Capitolo G32:
Funzioni reali trascendenti elementari

Contenuti delle sezioni

G32:0.a In questo capitolo introduciamo le funzioni di variabile reale più basilari a cominciare dalle funzioni trigonometriche.

G32:a. Funzioni reali, grafici e curve piane

G32:a.01 Lo studio delle figure geometriche piane (in 2D, cioè in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$)) e delle figure solide (in 3D, cioè nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^{\times 3}$ si serve sia dei cosiddetti metodi sintetici sia dei metodi analitici. I primi riguardano proprietà esprimibili in termini puramente geometrici, mentre i metodi analitici procedono utilizzando sistematicamente le coordinate dei punti che compongono le figure; si parla quindi spesso di **geometria sintetica** e di **geometria analitica**.
A grandi linee si può dire che i metodi sintetici possono portare a risultati molto incisivi con procedimenti che riguardano proprietà essenziali, mentre i metodi analitici richiedono di procedere su molti dettagli e con espressioni spesso elaborate. Se possibile risulta più diretto e significativo procedere con argomentazioni sintetiche; spesso però risulta necessario procedere per via analitica. Per affrontare molti problemi, soprattutto quelli posti dalle applicazioni, occorre procedere per via analitica ed effettuare approssimazioni ed anche manipolare formule assai complesse; per questo risultano indispensabili gli strumenti di calcolo automatico i quali vengono usati sia per calcoli approssimati, sia per costruire grafici ed animazioni, sia per elaborare formule impegnative.

G32:a.02 La geometria analitica si confonde per molti sviluppi con lo studio di funzioni della forma $y = f(x)$ in 2D e $z = f(x, y)$ in 3D, con x, y e z variabili reali.
Tra le prime funzioni che interessano ci sono le funzioni polinomiali in una variabile $P(x) \in \{\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}\}$ e funzioni in due variabili $P(x, y) \in \{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}\}$. Queste funzioni sono utili direttamente, in quanto servono ad individuare direttamente molti enti geometrici (in particolare nella [[geometria algebrica]]) e possono essere efficacemente studiate e sottoposte a manipolazioni numeriche e simboliche.

Le funzioni polinomiali di grado zero sono le funzioni costanti $y = \overline{y}$, con $\overline{y} \in \mathbb{R}_{nz}$, cioè le rette orizzontali ad esclusione dell'asse Ox, corrispondente al polinomio nullo.

I polinomi di grado 1 forniscono tutte le rette ad eccezione delle rette orizzontali e delle verticali $x = x_0$. Tutte queste funzioni si possono ottenere applicando ad una di esse, ad es. alla $y = x$, delle rototraslazioni.
I polinomi di grado 2 forniscono parabole. Tutte le parabole si possono ottenere da una di esse, ad es. dalla $y = x^2$, applicandole traslazioni e dilatazioni.
I polinomi di grado 3 forniscono le cosiddette **funzioni reali cubiche**.
I polinomi di grado 4 forniscono le cosiddette **funzioni reali quartiche**.
I polinomi di grado 5 forniscono le cosiddette **funzioni reali quintiche**.

G32:a.03 Per ogni funzione polinomiale $y = p(x)$, l'insieme delle coppie $\{x \in \mathbb{R} :| \langle x, p(x)\rangle\}$ costituisce un esempio di **curva** nel piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Se consideriamo un polinomio in due variabili reali x e y, $P(x, y)$, la corrispondente funzione polinomiale è del genere $\{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}\}$.
Grande interesse rivestono gli insiemi di punti $\langle x, y\rangle$ determinati da equazioni polinomiali della forma $P(x, y) = 0$: questi sono detti **curve reali**. Esempi di curve reali sono la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 di equazione $x^2 + y^2 = 1$, la ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e l'iperbole di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. A queste si aggiunge naturalmente la **parabola** di equazione $y = ax^2 + bx + c$.
Più in generale si hanno curve reali fratte determinate da equazioni della forma $\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)} = 0$, dove $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ denotano polinomi in due variabili.
Esempi interessanti sono forniti dalle **lemniscate** e dalle **ovali di Cassini**.

G32:a.04 Le funzioni inverse delle funzioni polinomiali comprendono le **funzioni esprimibili mediante radicali**, ma non solo quelle.
Funzione radice quadrata definibile solo per argomenti non negativi.
Situazione analoga per le funzioni radici pari.
Le radici di potenze dispari sono invece definite per ogni valore dell'argomento.

G32:a.05 La determinazione delle caratteristiche delle curve introdotte, anche se esse si possono ricondurre alla sola nozione di polinomio, cioè alle sole operazioni aritmetiche su numeri e variabili reali, può essere impegnativa e richiede sviluppi specifici.
In generale si pone il problema dello studio di curve costruibili determinate da espressioni nelle quali intervengono operazioni che non si limitano a quelle aritmetiche, ma si servono di molte altre costruzioni, ad esempio di operazioni collegate a funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmiche, o ad altre basate sulle nozioni dell'analisi infinitesimale.

Prima di affrontare questi studi, dunque, è necessario sviluppare le nozioni di base del calcolo infinitesimale.

G32:a.06 Altri importanti insiemi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sono individuati da disequazioni.
Accanto ad una equazione della forma $f(x, y) = 0$ spesso è utile considerare delle disequazioni individuate dalla stessa espressione, cioè di forme come la $f(x, y) > 0$ o la $f(x, y) \leq 0$. Queste forniscono insiemi più estesi delle curva piane, insiemi che possono riguardare figure piane che possono essere limitate, cioè interamente contenute in un poligono piano o in un disco piano, oppure illimitate.
Come esempi relativamente semplici di questi insiemi citiamo:
il cerchio con centro nell'origine e raggio $r > 0$ costituito dai punti $\langle x, y\rangle$ tali che $x^2 + y^2 \leq r^2$;

l'insieme dei punti esterni all'ellisse con con centro nell'origine e semiassi a e b costituito dai punti $\langle x, y\rangle$ tali che $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} > 1$;
regioni delimitate da un'iperbole;
regione superiore ad una curva esponenziale.

G32:a.07 Tra i sottoinsiemi del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ hanno grande importanza quelli costituiti dai grafici di funzioni del genere $\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ costruibili a partire da richieste specifiche. Si tratta quindi di insiemi della forma $\{x \in D :| \langle x, f(x)\rangle\}$ con D sottoinsieme costruibile di $\mathbb{R}$, ed f funzione del genere $\{\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}\}$ e costruibile, cioè tale che esista un procedimento che ad ogni $x \in D \cap \mathbb{R}_C$ permetta di ricavare il valore reale (costruibile) $f(x)$.

L'insieme di questi grafici è molto variegato può risultare utile classificarlo in vari modi: sulla base della natura del dominio D, del genere del meccanismo per il calcolo dei suoi valori, della complessità dei procedimenti per il suo calcolo, delle simmetrie che lo riguardano e per i generi delle sue applicazioni.
Per lo studio di molti grafici di funzioni servono strumenti matematici e informatici assai impegnativi: ricordiamo in particolare gli strumenti del calcolo infinitesimale e i pacchetti computazionali sviluppati da progetti di ricerca e da industrie di software.

G32:a.08 Tra le funzioni reali hanno particolare importanza quelle che sono individuate da espressioni di tipi conosciuti. Le prime da considerare sono le funzioni polinomiali, funzioni definite sull'intero $\mathbb{R}$ e i cui valori, come giaà detto, sono forniti da polinomi

$$y = p(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \ .$$

Dopo di esse conviene considerare le **funzioni reali razionali**, le funzioni di $\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ fornite da espressioni costituite da quozienti di polinomi irriducibili $\dfrac{p(x)}{q(x)}$; esse possono essere fornite da espressioni nelle quali compaiono, oltre alla variabile x, almeno un operatore di divisione ed eventualmente costanti reali e altri operatori aritmetici. Queste funzioni sono definite per tutti gli x reali, ad eccezione degli zeri del polinomio a denominatore $q(x)$.
Più in generale si introduce una curva algebrica mediante una espressione della forma $R(x, y) = 0$ con R denotante una espressione razionale fratta.
Spesso una funzione reale razionale viene individuata mediante una sua espressione senza specificare il suo dominio, sottintendendo che esso sia il più ampio insieme di numeri reali per i quali l'espressione può essere calcolata e lasciando all'utente il compito di determinarlo. Questo accade per molte altre funzioni reali (ma non solo) fornite da espressioni e per esse si pone il **problema della determinazione del dominio**. Questo problema è relativamente semplice da risolvere per le funzioni reali razionali, in quanto si riduce alla determinazione degli zeri del polinomio denominatore della sua forma ridotta.

G32:a.09 Le proprietà di simmetria dei grafici delle funzioni entro $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, come le proprietà di simmetria di molte altre configurazioni geometriche e di molte altre costruzioni matematiche, possono essere di grande utilità per semplificare la determinazione delle caratteristiche di queste entità e per renderne organica l'esposizione.
Una funzione reale $f(x)$ si dice **funzione pari** sse il suo grafico è invariante per la riflessione rispetto all'asse delle ordinate; equivalentemente si può dire che una funzione è pari sse il suo dominio è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ simmetrico rispetto all'origine e se per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha $f(-x) = f(x)$.

Una funzione reale $g(x)$ si dice **funzione dispari** sse il suo grafico è invariante per la simmetria centrale con centro nell'origine; equivalentemente si può dire che una funzione è dispari sse il suo dominio è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ simmetrico rispetto all'origine e se per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha $f(-x) = -f(x)$.

Sono funzioni pari le funzioni date da polinomi in cui compaiono solo potenze pari della x.
Più in generale è una funzione pari una funzione che si può esprimere con un'espressione nella quale la variabile x compare solo nella composizione x^2.
Sono funzioni dispari le funzioni date da polinomi in cui compaiono solo potenze dispari della x.

Componendo due funzioni pari mediante operazioni di combinazione lineare, prodotto e divisione si ottiene una funzione pari. La combinazione lineare di due funzioni dispari è una funzione dispari. Il prodotto e la divisione di due funzioni dispari fornisce una funzione pari. Il prodotto e la divisione di una funzione pari con una dispari forniscono funzioni dispari.

G32:a.10 Sia T è un numero reale positivo; si dice che una funzione $f(x)$ definita sull'intero $\mathbb{R}$ è una **funzione periodica** di periodo T sse $\forall x \in \mathbb{R} \,:\, f(x+T) = f(x)$.
Questa richiesta è equivalente alla richiesta $\forall x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z} \,:\, f(x + zT) = f(x)$.
Un semplice esempio di funzione periodica è la funzione mantissa $\mathrm{mant}(x) = x - \lfloor x \rfloor$, funzione di periodo 1. Si considerino anche le sue varianti $\mathrm{mant}(2x)$ di periodo $1/2$ e $\mathrm{mant}(x/3 + r)$, con r reale qualsiasi, di periodo 3.
Come vedremo in :5 sono funzioni periodiche le funzioni circolari.

G32:a.11 Spesso è utile caratterizzare le funzioni reali rispetto all'ordinamento totale "$\leq$" dell'insieme dei reali.
Si dice **funzione reale crescente** una funzione $f(x)$ tale che

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(f) \,:\, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \ .$$

Si dice **funzione reale decrescente** una funzione $f(x)$ tale che

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(f) \,:\, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \ .$$

Si dice **funzione reale non decrescente** una funzione $f(x)$ tale che

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(f) \,:\, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \ .$$

Si dice **funzione reale non crescente** una funzione $f(x)$ tale che

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(f) \,:\, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \ .$$

Collettivamente si dicono **funzioni monotòne** le funzioni che sono crescenti o decrescenti e si dicono **funzioni monotòne in senso lato** le funzioni che sono o non decrescenti o non crescenti.

Sono funzioni crescenti le funzioni date da potenze dispari della variabile $y = x^{2h+1}$ con $h \in \mathbb{N}$. Ogni funzione esponenziale della forma b^x è decrescente se $0 < b < 1$, mentre è crescente se $b > 1$. Si può quindi dire che tutte le funzioni b^x con b positivo e diverso da 1 sono funzioni monotone.
Le funzioni opposte delle funzioni crescenti sono decrescenti. Le combinazioni lineari con coefficienti positivi di funzioni crescenti (risp. decrescenti) sono funzioni crescenti (risp. decrescenti). Il prodotto di due funzioni crescenti positive è una funzione crescente positiva. Sottraendo da una funzione crescente una funzione decrescente si ottiene una funzione crescente.
Se $c(x)$ è una funzione crescente, sono funzioni non decrescenti $\lfloor c(x) \rfloor$ e $\lceil c(x) \rceil$; se $d(x)$ è una funzione decrescente sono funzioni non crescenti $\lfloor d(x) \rfloor$ e $\lceil d(x) \rceil$.

G32:a.12 Una proprietà importante per le funzioni reali è costituita dall'essere invertibile, cioè dall'appartenere a $\{\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{R}\}$. A ogni funzione invertibile f è associata la funzione inversa f^{-1}, funzione del genere $\{\mathrm{cod}(f) \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright \mathrm{dom}(f)\}$ e tale che

$$\forall x \in \mathrm{dom}(f) \;\vdots\; f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{ e } \quad \forall y \in \mathrm{cod}(f) \;\vdots\; f(f^{-1}(y)) = y\ .$$

La determinazione di una funzione inversa richiede dunque una precisa determinazione del dominio e del codominio della funzione di partenza. Spesso la determinazione di una funzione inversa conduce ad una nuova funzione di rilevante utilità.

La funzione inversa della $y = f(x)$ può essere espressa come $x = f^{-1}(y)$ o come $y = f^{-1}(x)$. La prima espressione è vantaggiosa nelle applicazioni nelle quali la x e la y riguardano grandezze variabili di natura diversa; la seconda quando si studiano con sistematicità le funzioni reali specifiche e quindi interessa confrontarle. In questi paragrafi preferiamo la seconda e in accordo con questo cerchiamo di accostare coppie di grafici $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$. È importante notare che il secondo di questi grafici si ottiene applicando al primo la riflessione rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante $y = x$.

G32:a.13 Va notato anche che non vanno confusi il passaggio alla funzione inversa, da f a f^{-1}, dal passaggio alla funzione reciproca, da f alla $f^{-1} = \dfrac{1}{f}$: la prima trasformazione riguarda l'inversione del prodotto di composizione fra funzioni, la seconda l'inversione del prodotto fra valori di funzioni, cioè l'estensione cartesiana della passaggio al numero reale reciproco di un reale non nullo.

Sono invertibili tutte le funzioni crescenti e tutte le decrescenti.
La inversa della funzione $y = mx + c$ con $m \neq 0$ reale è la $y = \dfrac{x}{m} - c$.
La inversa della funzione $y = x^2$ avente come dominio $\mathbb{R}_+$ è la funzione radice quadrata aritmetica $y = \sqrt{x}$; la sua reciproca è invece la $y = \dfrac{1}{x^2}$.

G32:a.14 Si dice **funzione reale involutoria** ogni funzione che coincide con la propria inversa; una tale funzione T deve avere dominio e codominio coincidenti e per essa si deve avere $T \circ T = \mathrm{Id}_{\mathrm{dom}(T)}$. Una funzione involutoria può anche considerarsi una trasformazione involutoria del proprio dominio (=codominio).

Coincidono con la propria inversa le funzioni $y = x$, $y = -x$, $y = \dfrac{1}{x}$ e $y = -\dfrac{1}{x}$: in effetti l'identità di $\mathbb{R}$, il passaggio al numero reale opposto e il passaggio al numero reale (non nullo) reciproco sono trasformazioni involutorie.
Per la quarta funzione è utile osservare che si tratta della funzione composta della seconda e della terza, che queste sono trasformazioni commutative e che in generale il prodotto di composizione di due trasformazioni commutative involutorie T_1 e T_2 è anch'essa involutoria: infatti $(T_1 \circ T_2)^{-1} = T_2^{-1} \circ T_1^{-1} = T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$.

G32:b. Funzioni circolari

G32:b.01 Facciamo ora riferimento alla circonferenza goniometrica e consideriamo un suo punto generico $P = \langle a, b\rangle$, le proiezioni di questo $A = \langle a, 0\rangle$ sull'asse delle ascisse e $B = \langle 0, b\rangle$ sull'asse delle ordinate e il triangolo OAP rettangolo in A; chiamiamo inoltre x l'ampiezza con segno dell'angolo orientato $A\hat{O}P$.
Si dice **seno** dell'angolo $A\hat{O}P$ di ampiezza x, e si scrive $\sin(x)$ o $\sin x$, la lunghezza con segno del segmento orientato $\vec{AP}$, cioè la ordinata del punto P.

Si dice **coseno** dell'angolo $A\hat{O}P$ di ampiezza x, e si scrive $\cos(x)$ o $\cos x$, la lunghezza con segno del segmento orientato $\vec{OA}$, cioè la ascissa a del punto P.
Il punto P quindi si può esprimere come $P = \langle \cos x, \sin x\rangle$.

Per le potenze delle funzioni circolari si usano scritture come $\sin^2 x$ per denotare $(\sin x)^2$ e $\tan^4 x$ per denotare $(\tan x)^4$.
Per le funzioni seno e coseno ottenute facendo variare x in $\mathbb{R}$, ovvero muovendo il punto P sulla circonferenza goniometrica, si trovano subito le seguenti proprietà:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad , \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \ ,$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} : \ \sin(x + k2\pi) = \sin x \quad , \qquad \cos(x + k2\pi) = \cos x \ ,$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ ,$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad , \qquad \sin(-x) = -\sin(x) \quad .$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

Si osserva anche che gli zeri della funzione $\sin x$ costituiscono l'insieme $\{k \in \mathbb{Z} :| \ k\pi\}$, mentre l'insieme degli zeri della funzione $\cos x$ è $\{k \in \mathbb{Z} :| \ \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\}$.

G32:b.02 Si definisce **tangente** di un angolo di ampiezza x

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \ .$$

Questa funzione è definita per ogni x reale ad eccezione dei punti in cui si annulla la $\cos x$, cioè i punti $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ per ogni k intero; scriviamo quindi $\text{dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$.

Si definisce cotangente di un angolo di ampiezza x

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \ .$$

Questa funzione è definita per ogni x reale ad eccezione dei punti in cui si annulla la $\sin x$, ovvero la $\tan x$, cioè i punti $x = k\pi$ per ogni k intero; scriviamo quindi $\text{dom}(\cot) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \cdot \pi$.

Sia la tangente che la cotangente sono funzioni dispari, in quanto quozienti di una pari e una dispari e viceversa.
Per tangente e cotangente si trovano subito le proprietà di periodicità:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \ , \ x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1) \cdot \frac{\pi}{2} \ : \ \tan(x + k\pi) = \tan x \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \ , \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \cdot \pi \ : \ \cot(x + k\pi) = \cot x \ .$$

G32:b.03 Talora, ad esempio in astronomia, si usano altre due funzioni goniometriche, la **secante** e la **cosecante**, che sono, risp., le funzioni reciproche della funzione coseno e della funzione seno.

$$\text{sec}x := \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x := \frac{1}{\sin x} \ .$$

La secante, come la tangente, è definita in $\mathrm{dom}(\sec) = \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1)\cdot\frac{\pi}{2}$; la cosecante, come la cotangente, è definita in $\mathrm{dom}(\csc\ ) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\cdot\pi$. Le proprietà di parità e periodicità di secante e cosecante si ricavano direttamente dalle proprietà corrispondenti delle funzioni seno e coseno:

$$\sec(-x) = \sec x \quad , \qquad \csc\,(-x) = -\csc\,(x) \ ,$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \ :\quad \sec(x+k2\pi) = \sec x \quad , \quad \csc\,(x+k2\pi) = \csc\,x \ ,$$

$$\sec\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\csc\,x \quad , \quad \sec(x+\pi) = -\sec x \quad , \quad \sec\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) = \csc\,x \ ,$$

$$\csc\,\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sec x \quad , \quad \csc\,(x+\pi) = -\csc\,x \quad , \quad \csc\,\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) = -\sec x \ .$$

Ricordiamo anche che

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1)\cdot\frac{\pi}{2} \ :\ \sec^2 x - \tan^2 x = 1 \qquad , \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\cdot\pi \ :\ \csc\,^2 x - \cot^2 x = 1 \ .$$

G32:b.04 La seguente tabella di espressioni consente di collegare i quadrati delle funzioni goniometriche.

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\tan^2 x$	$\cot^2 x$	$\sec^2 x$	$\csc\,^2 x$
$\sin^2 x$	–	$1-\cos^2 x$	$\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	$\frac{1}{1+\cot^2 x}$	$\frac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$	$\frac{1}{\csc\,^2 x}$
$\cos^2 x$	$1-\sin^2 x$	–	$\frac{1}{1+\tan^2 x}$	$\frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x}$	$\frac{1}{\sec^2 x}$	$\frac{\csc\,^2 x - 1}{\csc\,^2 x}$
$\tan^2 x$	$\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$	$\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$	–	$\frac{1}{\cot^2 x}$	$\sec^2 - 1$	$\frac{1}{\csc\,^2 x - 1}$
$\cot^2 x$	$\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$	$\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$	$\frac{1}{\tan^2 x}$	–	$\frac{1}{\sec^2 x - 1}$	$\csc\,^2 - 1$

.

G32:b.05 Effettuando la rotazione di angolo β del punto $\langle \cos x, \sin x\rangle$ si trovano le seguenti formule di addizione

$$\cos(x+\beta) = \cos x \cos\beta - \sin x \sin\beta \ ,$$

$$\sin(x+\beta) = \sin x \cos\beta + \cos x \sin\beta \ .$$

Ricordando le proprietà di parità di seno e coseno

$$\cos(x-\beta) = \cos x \cos\beta + \sin x \sin\beta \ ,$$

$$\sin(x-\beta) = \sin x \cos\beta - \cos x \sin\beta \ .$$

Considerando particolari valori di β:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \qquad , \qquad \cos(x+\pi) = -\cos x \qquad , \qquad \cos\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) = \sin x \ ,$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x \qquad , \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x \qquad , \qquad \sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right) = -\cos x \ .$$

Da queste uguaglianze si ricavano le formule di addizione per tangente e cotangente:

$$\tan(x+x') = \frac{\tan x + \tan x'}{1 - \tan x \tan x'} \qquad , \qquad \tan(x-x') = \frac{\tan x - \tan x'}{1 + \tan x \cdot \tan x'} \ ,$$

$$\cot(x+x') = \frac{\cot x \cdot \cot x' - 1}{\cot x + \cot x'} \qquad , \qquad \cot(x-x') = \frac{\cot x \cdot \cot x' + 1}{\cot x - \cot x'} \ .$$

Da queste si ricavano le formule concernenti argomenti multipli:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \;,\quad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \;,\quad \sin 4x = 8\cos^3 x\sin x - 4\sin x\cos x \;,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \;,\quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \;,\quad \cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \;,$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2}{\cot x - \tan x} \;,\quad \tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x} \;,\quad \tan 4x = \frac{4\tan x - 4\tan^3 x}{1-6\tan^2 x + \tan^4 x} \;,$$

$$\cot 2x = \frac{\cot 2x - 1}{2\cot x} = \frac{\cot x - \tan x}{2} \;,\quad \cot 3x = \frac{\cot^3 x - 3\cot x}{3\cot^2 x - 1} \;,\quad \cot 4x = \frac{\cot^4 x - 6\cot^2 x + 1}{4\cot^3 x - 4\cot x} \;.$$

Dalle precedenti si ricavano le **formule di bisezione**, concernenti argomenti dimezzati:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad,\qquad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \quad,$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad,\qquad \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \quad,$$

In queste formule le scelte dei segni sono determinate dal quadrante nel quale cade l'angolo x. Si trovano inoltre le seguenti formule univoche:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \quad,\qquad \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x} \quad.$$

G32:b.06 Sono dette **formule di prostaferesi** le formule che consentono di esprimere somme o differenze di funzioni circolari mediante prodotti di funzioni dello stesso tipo:

$$\sin x + \sin x' = 2\sin\frac{x+x'}{2}\cos\frac{x-x'}{2} \quad,\qquad \sin x - \sin x' = 2\sin\frac{x-x'}{2}\cos\frac{x+x'}{2} \quad,$$

$$\cos x + \cos x' = 2\cos\frac{x+x'}{2}\cos\frac{x-x'}{2} \quad,\qquad \cos x - \cos x' = -2\sin\frac{x-x'}{2}\sin\frac{x+x'}{2} \quad,$$

Dalle formule precedenti si ricavano facilmente le cosiddette **formule di Werner**, formule che consentono di esprimere prodotti di funzioni circolari mediante somme di funzioni loro collegate:

$$\sin x\cdot\sin x' = \frac{1}{2}[\cos(x-x') - \cos(x+x')] \quad,\qquad \cos x\cdot\cos x' = \frac{1}{2}[\cos(x-x') + \cos(x+x')] \quad,$$

$$\sin x\cdot\cos x' = \frac{1}{2}[\sin(x-x') + \sin(x+x')] \quad,$$

$$\tan x\cdot\tan x' = \frac{\tan x + \tan x'}{\cot x + \cot x'} = -\frac{\tan x - \tan x'}{\cot x - \cot x'} \;,\quad \cot x\cdot\cot x' = \frac{\cot x + \cot x'}{\tan x + \tan x'} = -\frac{\cot x - \cot x'}{\tan x - \tan x'} \quad,$$

$$\tan x\cdot\cot x' = \frac{\tan x + \cot x'}{\cot x + \tan x'} = -\frac{\tan x - \cot x'}{\cot x - \tan x'} \quad,$$

$$\sin(x+x')\sin(x-x') = \cos^2 x' - \cos^2 x \quad,\qquad \cos(x+x')\cos(x-x') = \cos^2 x' - \sin^2 x \quad,$$

In particolare si trovano formule per le potenze delle funzioni circolari:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad,\qquad \sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \quad,\qquad \sin^4 x = \frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8} \quad,$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad,\qquad \cos^3 x = \frac{3\sin x + \sin 3x}{4} \quad,\qquad \cos^4 x = \frac{\cos 4x + 4\cos 2x + 3}{8} \quad,$$

G32:b.07 Per vari angoli particolari si trovano espressioni numeriche specifiche; le formule di base di questo genere riguardano angoli del I quadrante:

x	0	$\frac{\pi}{10} = 18°$	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Formule corrispondenti concernenti angoli degli altri quadranti si ottengono considerando le proprietà di periodicità e di parità.

G32:c. Funzioni inverse delle circolari

G32:c.01 La funzione $\sin x$ è crescente nell'intervallo $I := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; più precisamente la funzione ridotta $\sin_{|I}(x)$ è una biiezione crescente da I all'intervallo $[-1,1]$ Si può considerare la inversa della riduzione della $\sin x$ a questo intervallo: essa è chiamate **funzione arcoseno** e si denota con $\arcsin x := \left(\sin x_{|I}\right)^{-1}$. Il suo dominio è $[-1,1]$, codominio della funzione $\sin x$, ed in esso la funzione è crescente da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Concisamente si dice che essa appartiene a $\left\{[-1,1] \longleftrightarrow_{\leq} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right\}$.
Il suo grafico, come per ogni altra funzione inversa di una data, si ottiene riflettendo quello della $\sin_{|I}(x)$ rispetto alla bisettrice $y = x$. Come la funzione $\sin x$, anche l'arcoseno è funzione dispari: $\arcsin(-x) = \arcsin(x)$.

G32:c.02 La funzione $\cos x$ è decrescente nell'intervallo $J := [0, \pi]$. Si può considerare la inversa della riduzione della $\cos x$ a questo intervallo: essa è chiamata **funzione arcocoseno** e si denota con $\arccos x := (\cos x|_J)^{-1}$. Il suo dominio è $[-1,1]$, codominio della funzione $\cos x$, ed in esso la funzione è decrescente da π a 0. Essa quindi appartiene a $\{[-1,1] \longleftrightarrow_{\geq} [0,\pi]\}$.
Il suo grafico si ottiene riflettendo quello della $\cos x|_J$ rispetto alla bisettrice $y = x$. Il grafico della funzione $\arccos x$ è invariante per la simmetria centrale con centro in $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, simmetria espressa formalmente da $x \to -x$, $y - \frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2} - y$.

G32:c.03 La funzione $\tan x$ è crescente nell'intervallo $H := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si può considerare la inversa della riduzione della $\tan x$ a questo intervallo: essa è chiamata **funzione arcotangente** e si denota con $\arctan x := (\tan x|_H)^{-1}$. Il suo dominio è l'intero $\mathbb{R}$, codominio della funzione $\tan x$, ed in esso la funzione è crescente da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ a 0.
Il suo grafico si ottiene riflettendo quello della $\tan x|_H$ rispetto alla bisettrice $y = x$. Come la funzione tangente, anche la funzione $\arctan x$ è dispari.

G32:c.04 La funzione $\cot x$ è decrescente nell'intervallo $K := [0, \pi]$. Si può considerare la inversa della riduzione della $\cot x$ a questo intervallo: essa è chiamata **funzione arcocotangente** e si denota con $\operatorname{arccot} x := (\cot x|_K)^{-1}$. Il suo dominio è l'intero $\mathbb{R}$, codominio della funzione $\cot x$, ed in esso la funzione è decrescente da π a 0.

Il suo grafico si ottiene riflettendo quello della $\cot x|_K$ rispetto alla bisettrice $y = x$. Il grafico della funzione arcocotangente è invariante per simmetria centrale di centro $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

G32:c.05 Anche per le funzioni inverse delle circolari si trovano con semplici manipolazioni a partire dalle definizioni, varie formule che ne stabiliscono simmetrie e regole di trasformazione.

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x}} \quad ,$$
$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad ,$$
$$\arctan x = -\arctan(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad ,$$
$$\operatorname{arccot} x = \pi - \operatorname{arccot}(-x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad ,$$

G32:d. Esponenziali e logaritmi

G32:d.01 Per ogni reale positivo $b \neq 1$ la funzione esponenziale $y = b^x$ è decrescente se $b < 1$ e crescente se $b > 1$ e quindi è dotata di funzione inversa: questa funzione si dice **funzione logaritmo** in base b e si denota con $y = \log_b(x)$. Dato che $\mathrm{dom}(b^x) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{cod}(b^x) = \mathbb{R}_+$, la funzione logaritmo è del genere $\{\mathbb{R}_+ \longleftrightarrow \mathbb{R}\}$; inoltre per $0 < b < 1$ è una funzione decrescente e per $b > 1$ è funzione crescente.
In termini discorsivi $\log_b(x)$ esprime l'esponente della base b che conduce a x.

G32:d.02 **(1) Prop.:** $\forall x \in \mathbb{R} \;:\; \log_b(b^x) = x$

Dim.: Se $y = \log_b(b^x)$ allora $b^x = b^y$ e per la monotonia della funzione esponeniale $y = x$ ▮

(2) Prop.: $\forall x \in \mathbb{R}_+ \;:\; b^{\log_b(x)} = x$ Dalla definizione ▮

(3) Prop.: $\log_b(b) = 1$ Dalla definizione ▮

(4) Prop.: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \;:\; \log_b(x_1 x_2) = \log_b(x_1) + \log_b(x_2)$ Dalla definizione ▮

prp5 $\log_b(1) = 0$ ▮

(6) Prop.: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \;:\; \log_b\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_b(x_1) - \log_b(x_2)$ ▮

Si trovano poi le formule relative al cambiamento della base b alla base c, con c reale positivo diverso da 1.

(7) Prop.: $\log_b(c) = \dfrac{1}{\log_c(b)}$

Dim.: Se $L := \log_b(c)$ si ha $b^L = c$ e se $M := \log_c(b)$ si ha $b = c^M$; inoltre $(b^L)^M = b^{L \cdot M} = b$ e per la monotonia degli esponenziali $L = \dfrac{1}{M}$ ▮

(8) Prop.: $\forall x \in \mathbb{R} \;:\; \log_b(c^x) = x \log_b(c)$ ▮

(9) Prop.: $\forall x \in \mathbb{R} \;:\; \log_c(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(c)} = \log_c(b) \cdot \log_b(x)$ ▮

G32:d.03 Nello studio delle funzioni reali solo in una gamma ristretta di espressioni definitorie si riscontrano proprietà come quelle di simmetria, di monotonia, di invertibilità per le funzioni con il dominio il più possibile esteso individuate dalle espressioni stesse; accade più di frequente di riscontrare

le suddette proprietà in funzioni ottenute dalle espressioni restringendo opportunamente il loro possibile dominio.
Ad esempio la funzione $y = x^2$ definita per ogni x reale non è monotona, mentre lo sono le sue riduzioni a $\mathbb{R}_{-,0}$ e a $\mathbb{R}_{0,+}$.
Similmente la funzione $y = x^3 - x = (x-1)x(x+1)$ non è invertibile, mentre lo sono le sue riduzioni ai sottodomini $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.