1

Capitolo G34

poligoni

Contenuti delle sezioni

27 pagine

G340.01 Il capitolo è dedicato alla presentazione di definizioni e proprietà basilari dei poligoni, figure introdotte a partire dalle poligonali orientate e trattate privilegiando gli strumenti della geometria lineare, ma ricorrendo anche alla trigonometria, a considerazioni di simmetria e a qualche nozione della metrica del piano.

Si danno numerosi risultati, molti dei quali non vengono dimostrati. In effetti si cura di più la facilità della consultazione dei risultati che la completezza delle dimostrazioni. Alcuni risultati presentati sono trovati e dimostrati anche in altri capitoli, ma vengono qui ripresentati per maggiore autonomia di queste pagine.

G34 a. poligoni: caratterizzazioni generali

G34a.01 Si definisce **poligonale orientata [piana]** una sequenza di punti-RR $\langle V_0, V_1, V_2, ..., V_s\rangle$ con $s \in \mathbb{P}$. I punti della sequenza si dicono **vertici della poligonale**, mentre i segmenti orientati $\langle V_{h-1}, V_h\rangle$ per $h = 1, 2, ..., s$ si dicono **spigoli orientati** della poligonale. Una poligonale si può individuare anche mediante la sequenza dei suoi spigoli orientati.

Ogni poligonale può essere presentata raffigurando con una freccia ciascuno dei suoi spigoli orientati.

Un'importante distinzione tra le poligonali vede contrapposte le **poligonali chiuse**, cioè quelle con nodo iniziale e terminale coincidenti, dalle rimanenti. Vedremo che tra le poligonali chiuse sono particolarmente importanti le **poligonali nonautosecanti chiuse**.

//input pG34a01

Si constata anche che gran parte delle proprietà e delle costruzioni riguardanti le poligonali chiuse conviene attribuirle alle **classi cicliche di poligonali chiuse**, entità che per molti aspetti sono più essenziali delle precedenti.

In genere, tuttavia, per concisione l'espressione "classe ciclica di poligonali chiuse" viene sostituita dalla più sbrigativa "poligonale chiusa" senza incorrere in ambiguità .

Si dice **poligonale riflessa**, o equivalentemente **poligonale opposta**, o anche poligonale trasposta della poligonale $\mathsf{P} = \langle V_0, V_1, V_2, ..., V_s\rangle$ la poligonale $\mathsf{P}^\mathsf{T} := \langle V_s, V_{s-1}, ..., V_2, V_1, V_0\rangle$.

Le poligonali riflesse delle poligonali costituenti una classe ciclica $\mathcal{P}$ costituiscono un'altra classe ciclica; questa viene detta **classe ciclica di poligonali opposta** o trasposta o riflessa della $\mathcal{P}$ e viene denotata con $\mathcal{P}^\mathsf{T}$.

L'orientazione delle poligonali ne facilita la definizione, ma per molti problemi, soprattutto per quelli riguardanti le poligonali chiuse, non serve distinguere tra una poligonale $\langle V_0, V_1, V_2, ..., V_{s-1}, V_s\rangle$ con $s \in \mathbb{P}$ e la sua riflessa $\langle V_s, V_{s-1}, ..., V_2, V_1, V_0\rangle$.
Spesso quindi si fa riferimento alle **poligonali nonorientate**, entità definibili come i duetti costituiti da due poligonali mutuamente riflesse. Questa semplificazione risulta conveniente soprattutto nelle molte argomentazioni che fanno uso rilevante delle raffigurazioni di queste configurazioni.

La raffigurazione di una poligonale nonorientata si ottiene dalla raffigurazione di una delle due corrispondenti poligonali orientate sostituendo ogni freccia con il corrispondente segmento.

G34a.02 Consideriamo la poligonale orientata chiusa $\mathsf{P} = \langle_{cy} V_0, V_1, V_2, ..., V_{n-1}, V_0\rangle$ e conveniamo che in una scrittura come la precedente per ogni $j \in \mathbb{Z}$ il punto V_j possa sostituire (identificarsi con) il punto $V_{j\%n}$. In tal modo consideriamo equivalente alla precedente ogni scrittura $\langle_{cy} V_k, V_{k+1}, V_{k+2}, ..., V_{k+n-1}\rangle$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Questa **convenzione della indicizzazione ciclica** consente di semplificare varie definizioni e formule: in particolare il generico spigolo orientato della poligonale si può denotare con $\overline{V_{i-1}, V_i}$.

Chiamiamo **poligono orientato** individuato dalla P, e denotiamo con $\mathbf{P}$, una entità costituita da questa classe ciclica di poligonali orientate chiuse e da varie altre entità costruibili a partire da essa che procediamo a introdurre.
Diciamo **vertici del poligono $\mathbf{P}$** i vertici della poligonale P e diciamo **spigoli orientati del poligono $\mathbf{P}$** gli spigoli orientati della P.

Un poligono come **P** individuato dalla sequenza ciclica dei suoi n vertici viene detto più specificamente n-**agono**. Questo termine si applica quando si fa riferimento a un n generico; quando si trattano i poligoni con ben definiti numeri di vertici, come vedremo, si utilizzano nomi più specifici determinati seguendo regole lessicali che richiamano i termini greci e talora latini e che vengono adottati con le opportune varianti per varie altre entità matematiche (ad esempio per i poliedri).

Per molte costruzioni e applicazioni l'orientazione di un poligono è indifferente. Si introduce quindi la nozione di **poligono nonorientato** definibile formalmente come duetto costituito da un poligono orientato e dal suo trasposto. Sostanzialmente si tratta di una entità ottenuta da un di poligono orientato ignorando tutte le sue caratteristiche derivanti dall'orientazione e quindi occupandosi delle proprietà che valgono sia per un poligono orientato che per il suo trasposto.
Un poligono nonorientato si raffigura eliminando dalla corrispondente poligonale orientata le orientazioni dei suoi spigoli. Gli spigoli di un poligono nonorientato $\overline{\mathbf{P}}$ sono chiamati anche **lati del poligono**.

Si dice **perimetro di un poligono** la lunghezza complessiva dei suoi lati. Va segnalato che spesso questo termine è usato per denotare la frontiera nonorientata del poligono. Spesso risulta comodo fare uso del **semiperimetro del poligono**, parametro definito come la metà del perimetro.

G34a.03 La definizione di poligonale orientata consente che si abbia una delle seguenti situazioni:

(a) due suoi vertici successivi coincidono;

(b) due suoi spigoli successivi sono allineati;

(c) due suoi spigoli non successivi hanno almeno un punto in comune.

Una poligonale nella quale si constata la situazione (a) si dice **poligonale ridondante**; si dice invece **poligonale degenere** se si riscontra la situazione (b); infine si parla di **poligonale intrecciata** o di **poligonale autosecante** sse si riscontra la (c).

Va rilevato che ciascuna delle situazioni precedenti si può verificare effettivamente: con constatazioni ovvie per la (a), verificando la coincidenza delle orientazioni di due spigoli successivi per la (b) e servendosi del procedimento che individua ogni eventuale punto di intersezione di due rette-RR per la (c). Nel caso (b) si può stabilire anche se uno spigolo contiene tutto o in parte lo spigolo precedente (o il successivo).
In genere le situazioni di degenerazione e di ridondanza sono prive di utilità e portano inutili complicazioni; è però possibile sostituire algoritmicamente una poligonale con tali anomalie mediante una più ridotta e maneggevole ottenuta eliminando vertici successivi ripetuti e sostituendo spigoli successivi allineati con la loro fusione.

//input pG34a03

Si tende quindi a escludere la presenza di degenerazioni. La cosa esige qualche attenzione, in quanto alcune variazioni di una poligonale o di un poligono possono introdurre degenerazioni. In particolare si possono incontrare poligoni degeneri come casi limiti di famiglie di poligoni nondegeneri.

In molte considerazioni tuttavia la presenza di situazioni degeneri può essere trascurata, in quanto si potrebbe eliminare attraverso considerazioni dettagliate che si possono ragionevolmente intuire. Spesso quindi la qualifica di nondegenere verrà sottintesa senza rischi di ambiguità sostanziali, cioè di ambiguità non eliminabili attraverso precisazioni individuabili senza difficoltà.

Occorre sottolineare il fatto che si possono distinguere effettivamente dalle poligonali autosecanti quelle prive di duetti di spigoli nonconsecuti con punti comuni, chiamate **poligonali nonintrecciate** o **poligonali nonautosecanti** o anche **poligonali semplici**.

G34a.04 Si dice **diagonale di un poligono** privo di vertici ripetuti (orientato o meno) ogni segmento che ha come estremi due vertici che non sono estremi di uno spigolo del poligono stesso.

//input pG34a04

(1) Prop.: Il numero delle diagonali di ogni poligono con n lati è dato da $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Dim.: Ciascuno dei vertici è collegato da una diagonale ad altri $n-3$ vertici, cioè ai vertici diversi da se stesso e da quelli adiacenti: $n(n-3)$ fornisce il numero delle coppie riguardanti vertici collegati da diagonali e ogni diagonale corrisponde a due di tali coppie ▮

G34a.05 Ricordiamo il procedimento che, data una coppia di punti-RR $\langle A, B\rangle$ e quindi individuata la retta orientata $\overrightarrow{AB}$, consente di stabilire se ogni altro punto-RR appartiene a questa retta, oppure al semipiano sulla sua sinistra, oppure al semipiano alla sua destra.

Dato un poligono orientato risultano definite la classe ciclica dei semipiani lasciati a sinistra dai suoi spigoli orientati e la classe ciclica dei semipiani lasciati a destra dai suoi spigoli. /JP Un poligono orientato si dice **poligono convesso** sse i suoi vertici si trovano in tutti i semipiani lasciati a sinistra delle rette orientate $\overrightarrow{V_{h-1}V_h}$ oppure in tutti i semipiani alla destra di tali rette. Nel primo caso si dice **poligono orientato positivamente**, nel secondo **poligono orientato negativamente**. /JP Se un poligono orientato è convesso, è tale anche il suo riflesso. Un poligono nonorientato si dice **poligono convesso** sse uno (ciascuno) dei dei suoi poligoni orientati è convesso.
Un poligono (orientato o meno) che non gode della suddetta proprietà si dice **poligono nonconvesso** o **poligono concavo**.

Si dice **punto interno di un poligono orientato positivo convesso** ogni punto che appartiene a tutti i semipiani a sinistra dei suoi spigoli orientati. Si dice **punto interno di un poligono orientato negativo convesso** ogni punto che appartiene a tutti i semipiani a destra dei suoi spigoli orientati.
L'insieme dei punti interni di un poligono orientato convesso coincide con l'insieme dei punti interni del suo poligono opposto. È quindi ben definito l'insieme dei punti interni di un poligono convesso nonorientato.
L'insieme dei punti interni del poligono convesso $\mathbf{P}$ (orientato o meno) si denota con $\mathsf{Intrn}(\mathbf{P})$.

I punti della poligonale che delimita un poligono convesso $\mathbf{P}$ (orientato o meno) si dicono punti di frontiera di $\mathbf{P}$. Si dice **insieme dei punti** di $\mathbf{P}$, e si denota con $\mathsf{SetY}(\mathbf{P})$, l'unione dei suoi punti interni e dei suoi punti di frontiera.

G34a.06 **(1) Prop.**: Consideriamo un poligono convesso $\mathbf{P}$ e due suoi punti A e B; al pologono appartengono tutti i punti del segmento AB.

Dim.: Supposto per assurdo che un punto C di AB diverso dagli estremi non sia interno, si dovrebbe avere la retta che comprende uno spigolo in grado di separare C da A e quindi B da A ▮

Di conseguenza dato un qualsiasi punto P di un poligono convesso, ogni altro suo punto Q è raggiungibile con il segmento PQ costituito solo da punti del poligono.

(2) Prop.: L'intersezione di due poligoni convessi è un poligono convesso ▮

Si dice **chiusura convessa di un poligono nonintrecciato $\mathbf{P}$** l'ampliamento dell'insieme dei suoi punti con tutti i punti dei segmenti che hanno come estremi due punti dello stesso $\mathbf{P}$.

//input pG34a06

Si dimostra facilmente che l'insieme dei punti così ottenuto è convesso e che questa funzione di ampliamento di un insieme piano è idempotente [B54]. Si dimostra anche che la chiusura convessa di $\mathbf{P}$ si può definire equivalentemente come l'intersezione di tutti i poligoni convessi che contengono $\mathbf{P}$.
Un altro modo equivalente per ottenere il poligono chiusura convessa di $\mathbf{P}$ consiste nel ridurre la poligonale che definisce $\mathbf{P}$ sostituendo le sottosequenze di spigoli che con una diagonale contenente punti esterni a $\mathbf{P}$ formano un poligono avente come lato la diagonale stessa.

G34a.07 Consideriamo, dunque, un poligono nonautosecante P, ossia una classe ciclica di poligonali chiuse nonautosecanti.
Dati due punti A e B del piano non appartenenti a P è possibile decidere se essi possono essere collegati da una poligonale che non intersechi P oppure se un tale collegamento non è possibile. La relazione "essere collegabili da una poligonale che non intersechi il poligono P è evidentemente una relazione di equivalenza che corrisponde a una bipartizione dell'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \mathsf{P}$. Delle due classi di equivalenza una è tutta contenuta nella chiusura convessa di P, mentre l'altra è illimitata.

La classe limitata si dice insieme dei **punti interni al poligono** P e si denota con $\mathsf{Intrn}(\mathsf{P})$; la classe illimitata si dice insieme dei **punti esterni al poligono** P.

Il piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ risulta dunque tripartito nell'insieme $\mathsf{Intrn}(\mathsf{P})$, nell'insieme dei punti appartenenti a P e nell'insieme dei punti esterni alla poligonale.

A questo punto possiamo definire come **poligono orientato** associato a P la coppia costituita da P e dall'insieme costituito dai punti interni alla poligonale.
Potremmo usare una scrittura come $\mathbf{P} := \langle \mathsf{P}, \mathsf{Intrn}(\mathsf{P}) \rangle$.
I punti interni a P si possono considerare anche punti interni al poligono $\mathbf{P}$, i punti di P si possono chiamare **punti di frontiera del poligono $\mathbf{P}$**. Consideriamo punti del poligono sia i suoi punti interni che i suoi punti di frontiera.
La poligonale nonintrecciata chiusa costituisce la frontiera in senso metrico del corrispondente poligono: infatti ogni cerchio con il centro in un punto della poligonale comprende sia punti interni che punti esterni al poligono.

G34a.08 Associamo un poligono orientato anche a ogni poligonale orientata intrecciata: una tale figura che non sia un poligono nonintrecciato viene chiamata **poligono intrecciato** o poligono coptico. Di una poligonale intrecciata si può trasformare in una collezione di poligonali nonintrecciate.
Il primo passo di questa trasformazione consiste nell'aggiungere come vertici i punti di intersezione di archi precedenti.
Successivamente si procede a considerare separate le sottopoligonali nonintrecciate che si possono individuare, procedendo sui punti che sono vertici di più di due spigoli e che chiamiamo **vertici multipli della poligonale**.
In ciascun vertice multiplo, denotiamolo con Q, entrano tanti spigoli quanti ne escono. Quindi procedendo su una qualsiasi delle sottopoligonali che iniziano con uno spigolo uscente da Q si deve tornare a Q, individuando due sottopoligonali chiuse della originale.
Queste due sottopoligonali complessivamente presentano meno vertici multipli di quella in corso di decomposizione, oppure meno coppie di spigoli entrante e uscente da un vertice multiplo.

Procedendo con questi stadi di decomposizione si devono ottenere poligonali con sempre meno intersezioni e con un numero finito di stadi si devono ottenere solo poligonali orientate semplici.

Va osservato che in molti stadi di separazione si possono scegliere più poligonali nonintrecciate da separare: quindi l'insieme delle poligonali semplici finali non è univocamente determinato.

//input pG34a08

Si definiscono punti interni di un poligono orientato intrecciato i punti interni ad almeno una delle poligonali semplici ottenute per decomposizione. A ciascuna coppia $\langle$ poligonale semplice, punto interno $\rangle$ si associa un segno seguendo la regola dei poligoni orientati semplici.

Ricordiamo che ad ogni poligono orientato $\mathbf{P} = \langle \mathsf{P}, Intrn(\mathsf{P})\rangle$ è associato il suo riflesso o trasposto definibile come

$$\mathbf{P}^\top := \left\langle \mathsf{P}^\top, Intrn(\mathsf{P}^\top)\right\rangle \ .$$

Ad ogni duetto di poligoni orientati mutuamente trasposti, estendendo quanto detto per i nonintrecciati, si associa un poligono nonorientato.

G34a.09 Con una poligonale chiusa nonintrecciata orientata abbiamo definito un poligono orientato: ricordiamo che l'orientazione del poligono si conviene sia positiva (o antioraria) sse un mobile che percorre la poligonale lascia alla sua sinistra i punti interni, mentre viene detta orientazione negativa (o oraria) in caso contrario.

I poligoni sono casi particolari di **figure-RR**, a configurazioni definite da una curva piana "sufficientemente regolare" che si può decomporre in segmenti e archi di curve dotate di tangenti continue. Le curve piane possono essere chiuse o aperte, orientate oppure nonorientate.

Si definiscono inoltre le **figure-RRemf**, classi di figure-RR equivalenti in quanto definite dalla stessa curva che ha il ruolo della loro frontiera e differenti solo per contenere o meno ciascuno dei punti della frontiera. Anche di queste entità si possono considerare sia le versioni orientate che le nonorientate.

Tra le figure-RRemf si hanno in particolare i**poligoni-RRemf**.

A ogni poligono-RRF orientato o, equivalentemente, alla poligonale semplice (orientata) che lo delimita, risulta utile associare un'**area** (con segno).

Più in generale risulta utile definire le aree con segno delle figure-RRemf orientate e possibilmente intrecciate.

Dimostreremo che queste aree possono essere ricondotte alle aree di triangoli orientati. La geometria analitica, come vedremo, mostra come possono essere calcolate mediante espressioni algebriche delle loro coordinate. Cominciamo con le aree dei poligoni-RRF orientati.

G34a.10 Consideriamo il vertice V_i di un poligono orientato nonintrecciato $\mathbf{P}$ insieme al suo vertice precedente V_{i-1} e al suo vertice successivo V_{i+1}.
Si dice **angolo interno del poligono** in V_i l'angolo $\angle V_{i+1}V_iV_{i-1}$.
Si dice **angolo esterno del poligono** in V_i l'angolo $\angle V_{i-1}V_iV_{i+1}$ (angolo esplementare del precedente).
Si dice **angolo di deviazione del poligono** in V_i l'angolo formato dalla semiretta con l'orientazione di $\overrightarrow{V_{i-1}V_i}$ e con l'estremità in V_i e dal segmento orientato $\overrightarrow{V_iV_{i+1}}$.

Dunque per ogni vertice del poligono la somma delle ampiezze dell'angolo interno e dell'angolo esterno è uguale a 2π.

Si distinguono i vertici con l'angolo interno inferiore all'angolo esterno (e quindi con l'angolo di deviazione positivo), da quelli con l'interno superiore (e l'angolo di deviazione negativo); questi ultimi sono angoli concavi.

//input pG34a10

Per ogni poligono orientato nonintrecciato positivo con n lati la somma delle ampiezze degli angoli di deviazione è 2π, cioè pari a un angolo giro. La somma delle ampiezze degli angoli interni è quindi pari a $n\pi - 2\pi = (n-2)\pi$.
Queste conclusioni, piuttosto intuitive per i poligoni nonintrecciati, sono valide anche per i poligoni orientati intrecciati. Questo fatto può essere reso più comprensibile passando per la decomposizione di un poligono intrecciato mediante poligoni orientati nonintrecciati.

G34a.11 Ogni poligono intrecciato è nonconvesso, come si constata considerando una parte dei segmenti tra due punti di spigoli orientati della poligonale di frontiera che si intersecano.

(1) Prop.: Un poligono è nonconvesso sse almeno uno dei suoi vertici V_i presenta un angolo interno di ampiezza negativa (ovvero compresa tra π e 2π), cioè un angolo interno concavo.

Dim.: Un segmento con una estremità in $\overline{V_{i-1}V_i}$ ed una in $\overline{V_iV_{i+1}}$ contiene sicuramente punti esterni al poligono ▮

(2) Prop.: Un poligono è nonconvesso sse almeno una diagonale contiene punti esterni.

Dim.: Se V_i presenta una deviazione negativa il segmento $\overline{V_{i-1}V_{i+1}}$ contiene punti esterni al poligono.

G34a.12 Come vedremo i poligoni convessi sono più semplici da manipolare dei nonconvessi. Accade comunque che ogni poligono nonconvesso si può ottenere affiancando un opportuno insieme di triangoli, poligoni evidentemente convessi.

//input pG34a12

Per quanto riguarda l'unione occorre considerare le figure -RRF classi di figure che possono contenere o meno i punti di frontiera. Di queste figure si può considerare l'unione e la decomposizione.
Questo fatto si dimostra per induzione sul numero dei lati. Infatti ogni poligono dotato di un vertice W con angolo interno nonconvesso possiede almeno una diagonale interna al poligono e con tale diagonale si può sezionare il poligono in due poligoni costruiti con i lati del precedente e con la diagonale in causa utilizzata per entrambi i nuovi poligoni. Evidentemente nei due poligoni ottenuti si ha un numero inferiore di vertici con angolo interno nonconvesso.

G34a.13 Un poligono si dice **poligono inciclico** o anche **poligono tangente** sse tutti i suoi lati sono tangenti a una circonferenza; questa viene chiamata **incirconferenza del poligono** o **circonferenza inscritta nel poligono**; il corrispondente cerchio viene detto **incerchio del poligono** e il suo raggio **inraggio del poligon** o **apotema del pologono**.

I poligoni inciclici sono poligoni convessi.

Un poligono si dice **poligono circumciclico** o **poligono ciclico** o anche **poligono secante** sse i suoi vertici appartengono a una circonferenza; questa viene chiamata **circumcirconferenza del poligono** o **circonferenza circoscritta al poligono**; il corrispondente cerchio viene detto **circumcerchio del poligono** e il suo raggio **circumraggio del poligono**.

I poligoni circumciclici possono essere nonintrecciati e convessi oppure intrecciati e nonconvessi.

Un poligono si dice **poligono equilatero** sse i suoi lati hanno tutti la stessa lunghezza. I poligoni equilateri possono essere nonintrecciati e convessi oppure intrecciati e nonconvessi.

Un poligono si dice **poligono equiangolo** sse gli angoli convessi relativi a tutti i suoi vertici hanno la stessa ampiezza. I poligoni equiangoli possono essere nonintrecciati e convessi oppure intrecciati e nonconvessi. Vi sono poligoni equiangoli nonintrecciati e convessi e non.

Un poligono si dice **poligono isogonale** sse è convesso ed equiangolo, ovvero sse è convesso e tutti i suoi angoli interni hanno la stessa ampiezza. In particolare vi sono poligoni isogonali inciclici e circumciclici.

//input pG34a13

Un poligono si dice **poligono isotoxale** sse tutti i suoi lati appartengono alla stessa orbita di simmetria. Vi sono poligoni isotaxali convessi e non.

G34a.14 Un poligono si dice **poligono regolare** sse è convesso, equilatero e isogonale, ossia sse è convesso, presenta tutti i lati della stessa lunghezza e presenta tutti i suoi angoli interni della stessa ampiezza. Equivalentemente si definisce poligono regolare

un poligono inciclico ed equilatero,

un poligono circumciclico, convesso ed equilatero.

un poligono i cui lati appartengono a una stessa orbita di simmetria rotazionale.

Consideriamo il poligono regolare con n lati, figura chiamata anche n-**agono regolare**.
L'ampiezza di ciascuno dei suoi angoli di deviazione è $\dfrac{2\pi}{n}$, mentre l'ampiezza di ciascuno dei suoi angoli interni è $\dfrac{(n-2)\,\pi}{n}$.

G34a.15 Denotiamo con ℓ la lunghezza dei lati dell'n-agono regolare. Ovviamente il suo perimetro è dato da $2\,s = n\,\ell$.

Il poligono è circumciclico e inciclico con circumcentro ed incentro coincidenti con il centro della simmetria rotazionale; tale punto si può chiamare **centro del poligono**.
L'n-agono regolare quindi si può considerare decomponibile in n triangoli isosceli congruenti aventi un vertice nel centro e i due vertici rimanenti essendo vertici adiacenti del poligono. Questi triangoli verranno chiamati **spicchi del poligono**.
I suoi angoli misurano $\dfrac{360°}{n} = \dfrac{2\pi}{n}$, $\dfrac{n-2}{2n}\,\pi$ e $\dfrac{n-2}{2n}\,\pi$.
Se denotiamo con R la lunghezza del circumraggio del poligono, i lati di ogni spicchio misurano ℓ, R ed R. Se denotiamo con r l'apotema del poligono, l'altezza di ogni spicchio dal centro del poligono al punto medio del suo lato misura r.
Evidentemente il circumraggio è dato da

(1) $$R \;=\; \frac{\ell}{2\sin\frac{\pi}{n}} \;=\; \frac{\ell}{2}\csc\,\frac{\pi}{n}\ .$$

Per la lunghezza dell'apotema del poligono regolare di n lati si ha $R^2 = r^2 + \dfrac{\ell^2}{4}$ e quindi essa si può ottenere come

(2) $$r = R\,\cos\,\frac{\pi}{2n} = \frac{\ell}{2\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{2}\,\cot\,\frac{\pi}{n}\,\ell\ .$$

Di conseguenza l'area dell'n-agono regolare è data da

$$\frac{1}{4}\, n \cot \frac{\pi}{n}\, \ell^2 \;=\; \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{n}\, r\, s\ . \tag{3}$$

Aggiungiamo che il poligono regolare con n lati inscritto in una circonferenza di raggio R e circoscritto ad una circonferenza di raggio r ha il perimetro dato da

$$2\,s = n\,\ell = 2\,n\,R \sin \frac{\pi}{n} = 2\,n\,r \tan \frac{\pi}{n} \tag{4}$$

ed area esprimibile come

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2}\, n\, R^2 \sin \frac{2\pi}{n} = n\, r^2 \tan \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}\, n\, \ell^2\, \frac{\sin 2\pi/n}{(2 \sin \pi/n)^2}\ . \tag{5}$$

G34a.16 Diciamo **insieme stellato** un sottoinsieme S di uno spazio vettoriale o affine $\boldsymbol{V}$ entro il quale esista almeno un punto V dal quale sono visibili tutti i rimanenti, cioè tale che per ogni altro punto $P \in S$ il segmento VP sia interamente contenuto in S.
Si dice **radice di un insieme stellato** l'insieme dei suoi punti dai quali sono visibili tutti i suoi punti.
La radice di un insieme stellato è un insieme convesso nello spazio $\boldsymbol{V}$. Un insieme di punti dello spazio VBi è convesso sse è un insieme stellato che coincide con la propria radice.

In particolare interessano gli **insiemi stellati piani**, sottoinsiemi stellati di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ancor più particolare si dice **insieme poligonale stellato** ogni insieme piano stellato che abbia come frontiera una poligonale.

Si dice **poligonale stellata** una poligonale chiusa (intrecciata o meno) tale che l'insieme di punti-RR che essa delimita costituisce un insieme poligonale stellato.

//input pG34a16

Va notato che un insieme poligonale stellato può essere individuato come insieme delimitato da diverse poligonali stellate, oltre che da una poligonale nonintrecciata (che potrebbe essere nonconvessa).

Si dice **poligono stellato** un poligono che possiede almeno un punto dal quale tutti i rimanenti sono visibili, cioè raggiungibili con un segmento costituito da suoi punti.
La radice di un poligono stellato si ottiene come intersezione di semipiani determinati dai segmenti della sua poligonale nonintrecciata.
Questa radice coincide con l'intero poligono sse tale figura è un poligono convesso.

Si dice **poligonale stellata circumcentrica** una poligonale intrecciata chiusa i cui vertici appartengono a una circonferenza.
Si dice **poligono stellato circumcentrico** un poligono individuabile con una poligonale stellata circumcentrica. Evidentemente l'insieme dei suoi punti costituisce un insieme poligonale stellato.

G34a.17 Si dice **poligonale stellata regolare** una poligonale chiusa che presenta una simmetria rotazionale. Essa deve essere circumcentrica. Denotiamo con C il circumcentro, con n il numero dei suoi vertici e con V_i per $i = 0, 1, ..., n-1$ i suoi vertici. Questi si collocano in n posizioni con coordinate angolari rispetto a C che differiscono di $\dfrac{2\pi}{n}$.
Ogni poligonale stellata regolare è caratterizzata da spigoli orientati della forma $\overrightarrow{V_i V_{i+k}}$ per $k < n$ e coprimo di n; k può chiamarsi parametro di avanzamento.
Si dice **poligono stellato regolare** un poligono definito da una poligonale stellata regolare.

Denotiamo con **PlgnStReg**(n, k) l'insieme dei poligoni stellati regolari con n vertici e parametro di avanzamento k. Questa figura è un poligono regolare (nonintrecciato) sse $k = 1$ o $k = n - 1$.
Oltre alle poligonali stellate regolari hanno interesse quelle che chiamiamo **multipoligonali stellate regolari** definibili con k divisore di n. Per $m = n/k$ intero positivo le multipoligonali caratterizzati da n e k si possono ottenere con m poligonali regolari stellate degli insiemi **PlgnStReg**(k, h) aventi lo stesso circumcentro ma ottenibili le une dalle altre attraverso rotazioni di angoli multipli di $\dfrac{2\pi}{m\,n}$.

//input pG34a17

G34 b. quadrilateri

G34b.01 Presentiamo qui i **quadrilateri**, procedendo con una certa completezza e ripetendo alcune delle considerazioni svolte per i poligoni generici.

Introduciamo un quadrilatero generico insieme a notazioni tipiche utili per la sua trattazione.

Consideriamo un ciclo di 4 punti del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \searrow \langle_{cy} A, B, C, D\rangle$ e a esso associamo il quadrilatero che tale ciclo caratterizza $\mathsf{qdltr}(A, B, C, D)$; di tale quadrilatero i punti della quaterna ciclica di partenza sono detti **vertici del quadrilatero**.

Si dicono **lati orientati** o **spigoli orientati del quadrilatero** $\mathbf{Q} = \mathsf{qdltr}(A, B, C, D)$ i segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DA}$. Come i vertici, anche i lati sono da considerare in ordine ciclico. Tuttavia per molte considerazioni i lati si possono considerare come entità nonorientate e si usano le semplici notazioni AB, BC, CD e DA per denotare sia i lati sia le rispettive lunghezze.

Si dicono duetti di **lati opposti** di $\mathbf{Q} := \mathsf{qdltr}(A, B, C, D)$ il duetto formato da $\langle A, B\rangle$ e $\langle C, D\rangle$ e quello comprendente $\langle B, C\rangle$ e $\langle D, A\rangle$ Gli altri 4 duetti di lati sono formati dai lati detti **lati adiacenti**.
Si dicono **diagonali del quadrilatero Q** i due segmenti AC e BD; anche questi spesso si confondono con le rispettive lunghezze.

La sequenza ciclica dei quattro lati si dice **perimetro** del quadrilatero. Nell'accezione più completa si tratta di una poligonale orientata chiusa del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; spesso tuttavia si trascura l'orientamento e si confondono tale circuito nonorientato e la sua lunghezza, esprimibile con la formula

$$2\,s \;=\; AB + BC + CD + DA\ .$$

G34b.02 Presentiamo una tassonomia dell'insieme dei quadrilateri.
Si distinguono innanzi tutto i **quadrilateri degeneri** dai nondegeneri. Nei primi almeno uno dei 4 tripletti di vertici (che si possono considerare cicli) presenta i suoi punti allineati; quindi un quadrilatero degenere si confonde con un triangolo e di per sè riveste poco interesse; tra i quadrilateri degeneri vi sono anche quelli con almeno un duetto di vertici successivi coincidenti. Nel seguito della sezione consideriamo solo quadrilateri nondegeneri.

Si distinguono poi i **quadrilateri intrecciati** dai **quadrilateri semplici**. I primi presentano due lati opposti consecutivi con un punto in comune, cosa che non accade ai semplici. Nel seguito consideriamo solo questi ultimi e in genere li chiameremo semplicemente quadrilateri; essi, come vedremo, si possono chiamare anche **quadrangoli**.

Ogni quadrilatero semplice tripartisce il piano nei tre insiemi: il primo è formato dai punti del perimetro, che non presenta punti ripetuti e costituisce una curva piana chiusa; il secondo dai punti interni al perimetro e il terzo dai punti esterni.
Il perimetro di un quadrilatero (semplice) separa i punti interni dai punti esterni e quindi a tale figura si può attribuire un'area. Ad un quadrilatero orientato si associa un'area con segno e vale la solita regola dell'area positiva associata a un perimetro antiorario e viceversa.

Ad ogni vertice del quadrilatero è associato un angolo interno: per tali angoli scriviamo $\alpha := \angle DAB$, $\beta := \angle ABC$, $\gamma := \angle BCD$ e $\delta := \angle CDA$; anche tali enti geometrici spesso si confondono con le rispettive ampiezze.
La somma delle ampiezze degli angoli interni è $360° = 2\,\pi$.
Si dicono coppie di **angoli opposti di un quadrilatero** (semplice) $ABCD$ la coppia $\langle \angle DAB, \angle BCD\rangle$ e la coppia $\langle \angle ABC, \angle CDA\rangle$.

G34b.03 Tra i quadrilateri si distinguono i **quadrilateri convessi**, che presentano tutti gli angoli interni convessi, dai **quadrilateri concavi** che presentano un angolo concavo, necessariamente unico.

(1) Prop.: Un quadrilatero è convesso sse contiene entrambe le sue diagonali, ovvero sse le sue diagonali hanno in comune un punto interno alla figura.
Viceversa un quadrilatero è concavo sse non contiene una delle sue diagonali, ovvero sse le sue diagonali non si intersecano ▮

//input pG34b03

G34b.04 Una classe particolare di quadrilateri è costituita dai **quadrilateri circumciclici**, cioè dai quadrilateri aventi tutti i vertici appartenenti ad una unica circonferenza.
Vi sono quadrilateri circumciclici intrecciati e nonintrecciati; tutti i quadrilateri nonintrecciati circumciclici sono convessi.

//input pG34b04

Si distinguono anche i **quadrilateri inciclici**, cioè i quadrilateri con i lati tangenti di un'unica circonferenza.

Tutti i quadrilateri tangenti sono convessi (e nonintrecciati).

Dato un quadrilatero nonintrecciato, si stabilisce che esso sia inciclico verificando che le 4 bisettrici degli angoli interni si incontrino in un unico punto: tale punto è il suo incentro.

//input pG34b04B

Un insieme ancor più particolare è costituito dai **quadrilateri biciclici**, cioè dai quadrilateri che sono sia circumciclici che inciclici. In genere per un tale quadrilatero circumcentro e incentro non coincidono, cioè si ha un quadrilatero bicentrico; in casi particolari i due centri coincidono e questo consente di parlare di **centro del quadrilatero**.

//input pG34b04C

G34b.05 Si dice **aquilone** o **deltoide**, (in inglese *kite*), un quadrilatero che presenta due duetti disgiunti di lati adiacenti congruenti. (Osserviamo che un parallelogramma è un quadrilatero che presenta due duetti disgiunti di lati adiacenti congruenti.)

Equivalentemente si definisce aquilone un quadrilatero dotato di un asse di simmetria che contiene due suoi vertici e quindi una delle sue due diagonali. I due vertici rimanenti devono appartenere a una retta ortogonale all'asse di simmetria. Quindi un aquilone fa parte dei quadrilateri aventi le due diagonali ortogonali.

//input pG34b05

Date le lunghezze di due lati adiacenti non (necessariamente) congruenti, che denotiamo con $a = AB$ e $b = BC$ supponendo $a \leq b$ e l'angolo $\overline{\alpha}$ convesso compreso tra i due lati DA e AB (non necessariamente

interno) aventi lunghezze inferiori, sono individuati due aquiloni, uno convesso e uno concavo. Essi si determinano individuando sulla retta bisettrice di α i due punti che distano b da B ai quali si può attribuire il ruolo di vertice C opposto di A.
Nell'insieme degli aquiloni, dunque, si individua una involuzione tra aquiloni concavi e convessi.
Gli aquiloni concavi sono anche chiamati **dardi**.

G34b.06 **(1) Prop.**: Ogni aquilone convesso è un quadrilatero inciclico.
Dim.: La simmetria assiale dell'aquilone implica che i triangoli individuati con le notazioni precedenti da $\triangle(A, B, D)$ e $\triangle(B, C, D)$ sono isosceli. Di conseguenza i due angoli interni ai vertici B e D sono uguali e l'aquilone si può considerare unione dei due triangoli $\triangle(A, B.C)$ e $\triangle(C, D, A)$ ottenibili l'uno dall'altro attraverso la riflessione rispetto alla retta $\overline{AC}$. Supponiamo sia $|IC| > AI$ e consideriamo il punto Z variabile tra C e l'intersezione I delle due diagonali e la circonferenza con centro Z e tangente a BC. All'avvicinarsi di Z a I il raggio della circonferenza cresce linearmente, all'inizio tocca solo BC e alla fine è secante di AB. Quindi si trova una posizione in IC per la quale la circonferenza è tangente di AB ed essa costituisce l'incentro dell'aquilone.

//input pG34b06

(2) Prop.: Un aquilone è un quadrilatero circumciclico sse gli assi di due lati adiacenti non congruenti si incontrano sull'asse di simmetria, ossia sse si può ottenere come unione di due triangoli retti congruenti per riflessione ▮

In tal caso il circumcentro è il punto medio della diagonale appartenente all'asse di simmetria.
Tra gli aquiloni biciclici solo i quadrati sono monocentrici.

L'area di un aquilone, servendosi delle notazioni considerate in b05 si può ottenere dalle seguenti espressioni (nelle quali C rappresenta anche C'):

$$(3) \qquad \boldsymbol{Area}\big(\mathsf{qdltr}(A, B, C, D)\big) \;=\; \frac{1}{2}\,AC \cdot BD \;=\; a\,b\,\sin(\angle ABC)\ .$$

G34b.07 Si dice **trapezio** un quadrilatero avente due lati opposti appartenenti a rette parallele; denotiamo con Trpz l'insieme dei trapezi.
I due lati su rette parallele sono detti **lati paralleli del trapezio** o anche **basi del trapezio** e di solito sono raffigurati come due segmenti orizzontali. I due lati opposti rimanenti sono detti **lati obliqui del trapezio**.
Chiamiamo **altezza di un trapezio** ogni segmento ortogonale alle due rette che contengono i suoi lati paralleli; questo termine viene usato anche per la lunghezza, unica, di tali segmenti. Si osserva che per taluni trapezi si possono tracciare altezze che incidono entrambi i lati paralleli, mentre per altri trapezi si possono tracciare solo altezze che incidono un solo lato parallelo.

//input pG34b07

Tra i trapezi si trovano anche i parallelogrammi (e tra questi i rettangoli e tra questi i quadrati).
Delle basi di un trapezio non parallelogramma si distinguono la **base maggiore** e la **base minore** Le rette contenenti i lati obliqui di un trapezio non parallelogramma si intersecano in un punto; consideriamo il triangolo che ha come vertici questo punto e i vertici estremità della base maggiore; esso contiene l'intero trapezio e si dice **triangolo circoscritto al trapezio**. Esso è l'unico triangolo minimale (ovvero è il triangolo minimo) tra quelli che contengono il trapezio.

//input pG34b07B

G34b.08 Si dice **trapezio rettangolo** un trapezio nel quale due angoli interni delimitati da un lato obliquo sono retti, ovvero un trapezio con un lato obliquo ortogonale ai due lati di base; evidentemente i due angoli rimanenti sono angoli supplementari.
Il relativo triangolo circoscritto è rettangolo; viceversa ogni trapezio il cui triangolo circoscritto è un triangolo retto è un trapezio rettangolo.
Si dice **trapezio ottusangolo** ogni trapezio che tra i due angoli interni che contengono la base maggiore ne presenta uno ottuso . Questi trapezi sono caratterizzati dall'avere il triangolo circoscritto ottusangolo.
Si dice invece **trapezio acutangolo** ogni trapezio che presenta acuti i due angoli che contengono la base maggiore.

Chiaramente un trapezio aut è rettangolo, aut ottusangolo, aut acutangolo, aut è un parallelogramma.

//input pG34b08

G34b.09 Si dice **trapezio isoscele** un trapezio nel quale hanno ampiezza uguale due angoli interni che incidono nella base maggiore. in un tale trapezio sono evidentemente uguali anche i due angoli interni delimitati dalla base minore.

È evidente che un trapezio isoscele presenta uguali anche i due angoli interni delimitati dall'altro lato parallelo, che due suoi angoli opposti sono supplementari, che l'asse di un suo lato parallelo è asse anche per il lato opposto e asse di simmetria per l'intera figura e che i due lati obliqui sono congruenti.
I trapezi isosceli sono particolari trapezi acutangoli e i rettangoli si possono considerare loro casi limite.

Ogni trapezio isoscele è un quadrilatero circumciclico e il suoi circumcentro si trova come intersezione dell'asse di simmetria con l'asse di simmetria di uno qualsiasi dei suoi lati obliqui. Viceversa un trapezio circumciclico è necessariamente isoscele, il circumcerchio essendo determinato dall'avere un diametro sull'asse di simmetria dei lati paralleli e il circumcentro sull'asse di uno dei lati obliqui.

Particolari trapezi isosceli sono quelli inciclici, cioè i trapezi biciclici; essi in genere sono bicentrici. Tra questi gli unici con incentro e circumcentro coincidenti, cioè monocentrici, sono i trapezi che possiamo considerare al limite o degeneri, costituiti dai quadrati e dai triangoli equilateri.

Altri particolari trapezi isosceli sono quelli che presentano tre lati di uguale lunghezza; tra questi, oltre ai quadrati, vi sono i trapezi che possono ottenersi con tre lati adiacenti di un poligono regolare e con la diagonale che collega i due vertici appartenenti ad uno solo dei tre lati [v.o.].

//input pG34b09

G34b.10 Consideriamo un trapezio generico i cui parametri sono individuati nella figura che segue.

//input pG34b10

In particolare denotiamo con h l'altezza di T, cioè la distanza tra le rette parallele $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; poniamo inoltre $\alpha := \widehat{ab}$, $\delta := \widehat{da}$, $p := AC$ e $q := BD$. Si trovano le seguenti formule:

$$h = d\,\sin\alpha = b\,\sin\beta \qquad , \qquad c = a - d\,\cos\alpha - b\,\cos\beta \qquad , \qquad \boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) = \frac{(a+c)\,h}{2}$$

$$p = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\beta} \qquad , \qquad q = \sqrt{a^2 + d^2 - 2\,a\,d\,\cos\alpha}\ .$$

G34b.11 Si dice **parallelogramma** un quadrilatero che ha i due duetti di lati opposti costituiti da segmenti congruenti paralleli. Due angoli interni adiacenti allo stesso lato sono evidentemente angoli supplementari. Per I parallelogrammi sono quindi trapezi particolari.
Le diagonali di un parallelogramma si intersecano nel punto medio per entrambi i segmenti.
La rotazione di 180° intorno al punto di intersezione delle due diagonali è in'involuzione del parallelogramma.

//input pG34b11

Si dice **rombo** un parallelogramma con i quattro lati di uguale lunghezza. Le diagonali di un rombo sono segmenti ortogonali; quindi un rombo è un particolare aquilone. Inoltre ciascuna diagonale è bisettrice di ciascuno dei due angoli interni relativi ai vertici che sono sue estremità.
Più precisamente l'insieme dei rombi è l'intersezione dell'insieme dei parallelogrammi e dell'insieme degli aquiloni.
Un rombo si può definire come aquilone dotato di due assi di simmetria.

G34b.12 Si dice **rettangolo** un parallelogramma i cui quattro angoli interni sono tutti angoli retti. Un rettangolo si può definire come trapezio isoscele e rettangolo.
Insieme ai rombi, i rettangoli sono i quadrilateri con due assi di simmetria.
Nel seguito denoteremo con **Rtng** l'insieme dei rettangoli piani.
Denoteremo inoltre con $rtng(P, Q, h)$ il rettangolo che ha due vertici adiacenti in P e Q e ha un terzo vertice S sulla retta passante per P, ortogonale alla $\overline{PQ}$ tale che $|PS| = h$ e con $\widehat{\overrightarrow{PQ}\,\overrightarrow{PS}} = 90°$.
Si dice **quadrato** un rettangolo con i lati tutti uguali. L'insieme dei quadrati è l'intersezione dell'insieme dei rombi e dell'insieme dei rettangoli.
Evidentemente il quadrato di lato ℓ ha le diagonali di lunghezza $\ell\sqrt{2}$, area $S = \ell^2$, apotema $r = \dfrac{\ell}{2}$ e circumraggio $R = \dfrac{\ell}{\sqrt{2}} \approx 0.7071067811865\,\ell$.

G34b.13 Consideriamo un quadrilatero generale $\mathbf{Q}$ e denotiamo con θ l'angolo $\angle AIB$. Per l'area di questo quadrilatero si ha

$$\boldsymbol{Area}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2}\,p\,q\,\sin\theta = \frac{1}{4}\,(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)\,\tan\theta = \frac{1}{4}\,\sqrt{4\,p^2\,q^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}\ .$$

I quadrangoli con le diagonali mutuamente ortogonali sono caratterizzati dall'uguaglianza $a^2 + c^2 = b^1 + d^2$ e dalla conseguente semplificazione dell'espressione per l'area nella $\boldsymbol{Area}(\mathbf{T}) = \frac{p\,q}{2}$.

I quadrilateri tangenti, quadrilateri dotati di inraggio che denotiamo con r, sono caratterizzati dalle uguaglianze

$$a + c = b + d \quad \text{e} \quad S = s \cdot r \ .$$

Se inoltre $\alpha + \gamma = \beta + \delta$, vale la formula $\boldsymbol{Area}(\mathbf{Q}) = \sqrt{a\,b\,c\,d}$.

Per i quadrilateri circumcentrici il cui circumraggio denotiamo con R, si dimostrano le seguenti uguaglianze:

$$(1) \quad \boldsymbol{Area}(\mathbf{Q}) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad , \quad R(\mathbf{Q}) = \sqrt{\frac{(a\,c + b\,d)(a\,d + b\,c)(a\,b + c\,d)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}} \ ,$$

$$(2) \quad p := \sqrt{\frac{(a\,c + b\,d)(a\,d + b\,c)}{a\,b + c\,d}} \quad , \quad q := \sqrt{\frac{(a\,c + b\,d)(a\,b + c\,d)}{a\,d + b\,c}} \quad , \quad p\,q = a\,c + b\,d \ .$$

G34 c. pentagoni e sezione aurea

G34c.01 Il poligono con 5 lati si chiama **pentagono**.
Esistono due tipi di pentagoni concavi: uno presenta un vertice con angolo interno concavo, l'altro due di tali vertici.
Ogni pentagono presenta 5 segmenti diagonali.

G34c.02 Determiniamo alcune misure di un pentagono regolare di lato ℓ. Per questo conviene esaminare la figura costituita dai suoi lati e dalle sue diagonali.

//input pG34c02

Questa figura costituisce la raffigurazione regolare di K_5, il grafo completo a 5 vertici [D26c. Diciamo A, B,C, D ed E i vertici del pentagono e denotiamo le 5 intersezioni interne delle diagonali con: $F := AD \cap BE$, $G := AC \cap BE$, $H := BD \cap CA$, $I := CE \cap BD$ e $J := DA \cap CE$.
L'ampiezza di ciascuno degli angoli interni è $\dfrac{3}{5}\,\pi = 108°$. Inoltre i tre angoli in cui un angolo interno viene diviso dai suoi due lati e dalle due diagonali che incidono nel suo vertice sono uguali e misurano $\dfrac{1}{5}\,\pi = 36°$: infatti, ad esempio, $\triangle(E, D, A) = \triangle(E, C, A)$ in quanto angoli alla circonferenza inscritti allo stesso arco e per simmetria $\triangle(E, D, A) = \triangle(A, D, B) = \triangle(B, D, C)$.
Ricordiamo il termine **triangolo-**$\langle p : q : r\rangle$ (con $p \leq q \leq r$) per i triangoli aventi ampiezze degli angoli interni nei rapporti p/q e q/r, cioè pari a $\dfrac{p}{p+q+r}\pi$, $\dfrac{q}{p+q+r}\pi$ e $\dfrac{r}{p+q+r}\pi$. Qsserviamo che un triangolo -$\langle 1 : 2 : 2\rangle$ è un triangolo isoscele con un angolo minore di $36° = \dfrac{\pi}{5}$ e i due angoli maggiori di $72° = \dfrac{2\pi}{5}$, mentre un triangolo -$\langle 1 : 1 : 3\rangle$ è un triangolo isoscele con un angolo maggiore di $108° = \dfrac{3\pi}{5}$ e due angoli minori di 36°. Nella nostra figura, denotata con $d = \phi\,\ell$ la lunghezza delle 5 diagonali, si individuano i seguenti insiemi di triangoli:

5 triangoli -$\langle 1 : 2 : 2\rangle$ i cui lati misurano ℓ e d ,

10 triangoli -$\langle 1 : 2 : 2\rangle$ i cui lati misurano $d - \ell$ ed ℓ ,

5 triangoli -$\langle 1 : 2 : 2\rangle$ i cui lati misurano $2\,\ell - d$ e $d - \ell$,

5 triangoli -$\langle 1 : 1 : 3\rangle$ i cui lati misurano ℓ e d ,

5 triangoli -$\langle 1 : 1 : 3\rangle$ i cui lati misurano $d - \ell$ ed ℓ .

G34c.03 Le caratteristiche dei triangoli-(1:2:2) vanno approfondite e, come vedremo, portano a una notevolissima gamma di risultati di grande interesse. Per questo conviene abbandonare temporaneamente i pentagono regolari per concentrarsi su una configurazione concernente questo tipo di triangoli e sui suoi parametri; inoltre ci facciamo aiutare da una configurazione analoga. Iniziamo dalla figura seguente.

//input pG34c03

In essa il triangolo ABC è un triangolo -$\langle 1 : 2 : 2\rangle$ che chiamiamo **triangolo aureo**; vedremo che esso è costruibile con riga e compasso.

Denotiamo con b la lunghezza dei suoi lati maggiori e con a quella del suo lato minore. Dobbiamo esaminare il valore del loro rapporto $\phi := \frac{b}{a}$, numero che per le sue numerose ed affascinanti proprietà viene chiamato, **numero di Fidia**, **rapporto aureo**, **sezione aurea** o **divina proporzione**. Tracciamo la bisettrice del triangolo nel vertice B ed otteniamo il triangolo simile $\triangle(B,C,D)$ i cui lati misurano $a = b\phi^{-1}$ ed $a\phi^{-1} = b\,\phi^{-2}$.
Evidentemente questa manovra di riduzione può essere ripetuta quante volte si vogliono e al q-esimo stadio si avrà un triangolo -$\langle 1:2:2\rangle$ i cui lati misurano $a\,\phi^{-(q-1}$ ed $a\,\phi^{-q}$.
Similmente il triangolo $\triangle(A,B,C)$ si può ampliare prolungando BC verso sinistra con un segmento CZ di lunghezza b in modo da ottenere un triangolo -$\langle 1:2:2\rangle$ i cui lati misurano $a\,\phi^2$ ed $a\,\phi$. Anche questa manovra di ampliamento può essere reiterata quanto si vuole e all'r-esima iterazione si ottiene un triangolo -$\langle 1:2:2\rangle$ i cui lati misurano $a\,\phi^{r+1}$ ed $a\,\phi^r$.
Abbiamo quindi una configurazione illimitatamente costruibile con riga e compasso che presenta una successione bilatera di triangoli -$\langle 1:2:2\rangle$. Si osserva che ogni manovra di riduzione si ottiene con la trasformazione ottenuta componendo una rotazione di $-(90+18)^\circ = -108^\circ$ avente come centro il punto D e i suoi trasformati e con una omotetia di fattore ϕ^{-1} avente come centro il punto C e gli analoghi pinti trasformati.

G34c.04 La similitudine tra due triangoli successivi, per esempio la similitudine tra $\triangle(A,B,C)$ e $\triangle(B,C,D)$, implica $\dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{b-a}$, ovvero $\phi = \dfrac{1}{\phi-1}$, cioè $\phi^2 - \phi - 1 = 0$.
Questa equazione ha due soluzioni, una positiva e una negativa:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad\qquad \phi_- := -\frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{2(1+\sqrt{5})} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{1}{\phi}\ .$$

Il numero di Fidia è un numero algebrico irrazionale: se fosse razionale sarebbe tale anche $\sqrt{5}$, radice quadrata di un intero nonquadrato di intero.
Dato che $\sqrt{5} \approx 2.36067\,97749\,97896\,964$, per il numero di Fidia si trova $\varphi \approx 1.61803\,39887\,49894\,8482$.

G34c.05 Una costruzione più semplice da interpretare riguardo un rettangolo che viene chiamato **rettangolo aureo**

//input pG34c05

G34c.06 A questo punto si ottengono facilmente i risultati che seguono.

$\phi^{-1} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi - 1 \approx 0.618034$;

$\phi^2 = \phi + 1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618034$; $\phi^{-2} = (\phi-1)^2 = \dfrac{3-2\sqrt{5}}{2} \approx 0.381966$;

$DJ = DI = AG = BG = \cdots = d - \ell = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\,\ell$ e $JI = FJ = \cdots = 2\ell - d = \phi^{-2}\ell$;

altezza DM, dove M è il punto medio di AB, $\sqrt{d^2 - \dfrac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\phi^2 - \dfrac{1}{4}} \cdot \ell = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\,\ell$;

$\cos\dfrac{\pi}{5} = \cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4} = \dfrac{\phi}{2} \approx 0.80901\,69943\,74947\,4241$;

$\sin\dfrac{\pi}{5} = \sin 36^\circ = \sin\dfrac{4\pi}{5} = \sin 144^\circ = \sqrt{1 - \dfrac{\phi^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \approx 0.58778525$

$\tan\dfrac{\pi}{5} = \tan 36° = \sqrt{5-\sqrt{5}} \approx 2.639320225002103036$;

$\cot\dfrac{\pi}{5} = \cot 36° = \dfrac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}}} \approx 0.3788854382$;

$\cos\dfrac{\pi}{10} = \cos 18° = \sin\dfrac{2\pi}{5} = \sin 72° = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \approx 0.951056516$;

$\sin\dfrac{\pi}{10} = \sin 18° = \cos\dfrac{2\pi}{5} = \cos 72° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0.30901699$

raggio del circumcerchio $R = \sqrt{\dfrac{2}{5-\sqrt{5}}}\cdot\ell \approx \dfrac{\ell}{1.17557\,05045\,8...} \approx 0.85065...\cdot\ell$;

raggio dell'incerchio $r = \dfrac{\ell}{2}\cot 36° = cdot\ell \approx \ell$;

sagitta $x = \sqrt{\dfrac{25-10\sqrt{5}}{10}}\cdot\ell$;

area $\phi^{-2}\cos 18°\,\ell = \dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\,\pi\,\ell^2 \approx 1.72047\,7401\cdot\ell^2$.

G34c.07 Il pentagono regolare si può ottenere con costruzioni che si servono solo di riga e compasso; si tratta di costruzioni sostanzialmente equivalenti una delle quali esposta già negli *Elementi di Euclide*.

Le tre figure che seguono mostrano come procede una costruzione che, rispetto ad Euclide che si serviva solo di proprietà di figure simili, si avvale del significato geometrico del numero $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

//input pG34c07

G34c.08 La raffigurazione regolare di K_5 può considerarsi la sovrapposizione di un pentagono regolare e della figura costituita dalle sue 5 diagonali. Tale figura è il più semplice membro della famiglia dei cosiddetti poligoni intrecciati regolari che riprenderemo in seguito; Come tale va chiamata **pentagono stellato regolare**; essa viene anche chiamata **pentagramma**, nonché pentangolo, pentalfa e stella a 5 punte.

In effetti si tratta di una figura che si incontra come motivo ornamentale e simbolico in una grande varietà di contesti figurativi, letterari, antropologici e culturali in senso lato.
A questo proposito si possono citare interpretazioni sumeriche, taoiste, giudaiche, pitagoriche, astrologiche, cristiane, islamiche, neopagane, massoniche, magiche, occultistiche, sataniche, faustiane, ...; non ci facciamo mancare neppure Dan Brown.
Oggi questa figura compare nelle bandiere dell'Etiopia e del Marocco.
Su questi temi [v.a. `https://en.wikipedia.org/wiki/Pentagram`].

G34 d. esagoni

G34d.01 I poligoni con 6 lati, gli **esagoni**, presentano 9 diagonali e somma degli angoli interni pari a $4\,\pi$.
Gli esagoni intrecciati possono presentare 1, 2 o 3 incroci di spigoli.

//input pG34d01

//input pG34d01B

Gli esagoni concavi possono presentare 1, 2 o 3 vertici concavi, cioè interni alla rispettiva chiusura convessa.

//input pG34d01C

G34d.02 Veniamo agli esagoni regolari. Un esagono regolare di dato lato ℓ si ottiene con un paio di semplicissime costruzioni che si servono solo di riga e compasso.

Entrambe le costruzioni iniziano tracciando il suo circumcerchio adottando per il suo raggio la lunghezza scelta per i suoi lati ℓ.

Per la prima costruzione si fissa un diametro del circumcerchio i cui estremi V_0 e V_3 costituiranno un duetto di suoi vertici opposti; successivamente con un compasso con punto fisso in questi vertici e apertura 2ℓ si determina il suo centro e infine si individuano i restanti 4 vertici come intersezioni con il circumcerchio delle circonferenze con centro in V_0 e in V_3 e con raggio ℓ.

Per la seconda costruzione si sceglie un qualsiasi punto del circumcerchio come suo vertice e successivamente puntando il compasso in questo vertice e poi nei successivi individuati e sempre con apertura ℓ si individuano altri punti del circumcerchio che faranno da vertici per l'esagono.

//input pG34d02

G34d.03 Dalle formule metriche dei poligoni regolari e dalla precedente costruzione seguono direttamente le seguenti misure per l'esagono regolare di lato ℓ:
ampiezza di ogni angolo interno $\dfrac{2}{3}\pi = 120°$; ampiezza di ogni angolo di deviazione $\dfrac{1}{3}\pi = 60°$.
circumraggio, cioè raggio del circumcerchio, $R = \ell$;
inraggio, cioè raggio dell'incerchio, $r = \dfrac{\ell}{2}\cot\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\ell \approx 0.866025404\,\ell$;
sagitta $x = \dfrac{\ell}{2}\tan\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\,\ell \approx 0.134074596\,\ell$;
area $\boldsymbol{Area} = 6\,\dfrac{\ell\, r}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,\ell^2 \approx 2.598076211\,\ell^2$;
rapporto tra area del circumcerchio e area dell'incerchio $\dfrac{\boldsymbol{Area}_R}{\boldsymbol{Area}_r} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{4}{3}$.

//input pG34d03

G34d.04 Gli esagoni regolari, in virtù delle loro molte simmetrie, si incontrano in numerose costruzioni geometriche.
Gli esagoni regolari, come i quadrati e i triangoli equilateri, possono costituire **tassellazioni del piano**, ossia si possono affiancare senza sovrapposizioni in modo da ricoprire regioni piane senza lasciare alcuna zona scoperta; comunemente queste tassellazioni sono dette ricoperture a nido d'ape.
La proprietà di tassellazione è in evidente equivalenza con l'impossibilità di avere poliedri regolari con facce esagonali.

Gli esagoni regolari si trovano come sezioni piane dei cubi, degli ottaedri e dei dodecaedri regolari [G37]

G34d.05 Consideriamo il cubo avente i vertici negli 8 punti dello spazio aventi le coordinate espresse da $\langle\pm 1, \pm 1, \pm 1\rangle$ e avente l'origine O come centro di simmetria; la retta $\mathcal{R}$ passante per $\langle 1,1,1\rangle$ e per $\langle -1,-1,-1\rangle$ (e quindi per O) è asse di simmetria rotazionale per angoli multipli di $\dfrac{1}{3}\,2\,\pi$; il piano Π ortogonale ad $\mathcal{R}$ passante per l'origine $\langle 0,0,0\rangle$ interseca nei rispettivi punti medi i 6 spigoli del cubo che non incidono i due vertici appartenenti ad $\mathcal{R}$. La sezione di Π con il cubo è l'esagono avente come vertici questi punti medi; la sua regolarità è garantita dalla simmetria del cubo per riflessione rispetto a ciascuno dei 6 piani contenenti $\mathcal{R}$ ed uno dei 6 spigoli che non incidono né $\langle 1,1,1\rangle$ né $\langle -1,-1,-1\rangle$.
Di assi di simmetria rotazionale come il precedente ve ne sono 4, ciascuno definito da un duetto di vertici del cubo simmetrici rispetto all'origine. Quindi si individuano 4 esagoni come sezioni del cubo con uno dei 4 piani per l'origine e ortogonali a un asse di simmetria rotazionale.

G34d.06 Nell'ottaedro regolare si trovano 4 assi di simmetria rotazionale per angoli multipli di $\dfrac{1}{3}\,2\,\pi$: ciascuno di essi passa per i centri di due facce triangolari non mutuamente incidenti, facce che chiamiamo opposte. Il piano ortogonale a uno di questi assi e passante per il punto medio dei due centri delle relative facce triangolari (cioè per il centro dell'ottaedro) interseca i 6 spigoli del solido che hanno un solo vertice che incide le facce nei rispettivi punti medi. L'esagono così definito è regolare per la simmetria rotazionale e per la simmetria della figura indotta dalla riflessione rispetto a ciascuno dei 3 piani contenenti l'asse e una altezza di una delle due facce (e quindi anche un'altezza della faccia opposta).

G34d.07 Nel dodecaedro si individuano 10 assi di simmetria rotazionale per angoli multipli di $\dfrac{1}{3}\,2\,\pi$: ciascuno di essi passa per due vertici collegabili percorrendo 5 spigoli, vertici che chiamiamo opposti. Si individua inoltre un ciclo di 6 facce pentagonali che non incidono entrambi i vertici e che diciamo facce intermedie. Il piano ortogonale all'asse e passante per il punto medio dei due vertici di riferimento interseca nei rispettivi punti medi i 6 spigoli che sono in comune ai duetti di facce intermedie. L'esagono definito da questi punti medi è regolare per la simmetria rotazionale e per la simmetria della figura indotta dalla riflessione rispetto a ciascuno dei 3 piani contenenti l'asse e uno degli spigoli incidente un vertice (e quindi anche uno spigolo del vertice opposto).

G34d.08 Molti esagoni si incontrano in altri poliedri con simmetrie meno complete dei 5 solidi platonici.

. . . .

G34d.09 Vi sono interessanti costruzioni che da un esagono con poche regolarità ricavano un esagono con regolarità maggiori.

G34d.10 Diciamo **esagramma regolare** la figura a stella ottenibile sovrapponendo due triangoli regolari congruenti con lo stesso centro l'uno ottenibile dall'altro con una rotazione di 60°. L'intersezione di

due di questi triangoli di lato ℓ è un esagono regolare di lato $\frac{\ell}{3}$.
Questa figura è stata usata come simbolo significativo in molti ambiti induismo, buddismo, giainismo, ebraismo (stella di Davide), islam, astrologia, occultismo.

//input pG34d10

Segnaliamo anche un altra figura che è stata considerata di un certo fascino e che è stata assunta come simbolo significativo in alcuni ambienti esoterici, l'esagono intrecciato chiamato **esagramma unicursale**.

G34 e. altri poligoni

G34e.01 Il poligono con 7 lati si chiama **ettagono**; di solito con questo termine si designa un pentagono nondegenere nonintrecciato.
Gli ettagoni convessi presentano 9 diagonali.

Diamo alcune misure di un ettagono regolare di lato ℓ.
Ampiezza di ogni angolo interno $\dfrac{5}{7}\pi \approx 128.5714286°$; ampiezza di ogni angolo esterno $51.4285714°$.
circumraggio $R \approx 1.1523\,\ell$;
inraggio $r = \dfrac{1}{2}\cot\dfrac{\pi}{7}\,\ell \approx 1.03826\,\ell^2$;
$\boldsymbol{Area} = \dfrac{7\,\ell}{2}a \;=\; \dfrac{7}{4}\cot\dfrac{\pi}{7}\,\ell^2 \;\approx\; 3.63391\,\ell^2$.

È impossibile costruire esattamente un ettagono regolare utilizzando solo riga e compasso. Si conoscono invece alcune costruzioni approssimate. Una costruzione con un errore del 2% conosciuta anche dai geometri greci viene chiamata **costruzione neusi**.

Esistono due diversi ettagoni stellati regolari; queste figure si chiamano **ettagrammi**.
Disposti su una circonferenza i 7 vertici V_i per $i = 0, 1, 2, ..., 6$ ad uguali intervalli angolari, i due ettagrammi sono costituiti, risp., dai seguenti lati:

$$V_0V_2,\ V_2V_4,\ V_4V_6,\ V_6V_1,\ V_1V_3,\ V_3V_5,\ V_5V_0\ ;$$
$$V_0V_3,\ V_3V_6,\ V_6V_2,\ V_2V_5,\ V_5V_1,\ V_1V_4,\ V_4V_0\ .$$

G34e.02 Il poligono con 8 lati si chiama **ottagono**. L'ottagono regolare si può ottenere con una costruzione mediante riga e compasso molto semplice che si serve della **manovra di raddoppio** applicabile a tutti i poligoni regolari con un numero pari $2k$ di lati tali che si conosca la costruzione con soli riga e compasso dei corrispondenti poligono di k lati.
Questa manovra consiste nel costruire il k-agono regolare K e nel considerare per ciascuno dei k triangoli isosceli congruenti che sono gli spicchi di K la bisettrice dell'angolo al centro e la sua intersezione con il circumcentro. Le k intersezioni così trovate e i k vertici di K costituiscono i $2k$ vertici del poligono da costruire.
Nel caso dell'ottagono la manovra di raddoppio risulta del tutto evidente.

//input pG34e02

Ogni ottagono possiede 20 diagonali.
L'ottagono regolare di lato ℓ presenta circumraggio $R \approx 1.3065\,\ell$, inraggio $r \approx 1.2071\,\ell$ e

$$\boldsymbol{Area} \approx 4.82843\,\ell^2\ .$$

G34e.03 Il poligono con 9 lati viene chiamato **enneagono**, **ennagono** o **nonagono**.

È impossibile costruire esattamente un enneagono regolare utilizzando solo riga e compasso, ma si conoscono alcune sue costruzioni approssimate chiamate **neusi**.

Ogni enneagono possiede 27 diagonali.

L'enneagono regolare di lato ℓ presenta angoli al centro di $40° = \dfrac{\pi}{9}$, angoli interni di $= 140° = 7/9\pi$ circumraggio $R = \frac{1}{2}\csc\frac{\pi}{9}\,\ell \approx 1.4619\ell$, inraggio $r\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{9}\,\ell \approx 1.3737\ell$ e $\boldsymbol{Area} = \frac{9}{4}\cot\frac{\pi}{9} \approx 6.18182\ell^2$.

G34e.04 Il poligono con 10 lati si chiama **decagono**.
Ogni decagono possiede 35 diagonali.

Un decagono regolare inscritto in una circonferenza di dato raggio R, si può ottenere con una costruzione mediante riga e compasso.
Similmente a quanto si può fare per ottenere un ottagono regolare da un quadrato, si potrebbe prima costruire il pentagono regolare e successivamente per ciascuno dei 5 triangoli isosceli (4,3,3) spicchi del pentagono individuare l'intersezione con la circonferenza della bisettrice dell'angolo al centro.
Più efficacemente si possono effettuare i primi passi della costruzione del pentagono regolare [G34c07] e procedere con la individuazione di un primo triangolo isoscele (2,2,1) spicchio del decagono e con la individuazione mediante compasso dei restanti 8 vertici sulla circumcirconferenza, come mostrato dalla figura.

//input pG34e04

Le misure per i decagoni regolari si ottengono con considerazioni nella linea di quelle svolte per i pentagoni regolari [c02]; in particolare si incontra ancora il numero di Fidia $\phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Il decagono regolare di lato ℓ ha come circumraggio $R = \dfrac{1}{2}\csc\dfrac{\pi}{10}\,\ell = \phi\,\ell$, ha inraggio pari a $r = \dfrac{1}{2}\cot\dfrac{\pi}{10}\,\ell = \dfrac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\ell \approx 1.5388\ell$ e area data da

$$\boldsymbol{Area} = \frac{5}{2}\cot\frac{\pi}{10}\,\ell^2 = \frac{5}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,\ell^2 \approx 7.69421\ell^2 .$$

G34e.05 Il poligono con 11 lati si chiama **endecagono**; È impossibile costruire esattamente un endecagono regolare utilizzando solo riga e compasso, mentre si conoscono sue costruzioni approssimate.

Ogni endecagono possiede 44 diagonali.

L'endecagono regolare di lato ℓ ha circumraggio $R \approx 1.7747\ell$, ha come inraggio $r \approx 1.7028\ell$ ed ha come area

$$\boldsymbol{Area} \approx 9.36564\ell^2 .$$

G34e.06 Il poligono con 12 lati si chiama **dodecagono**; Un dodecagono regolare inscritto in una data circonferenza $\mathbf{C}$ di raggio R si può ottenere con una costruzione mediante riga e compasso che dopo aver individuati due diametri ortogonali ed i vertici del quadrato regolare inscritto, determina le intersezioni delle quattro semicirconferenze aventi centro in un vertice del quadrato, due per ogni semicirconferenza; questi 8 punti, insieme ai 4 vertici del quadrato sono i vertici del dodecagono cercato.

//input pG34e06

Ogni dodecagono possiede 54 diagonali.
Il dodecagono regolare di lato ℓ ha circumraggio $R \approx 1.9318\ell$, inraggio $r \approx 1.8660\ell$ e area

$$\boldsymbol{Area} \approx 11.19615\ell^2 .$$

G34e.07 Il poligono con 13 lati si chiama **triskaidecagono** o **tridecagono**. È impossibile costruire esattamente un triskaidecagono regolare utilizzando solo riga e compasso, mentre si conoscono alcune sue costruzioni approssimate.

Ogni triskaidecagono possiede 65 diagonali.
Il triskaidecagono regolare di lato ℓ ha angoli interni di circa 152.308°, e area data da
$$\textbf{\textit{Area}} \;=\; \frac{13}{4}\,\ell^2\,\cot\,\frac{\pi}{13} \;\approx\; 13.1858\,\ell^2\;.$$

G34e.08 Il poligono con 14 lati si chiama **tetradecagono**.

Di questo poligono si può effettuare una costruzione approssimata consistente nella costruzione approssimata dell'ettagono regolare inscritto nella circonferenza di dato raggio e nella successiva manovra di raddoppio. Queste costruzioni approssimate si possono effettuare per tutti i poligoni regolari con un numero pari di lati.

Ogni tetradecagono possiede 77 diagonali.

G34e.09 Il poligono con 15 lati si chiama **pentadecagono**. Ogni pentadecagono possiede 90 diagonali.
Il pentadecagono regolare si può ottenere con una costruzione mediante riga e compasso descritta negli *Elementi di Euclide*.
Il procedimento si basa sul fatto che gli spicchi del pentadecagono regolare sono triangoli isosceli con l'angolo al centro di 24°, angolo esprimibile come
$$24^\circ = 2\cdot 72^\circ - 60^\circ = 2\,\frac{360^\circ}{5} - \frac{360^\circ}{3}\;.$$
Quindi un angolo di 24° si può ottenere tracciando un triangolo regolare e un pentagono regolare inscritti in una stessa circonferenza in modo che abbiano un vertice in comune. Tra il secondo raggio del primo spicchio del triangolo e il secondo raggio del secondo spicchio del pentagono si ha un angolo di 24° che determina il sesto spicchio del pentadecagono a partire dal vertice comune; è quindi determinata la lunghezza dei lati del poligono richiesto e questa permette di ottenere tutti i suoi vertici e i suoi lati.

//input pG34e09

Il precedente modo di procedere si può seguire per tutti i poligoni con $p\dot{q}$ lati con gli interi p e q coprimi e tali che si sappiano costruire i poligoni regolari di p e q lati. Inoltre utilizzando la manovra di raddoppio si possono costruire con riga e compasso anche i poligoni con $2^k\cdot p\cdot q$ lati per $k = 2, 3, 4, ...$
.

G34e.10 Il poligono con 16 lati viene chiamato **esadecagono** e talora anche **esakaidecagono**.

L'esadecagono regolare inscritto in una circonferenza di dato raggio si può costruire facilmente con riga e compasso: fissato un diametro, si tratta di procedere a 3 successivi dimezzamenti degli angoli al centro di ampiezza π, cioè con bisettrici di angoli retti e di angoli di 45°.

Ogni esadecagono possiede 104 diagonali.

L'esadecagono regolare di lato ℓ ha:
$$\text{angoli interni di } 157^\circ 30' \text{ e angoli al centro di } 11^\circ 15'\;;$$
$$\text{circumraggio}\;\; 2+\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{20+14\sqrt{2}}\;;$$
$$\text{inraggio}\;\; \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)\;;$$
$$\textbf{\textit{Area}} = 4\,\cot\,\frac{\pi}{16}\,\ell^2 \;=\; 4\,\ell^2\left(1 \;+\; \sqrt{2} \;+\; (\sqrt{4+2\,\sqrt{2}}\right)\;.$$

G34e.11 Il poligono con 17 lati si chiama **eptadecagono**.

Ogni eptadecagono possiede 119 diagonali.
L'eptadecagono regolare presenta angoli interni aventi ampiezza

$$(1)\qquad 180° \cdot \frac{15}{17} \approx 158.8235294° \ .$$

La costruibilità-CS dell'eptadecagono regolare fu dimostrata da Carl Friedrich Gauss nel 1796 quando aveva solo 19 anni e costituì la prima costruzione di poligono regolare individuata 2200 dopo la comparsa degli *Elementi di Euclide*.
Egli, attraverso considerazioni sulla soluzione di equazioni concernenti le radici dell'unità mediante operazioni aritmetiche e radici quadrate, trovò l'espressione

$$(2)\qquad 16\cos\frac{2\,\pi}{17} \ = \ -1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}} \ .$$

Dalla disponibilità di una espressione come la precedente segue la possibilità di esprimere ogni funzione trigonometrica di $\frac{2\pi}{17}$ mediante operazioni aritmetiche e radici quadrate e da questo segue la costruibilità con riga e compasso del corrispondente poligono.
Gauss non pubblicò alcun procedimento di costruzione, mentre sviluppò una teoria che stabilisce quali altri poligoni regolari sono costruibili-CS.
Un procedimento praticabile per costruire-CS un pentadecagono regolare fu presentato nel 1806 da Erschinger.
L'eptadecagono regolare di lato ℓ ha

$$(3)\qquad \boldsymbol{Area} \ = \ \frac{17}{4}\cot\frac{\pi}{17}\,\ell^2 \ .$$

G34e.12 Il poligono con 18 lati si chiama **octadecagono**.
Ogni octadecagono possiede 135 diagonali.
L'octadecagono regolare presenta angoli interni di 160° e angoli al centro di 20°. L'octadecagono regolare di lato ℓ ha l'area data da

$$\boldsymbol{Area} = \frac{9}{2}\cot\frac{\pi}{18}\,\ell^2 \ .$$

G34e.13 Il poligono con 19 lati viene chiamato **enneadecagono**, termine derivato dal greco, oppure **nonadecagono**, termine derivato in parte dal latino, in parte dal greco.
Ogni enneadecagono possiede 152 diagonali.
L'enneadecagono regolare ha gli angoli interni di circa 161.052°, L'enneadecagono regolare di lato ℓ ha come circumraggio $R = \frac{1}{2}\csc\frac{\pi}{19}\,\ell$ e area data da

$$\boldsymbol{Area} = \frac{19}{4}\cot\frac{\pi}{19}\,\ell^2 \approx 28.4652\,\ell^2 \ .$$

G34e.14 Il poligono con 20 lati si chiama **icosagono**.
Ogni icosagono possiede 170 diagonali.
L'icosagono regolare di lato ℓ ha gli angoli interni di 162°, gli angoli di deviazione di $360/20 = 18°$ circumraggio $R = \frac{1}{2}\csc\frac{\pi}{20}\,\ell$ e area data da

$$\boldsymbol{Area} = 5\cot\frac{\pi}{20} \approx 31.5688\,\ell^2 \ .$$

Esso si può costruire utilizzando solo riga e compasso applicando la manovra di bisezione agli angoli al centro del decagono regolare di uguale circumraggio.

G34e.15 Con il nome **triacontagono** si denota un poligono con 30 lati.

Ogni triacontagono possiede 405 diagonali.
Il pentacontagono regolare di lato ℓ ha gli angoli interni di $168°$, gli angoli di deviazione di $360/30 = 12°$ circumraggio $R = \frac{1}{2}\csc\frac{\pi}{50}\,\ell$ e area data da

$$\boldsymbol{Area} = \frac{15}{2}\cot\frac{\pi}{30}\,\ell^2 \approx 71.3577\,\ell^2 \ .$$

G34e.16 Con il nome **pentacontagono** si denota un poligono con 50 lati.
Ogni pentacontagono possiede 1175 diagonali.
Il pentacontagono regolare di lato ℓ ha gli angoli interni di $172.8°$, gli angoli di deviazione di $360/50 = 7.2°$ circumraggio $R = \frac{1}{2}\csc\frac{\pi}{50}\,\ell$ e area data da

$$\boldsymbol{Area} \ = \ \frac{50}{4}\cot\frac{\pi}{50}\,\ell^2 \approx 198.682\,\ell^2 \ .$$

G34e.17 Limitiamoci a poche segnalazioni sugli altri poligoni con più di 50 lati.

I poligoni con un numero dispari di lati che sappiamo costruire-CS sono 31: i numeri dei loro lati sono i numeri primi di Fermat conosciuti (3, 5, 17, 257, 65537) e i prodotti di questi numeri distinti: 51, 85, 255,..., 42949 67295 .

Un poligono con 100 lati viene detto, talora, **ettagono**; uno con 1000 lati **kiliagono** o chiliagono; un poligono con 10 000 lati **miriagono**; uno con 1 000 000 lati **megagono**.