie sono automorfismi lineari di \mathbb{R}^3 .

Le traslazioni e le rotazioni si possono descrivere efficacemente come movimenti di corpi rigidi che vengono effettuati con continuità nel corso di un certo intervallo di tempo. Questo non si può invece dire delle riflessioni, trasformazioni che vengono descritte con la metafora dello specchio, cioè facendo ricorso ad immagini virtuali di oggetti tangibili.

Hanno grande importanza le costruzioni e le proprietà definite sugli spazi metrici, ed in particolare su \mathbb{R}^3 , che sono invarianti per isometria: queste ultime sono chiamate **proprietà metriche**.

G36:a.10 La terna $\langle \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z \rangle$ viene raffigurata in modo da costituire una cosiddetta terna destrorsa, configurazione geometrica entità di cui ora diamo una definizione generale in termini fisici.

Consideriamo una terna (ordinata) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ di vettori i quali possono costituire una base per lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 : questi tre vettori devono essere linearmente indipendenti, cioè non devono appartenere ad un unico sottospazio proprio (cioè ad un piano per l'origine).

Si dice che una raffigurazione di $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ costituisce una **terna di riferimento destrorsa** sse un osservatore disposto con la stessa orientazione del terzo vettore, \mathbf{w} , osservando il piano Π nel quale giacciono i primi due, vede che il secondo, \mathbf{v} , appartiene al semipiano che viene lasciato a sinistra da un punto che si muove sulla retta orientata determinata dal primo vettore, \mathbf{u} . In altre parole un osservatore orientato come \mathbf{w} vede che \mathbf{u} può essere portato ad allinearsi con il secondo, \mathbf{v} , con una rotazione nel piano Π di un angolo convesso positiva, ovvero con una rotazione antioraria.

Viceversa si dice che i tre vettori costituiscono una **terna di riferimento sinistrorsa** sse l'osservatore orientato come \mathbf{w} vede \mathbf{v} far parte del semipiano alla destra di un punto mobile che si muove sulla retta orientata come \mathbf{u} ,

Le usuali raffigurazioni dei versori della base canonica mostrano come terne sinistrorse $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$, $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle$ e $\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$; mostrano invece come terne destrorse $\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle$ e $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle$. Si osserva che le terne $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle$ sono raffigurate destrorse sse le terne dei rispettivi indici $\langle i, j, k \rangle$ costituiscono permutazioni di $\{1, 2, 3\}$ aventi segno $+1$ ($\langle_{prm} 1, 2, 3 \rangle$, $\langle_{prm} 2, 3, 1 \rangle$, $\langle_{prm} 3, 1, 2 \rangle$), mentre sono raffigurate sinistrorse sse corrispondono a permutazioni aventi segno -1 ($\langle_{prm} 3, 2, 1 \rangle$, $\langle_{prm} 1, 3, 2 \rangle$, $\langle_{prm} 2, 1, 3 \rangle$).

Si constata facilmente che le riflessioni rispetto a un piano coordinato scambia le terne destrorse con le sinistrorse e che lo stesso provoca la simmetria centrale di \mathbb{R}^3 . accade invece che le riflessioni rispetto agli assi di riferimento trasformano terne sinistrorse in terne sinistrorse e terne destrorse in terne destrorse.

G36:a.11 Il prodotto scalare di due vettori consente di calcolare l'angolo che essi definiscono. Innanzi tutto, sviluppando la norma al quadrato di un vettore somma di due vettori dati si ottiene

$$(1) \quad \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} ,$$

e da questo

$$(2) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{2} (\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2) .$$

Quindi oltre alla norma dei vettori, anche il prodotto scalare è un invariante per isometria, ed in particolare per le traslazioni e per le rotazioni.

Per facilitare l'individuazione del suo significato geometrico consideriamo una collocazione particolare ai due vettori che conducono a $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$. Disponiamo \mathbf{v} orientato come il versore \mathbf{e}_x , in modo che sia $\mathbf{v} = \langle v, 0, 0 \rangle$ e disponiamo \mathbf{w} nel piano Oxy , in modo che sia $\mathbf{w} = \langle w \cos(\widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}), w \sin(\widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}), 0 \rangle$. Di conseguenza si ottiene $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = vw \cos(\widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}})$ e quindi

$$(3) \quad \cos(\widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|} = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}} .$$

In conseguenza di quanto sopra, si trova che ogni isometria in \mathbb{R}^3 conserva il coseno di ogni angolo e di conseguenza mantiene il parallelismo e la ortogonalità fra segmenti, semirette, rette e piani, lunghezze di vettori e valori assoluti di aree e volumi.

G36:b. Piani nello spazio

G36:b.01 Si definisce come **piano** in \mathbb{R}^3 ogni insieme di punti $P = \langle x, y, z \rangle$ che soddisfano un'equazione

$$(1) \quad ax + by + cz + d = 0 \quad \text{con} \quad \langle a, b, c \rangle \in \mathbb{R}^3_{nz} .$$

La precedente relazione si dice **equazione generale del piano**. La richiesta $\langle a, b, c \rangle \in \mathbb{R}^3_{nz}$ equivale alla condizione $a, b, c \in \mathbb{R}$ unita alla disuguaglianza $\langle a, b, c \rangle \neq \mathbf{0}_3$, oppure alla $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ o alla $|a| + |b| + |c| > 0$.

Talvolta risulta utile denotare questo insieme con $Plan_{eq}(a, b, c, d)$, scrittura spesso semplificata nella $Plan(a, b, c, d)$. I quattro parametri non sono univocamente determinati: infatti moltiplicando ogni addendo dell'equazione per un qualsiasi scalare k diverso da 0 si ottiene un'equazione equivalente, ovvero $Plan_{eq}(ka, kb, kc, kd) = Plan_{eq}(a, b, c, d)$. Quindi l'insieme dei piani in \mathbb{R}^3 è in biiezione con l'insieme dei raggi in \mathbb{R}^4 ad esclusione del raggio $\mathbb{R} \cdot \langle 0, 0, 0, 1 \rangle$.

Si osserva che, per qualsiasi scelta dei parametri dell'equazione, si trova facilmente qualche punto che appartiene al corrispondente piano. Se ad esempio $a \neq 0$ si può scrivere $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a}$; quindi scegliendo come si vuole valori particolari per y e z si trovano terne di coordinate di punti del piano.

G36:b.02 I due piani individuati come $Plan(a, b, c, d)$ e $Plan(a, b, c, d')$ con $d \neq d'$, cioè determinati da due equazioni della forma

$$(1) \quad ax + by + cz + d = 0 \quad \text{e} \quad ax + by + cz + d' = 0 \quad \text{con} \quad d \neq d' ,$$

non hanno punti in comune, in quanto le due equazioni sono incompatibili (implicherebbero $d = d'$). Tali piani si dicono **piani paralleli** e per denotare che due piani Π e Π' sono paralleli si scrive $\Pi // \Pi'$. La relazione di parallelismo fra piani è evidentemente una relazione di equivalenza e le classi di questa equivalenza sono chiamate **giaciture**; esse sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei raggi di \mathbb{R}^3 , ovvero con le coppie di punti opposti della sfera canonica **sph**.

Applicando ad un piano Π nello spazio una traslazione si ottiene un piano ad esso parallelo; e viceversa, dati due piani paralleli si trova (almeno) una traslazione che porta il primo a coincidere con il secondo.

G36:b.03 Vediamo alcuni casi particolari dei piani $Plan(a, b, c, d)$.

I piani relativi a $d = 0$ sono tutti e soli i piani passanti per l'origine. Il loro insieme costituisce l'insieme dei sottospazi bidimensionali dello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 .

Tre piani particolari passanti per l'origine vi sono quelli che chiameremo sottospazi di annullamento di coordinate (v. G40:b)

$$SAC_{110} = \mathbf{Soln}(z = 0) = Oxy \quad , \quad SAC_{101} = \mathbf{Soln}(y = 0) = Oxz \quad \text{e} \quad SAC_{011} = \mathbf{Soln}(x = 0) = Oyz \quad .$$

I piani relativi ad $a = 0$ sono i piani paralleli all'asse Ox che intersecano il piano Oyz nei punti della retta espressa da $by + cz + d = 0$: in effetti modificando come si vuole la prima coordinata di un punto di un piano $Plan(0, b, c, d)$ si rimane nel piano stesso.

Similmente i piani relativi a $b = 0$ sono i piani paralleli all'asse Oy che intersecano il piano Oyz nei punti della retta espressa da $ax + cz + d = 0$, mentre i piani relativi a $c = 0$ sono i piani paralleli all'asse Oz che intersecano il piano Oxy nei punti della retta espressa da $ax + by + d = 0$.

Andando ancor più in particolare si constata che ogni $Plan(0, 0, c, d) = \mathbf{Soln}(z = -d/c)$ è un piano parallelo a Oxy , che ogni $Plan(0, b, 0, d) = \mathbf{Soln}(y = -d/b)$ è un piano parallelo a Oxz e che ogni $Plan(a, 0, 0, d) = \mathbf{Soln}(x = -d/a)$ è un piano parallelo a Oyz .

G36:b.04 Sia $P_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ un punto del piano $\Pi = \mathbf{Soln}(ax + by + cz + d = 0)$; questo equivale a dire che vale l'uguaglianza $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. Sottraendo questa dalla $ax + by + cz + d = 0$ si ottiene

$$(1) \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad .$$

Interpretiamo geometricamente questa equazione. Innanzi tutto essa individua un piano passante per $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$; inoltre essa afferma l'ortogonalità di due vettori di \mathbb{R}^3

$$(2) \quad \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle \perp \langle a, b, c \rangle \quad .$$

Il primo vettore è associato al vettore applicato che va dallo specifico punto $P_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ al punto generico del piano $\langle x, y, z \rangle$. Il secondo deve essere ortogonale ad ogni retta del piano passante per P_0 ; abbiamo quindi che la terna dei coefficienti delle variabili dell'equazione di un piano individuano un vettore ortogonale al piano stesso. Questo è coerente con la possibilità di individuare lo stesso piano sostituendo il vettore $\langle a, b, c \rangle$ con un vettore collineare $\langle ka, kb, kc \rangle$. Il vettore $\langle a, b, c \rangle$, o meglio il raggio $\mathbb{R} \cdot \langle a, b, c \rangle$ comprendente $\langle a, b, c \rangle$, caratterizza la giacitura del piano.

Fissato P_0 , l'insieme dei piani espressi dalla (2) al variare di $\langle a, b, c \rangle$ in \mathbb{R}^3_{nz} esprime l'insieme dei piani passanti per P_0 ; tale insieme si chiama specificamente **stella di piani** di \mathbb{R}^3 con centro in P_0 .

G36:b.05 Si osserva che per ogni $\langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \rangle$ non appartenente a $Plan(a, b, c, d)$ non vale la relazione di ortogonalità, ma deve essere $a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) + c(z - \bar{z}) \neq 0$.

(1) Prop.: $Soln(ax + by + cz + d = 0) = Soln(a'x + b'y + c'z + d' = 0)$
 $\iff \mathbb{R}_{nz} \ni k \text{ t.c. } a' = ka, b' = kb, c' = kc, d' = kd.$

Dim.: “ \implies ”: L’equivalenza delle due equazioni implica che i vettori $\langle a, b, c \rangle$ e $\langle a', b', c' \rangle$ sono collineari e quindi che $\mathbb{R}_{nz} \ni k$ tale che valgano le uguaglianze $a' = ka, b' = kb, c' = kc$. Consideriamo allora un punto $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ del piano; devono valere le due equazioni

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \quad \text{e} \quad a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d' = 0$$

e deve annullarsi la loro combinazione lineare

$$(ak - a')x_0 + (bk - b')y_0 + (ck - c')z_0 + (dk - d') = 0$$

Questa uguaglianza e le tre relazioni di proporzionalità precedenti implicano la quarta: $d' = kd$.

“ \impliedby ”: Chiaramente la condizione alla destra dell’enunciato implica

$$ax + by + cz + d = 0 \iff a'x + b'y + c'z + d' = 0 \quad \blacksquare$$

G36:b.06 L’equazione generale dei piani, quando si accettano restrizioni non molto vincolanti, può essere modificata in equazioni leggermente meno generali ma significative e vantaggiose in vari contesti.

Consideriamo $\Pi = Soln(ax + by + cz + d = 0)$ nel caso in cui tutti i quattro parametri sono diversi da 0; si considera quindi un piano che non possiede caratteristiche particolari che ne rendano semplice il trattamento come quelle di essere parallelo ad un asse Ox_i o a un piano $Ox_i x_j$.

Introdotti $A := -d/a, B := -d/b$ e $C := -d/c$, all’equazione si può dare la forma

$$(1) \quad \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1.$$

Questa equazione si chiama **equazione delle intercette del piano**. Infatti si constata che A fornisce la prima coordinata del punto $P_x := \Pi \cap \mathbb{R} \mathbf{e}_x$, B la seconda coordinata del punto $P_y := \Pi \cap \mathbb{R} \mathbf{e}_y$ e C la terza coordinata del punto $P_z := \Pi \cap \mathbb{R} \mathbf{e}_z$. Infatti il punto P_x è determinato dal sistema di equazioni

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies P_x = \langle A, 0, 0 \rangle,$$

il secondo punto dal sistema

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies P_y = \langle 0, B, 0 \rangle$$

e il punto P_z dal sistema

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies P_z = \langle 0, 0, C \rangle.$$

G36:b.07 Consideriamo due piani non paralleli per i quali scriviamo $\Pi_1 = Soln(a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0)$ e $\Pi_2 = Soln(a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0)$. La loro intersezione $\Pi_1 \cap \Pi_2$ è una retta ed il sistema delle due equazioni dei piani costituisce una delle modalità utili ad individuarla.

I due piani individuano 4 angoli diedri ai quali, sui piani ortogonali alla retta $\Pi_1 \cap \Pi_2$ corrisponde una quaterna di angoli supplementari/opposti caratterizzata da due ampiezze angolari; denotiamo tali ampiezze con $\phi_{1,2}$ e $\pi - \phi_{1,2}$ ($0 < \phi_{1,2} < \pi/2$).

Questi angoli convessi si possono individuare come angoli formati dai vettori ortogonali ai piani, vettori esprimibili, risp., come $\pm \mathbf{n}_1 = \pm \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ e $\pm \mathbf{n}_2 = \pm \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$; l’arbitrarietà dei segni corrisponde

al fatto che individuano due angoli supplementari. I due angoli sono ottenibili dal prodotto scalare dei due vettori

$$(1) \quad \cos(\phi_{1,2}) = \pm \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \cdot \|\mathbf{n}_2\|} = \pm \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} .$$

G36:b.08 Dalla formula precedente seguono subito le condizioni per l'ortogonalità e per il parallelismo di due piani.

Consideriamo due piani Π_1 e Π_2 per i quali valgono le notazioni precedenti. Essi sono ortogonali sse formano angoli retti, ovvero

$$(1) \quad \Pi_1 \perp \Pi_2 \iff \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \iff \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 .$$

I due piani Π_1 e Π_2 sono paralleli sse formano una coppia di angoli nullo e piatto, ovvero

$$(2) \quad \Pi_1 // \Pi_2 \iff \mathbf{n}_1 \in \mathbb{R}_{nz} \mathbf{n}_2 \iff \mathbb{R}_{nz} \ni k \text{] } a_1 = k a_2, b_1 = k b_2, c_1 = k c_2 .$$

Siamo giunti a un un tipico sistema di relazioni di proporzionalità riguardante oggetti lineari in $\mathbb{R}^{\times 3}$; in esso tuttavia compare il fattore k , non ben definito ed estraneo ai dati che caratterizzano i piani. Si può eliminare tale fattore considerando le tre coppie di uguaglianze e moltiplicando opportunamente i loro membri ottenendo:

$$(3) \quad a_1 b_2 = a_2 b_1, \quad a_1 c_2 = a_2 c_1, \quad b_1 c_2 = b_2 c_1 .$$

Queste tre uguaglianze non sono indipendenti: ciascuna di esse è deducibile dalle altre due. Esse valgono quali che siano i valori dei fattori (nel rispetto delle richieste $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 > 0$ e $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 > 0$), ma non sono di facile lettura. Dal sistema con il fattore k , sotto le condizioni $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$, si ricava il sistema di uguaglianze:

$$(4) \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} .$$

Anche queste uguaglianze non sono indipendenti e ciascuna di esse si può dedurre dalle altre due. Esse hanno il vantaggio di essere interpretabili più chiaramente come richieste di proporzionalità tra due vettori. Questo vantaggio di leggibilità induce ad usare spesso questo genere di formulazione della proporzionalità, evitando di esplicitare i limiti di validità. Anche qui di seguito saranno usate spesso e per la precisione le faremo comparire fra i due delimitatori specifici \lceil e \rceil .

G36:b.09 Consideriamo un vettore \mathbf{n} di $\mathbb{R}^{\times 3}$ avente lunghezza unitaria, oggetto definibile equivalentemente come punto della sfera canonica i o si puo esprimere significativamente nella forma

$$(1) \quad \mathbf{n} = \langle \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \rangle \quad \text{con} \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 .$$

Le tre componenti di \mathbf{n} sono chiamati **coseni direttori** del versore ovvero del raggio al quale \mathbf{n} appartiene. Il loro significato geometrico è ben chiaro.

$$(2) \quad \cos \alpha = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n} \quad , \quad \cos \beta = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} \quad , \quad \cos \gamma = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n} .$$

Ogni piano in $\mathbb{R}^{\times 3}$ può essere individuato da un vettore unitario ortogonale al piano \mathbf{n} , ovvero dai suoi tre coseni direttori, e dalla sua distanza dall'origine che chiamiamo p . Questa si può esprimere come proiezione sulla retta di \mathbf{n} del vettore \overrightarrow{OP} dall'origine al punto P di minima distanza del piano dall'origine: $p = \text{Prj}_{\mathbf{n}}(\overrightarrow{OP})$. Per il nostro piano si ottiene quindi la cosiddetta **equazione normalizzata**

$$(3) \quad x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p .$$

G36:c. Piani, semispazi e angoli diedri

G36:c.01 Ogni piano è dato dalle soluzioni di un'equazione di primo grado nelle tre variabili x , y e z . Ogni equazione di primo grado nelle tre variabili x , y e z determina un piano.

Consideriamo l'espressione $\delta = ax + by + c + d$. la richiesta $\delta = 0$ determina il piano che denotiamo con $Plan(a, b, c, d)$. Gli altri punti di $\mathbb{R}^{\times 3}$ si ripartiscono in due insiemi: quelli con $\delta > 0$ e quelli con $\delta < 0$. Questi due insiemi sono detti **semispazi aperti** delimitati da $Plan(a, b, c, d)$. Chiamiamo poi **semispazio chiuso** delimitato da $Plan(a, b, c, d)$ ogni unione di un semispazio aperto con il piano stesso.

G36:c.02 Un insieme C di punti di $\mathbb{R}^{\times 3}$ si dice **insieme convesso** sse presi due suoi punti P e Q tutti i punti del segmento \overline{PQ} appartengono a C .

Evidentemente sono insiemi convessi i segmenti aperti, chiusi o misti; vedremo inoltre che sono insiemi convessi, le semirette aperte o chiuse, le rette, i piani, i semipiani aperti e chiusi ed i semispazi aperti e chiusi.

Si trova facilmente che l'intersezione di due insiemi convessi è anch'esso un insieme convesso.

Viceversa l'unione di due insiemi convessi potrebbe essere un insieme non convesso: ad eswempio non sono convessi l'unione di due segmenti aperti con un solo punto in comune, l'unione di due rette complanari e non parallele, l'unione di due piani non paralleli.

G36:c.03 Consideriamo due piani distinti Π_1 e Π_2 ; si danno due situazioni incompatibili: essi aut hanno qualche punto in comune, aut non hanno alcun punto in comune.

Il primo caso si verifica sse i due piani sono paralleli. Nel secondo hanno in comune un insieme di punti che deve essere convesso il quale viene chiamato **retta**; in questo caso Π_1 e Π_2 si dicono **piani secanti**.

Due piani paralleli Π_1 e Π_2 determinano una pentapartizione dello spazio in 5 insiemi convessi: i due piani, il sottospazio aperto delimitato da Π_1 non comprendente Π_2 , il sottospazio aperto delimitato da Π_2 non comprendente Π_1 , e l'intersezione dei due sottospazi complementari delle chiusure dei precedenti.

Se $\mathcal{R} := \Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$, denotiamo con $\Sigma_{i,a}$ e $\Sigma_{i,b}$ i due semispazi aperti delimitati da Π_i per $i = 1, 2$. I due piani determinano una partizione dello spazio in 9 insiemi convessi: la retta \mathcal{R} , i 2 semipiani aperti appartenenti a Π_1 delimitati da \mathcal{R} , i 2 analoghi semipiani aperti appartenenti a Π_2 e 4 insiemi ottenuti come intersezioni dei semispazi aperti delimitati dai piani, cioè $\Sigma_{1,a} \cap \Sigma_{2,a}$, $\Sigma_{1,a} \cap \Sigma_{2,b}$, $\Sigma_{1,b} \cap \Sigma_{2,a}$ e $\Sigma_{1,b} \cap \Sigma_{2,b}$.

Questi ultimi insiemi si dicono **angoli diedri aperti**; le unioni degli angoli diedri con \mathcal{R} e con i semipiani che li delimitano si dicono **angoli diedri chiusi** o più semplicemente **angoli diedri** o **diedri**. La retta \mathcal{R} viene chiamata **costola** dei diedri che la contengono.

G36:c.04 I quattro diedri determinati da due piani secanti costituiscono un cosiddetto **quartetto SO di diedri** (SO sta per supplementari-opposti). Due tali diedri si dicono **diedri supplementari** sse la loro unione è un semispazio determinato da uno dei piani, mentre si dicono **diedri opposti** sse si dà il caso contrario. Due diedri opposti sono congruenti, cioè sono sovrapponibili con un movimento rigido.

Intersecando la \mathcal{R} con un piano ad essa ortogonale si ottiene un cosiddetto **quartetto SO di angoli piani**: in esso due angoli opposti appartengono a due diedri opposti e due angoli supplementari a due diedri supplementari.

Ad un angolo diedro si attribuisce come **angolo piano associato** l'angolo piano ottenuto intersecando il diedro stesso con un piano ortogonale alla sua costola \mathcal{R} . Si attribuisce inoltre come **ampiezza** l'ampiezza dell'angolo piano associato.

Diciamo **diedro retto** ogni diedro il cui angolo piano è retto. Ciascuno dei tre duetti formati dai tre piani di riferimento definisce un quartetto SO di diedri retti. Ad esempio Oxz e Oyz definiscono i quattro diedri retti esprimibili come

$$\{x, y \in \mathbb{R}_+, z \in \mathbb{R} : \langle s_x x, s_y y, z \rangle\} \quad \text{per} \quad s_x, s_y \in \{-1, +1\}.$$

G36.d. Figure solide a facce piane elementari

G36.d.01 Consideriamo tre piani Π_1, Π_2 e Π_3 che si intersecano in un punto V , i relativi semispazi e le loro intersezioni.

Queste determinano una partizione dello spazio in 27 insiemi convessi: il singolo $\{V\}$, 6 semirette, 12 angoli piani aperti e 8 intersezioni di semispazi aperti. Questi ultimi sono detti **triedri aperti** e ciascuna delle unioni di un triedro aperto con $\{V\}$, le tre semirette e i tre angoli che lo delimitano si dice **triedro chiuso**.

Ogni triedro contiene tre semirette non collineari con estremo in V . Ogni triedro è convesso, in quanto per definizione è intersezione di tre insiemi convessi. Esso si può individuare come chiusura convessa delle tre semirette suddette.

Tra i triedri in particolare vi sono gli 8 triedri delimitati dai tre piani di riferimento, ovvero definiti dalle tre rette che corrispondono ai tre assi di riferimento. Questi triedri nelle versioni aperte si possono caratterizzare con le espressioni seguenti:

$$(1) \quad \{s_x x \in \mathbb{R}_+, y, z \in \mathbb{R} : \langle x, y, z \rangle\}, \quad \{s_y y \in \mathbb{R}_+, x, z \in \mathbb{R} : \langle x, y, z \rangle\}, \\ \{s_z z \in \mathbb{R}_+, x, y \in \mathbb{R} : \langle x, y, z \rangle\} \quad \text{per} \quad s_x, s_y, s_z \in \{-1, +1\}$$

Consideriamo insieme ai suddetti piani Π_i che si intersecano in V , un quarto piano Σ non passante per V ; esso interseca le tre rette $\Pi_i \cap \Pi_j$ in tre punti che denotiamo $B_1 := \Pi_2 \cap \Pi_3 \cap \Sigma$, $B_2 := \Pi_3 \cap \Pi_1 \cap \Sigma$ e $B_3 := \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Sigma$. Le tre semirette $\overline{VB_i}$ individuano uno dei triedri determinati dai piani Π_j . L'intersezione di tale triedro con il semipiano chiuso delimitato da Σ e contenente V si dice **tetraedro** o **tetraedro**. Esso si può individuare come chiusura convessa dei punti V, B_1, B_2 e B_3 .

I punti V, B_1, B_2 e B_3 si dicono **vertici** del tetraedro; i 6 segmenti $VB_1, VB_2, VB_3, B_1B_2, B_2B_3$ e B_3B_1 si dicono **spigoli** del tetraedro e i 4 triangoli ottenibili come chiusure convesse dei 4 tripletti di vertici sono detti **facce** del tetraedro.

In particolare si definisce **tetraedro retto canonico** il tetraedro avente i vertici in $\mathbf{0}_3, \langle 1, 0, 0 \rangle, \langle 0, 1, 0 \rangle$ e $\langle 0, 0, 1 \rangle$. Questo tetraedro viene trasformato in se stesso da alcune trasformazioni lineari, ad esempio dalle due che estendono, risp., le due seguenti permutazioni dei versori canonici

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \downarrow & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \downarrow \\ & \mathbf{j} & \mathbf{i} & \mathbf{k} & \\ \downarrow & & & & \downarrow \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \downarrow & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \downarrow \\ & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \\ \downarrow & & & & \downarrow \end{array}.$$

Esso presenta tre facce costituite da triangoli isosceli rettangoli con i due cateti di lunghezza 1 e una faccia costituita da un triangolo che, per simmetria, deve essere equilatero. Questa figura in talune argomentazioni può rimpiazzare con qualche vantaggio la terna $\langle \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z \rangle$ a lei equivalente.

G36:d.02 Il tetraedro è un esempio di un insieme di figure tridimensionali molto importanti per la geometria e le sue applicazioni.

Chiamiamo **poliedro convesso** (chiuso) ogni insieme di punti limitato ottenibile come intersezione di semispazi chiusi distinti.

L'aggettivo convesso usato per il termine è giustificato dal fatto che tale insieme è una intersezione di insiemi convessi.

Un insieme ottenuto come intersezione di semispazi chiusi è limitato sse tra i sottospazi se ne trovano 4 la cui intersezione è un tetraedro (limitato).

Data la commutatività dell'intersezione, risulta che un poliedro convesso è ottenibile da un tetraedro (ottenibile da 4 dei semispazi che lo definiscono) con successive intersezioni mediante semispazi.

Ogni poliedro è quindi ottenibile da un tetraedro con successive operazioni le quali consentono sempre di attribuire ad un poliedro vertici, spigoli e facce.

Le facce di un poliedro convesso contengono insiemi di punti che appartengono a uno solo dei piani che definiscono il poliedro stesso. La definizione consente che un poliedro sia definito servendosi di piani non efficaci; possiamo ridurci ai soli cosiddetti **piani delimitanti**, piani ai quali appartiene una faccia del poliedro.

Per la convessità della figura, le facce di un poliedro devono essere poligoni convessi; vedremo che si possono possedere un numero arbitrario di lati. Gli spigoli sono costituiti da punti che appartengono a due soli dei piani delimitanti. I vertici sono punti che appartengono ad almeno tre dei piani delimitanti. Vedremo che si possono avere spigoli che appartengono ad un arbitrario numero di piani delimitanti.

Vertici, spigoli e facce di un poliedro convesso sono detti collettivamente **oggetti di frontiera** del poliedro; si tratta esclusivamente di oggetti lineari.

È importante osservare che un poliedro convesso si può ottenere come chiusura convessa dei suoi vertici.

G36:d.03 Per le configurazioni geometriche che si individuano in \mathbb{R}^3 si distinguono innanzi tutto le proprietà metriche, cioè le proprietà invarianti per applicazione di isometrie, e le proprietà topologiche, cioè le proprietà che non sono modificate quando si attuano sulle configurazioni delle deformazioni continue. Le caratteristiche degli oggetti di frontiera (le loro cardinalità e le loro proprietà di incidenza) sono invarianti topologici.

Si dice **scheletro** di un poliedro la struttura costituita dai suoi vertici e dai suoi spigoli e dalla relazione di incidenza. Lo scheletro di un poliedro è un grafo semplice. Si trova che esso è un grafo planare. Un grafo planare semplice è una struttura molto meno impegnativa di un poliedro: conviene quindi studiare il più possibile le proprietà dello scheletro di un poliedro per ricavarne proprietà della figura solida.

G36:d.04 I poliedri convessi costituiscono un insieme di figure geometriche tridimensionali molto estesa, variegata e ricca di applicazioni. Come in parte vedremo, essi si possono classificare in vari modi e conseguentemente possono essere identificati con nomi diversi e anche con codifiche che tendono a razionalizzarne la popolazione.

Una prima distinzione tra i poliedri si basa sul numero delle loro facce. La nomenclatura conseguente costituisce un tipico esempio di nomenclatura derivata dalla lingua greca.

Si dice **pentaedro** un poliedro con 5 facce, **esaedro** un poliedro con 6 facce.

Un poliedro si dice invece: **ettaedro** se presenta 7 facce, **ottaedro** se ha 8 facce, **enneaedro** se ha 9 facce, **decaedro** se ha 10 facce, **endecaedro** se con 11 facce, **dodecaedro** con 12 facce, **tridecaedro** o **triskaidecaedro** con 13, **tetradecaedro** o **tetrakaidecaedro** con 14, . . . **icosaedro** con 20, **triacontaedro** con 30, **ectoedro** con 100, **chiliaedro** con 1000, **miriaedro** con 10 000, **megaedro** con 1 000 000 .

G36:d.05 Tra le classi dei poliedri consideriamo per prima la classe dei parallelepipedi.

Un **parallelepipedo** è un poliedro delimitato da sei facce ottenibili da tre duetti di piani paralleli, questi 6 piani non presentando nessun'altra relazione di parallelismo.

Si abbiano i piani $\Pi_{p,q}$, per $p = 1, 2, 3$ e $q = 1, 2$ e si abbia $\Pi_{p,1} // \Pi_{p,2}$ per $p = 1, 2, 3$ e $p \neq r \implies \Pi_{p,1} // \Pi_{r,1}$.

Le intersezioni dei semispazi determinati dai tre duetti di piani conducono ad un poliedro che denotiamo con Pcl .

Ciascuno dei suoi vertici è ottenibile come intersezione di tre piani costituenti un triedro: abbiamo quindi gli 8 vertici

$$V_{q_1, q_2, q_3} := \Pi_{1, q_1} \cap \Pi_{2, q_2} \cap \Pi_{3, q_3} \quad \text{per } q_1, q_2, q_3 \in \{1, 2\} .$$

Questi vertici delimitano 6 facce, ciascuna appartenente ad un piano: per $p = 1, 2, 3$ e $q = 1, 2$ denotiamo con $F_{p,q}$ la faccia appartenente a $\Pi_{p,q}$

Per ogni $p = 1, 2, 3$ si hanno i duetti di facce $\{F_{p,1}, F_{p,2}\}$ che non hanno alcun punto in comune; due facce senza punti in comune si dicono **facce opposte**.

Consideriamo i tre segmenti orientati che hanno la prima estremità in $V_{1,1,1}$, cioè $\overrightarrow{V_{1,1,1} V_{2,1,1}}$, $\overrightarrow{V_{1,2,1} V_{1,1,1}}$, e $\overrightarrow{V_{1,1,2} V_{1,1,1}}$, ed i corrispondenti vettori $\mathbf{v}_1 := V_{2,1,1} - V_{1,1,1}$, $\mathbf{v}_2 := V_{1,2,1} - V_{1,1,1}$ e $\mathbf{v}_3 := V_{1,1,2} - V_{1,1,1}$.

Le traslazioni relative a questi ultimi e le loro opposte consentono di raggiungere da un qualsiasi vertice tutti i rimanenti; ad esempio $V_{1,1,2} Trsl_{\mathbf{v}_2} = V_{1,2,2}$ e $V_{2,1,1} Trsl_{\mathbf{v}_2} \circ_{lr} Trsl_{-\mathbf{v}_1} = V_{1,2,1}$. Inoltre consentono di traslare qualsiasi faccia nella sua opposta: ad esempio $F_{1,1} Trsl_{\mathbf{v}_3} = F_{1,2}$.

Per quanto riguarda gli spigoli, essi sono in numero di 12 e si possono identificare con indici che richiamano i duetti di piani alla cui intersezione appartengono, per cui si possa affermare :

$$\forall p_1, p_2 \in 1, 2, 3 \quad \text{con } p_1 \neq p_2 \quad , \quad q_1, q_2 \in \{1, 2\} \quad : \quad E_{p_1, q_1; p_2, q_2} \subset \Pi_{p_1, q_1} \cap \Pi_{p_2, q_2} .$$

Essi sono raggruppabili in 3 quartetti di spigoli paralleli: per $p = 1, 2, 3$ gli spigoli del p -esimo quartetto collegano i vertici di $F_{p,1}$ con quelli di $F_{p,2}$. Gli spigoli del quartetto paralleli a \mathbf{v}_1 sono ottenibili l'uno dall'altro applicando le traslazioni $Trsl_{\pm \mathbf{v}_2}$ e $Trsl_{\pm \mathbf{v}_3}$ e similmente per gli altri due quartetti.

Di conseguenza ciascuna delle facce ha 4 lati paralleli a due a due, cioè costituisce un parallelogramma. Due vertici del parallelepipedo aventi una delle forme $\{V_{1, q_2, q_3}, V_{2, 3-q_2, 3-q_3}\}$ per $q_2, q_3 \in \{1, 2\}$ si dicono costituire duetti di **vertici opposti**; più esplicitamente due vertici sono opposti sse i tre piani che individuano uno di essi sono diversi dai tre piani che individuano il secondo, ovvero sse appartengono a due terne di piani delimitanti senza alcun piano in comune.

Si hanno quindi quattro duetti di vertici opposti; ciascuno di essi individua un segmento -RRR chiamato **segmento diagonale del parallelepipedo**. si dimostra facilmente che questi segmenti passano per lo stesso punto che viene detto **baricentro del parallelepipedo**.

G36:d.06 Il parallelepipedo più semplice è in cubo delimitato dai piani $z = 0$ con $z = 1$, $x = 0$ con $x = 1$ e $y = 0$ con $y = 1$; lo chiameremo **cubo canonico** e lo denoteremo con **cub**.

I suoi 8 vertici sono esprimibili con l'espressione $\langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \rangle$ con $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = 0, 1$. dei suoi 12 spigoli 3 corrispondono ai tre versori canonici; altri tre si ottengono sottoponendo **i** alle traslazioni $Trsl_{\mathbf{j}}$, $Trsl_{\mathbf{k}}$, $Trsl_{\mathbf{j}+\mathbf{k}}$; altri tre si ottengono sottoponendo **i** alle traslazioni $Trsl_{\mathbf{i}}$, $Trsl_{\mathbf{k}}$, $Trsl_{\mathbf{i}+\mathbf{k}}$; altri tre si ottengono sottoponendo **k** alle traslazioni $Trsl_{\mathbf{i}}$, $Trsl_{\mathbf{j}}$, $Trsl_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}$.

Altri cubi si ottengono applicando a **Cub** traslazioni, rotazioni e dilatazioni; si constata anche che ogni riflessione trasforma un cubo in un cubo.

A rigore occorre distinguere fra singoli cubi, famiglia dei cubi aventi una data lunghezza per tutti i loro spigoli e famiglia di tutti i cubi. Molte proprietà sono comuni a tutti i cubi, altre sono comuni a tutti i cubi con una determinata lunghezza di tutti i loro lati. Spesso si parla genericamente di cubo per riferirsi ad un qualsiasi cubo e si parla di cubo di lato a per fare riferimento ad uno qualsiasi dei cubi caratterizzati dalla lunghezza a .

G36:d.07 Si dice **cuboide** un parallelepipedo delimitato da tre coppie di piani mutuamente ortogonali. Un cuboide facilmente trattabile è quello avente un vertice nell'origine ed il vertice opposto nel punto $\langle a, b, c \rangle$, dove $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Questo cuboide si può ottenere dal cubo canonico sottoponendolo alle tre dilatazioni unidirezionali relative alle direzioni dei tre versori canonici $\{ \langle x, y, z \rangle \mapsto \langle ax, y, z \rangle \}$, $\{ \langle x, y, z \rangle \mapsto \langle x, by, z \rangle \}$ e $\{ \langle x, y, z \rangle \mapsto \langle x, y, cz \rangle \}$. Le 6 facce di un cuboide sono rettangoli. Se due delle tre lunghezze caratterizzanti i quartetti di lati paralleli coincidono si ottiene un cosiddetto **cuboide a base quadrata**.

Un parallelepipedo generico si può ottenere da un cuboide applicandogli due slittamenti ed una rotazione.

G36:d.08 Un cubo è un poliedro le cui facce sono costituite da quadrati, cioè da quadrilateri regolari, i quali sono tutti congruenti.

In generale si dice **poliedro regolare** un poliedro convesso le cui facce sono poligoni regolari congruenti. Il cubo è dunque un poliedro regolare; un altro poliedro regolare già incontrato è il tetraedro regolare, tetraedro le cui 4 facce sono triangoli regolari. In seguito incontreremo altri 3 poliedri regolari.

Il cubo possiede un insieme di simmetrie degne di nota. Per questo argomento conviene riferirsi al cubo che denoteremo con \mathcal{Q}_2 i cui vertici hanno le coordinate della forma $\langle \pm 1, \pm 1, \pm 1 \rangle$; questo cubo ha i lati di lunghezza 2 e diretti come i tre assi di riferimento e le facce parallele ai piani di riferimento.

\mathcal{Q}_2 è invariante rispetto alle seguenti permutazioni di \mathbb{R}^3 :

Riflessioni rispetto ai piani Oxy , Oyz e Ozx .

Riflessioni rispetto ai 6 piani caratterizzati dalle equazioni $Y = x$, $y = -x$, $z = y$, $z = -y$, $x = z$ e $x = -z$. ciascuno di questi piani contiene due lati opposti, definendo come duetto di lati opposti di un parallelepipedo un duetto di lati paralleli definiti da due duetti di piani delimitanti senza piani in comune.

Rotazioni degli angoli $\pi/2$, π e $3\pi/2$ intorno alle 3 rette passanti per i punti centrali di due facce opposte, ossia intorno ai tre assi di riferimento nel caso di \mathcal{Q}_2 .

Rotazioni dell'angolo π intorno alle 6 rette passanti per i punti medi dei lati di ciascun duetto di lati opposti; queste rette passano tutte per il centro del cubo e sono individuate dai vettori $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{k} + \mathbf{i}$ e $\mathbf{k} - \mathbf{i}$.

Rotazioni degli angoli $2\pi/3$ e $4\pi/3$ intorno a ciascuna delle 4 rette passanti per i due punti appartenenti ad un duetto di vertici opposti; queste rette passano tutte per il centro $\mathbf{0}_3$ del cubo e sono individuate dai vettori $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

G36:d.09 Passando da un cubo ad un parallelepipedo più generico l'insieme delle simmetrie si riduce, anche considerevolmente.

Consideriamo il cuboide avente come vertici i punti $\langle \pm a, \pm a, \pm c \rangle$ per $a, c \in \mathbb{R}_+$ e che denotiamo con $Cbd_{a,a,c}$. Esso presenta due facce quadrate "orizzontali" (cioè parallele al piano Oxy) congruenti con il quadrato con i lati di lunghezza $2a$ e 4 facce rettangolari "verticali" (cioè parallele all'asse z) i cui lati misurano $2a$ e $2c$.

Le sue simmetrie sono costituite dalla riflessione rispetto al piano Oxy , dalla simmetria centrale rispetto all'origine e da simmetrie che si possono considerare le omologhe in 3D delle simmetrie del quadrato. In effetti $Cbd_{a,a,c}$ è invariante anche per le riflessioni rispetto ai 4 piani verticali $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$, e per le rotazioni intorno all'asse Oz per le ampiezze angolari $\pi/2$, π e $3\pi/2$.

Consideriamo anche il più generico cuboide avente come vertici i punti $\langle \pm a, \pm b, \pm c \rangle$ per $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ e che denotiamo con $Cbd_{a,b,c}$. Esso presenta 6 facce rettangolari, due facce orizzontali congruenti con il rettangolo con i lati di lunghezza $2a$ e $2b$, 2 facce parallele ad Oyz di estensione $2b \times 2c$ e 2 facce $2a \times 2c$ parallele ad Oxz .

L'insieme delle sue simmetrie è costituito dalla riflessione rispetto al piano Oxy , dalla simmetria centrale rispetto all'origine, dalle riflessioni rispetto ai piani Oxz e Oyz , dalla rotazione intorno all'asse Oz dell'ampiezza angolare π e dalla simmetria centrale rispetto all'origine.

G36:d.10 Eserc. Determinare le simmetrie dei seguenti parallelepipedi:

- (a) Parallelepipedo retto-rombico, cioè parallelepipedo delimitato da due facce rombiche e 4 facce rettangolari congruenti ortogonali alle precedenti.
- (b) Parallelepipedo con due facce costituenti un parallelogramma e 4 facce rettangolari congruenti ortogonali alle precedenti.
- (c) Parallelepipedo determinato da una terna di segmenti con una stessa estremità e di lunghezze uguali, parallelepipedo avente 6 facce costituite da rombi congruenti.
- (d) Parallelepipedo determinato da una terna di segmenti con una stessa estremità e di lunghezze uguali, parallelepipedo avente 2 facce costituite da rombi congruenti e da 4 facce costituite da parallelogrammi raggruppabili sia in due duetti ciascuno con facce congruenti, sia in duetti in ciascuno dei quali si hanno due facce scambiabili per riflessione.
- (e) Parallelepipedo generico.

G36:d.11 Consideriamo un triangolo $T = \Delta(V_1, V_2, V_3)$ sul piano Oxy , con $V_i = \langle v_{i,1}, v_{i,2}, 0 \rangle$ per $i = 1, 2, 3$ ed il triangolo ottenuto sottoponendo al precedente la traslazione associata al vettore $h\mathbf{k}$,

$$T' = \Delta(V'_1, V'_2, V'_3) := Trsl_{h\mathbf{k}}(T) \quad \text{con} \quad V'_i = \langle v_{i,1}, v_{i,2}, h \rangle \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3.$$

Il pentaedro Pr delimitato dalle due facce orizzontali T e T' e dalle tre facce rettangolari $V_1, V_2, V'_2, V'_1, V_2, V_3, V'_3, V'_2$, e V_3, V_1, V'_1, V'_3 si dice **prisma retto** avente come base T e come altezza h .

Evidentemente questo solido si trasforma in se stesso per l'applicazione della riflessione rispetto al piano orizzontale $z = \frac{h}{2}$. Se il triangolo T è scaleno nessun'altra trasformazione effettiva trasforma Pr in se stesso.

Se invece T è un triangolo isoscele, anche la riflessione rispetto al piano parallelo all'asse Oz e passante per il punto medio del lato diverso dagli altri due e dal vertice comune a questi ultimi lascia Pr invariato.

Infine se T è un triangolo equilatero, ossia regolare, le simmetrie del prisma Pr sono:

ciascuna delle tre riflessioni rispetto al piano verticale che passa per un vertice e per il punto medio degli altri due,

le due rotazioni intorno all'asse verticale passante per il centro di T (punto di incontro delle tre altezze, ossia delle tre mediane, ossia delle tre bisettrici) per le ampiezze angolari $2\pi/3$ e $4\pi/3$.

Più in generale si abbia un poligono P di n vertici e non intrecciato nel piano Oxy e sia $P' := Trsl_{h\mathbf{k}}(P)$; si dice **prisma retto** a base poligonale costituita da P ed altezza h il poliedro Pr delimitato dalle due facce orizzontali P e P' e dalle n facce rettangolari verticali aventi come vertici due vertici di P adiacenti, cioè appartenenti ad uno stesso lato ed i due vertici di T' ottenuti applicando ai precedenti $Tral_{h\mathbf{k}}$.

Questo prisma presenta $N_F = n + 2$ facce (cioè è un $(n + 2)$ -edro), $N_V = 2n$ vertici e $N_E = 3n$ spigoli; Inoltre esso è convesso sse è convesso il poligono P .

In generale solo la riflessione rispetto il piano $z = h/2$ lascia Pr invariato.

Se invece P è un poligono regolare sono simmetrie di Pr anche le rotazioni rispetto alla retta verticale passante per il centro C del poligono per ampiezze angolari multiple di $2\pi/n$ e le riflessioni rispetto ai piani verticali passanti per il centro C e per uno dei vertici di P . Inoltre se n è pari, diciamo $n = 2k$, il poliedro è anche invariante per la simmetria centrale avente come centro il punto ottenuto intersecando il suo asse di simmetria rotazionale con il piano $z = h/2$.

Tra i prismi retti vi sono i cuboidi ed i prismi retti a base rombica o parallelepipedica.

G36:d.12 Consideriamo un poligono P regolare appartenente al piano Oxy avente il centro nell'origine ed n vertici appartenenti alla circonferenza definita dalle equazioni $x^2 + y^2 = r^2$ e $z = 0$. Più precisamente i vertici di P siano i punti

$$(1) \quad V_i = \left\langle r \cos \frac{2\pi}{n}, r \sin \frac{2\pi}{n}, 0 \right\rangle \quad \text{per } i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad .$$

Consideriamo inoltre il punto $A = \langle 0, 0, h \rangle$ con $h \in \mathbb{R}_+$. Si dice **piramide retta con base regolare** P ed **apice** in A il poliedro che denotiamo con Prm le cui facce sono P ed i triangoli T_i per $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, essendo T_i definito dai vertici V_i, V_{i+1} ed A (ove si intende che sia $V_n := V_0$).

Chiaramente le facce T_i sono triangoli isosceli in numero di $N_F = n + 1$, i vertici $N_V = n + 1$ e gli spigoli in numero di $N_E = 2n$; di questi n i lati di P ed hanno lunghezza $r \sin \frac{\pi}{n}$, mentre n hanno come estremità uno dei V_i ed A ed hanno lunghezza $\sqrt{h^2 + r^2}$.

Le simmetrie di Prm sono in stretto collegamento con quelle del poligono regolare di n lati: le rotazioni intorno all'asse Oz degli angoli multipli di $\frac{2\pi}{n}$ e, se n è pari, le riflessioni rispetto ai piani verticali passanti per $\mathbf{0}_3, A$ e per uno dei vertici e le riflessioni rispetto ai piani verticali passanti per $\mathbf{0}_3, A$ ed il punto medio di un lato.

Rispetto alle simmetrie dei prismi retti a base regolare manca la riflessione rispetto al piano $z = h/2$ e la simmetria centrale nel caso di n pari. Delle simetrie analoghe alle precedenti si hanno invece nei poliedri chiamati **bipiramidi** o **dipiramidi**. Una bipiramide retta a base regolare si può definire come il poliedro ottenuto incollando ad una piramide retta avente base regolare che denotiamo con P , la piramide ottenuta dalla precedente per riflessione rispetto al piano contenente P .

In tal modo si ottiene un poliedro con $N_F = 2n$ facce (triangoli isosceli), $N_V = n + 2$ vertici ed $N_E = 2n$ spigoli.

È interessante osservare alcune particolari piramidi e bipiramidi.

Le piramidi a base triangolare regolare sono i tetraedri ed in particolare il tetraedro regolare di lato a ha come altezza $a \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le piramidi a base quadrata regolare di opportuna altezza costituiscono il poliedro ottenibile intersecando un cubo con il semispazio contenente un suo vertice V e delimitato dal piano passante per i suoi tre vertici adiacenti a V .

Tra le bipiramidi con base triangolare regolare di lato s quella con gli spigoli restanti (in numero di 6) aventi la stessa lunghezza s costituisce un esaedro regolare, in quanto tutte le sue facce sono triangoli congruenti tra di loro (e con la base).

G36:d.13 Può essere utile precisare per le figure solide come le precedenti l'area complessiva delle loro facce piane; un tale valore reale positivo viene detto **area superficiale totale** della figura. Esso potrebbe

essere utile per affrontare problemi pratici, ad esempio problemi di verniciatura.

La determinazione di quest'area nel caso dei solidi precedenti è piuttosto semplice e ci limitiamo a proporre come esercizi il calcolo delle loro aree che esprimiamo con notazioni facilmente precisabili della forma $S_{p,q}$, ove p e q individuano parametri della figura.

(1) Prop.: Dimostrare che per il cubo avente lato $2a$ è $S_a = 24a^2$.

(2) Prop.: Dimostrare che per il cuboide avente lati $2a$, $2b$ e $2c$ è $S_{a,b,c} = 8(ab + bc + ca)$.

(3) Prop.: Dimostrare che per il parallelepipedo avente come spigoli che incidono in un vertice rappresentati dai vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , posto $a := |\mathbf{a}|$, $b := |\mathbf{b}|$ e $c := |\mathbf{c}|$, si ha per l'area

$$S_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}} = 2(ab \sin \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} + bc \sin \widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}} + ca \sin \widehat{\mathbf{c},\mathbf{a}}).$$

(4) Prop.: Dimostrare che per il prisma retto con base avente area B e perimetro p e avente altezza h è $S_{B,p,h} = 2B + ph$.

(5) Prop.: Dimostrare che per la piramide retta avente alla base un poligono regolare con n lati ciascuno di lunghezza a ed avente altezza h :

l'apotema del poligono di base è $t = \frac{a}{2} \tan(\pi(1/2 + 1/n))$,

la superficie di base è $\frac{1}{2}nat$,

la superficie laterale è $\frac{1}{2}\sqrt{h^2 + t^2} na$;

la superficie totale è $\frac{1}{2}nat \left(1 + \sqrt{1 + \frac{h^2}{t^2}} \right)$

G36:e. Prodotto vettore e prodotto misto di vettori

G36:e.01 Si dice **prodotto vettore** (in inglese *cross product*) di due vettori $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ in \mathbb{R}^3 , il vettore ottenibile sviluppando il determinante

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} := \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1(u_2v_3 - u_3v_2) + \mathbf{e}_2(u_3v_1 - u_1v_3) + \mathbf{e}_3(u_1v_2 - u_2v_1).$$

Il prodotto vettore è una operazione binaria su \mathbb{R}^3 , cioè una funzione del genere $\{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3\}$.

Dalla definizione si ricava facilmente che si tratta di una **operazione bilineare anticommutativa**:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \quad (\text{anticommutatività})$$

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3, a, b \in \mathbb{R} : (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = a\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + b\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} \wedge (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + b\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \quad (\text{bilinearità})$$

G36:e.02 (1) Prop.: Due vettori di \mathbb{R}^3 sono collineari se e solo se il loro prodotto vettore è il vettore nullo.

Dim.: Se due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} sono collineari, si ha $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ con $k \in \mathbb{R}_{nz}$ e quindi il determinante della definizione presenta due righe proporzionali e fornisce $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}_3$.

Per il viceversa da $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}_3$ si ricavano le relazioni di proporzionalità $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$, relazioni che esprimono il parallelismo dei due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} .

È utile tenere presenti i prodotti vettori dei versori della base canonica di \mathbb{R}^3 :

$$(2) \quad \begin{array}{lll} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3 = -\mathbf{0} \end{array}$$

Queste uguaglianze si possono unificare servendosi dei cosiddetti **simboli di Ricci - Levi-Civita** (v. [[Gregorio Ricci-Curbastro]] e [[Tullio Levi-Civita]]):

$$\epsilon_{i,j,k} := \begin{cases} 1 & \text{sse } \langle i, j, k \rangle = \langle 1, 2, 3 \rangle, \langle 2, 3, 1 \rangle, \langle 3, 1, 2 \rangle \\ -1 & \text{sse } \langle i, j, k \rangle = \langle 1, 3, 2 \rangle, \langle 2, 1, 3 \rangle, \langle 3, 2, 1 \rangle \\ 0 & \text{sse altrimenti} \end{cases} .$$

Servendosi di tali simboli, chiaramente collegati alle permutazioni dei tre interi 1, 2 e 3 e alle loro parità, si ha l'uguaglianza concisa

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{i,j,k} \mathbf{e}_k .$$

G36:e.03 Il prodotto vettore ha un significato geometrico assai rilevante che ci proponiamo di individuare.

(1) Prop.: Il prodotto $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è un vettore ortogonale sia ad \mathbf{u} che a \mathbf{v} .

Dim.: Infatti dalla definizione si trova

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = (u_2v_3 - u_2v_2)u_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)u_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)u_3 = 0 ;$$

inoltre applicando la anticommutatività e scambiando \mathbf{u} e \mathbf{v} si trova

$$0 = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = -(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0 \blacksquare$$

Quindi il prodotto vettore di due vettori non collineari è un vettore ortogonale al piano al quale appartengono; questo fatto, limitatamente ai versori canonici, l'avevamo verificato in :d.02 .

Resta da interpretare la lunghezza del vettore; sviluppando ancora la definizione:

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 = (u_2v_3 - u_2v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 =$$

$$(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 ,$$

ovvero, posto $\phi := \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}$, $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\phi)^2 = (\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\phi)^2$, cioè

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \sin\phi .$$

Quindi il modulo del prodotto vettore fornisce l'area del parallelogramma costruito sui due vettori composti.

Più completamente a quest'area viene attribuito un segno. L'area è positiva se i tre vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ costituiscono una terna destrorsa, mentre viceversa l'area determinata da \mathbf{u} e \mathbf{v} è negativa se questi vettori e il loro prodotto vettore costituiscono una terna sinistrorsa.

Questa interpretazione del segno dell'area è coerente con le definizioni date per le aree con segno, a partire da quelle definite da istogrammi in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; inoltre è in accordo con le formule relative ai versori canonici in :d.02(2) .

G36:e.04 Possiamo ora trovare un'espressione per l'area di un triangolo avente per vertici tre punti qualsiasi di \mathbb{R}^3 , $P_i = \langle x_i, y_i, z_i \rangle$ per $i = 1, 2, 3$ e che denotiamo con $\triangle(P_1, P_2, P_3)$. L'area di questo triangolo è la metà del modulo dell'area del parallelogramma determinato dai vettori applicati $\overrightarrow{P_2 - P_1}$ e $\overrightarrow{P_3 - P_1}$: quindi

$$Area(\triangle(P_1, P_2, P_3)) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{P_2 - P_1} \wedge \overrightarrow{P_3 - P_1}| .$$

Esprimendo $\overrightarrow{P_2 - P_1} \wedge \overrightarrow{P_3 - P_1}$ in coordinate cartesiane, si trova

$$\mathbf{e}_1 \det \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} + \mathbf{e}_2 \det \begin{bmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{bmatrix} + \mathbf{e}_3 \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$\text{Area}(\Delta(P_1, P_2, P_3)) = \frac{1}{2} \left(\det \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix}^2 + \det \begin{bmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{bmatrix}^2 + \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}^2 \right)^{1/2}$$

Quando in particolare i punti appartengono al piano Oxy , si annullano le coordinate z e si ottiene

$$\text{Area}(\Delta(P_1, P_2, P_3)) = \frac{1}{2} \left(\det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \right).$$

G36:e.05 Si definisce come **prodotto triplo** dei vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} la composizione

$$(1) \quad (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$$

Tale composizione si può esprimere come il determinante della matrice le cui righe sono date dai tre vettori

$$(2) \quad \det \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}.$$

Dalle proprietà di simmetria dei determinanti discendono le seguenti uguaglianze

$$(3) \quad (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = -(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = -(\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = -(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}.$$

Il prodotto triplo esprime il volume con segno del parallelepipedo costruito sui tre vettori, il segno essendo positivo sse i tre vettori formano una terna destrorsa, essendo negativo sse formano una terna sinistrorsa.

Da quanto sopra segue subito un **criterio di complanarità di tre vettori**.

(2) Prop.: Tre vettori sono complanari se e solo se il loro prodotto triplo è uguale a 0 ■

G36:e.06 A questo punto si trova facilmente una espressione analitica del **volume di un tetraedro** qualsiasi individuato dai suoi 4 vertici $P_i = \langle x_i, y_i, z_i \rangle$. Tale volume V è 1/6 del modulo del volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori $\overrightarrow{P_2 - P_1}$, $\overrightarrow{P_3 - P_1}$ e $\overrightarrow{P_4 - P_1}$. Il fattore 1/6 si è ricavato in :3g . Quindi per il volume si trova

$$(1) \quad V = \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix}.$$

In forma più simmetrica e mnemonica si ha

$$(2) \quad V = \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}.$$

Queste formule sono spesso utili, in quanto tutti i solidi a facce piane sono decomponibili in tetraedri.

G36:e.07 Dati tre punti di \mathbb{R}^3 non allineati $P_i = \langle x_i, y_i, z_i \rangle$ per $i = 1, 2, 3$, cioè tali che $\overrightarrow{P_2 - P_1}$ e $\overrightarrow{P_3 - P_1}$ non siano proporzionali, si trova uno e un solo piano che li contiene. Questo piano Π si può denotare con $Plan_{3P}(P_1, P_2, P_3)$ e ci proponiamo di trovare la sua equazione generale.

Π è il luogo dei punti $P = \langle x, y, z \rangle$ tali che sono complanari i tre vettori $\overrightarrow{P - P_1}$, $\overrightarrow{P_2 - P_1}$ e $\overrightarrow{P_3 - P_1}$. La condizione di complanarità corrisponde all'annullamento del prodotto misto dei tre vettori, cioè all'equazione

$$\det \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = 0 .$$

Questa è l'**equazione del piano per tre punti** cercata, in quanto è riconducibile alla forma $ax + by + cz + d = 0$; le espressioni esplicite generali dei parametri a , b , c e d in funzione delle coordinate dei tre punti P_1 , P_2 e P_3 sono piuttosto elaborate, ma si possono determinare con manipolazioni algebriche completamente definite.

G36:f. Linee rette nello spazio

G36:f.01 Ogni retta nello spazio è individuata dalle equazioni di due piani non paralleli

$$(1) \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 .$$

Può essere comodo denotare la retta determinata dai due piani con la scrittura

$$(2) \quad \mathbf{Rtlin}_{\Pi\Pi}(a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2) .$$

Il **fascio di piani** che si intersecano in questa retta è individuato dall'equazione

$$(3) \quad \lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

al variare di λ e μ .

G36:f.02 La retta che passa per il punto $P_1 = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ e che possiede la direzione del vettore $\mathbf{d} = \langle l, m, n \rangle$ è individuata dalla relazione di proporzionalità

$$(1) \quad \text{¶} \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \text{ ¶} .$$

Tale retta può essere comodo denotarla con

$$(2) \quad \mathbf{Rtlin}_{P,dir}(P_1, \mathbf{d}) .$$

Un vettore di direzione $\langle l, m, n \rangle$ della retta $\mathbf{Rtlin}_{\Pi\Pi}(a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2)$ si può ottenere con il prodotto vettore di due vettori ortogonali ai due piani $\langle l, m, n \rangle = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle \wedge \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$.

Quindi è individuato dalle tre coordinate

$$(3) \quad l = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} , \quad m = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} , \quad n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} .$$

G36:f.03 La retta passante per due punti $P_1 = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ e $P_2 = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$ si individua con le relazioni di proporzionalità riguardanti il vettore variabile $\overrightarrow{P - P_1}$, con $P = \langle x, y, z \rangle$ punto variabile sulla retta, e il vettore determinato dai due punti dati $\overrightarrow{P_2 - P_1}$:

$$(1) \quad \text{¶} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \text{ ¶} .$$

G36:f.04 La retta passante per un dato punto $P_1 = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ e avente la direzione di $\mathbf{d} = \langle l, m, n \rangle$ è esprimibile con una **terna di equazioni parametriche** di facile lettura

$$(1) \quad \begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt \end{cases} \quad \text{per } t \in \mathbb{R} .$$

Interpretando il parametro variabile t come il tempo, questo sistema si interpreta come descrizione cinematica di un punto mobile che percorre la retta in modo da trovarsi nell'istante $t = 0$ nel punto assegnato P_1 .

G36:f.05 Anche due rette generiche (non necessariamente incidenti) nello spazio determinano un quartetto SO di angoli (supplementari-opposti), e quindi un duetto di ampiezze di angoli supplementari. Si tratta delle due ampiezze che caratterizzano ogni quartetto SO di angoli ottenuto intersecando due rette parallele alle due rette date e complanari. Queste ampiezze angolari supplementari dipendono solo dai vettori di direzione delle due rette, anzi solo dai relativi raggi. Possiamo quindi pensare di avere le due rette assegnate come

$$\mathbf{Rtlin}_{P,dir}(P_1, \mathbf{d}_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{Rtlin}_{P,dir}(P_2, \mathbf{d}_2) .$$

Grazie a :a.05(3) si ottiene:

$$(1) \quad \cos(\widehat{\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2}) = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)}} .$$

Da questa uguaglianza si ricava subito un **criterio di perpendicolarità** delle due rette:

$$(2) \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 .$$

Dalla (1), oppure dalle equazioni parametriche delle due rette, si ricava un **criterio di parallelismo** di tali rette:

$$(3) \quad \left[\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \right] .$$

G36:f.06 Un **criterio di complanarità di due rette** si ricava piuttosto direttamente quando ciascuna di tali rette è data mediante un punto e un vettore di direzione. Consideriamo quindi le due rette

$$\mathbf{Rtlin}_{P,dir}(P_1, \mathbf{d}_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{Rtlin}_{P,dir}(P_2, \mathbf{d}_2) .$$

Esse sono complanari sse sono complanari i due vettori di direzione e il vettore corrispondente al vettore applicato che ha come estremi P_1 e P_2 . Questa situazione è caratterizzata dall'annullamento del prodotto triplo dei tre vettori, e quindi dall'equazione:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

G36:f.07 Una retta e un piano determinano un angolo, o meglio un duetto di ampiezze angolari supplementari. Supponiamo di avere la retta $\mathbf{Rtlin}_{P,dir}(P, \mathbf{d})$ con $\mathbf{d} = \langle l, m, n \rangle$, e il piano $\mathbf{Plan}(a, b, c, d)$; denotiamo con ϕ e $\pi - \phi$ le due ampiezze angolari cercate. Esse si ottengono dalle caratteristiche della configurazione formata dalla retta data e da una retta ortogonale al piano

$$\sin \phi = \pm \frac{al + bm + cn}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(l^2 + m^2 + n^2)}} .$$

Da questa espressione discendono direttamente un **criterio di parallelismo fra una retta e un piano**

$$al + bm + cn = 0$$

e un **criterio di perpendicolarità fra una retta e un piano**:

$$\left\{ \frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} \right\}.$$

G36:f.08 L'insieme delle rette passanti per un dato punto $P_1 = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ viene detto **stella di rette** di centro P_1 . Una particolare di queste rette viene determinata da un suo vettore di direzione \mathbf{d}_1 come $\mathbf{Rtlin}_{P,dir}(P_1, \mathbf{d}_1)$. La stella può quindi essere individuata come $\{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3_{nz} : \mathbf{Rtlin}_{P,dir}(P_1, \mathbf{d})\}$.

Nella pratica risulta in genere utile individuarla con le relazioni di proporzionalità

$$(1) \quad \left\{ \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \right\},$$

nelle quali i parametri l , m ed n sono considerati componenti del vettore di direzione \mathbf{d} variabile.

G36:g. Altri problemi relativi a rette e piani nello spazio

G36:g.01 La **condizione di intersezione in un punto di tre piani** dati da tre equazioni generali come $Plan(a_i, b_i, c_i, d_i)$ per $i = 1, 2, 3$ equivalgono alla possibilità di trovare una e una sola soluzione al sistema di tre equazioni in quattro variabili concernenti i piani stessi. Essa quindi si traduce in una richiesta di non annullamento di un determinante:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

G36:g.02 Dati due piani Π_1 e Π_2 che si intersecano in una retta \mathcal{R} , sono definiti i due piani che passano per la stessa retta e bisecano le due coppie di angoli diedri opposti-supplementari definiti dai piani dati; questi piani si dicono **piani bisettori** dei piani dati.

Per determinare i piani bisettori conviene partire dai due piani dati con le loro equazioni normalizzate

$$x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 - p_1 = 0 \quad \text{e} \quad x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 - p_2 = 0.$$

Le equazioni chieste appartengono al fascio di piani che contengono la \mathcal{R} e sono combinazioni lineari delle precedenti equazioni. Un piano si ottiene dalla richiesta di deviazioni uguali

$$(1) \quad (x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 - p_1) - (x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 - p_2) = 0;$$

L'altro si ricava dalla richiesta di deviazioni opposte

$$(x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 - p_1) + (x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 - p_2) = 0.$$

G36:g.03 L'espressione per la deviazione di un punto da un piano consentono anche di decidere se un piano interseca o meno un segmento di dati estremi P_1 e P_2 . Si tratta infatti di stabilire se le due deviazioni hanno segno opposto.

G36:g.04 Dati due piani Π_1 e Π_2 che si intersecano in una retta \mathcal{R} , e che quindi definiscono una quaterna di angoli diedri opposti-supplementari, e dati due punti A e B che non giacciono su tali

piani, si può porre il problema di stabilire se i due punti appartengono ad uno stesso angolo diedro, a due angoli diedri adiacenti o a due angoli diedri opposti (simmetrici) rispetto alla \mathcal{R} .

Scritte le equazioni normalizzate per i due piani, si valutano conseguentemente 4 deviazioni: $\delta_{A,1}$ del punto A da Π_1 , $\delta_{A,2}$ del punto A da Π_2 , $\delta_{B,1}$ del punto B da Π_1 e $\delta_{B,2}$ del punto B da Π_2 . Dai segni di uno di tali numeri si stabilisce in quale dei due semispazi definiti da un piano si trova uno dei punti.

Chiaramente entrambi i punti presentano gli stessi segni per ciascun piano sse appartengono allo stesso angolo diedro. I punti A e B presentano lo stesso segno per un piano e segni diversi per l'altro sse appartengono ad angoli diedri supplementari (adiacenti). I due punti presentano segni diversi per entrambi i piani sse appartengono ad angoli diedri opposti.

G36:g.05 Siano dati un punto $P_1 = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ ed un piano $\Pi = \text{Soln}(ax + by + cz + d = 0)$.

È spesso utile conoscere la retta che passa per P_1 ed è ortogonale a Π .

La soluzione è data chiaramente dalle equazioni

$$(1) \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} ;$$

infatti queste esprimono il parallelismo fra il vettore $\overrightarrow{P - P_1}$ con $P = \langle x, y \rangle$ variabile sulla retta, vettore diretto come la retta richiesta, e il vettore normale al piano dato.

Si pone spesso anche il problema di individuare il piano che passa per P_1 ed è parallelo a Π . Questo è caratterizzato dall'equazione

$$(2) \quad a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 ;$$

infatti questo piano appartiene alla stella dei piani passanti per P_1 e presenta un vettore normale uguale a quello che caratterizza il piano Π che si vuole parallelo.

Un altro problema che si risolve facilmente riguarda la determinazione di un piano che passa per il dato punto P_1 ed è ortogonale ad una retta \mathcal{R} data da equazioni della forma

$$(3) \quad \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} .$$

La soluzione è data nella forma $\text{Rtlin}_{P,dir}(\langle x_1, y_1, z_1 \rangle, \langle l, m, n \rangle)$; da questa si ricavano le relazioni di proporzionalità

$$(4) \quad l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0 .$$

Infatti il piano richiesto appartiene alla stella dei piani passanti per P_1 e presenta come vettore normale il vettore della direzione della retta \mathcal{R} , cioè $\langle l, m, n \rangle$.

G36:g.06 Poniamoci ora il problema di determinare il **piano contenente una retta e un punto** dati.

Si abbiano la retta $\mathcal{R} = \text{Rtlin}_{P,dir}(P_1, \mathbf{d})$, cioè la retta passante per il punto $P_1 = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ la cui direzione è determinata dal vettore $\mathbf{d} = \langle l, m, n \rangle$, ed il punto $P_2 = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$ che non appartiene alla retta; si chiede di individuare il piano Π che contiene la \mathcal{R} e P_2 .

Tale piano deve passare per P_2 ed avere come vettore normale un vettore ortogonale sia a $\overrightarrow{P_2 - P_1}$ che a $\langle l, m, n \rangle$, ovvero un vettore collineare con $\overrightarrow{P_2 - P_1} \wedge \langle l, m, n \rangle$. Il modo più semplice per giungere ad una equazione di Π consiste nel considerare il punto $P = \langle x, y \rangle$ variabile sul piano il vettore $\overrightarrow{P - P_1}$ e imporre la complanarità dei tre vettori $\overrightarrow{P - P_1}$, $\overrightarrow{P_2 - P_1}$ e \mathbf{d} , cosa che si ottiene chiedendo l'annullarsi del prodotto triplo $\overrightarrow{P - P_1} \cdot (\overrightarrow{P_2 - P_1} \wedge \langle l, m, n \rangle)$. Si ha quindi

$$(1) \quad \det \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{bmatrix} = 0 ;$$

questa è chiaramente un'equazione lineare nelle tre variabili x , y e z .

G36:g.07 affrontiamo ora il problema della determinazione del **piano contenente una retta e parallelo ad una seconda** non parallela alla prima.

Consideriamo due rette non parallele \mathcal{R}_i con $i = 1, 2$, ciascuna delle quali determinata da un punto $P_i = \langle x_i, y_i, z_i \rangle$ che le appartiene e da un vettore di direzione $\mathbf{d}_i = \langle l_i, m_i, n_i \rangle$:

$$(1) \quad \mathcal{R}_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad , \quad \mathcal{R}_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} \quad ;$$

si chiede il piano Π passante per \mathcal{R}_1 e parallelo alla \mathcal{R}_2 .

Per il piano richiesto si cerca una equazione della forma $ax + by + cz + d = 0$. La richiesta che \mathcal{R}_1 appartenga al piano equivale alle condizioni $P_1 \in \Pi$ e $\mathbf{d}_1 \cdot \langle l_1, m_1, n_1 \rangle = 0$, cioè alle equazioni

$$(2) \quad ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \quad \text{e} \quad al_1 + bm_1 + cn_1 = 0 .$$

Il parallelismo del piano con la seconda retta a sua volta equivale alla richiesta $\langle a, b, c \rangle \perp \langle l_2, m_2, n_2 \rangle$, ossia alla equazione $al_2 + bm_2 + cn_2 = 0$. abbiamo quindi un sistema di tre equazioni nelle quattro incognite a , b , c e d :

$$(3) \quad \begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ al_1 + bm_1 + cn_1 = 0 \\ al_2 + bm_2 + cn_2 = 0 \end{cases} .$$

Il significato delle incognite consente che tre di esse possono essere espresse in funzione della rimanente, che si può scegliere arbitrariamente, se diversa da 0. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$(4) \quad \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ l_1 & m_1 & n_1 & 0 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 0 \end{bmatrix} .$$

La condizione di non parallelismo di \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 implica che sia negata almeno una delle proporzionalità $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$. Il rango della matrice è 3 e quindi il sistema (4) porta ad una soluzione in un parametro per il quale si può fissare un valore arbitrario.

G36:g.08 Poniamoci il problema di determinare il **piano contenente una retta ed ortogonale ad un piano**.

Siano dati la retta $\mathcal{R} := \text{Rtlin}_{P,dir}(P_1, \langle l, m, n \rangle)$ ed il piano $\Pi := \text{Plan}(a_3, b_3, c_3, d_3)$.

Il piano contenente \mathcal{R} ed ortogonale a Π si può cercare nel fascio determinato dalla retta e caratterizzato dalle equazioni

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \quad , \quad \text{con } \lambda \text{ e } \mu \text{ da determinare.}$$

Si tratta quindi di applicare il criterio di ortogonalità.

G36:g.09 Equazione della retta che passa per un dato punto ed è ortogonale a una data retta.

G36:g.10 Distanza di un punto da una data retta.

G36:g.11 Si cerca la retta ortogonale a due rette mutuamente sghembe.

G36:g.12 Spesso si pone il problema di trovare la distanza fra due linee sghembe.

v.a. IP p. 144-147

G36:g.13 La **condizione di intersezione di due rette** date nella forma

$$\text{Rtlin}_{\Pi\Pi}(a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2) \quad \text{e} \quad \text{Rtlin}_{\Pi\Pi}(a_3, b_3, c_3, d_3, a_4, b_4, c_4, d_4)$$

conduce alla richiesta che abbia rango 3 la matrice

$$(1) \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} = 0.$$

in particolare si chiede l'annullamento del suo determinante.

G36:g.14 Consideriamo i tre piani $\Pi_i := Plan(a_i, b_i, c_i, d_i)$ per $i = 1, 2, 3$ e scriviamo $\mathbf{d}_i := \langle a_i, b_i, c_i \rangle$ i rispettivi vettori loro ortogonali; consideriamo inoltre la matrice

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

il cui determinante fornisce il prodotto triplo $\mathbf{d}_1 \cdot (\mathbf{d}_2 \wedge \mathbf{d}_3)$.

Se questi tre vettori sono proporzionali i tre piani sono paralleli e chiaramente la matrice M ha rango 1.

Due soli dei tre piani, denotiamoli con Π_h e Π_k , sono paralleli sse i due vettori $\mathbf{d}_h = \langle a_h, b_h, c_h \rangle$ e $\mathbf{d}_k = \langle a_k, b_k, c_k \rangle$ sono proporzionali; in tal caso la matrice M ha rango 2.

G36:h. Rassegna di trasformazioni lineari e matrici degli ordini 2 e 3

G36:h.01 In questo paragrafo presentiamo una certa gamma di matrici di profilo 2×2 e 3×3 sui reali le quali consentono di familiarizzarsi con le trasformazioni lineari del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e dello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 che le matrici rappresentano. Le interpretazioni geometriche delle azioni di queste matrici facilitano l'introduzione dei problemi di calcolo basilari dell'algebra lineare. Tra queste matrici inoltre si trovano vari strumenti primari per lo studio analitico delle configurazioni del piano euclideo e dello spazio euclideo.

G36:h.02 La matrice di ordine 2 che fornisce la trasformazione più semplice è la matrice identità. È utile osservare che la matrice identità si può esprimere come somma delle due matrici di proiezione

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e tenere conto delle loro azioni, trasformazione identica, proiezione su Ox e proiezione su Oy :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}.$$

Altre matrici molto semplici sono le matrici di transizione: esse hanno l'effetto di una proiezione seguita dallo scambio degli assi.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}.$$

Una matrice significativa è ottenuta sommando le due matrici di transizione: la corrispondente trasformazione è la riflessione del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ rispetto alla bisettrice del I e del II quadrante data dall'equazione $y = x$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Si trovano facilmente anche le matrici che danno le riflessioni rispetto alla retta $y = -x$, bisettrice del II e del IV quadrante ortogonale alla precedente, e rispetto agli assi Ox ed Oy :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} .$$

G36:h.03 Moltiplicando le due matrici precedenti si ottiene la matrice della riflessione del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ rispetto all'origine.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} .$$

Si constata facilmente che moltiplicando una matrice relativa ad una riflessione con sé stessa si ottiene l'identità; questa è la caratteristica delle trasformazioni involutorie.

G36:h.04 Consideriamo due semplici matrici, una triangolare superiore e una triangolare inferiore, e le loro azioni:

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ay \\ y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ bx + y \end{bmatrix} .$$

L'interpretazione delle loro azioni si ottiene facilmente dalle loro azioni sui versori di base:

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

La prima trasformazione si chiama **slittamento orizzontale** e comporta la traslazione dei punti delle rette orizzontali per spostamenti proporzionali alle distanze dall'asse Ox e la trasformazione delle rette verticali in rette oblique parallele con pendenza $1/a$. La seconda trasformazione si dice **slittamento verticale** e comporta traslazioni dei punti delle rette verticali e trasformazione delle rette orizzontali in rette con la pendenza b .

Si osserva che due slittamenti orizzontali (o verticali) commutano e la loro azione congiunta consiste in una sorta di slittamento orizzontale (verticale) somma algebrica.

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a + c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b + d & 1 \end{bmatrix} .$$

G36:h.05 La matrice di ordine 2 che rappresenta la rotazione del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ di un angolo con segno) θ è

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} .$$

Si verifica che per il prodotto di due matrici di rotazioni si ha coerentemente un'altra matrice di rotazione:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{bmatrix} .$$

Su questa espressione si possono ricavare alcune osservazioni significative. Il prodotto delle rotazioni piane è commutativo e naturalmente porta alla rotazione dell'angolo somma algebrica dei due angoli delle rotazioni fattore. Le espressioni per il seno e il coseno della somma di due angoli si ricavano formalmente con passaggi poco significativi, mentre utilizzando le matrici diventano geometricamente significative e più naturali.

G36:h.06 Nello spazio tridimensionale si possono definire vari proiettori, varie riflessioni e vari slittamenti. Le seguenti matrici rappresentano i proiettori, risp., su Oy , su Oxy e su Oyz :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le riflessioni rispetto i piani Oyz e $y = x$ e le riflessioni rispetto all'asse Oy e la retta $z = y$ del piano Oyz sono rappresentate, risp., da

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vediamo ora le matrici che esprimono slittamenti cominciando dalle seguenti.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La prima lascia invariate le coordinate y e z , mentre modifica proporzionalmente i valori della x : quindi rappresenta lo slittamento dei piani paralleli ad Oxz nella direzione \mathbf{e}_x in avanti se $\alpha > 0$ e all'indietro se $\alpha < 0$.

La seconda lascia invariate le coordinate x e z , mentre modifica proporzionalmente i valori della y : quindi rappresenta lo slittamento dei piani paralleli ad Oyz nella direzione \mathbf{e}_y in avanti se $\beta > 0$ e all'indietro se $\beta < 0$.

La terza lascia invariata la terza coordinata, mentre fa slittare i piani paralleli ad Oxy sottoponendoli a traslazioni nella direzione di $\langle \alpha, \beta \rangle$ proporzionali al valore della z .

Anche la quarta lascia invariata la terza coordinata ed esprime trasformazioni dei piani paralleli ad Oxy ; ciascuno di questi viene sottoposto ad una traslazione nella direzione \mathbf{e}_y di spostamento γz e ad uno slittamento delle rette parallele all'asse delle x di spostamento αy .

Passiamo alle seguenti matrici.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta & \tau & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \theta & \tau \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \theta & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \delta \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La prima esprime la trasformazione nella quale le rette parallele ad Oz , rette verticali, sono sottoposte a traslazioni; precisamente la retta relativa a $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$ viene sottoposta alla traslazione $Trsl_{(\theta x + \tau y)\mathbf{e}_z}$; quindi sono sottoposti a slittamenti sia i piani paralleli ad Oyz , sia quelli paralleli ad Ozx .

Effetti analoghi hanno la seconda e la terza matrice

La quarta matrice esprime l'automorfismo lineare avente come orbite i piani orizzontali, paralleli ad Oxy .

Le varie componenti di questo testo sono accessibili in <http://www.mi.imati.cnr.it/~alberto>