Capitolo G30:
Elementi di geometria piana

Contenuti delle sezioni

G30:0.01 In questo capitolo si introducono le nozioni di base della geometria del **piano cartesiano**, ambiente che qui consideriamo la rappresentazione fedele del quadrato cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cioè dell'insieme delle coppie di numeri reali.

L'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si rivela un ambiente matematico molto più versatile di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, in quanto consente di trattare angoli e curve continue e quindi di introdurre le nozioni di topologia che permettono di sviluppare, in modo relativamente semplice e sistematico, le nozioni infinitesimali che sono esposte a partire dai capitoli I12: - I17: .
Dal punto di vista algebrico il piano cartesiano è uno spazio vettoriale (v. G40:) munito di prodotto interno (v. G41:). Esso costituisce l'ambiente di partenza per uno sviluppo della geometria euclidea nonché l'ambiente basilare per lo sviluppo delle nozioni della matematica del continuo e quindi un primo ambiente per aree della matematica come [[calcolo infinitesimale]], [[geometria differenziale]], [[sistemi dinamici]], ...

Va detto anche che il presente capitolo si limita ad esporre quelli che chiamiamo oggetti geometrici lineari (rette, segmenti, poligoni, ...) e le primissime nozioni sulle circonferenze, anche al fine di introdurre le costruzioni che si servono di riga e compasso.

G30:a. Il piano delle coppie di reali

G30:a.01 Ad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ambiente che qui chiameremo semplicemente **piano**, si possono estendere tutte le nozioni introdotte in G13: per il piano sui razionali $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e per le quali si sono accennate le estensioni al piano sui numeri algebrici e a quello ancor più ampio costruito sui numeri costruibili $\mathbb{R}_{\mathsf{C}} \times \mathbb{R}_{\mathsf{C}}$. Inoltre si può estendere il modello fisico-matematico del piano rappresentato da $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Per i nomi di molte configurazioni relative ad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, per distinguerle dalle omologhe definite su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, si potrebbe usare l'aggettivo sincopato -RR. Per evitare appesantimenti, nel resto del capitolo e quando non risulta opportuno usarlo esplicitamente, il suffisso -RR viene trascurato. In particolare parliamo di punti, di rette e di vettori, invece che di punti -RR, di rette -RR e di vettori -RR.

I due numeri reali componenti di un elemento $P = \langle a, b\rangle$ del piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sono chiamati le **coordinate [cartesiane]** del punto; la prima coordinata a viene detta anche **ascissa** del punto e la seconda coordinata b viene detta **ordinata** di P.

G30:a.02 Spesso è utile considerare il piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come ripartito nelle seguenti 9 parti:

$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, **primo quadrante aperto**, insieme dei punti $\langle a, b\rangle$ con entrambe le coordinate positive;
$\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$, **secondo quadrante aperto**, insieme dei punti $\langle a, b\rangle$ con $a < 0$ e $b > 0$;
$\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$, **terzo quadrante aperto**, insieme dei punti $\langle a, b\rangle$ con $a < 0$ e $b < 0$;
$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$, **quarto quadrante aperto**, insieme dei punti $\langle a, b\rangle$ con $a > 0$ e $b < 0$;
$\{x \in \mathbb{R}_+ :| \langle x, 0\rangle\} = \mathbb{R}_+ \times \{0\}$, **semiasse orizzontale positivo**;
$\{y \in \mathbb{R}_+ :| \langle 0, y\rangle\} = \{0\} \times \mathbb{R}_+$, **semiasse verticale positivo**;
$\{x \in \mathbb{R}_- :| \langle x, 0\rangle\} = \mathbb{R}_- \times \{0\}$, **semiasse orizzontale negativo**;
$\{y \in \mathbb{R}_- :| \langle 0, y\rangle\} = \{0\} \times \mathbb{R}_-$, **semiasse verticale negativo**;
$\{\langle 0, 0\rangle\}$, singoletto costituito dalla sola 'origine.

Talora serve riferirsi ad alcune unioni di queste parti, quali:

$\mathbb{R}_{0+} \times \mathbb{R}_{0+}$, **primo quadrante [chiuso]**;
$\mathbb{R}_{-0} \times \mathbb{R}_{0+}$, **secondo quadrante [chiuso]**;
$\mathbb{R}_{-0} \times \mathbb{R}_{-0}$, **terzo quadrante [chiuso]**;
$\mathbb{R}_{0+} \times \mathbb{R}_{-0}$, **quarto quadrante [chiuso]**;
$\{x \in \mathbb{R}_{0+} :| \langle x, 0\rangle\}$, **semiasse orizzontale non negativo**;
$\{y \in \mathbb{R}_{0+} :| \langle 0, y\rangle\}$, **semiasse verticale non negativo**;
$\{x \in \mathbb{R}_{-0} :| \langle x, 0\rangle\}$, **semiasse orizzontale non positivo**;
$\{y \in \mathbb{R}_{-0} :| \langle 0, y\rangle\}$, **semiasse verticale non positivo**;
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{0+}$, **semipiano superiore [chiuso]**;
$\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$, **semipiano occidentale aperto**.

G30:b. Rette nel piano

G30:b.01 Nel piano cartesiano si definisce **retta -RR** ogni insieme di punti di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ determinato da una terna di numeri $a, b, c \in \mathbb{R}$ vincolati solo dalla condizione $a^2 + b^2 > 0$, avente la forma

$$\{\langle x, y\rangle\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,]\!\!] \; ax + by + c = 0\} \quad . \tag{1}$$

Si osserva che la condizione $a^2 + b^2 > 0$ equivale a quella espressa dalla disuguaglianza $|a| + |b| > 0$ e a quella dell'enunciato "$a \neq 0$ e $b \neq 0$" .

Nella precedente espressione insiemistica si dice che i simboli x e y svolgono il ruolo di **variabili nell'insieme** $\mathbb{R}$, o che sono **variabili che corrono in** $\mathbb{R}$, o in breve che sono **variabili reali**.

Questa precisazione può esprimersi con una notazione di tipo insiemistico $x, y \in \mathsf{Vrb}(\mathbb{R})$. Va notato che la precedente scrittura non pretende che $\mathsf{Vrb}(\mathbb{R})$ denoti un insieme riconducibile a quelli finora introdotti; infatti non si intende affermare che ai simboli delle variabili possono essere sostituiti tutti gli elementi dell'insieme $\mathbb{R}$, ma solo che i valori che possono sostituire le variabili devono far parte di $\mathbb{R}$.

In questo capitolo, invece che di retta -RR useremo per antonomasia e concisione il termine **linea retta** o anche il più semplice **retta**.

La retta precedente, quando si possono sottintendere i diversi ruoli delle lettere x e y ($\in$ **Vrb**($\mathbb{R}$) da una parte e a, b e c dall'altra, si può denotare con

(2) $\qquad \mathsf{Soln}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}(ax + by + c = 0)$ o, più semplicemente, con $\mathsf{Soln}(ax + by + c = 0)$.

Questa scrittura può leggersi

"insieme delle soluzioni $\langle x, y\rangle$ che soddisfano la richiesta $ax + by + c = 0$" .

Con un linguaggio più geometrico si può anche leggere

"luogo dei punti $\langle x, y\rangle$ tali che sia $ax + by + c = 0$" .

In effetti di solito per individuare la suddetta linea si utilizza la semplice equazione; qui ci serviremo dell'enunciato $\ulcorner ax + by + c = 0 \urcorner$. Diremo anche che x e y sono **variabili che corrono** su $\mathbb{R}$.

Nel seguito denotiamo con **RtlinRR**, o più semplicemente con **Rtlin**, l'insieme delle rette del piano; In molti testi di geometria una retta viene chiamata anche **punteggiata**.

Si constata facilmente che ogni retta -RR contiene propriamente una ed una sola retta -QQ.

G30:b.02 Le rette del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si possono esprimere con varie equazioni. L'equazione con la quale abbiamo introdotte le rette

(1) $$ax + by + c = 0 \quad \text{con} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a^2 + b^2 > 0 \ ,$$

si dice **equazione generale della retta**; essa ha effettivamente portata generale e può essere utile denotare l'insieme di punti che essa denota con $Rtlin_g(a, b, c)$.

L'equazione precedente viene chiamata anche **equazione lineare** nelle due variabili x e y, in quanto l'espressione alla quale si impone di annullarsi è un polinomio di primo grado nelle variabili x e y, ovvero un polinomio lineare bivariato.

Ai simboli a, b e c che denotano numeri reali che possono scegliersi con elevata arbitrarietà si attribuisce il cosiddetto ruolo dei **parametri dell'equazione**.

Le terne concernenti questi parametri non sono associate biunivocamente alle rette: infatti la retta $Rtlin_g(a, b, c)$ viene individuata anche dalla equazione $kax + kby + kc = 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}_{nz}$, ottenibile dalla precedente moltiplicando tutti i suoi addendi per k.

Servendosi della precedente notazione si ha

(2) $$\forall k \in \mathbb{R}_{nz} \ \vdots \ Rtlin_g(a, b, c) = Rtlin_g(ka, kb, kc) \ .$$

G30:b.03 È utile distinguere varie classi di rette.

Le rette della forma $\mathsf{Soln}(y = y_0)$ con $y_0 \in \mathbb{R}$ si dicono **rette orizzontali**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $a = 0$, $b = 1$ e $c = -y_0$. L'asse Ox è la retta orizzontale $\mathsf{Soln}(y = 0)$.

Le rette della forma $\mathsf{Soln}(x = x_0)$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ si dicono **rette verticali**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = -x_0$. L'asse Oy è la retta orizzontale $\mathsf{Soln}(x = 0)$.

La $\mathsf{Soln}(y = x)$ si dice **bisettrice del I [e del III] quadrante**. Le rette della forma $\mathsf{Soln}(y = x + y_0)$ si dicono **rette parallele alla bisettrice del I quadrante**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $a = 1$, $b = -1$ e $c = y_0$.

La $\mathsf{Soln}(y = -x)$ si dice **bisettrice del II [e del IV] quadrante**. Le rette della forma $\mathsf{Soln}(y = -x + y_0)$ si dicono **rette parallele alla bisettrice del II quadrante**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $a = -1$, $b = -1$ e $c = y_0$.

Per i diversi $m \in \mathbb{R}$ le $\mathsf{Soln}(y = mx)$ sono tutte e sole le rette che passano per l'origine; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $a = -m$, $b = 1$ e $c = 0$.

Tutte queste rette si tracciano facilmente sopra un foglio di carta quadrettata o millimetrata servendosi delle loro intersezioni con gli assi. Ciascuna di tali intersezioni si ottiene tenendo conto congiuntamente dell'equazione della retta e di quella di un asse. Ad esempio l'intersezione della retta $\mathsf{Soln}(y = x + y_0)$ con l'asse Ox è ottenuta imponendo $y = 0$ nella precedente equazione e quindi è costituita da $\langle -y_0, 0\rangle$; a sua volta l'intersezione della $\mathsf{Soln}(y = x - y_0)$ con l'asse Oy si ottiene imponendo $x = 0$ nella precedente e quindi è data da $\langle 0, -y_0\rangle$.

G30:b.04 È immediato decidere se un punto $\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle$ appartiene o meno ad una retta $\mathsf{Soln}(ax+by+c = 0)$: basta sostituire i valori $\overline{x}$ e $\overline{y}$ alle rispettive variabili nell'espressione $ax + by + c$ e verificare se il valore ottenuto, $a\overline{x} + b\overline{y} + c$, è uguale o diverso da zero.

Osserviamo esplicitamente che si riesce a trovare facilmente un punto $\langle x_0, y_0\rangle$ che appartiene alla $\mathcal{R} = \mathsf{Rtlin}_g(a, b, c)$; se $b \neq 0$, quale che sia $x_0 \in \mathbb{R}$ le appartiene ad $\mathcal{R}$ il punto $\left\langle x_0, -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}\right\rangle$; se $a \neq 0$, quale che sia $y_0 \in \mathbb{R}$ appartiene ad $\mathcal{R}$ il punto $\left\langle \frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a}, y_0\right\rangle$.

Abbiamo quindi $ax_0 + by_0 + c = 0$; sottraendo questa dalla equazione generale si trova l'equazione equivalente

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \ . \tag{1}$$

Questa è l'equazione di una retta passante per il punto $\langle x_0, y_0\rangle$.

Talora è utile indicare la retta facendo riferimento alla precedente equazione con la scrittura $Rtlin_{pnt,dir}(x_0, y_0; a, b)$

G30:b.05 Questo modo di procedere può essere genaralizzato. Si considerano insiemi ambiente riferibili a una, a due o a più coordinate che denotiamo sinteticamente con x: alcuni esempi sono $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si individuano sottoinsiemi di tali ambienti mediante equazioni e relazioni nelle loro coordinate. Se denotiamo genericamente con $\mathcal{P}(\mathsf{x})$ una di queste relazioni, il corrispondente insieme può denotarsi con $\mathsf{Soln}(\mathcal{P}(\mathsf{x}))$; la decisione se un punto specifico le cui coordinate che denotiamo con $\overline{\mathsf{x}}$ appartenga o meno all'insieme S si riconduce a stabilire se sono soddisfatte le proprietà $\mathcal{P}(\overline{\mathsf{x}})$.

Le rette della forma $\mathsf{Soln}(ax + by = 0)$ sono tutte e sole le rette passanti per l'origine. Da un lato è evidente che l'origine appartiene a tutte queste rette. Dall'altro si ha che una tale retta deve passare per l'origine: infatti se $a = 0$ e $b \neq 0$ si ha $\mathsf{Soln}(y = 0)$ cioè l'asse Ox, se $a \neq 0$ e $b = 0$ si ha $\mathsf{Soln}(x = 0)$ cioè l'asse Oy, se $a, b \neq 0$ si ha una retta che passa per l'origine: quest'ultima si chiama **retta obliqua**.

L'insieme delle rette passanti per un punto P del piano si dicono costituire un **fascio di rette** di cui P è il **sostegno**. Si può quindi dire che l'equazione precedente, al variare dei parametri, caratterizza il fascio di rette avento come sostegno l'origine: questo può denotarsi con $\{a, b \in \mathbb{R} :| \mathsf{Soln}(ax + by = 0)\}$.

Nella espressione $ax + by + c = 0$ ai simboli a, b e c che denotano numeri reali che possono scegliersi arbitrariamente si attribuisce il cosiddetto ruolo dei **parametri**.

G30:b.06 Per ogni numero reale non nullo r, le due rette fornite dalle equazioni $ax + by + g = 0$ e $rax+rby+rc = 0$ coincidono. Infatti la seconda si ottiene dalla prima moltiplicandone tutti gli addendi per r e la seconda dalla prima "moltiplicandola" per $1/r$. Quindi i tre parametri che caratterizzano un'equazione lineare in due variabili reali non sono indipendenti, ma presentano una determinata ridondanza.

Spesso conviene utilizzare delle varianti dell'equazione generale nelle quali si incontrano parametri indipendenti, non ridondanti. Tuttavia queste varianti non sono completamente equivalenti alla generale, in quanto non riescono a individuare alcune delle soluzioni di quest'ultima.

G30:b.07 Consideriamo l'equazione $ax + by + c = 0$ con $b \neq 0$, cioè l'equazione di una retta $\mathcal{R}$ che non è una parallela all'asse Oy. Essa si riscrive nella forma equivalente

(1) $$y = mx + q \ ,$$

nella quale compaiono solo i due parametri $m := -\frac{a}{b}$ e $q := -\frac{c}{b}$. Essa è detta **equazione canonica** della retta R, m è chiamato il suo **coefficiente angolare** e q la sua **ordinata all'origine**. Si osserva che m esprime la pendenza della $\mathcal{R}$: si ha $m > 0$ sse la retta è crescente, cioè cresce all'aumentare della ascissa dei suoi punti (e tanto maggiore quanto più la $\mathcal{R}$ è inclinata); si ha $m = 0$ sse R è parallela alla Ox; si ha $m < 0$ sse la $\mathcal{R}$ è decrescente, cioè si abbassa all'aumentare della x (ed è tanto inferiore quanto maggiore è la pendenza verso il basso).
Per la suddetta retta useremo la notazione

(2) $$\mathsf{Rtlin}_{can}(m, q) \ := \ \mathsf{Soln}(y = mx + q) \ .$$

G30:b.08 Consideriamo la retta $\mathcal{R}$ data da un'equazione generale $ax + by + c = 0$ nella quale tutti i tre parametri sono diversi da zero; si tratta dunque di una retta che non passa per l'origine e non è parallela ad alcuno degli assi. L'equazione si può mettere nella forma equivalente $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$: basta assumere $p := -\frac{c}{a}$ e $q := -\frac{c}{b}$ (come per l'equazione canonica). Essa è detta **equazione segmentaria** della retta; anche in questa equazione compaiono solo due parametri. Per la retta suddetta useremo la notazione

(1) $$\mathsf{Rtlin}_{sgm}(p, q) \ := \ \mathsf{Soln}\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1\right) \ .$$

Si osserva che, fissato $x = 0$, si trova $y = q$, cioè che la retta $\mathcal{R}$ interseca l'asse Ox nel punto $\langle p, 0\rangle$; simmetricamente, posto $y = o$ si trova $x = p$, cioè che la retta intersecal'asse Oy nel punto $\langle 0, q\rangle$. L'equazione segmentaria dunque è in grado di esprimere tutte le rette che presentino due diverse intersezioni con gli assi; essa invece non è in grado di rappresentare le altre rette del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il cui insieme consiste esattamente nell'unione del fascio delle rette parallele all'asse delle x, del fascio delle rette parallele all'asse delle y e del fascio delle rette passanti per l'origine.
Segnaliamo esplicitamente anche le relazioni $p = \frac{q}{m}$ e $m = \frac{q}{p}$.

G30:b.09 Consideriamo i due punti diversi $A = \langle x_A, y_A\rangle$ e $B = \langle x_B, y_B\rangle$ e il duetto da loro costituito $D = \{A, B\}$. Si intuisce che per questi due punti passi una e una sola retta; esaminiamo la questione distinguendo le varie possibilità e cerchiamo sue equazioni.

Se $x_A = x_B$ i due punti appartengono alla retta verticale $x = x_A$ e a nessun'altra. In caso contrario cerchiamo rette nella forma canonica $y = mx + q$.

Devono valere le equazioni $y_A = mx_A + q$ e $y_B = mx_B + q$; sottraendo la prima dalla seconda si ricava $y_B - y_A = m(x_B - x_A)$ e questa, per la supposta collocazione non verticale dei punti, si può risolvere per ottenere univocamente $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Dalla prima equazione si ricava poi univocamente $q = y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A = \frac{y_A x_B - x_A y_B}{x_B - x_A}$.

L'equazione cercata si può porre sotto una delle due forme

(1) $$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x + y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A \qquad \text{ovvero} \qquad y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \ .$$

Altre forme equivalenti sono

(2) $$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \qquad \text{e} \qquad \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

e naturalmente quelle in cui si scambiano i ruoli i punti A e B e/o le coordinate x e y.
Può essere utile anche una forma più simmetrica rispetti allo scambio $\ulcorner x \leftrightarrow y \urcorner$ come la

(3) $$(y - y_A) \cdot (x_B - x_A) = (x - x_A) \cdot (y_B - y_A) \; .$$

Si osserva che questa equazione rende conto anche dei casi $x_A = x_B$ e $y_A = y_B$. In effetti questa equazione è immediatamente riducibile alla forma

(4) $$(y_B - y_A) \cdot x - (x_B - x_A) \cdot y + [y_A \cdot (x_B - x_A) - x_A \cdot (y_B - y_A)] = 0 \; ,$$

cioè alla equazione generale relativa ad $a = y_B - y_A$, $b = (x_B - x_A)$ e $c = y_A \cdot (x_B - x_A) - x_A \cdot (y_B - y_A)$.

G30:b.10 Per la retta passante per i punti del duetto $\{A, B\}$ useremo la notazione

(1) $$\mathsf{Rtlin}_{PP}(A, B) := \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;]\!\!]\; (y - y_A) \cdot (x_B - x_A) = (x - x_A) \cdot (y_B - y_A)\} \; .$$

Questo insieme, se si sottintende $x, y \in \mathsf{Vrb}(\mathbb{R})$, si denota anche con le scritture seguenti

(2) $$\overline{AB} := \mathsf{Soln}\left((y - y_A) \cdot (x_B - x_A) = (x - x_A) \cdot (y_B - y_A)\right) \; .$$

G30:b.11 Le rette, attraverso le loro porzioni finite delimitate da due punti, sono i modelli matematici delle traiettorie fisiche percorse da fasci luminosi molto collimati per i quali si possono trascurare effetti di [[interferenza]] e [[diffrazione]], cioè fasci ai quali si possa applicare l'[[ottica geometrica]] e non sia necessario ricorrere ad una teoria ondulatoria della propagazione luminosa. Secondariamente le rette sono i modelli degli "spigoli diritti" di svariati oggetti rigidi: il carattere "rettilineo" di questi spigoli si riconduce al fatto empirico che essi vengono riconosciuti come tali con procedimenti che si basano sulla vista o su qualche strumento ottico.

G30:b.12 I collegamenti fra le diverse modalità di caratterizzare rette del piano cartesiano sono esprimibili con le seguenti relazioni.

(1) $$\mathsf{Rtlin}_{sgm}(p, q) = \mathsf{Rtlin}_{can}\left(-\frac{q}{p}, q\right) \; ;$$

(2) $$\mathsf{Rtlin}_{PP}\left(\langle x_A, y_A\rangle, \langle x_B, y_B\rangle\right) = \mathsf{Rtlin}_{can}\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, ...\right) \; .$$

G30:c. Segmenti, semirette, orientazioni

G30:c.01 La funzione $\ulcorner \langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \langle x, 0\rangle \urcorner$ si dice **proiettore dei punti sull'asse** Ox e si denota con $\boldsymbol{Prj}_x$.
La funzione $\ulcorner \langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \langle 0, y\rangle \urcorner$ si dice **proiettore dei punti sull'asse** Oy e si denota con $\boldsymbol{Prj}_y$.
Il punto $\langle x, 0\rangle$ si dice **proiezione su** Ox di P; il punto $\langle 0, y\rangle$ si dice **proiezione su** Oy di P.

I due proiettori "cartesiani" introdotti si possono considerare funzioni del genere $\{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}\}$ non invertibili, oppure endofunzioni non invertibili entro $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Come endofunzioni esse sono idempotenti: in effetti $\boldsymbol{Prj}_x$ ha come codominio Ox e questo è anche l'insieme dei suoi punti fissi; simmetricamente Oy è il codominio e l'insieme dei punti fissi di $\boldsymbol{Prj}_y$.

G30:c.02 Consideriamo due punti diversi $A = \langle x_A, y_A\rangle$ e $B = \langle x_B, y_B\rangle$, la retta, unica, che li contiene $\mathcal{R} := \overline{AB}$ e il generico punto $P = \langle x, y\rangle \in \overline{AB}$.
Il proiettore $\boldsymbol{Prj}_x$ ristretto alla $\mathcal{R}$, cioè $\boldsymbol{Prj}_x\rceil_{\mathcal{R}}$, è una biiezione del genere $\{\mathcal{R} \triangleleft\!\!-\!\!\triangleright Ox\}$ sse la $\mathcal{R}$ non è verticale, cioè sse $x_A \neq x_B$. Simmetricamente $\boldsymbol{Prj}_y\rceil_{\mathcal{R}} \in \{\mathcal{R} \triangleleft\!\!-\!\!\triangleright Oy\}$ sse la $\mathcal{R}$ non è orizzontale, cioè sse $y_A \neq y_B$.

Per le proiezioni dei punti A e B usiamo le notazioni locali $A_x := \langle x_A, 0\rangle$, $A_y := \langle 0, y_A\rangle$, $B_x := \langle x_B, 0\rangle$ e $B_y := \langle 0, y_B\rangle$. Supponiamo che $\overline{AB}$ non sia verticale e più particolarmente che sia $x_A < x_B$.
I due punti A_x e B_x ripartiscono l'asse Ox in 5 parti:
- l'intervallo illimitato a sinistra $(, x_A)$;
- il singoletto $\{x_A\}$;
- l'intervallo aperto (x_A, x_B) ;
- il singoletto $\{x_B\}$;
- l'intervallo illimitato a destra $(x_B,)$.

Una pentapartizione corrispondente viene determinata sulla $\overline{AB}$ dalla biiezione $\boldsymbol{Prj}_x^{-1}$. Le 5 parti che corrispondono alle suddette successive parti dell'asse Ox sono:
- $\boldsymbol{Prj}^{-1}(, x_A)$, chiamata **semiretta aperta con estremità** A;
- singoletto $\{A\}$;
- $\boldsymbol{Prj}^{-1}(x_A, x_B)$, chiamata **segmento aperto** e denotata con $\overline{AB}$;
- singoletto $\{B\}$;
- $\boldsymbol{Prj}^{-1}(x_B,)$, chiamata **semiretta aperta con estremità** B.

Discorso simmetrico si può fare se $\overline{AB}$ non è orizzontale servendosi del proiettore $\boldsymbol{Prj}_y$.
Nel caso in cui la $\overline{AB}$ non è nè verticale nè orizzontale, le ripartizioni determinate da $\boldsymbol{Prj}_x$ e $\boldsymbol{Prj}_y$ coincidono, in quanto $\boldsymbol{Prj}_x^{-1} \circ \boldsymbol{Prj}_y$ pone in corrispondenza biunivoca Ox ed Oy.
In effetti, ricordando l'equazione canonica della $\overline{AB}$ (:2.10) si trova

(1) $$\boldsymbol{Prj}_x^{-1} \circ \boldsymbol{Prj}_y = \ulcorner x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x + y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A \urcorner \ .$$

G30:c.03 Supponiamo ancora che sia $x_A \neq x_B$ e consideriamo la funzione

(1) $$\sigma := \ulcorner t \in \mathbb{R} \mapsto x_A + (x_B - x_A) \cdot t \urcorner \ .$$

Questa è una trasformazione di $\mathbb{R}$ in sé stesso invertibile, cioè una permutazione dell'insieme dei numeri reali, tale che $\sigma(0) = x_A$ ed $\sigma(1) = x_B$.
Si può interpretare la t come la grandezza tempo e la funzione $\sigma(t)$ come la posizione di un corpo puntiforme che si muove sull'asse Ox di moto uniforme, cioè a velocità costante; questo corpo all'istante $t = 0$ si trova nel punto $A_x = \langle x_A, 0\rangle$ e all'istante $t = 1$ nel punto $B_x = \langle x_B, 0\rangle$.
Chiaramente se $x_A < x_B$ il corpo puntiforme si muove sulla Ox da sinistra a destra: al procedere del tempo aumenta la ascissa del corpo. Se invece $x_A > x_B$ il corpo si muove da destra verso sinistra.

Questo modello cinematico si può applicare anche alla retta $\overline{AB}$ interpretando la funzione $\sigma(t)$ come l'andamento nel tempo della proiezione su Ox di un corpo puntiforme che si muove di moto uniforme sulla retta stessa. Questo corpo all'istante $t = 0$ si trova nel punto A e nell'istante $t = 1$ nel punto B; per la sua ordinata, ovvero per la sua proiezione sulla Oy, dall'espressione della $\sigma(t)$ e dall'espressione della ordinata del punto P mediante la sua ascissa si ricava

(2) $$y = \tau(t) := y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) = y_A + (y_B - y_A) \cdot t \ .$$

G30:c.04 Le due funzioni $\sigma(t)$ e $\tau(t)$ forniscono una descrizione cinematica della retta $\overline{AB}$ che spesso rende più intuitive le considerazioni geometriche su questa retta in relazione agli assi di riferimento del piano reale. Il corpo puntiforme potrebbe descriversi come la punta molto fine di una penna che traccia la retta su un foglio di carta esteso quanto può servire il quale fa da modello fisico del supporto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Prescindendo dalla interpretazione della t come variabile temporale, le due espressioni che riscriviamo

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A) \cdot t \\ y = y_A + (y_B - y_A) \cdot t \end{cases} \qquad \text{per} \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

possono comunque essere considerate scritture che consentono di individuare i punti della retta passante per A e per B servendosi di una variabile $t \in \mathsf{Vrb}(\mathbb{R})$. Queste sono dette **espressioni parametriche cartesiane** o **parametrizzazione cartesiana** della curva $\overline{AB}$.
La retta caratterizzata dal precedente sistema (1) sarà denotato con

$$(2) \qquad \mathsf{Rtlin}_{par}\left(A, \overrightarrow{B - A}\right) \ .$$

Questa retta può anche essere individuata come sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mediante l'espressione

$$(3) \qquad \overline{AB} = \{t \in \mathbb{R} :| \ \langle x_A + (x_B - x_A) \cdot t \ , \ y_A + (y_B - y_A) \cdot t\} \ .$$

Sono opportune alcune osservazioni. Si nota che con parametrizzazioni cartesiane si possono esprimere anche rette orizzontali e verticali. La coppia delle equazioni risulta simmetrica rispetto allo scambio $\ulcorner x \leftrightarrow y \urcorner$, in accordo con la sostanziale equivalenza dei ruoli delle due coordinate nello studio delle rette di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Infine si osserva che la descrizione cinematica, ovvero la descrizione della retta come di una linea ottenuta con un tracciamento materiale, porta ad attribuirle una orientazione, ovvero ad assegnare un ordinamento totale ai suoi punti derivante dall'ordinamento dell'insieme $\mathbb{R}$ nel quale "corre" il parametro t. Questo corrisponde ad attribuire un ordine tra i punti A e B, cioè a considerare che A "venga prima" di B.

G30:c.05 Abbiamo visto che una coppia di punti diversi $\langle A, B\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ individua una retta e una sua biiezione con l'insieme ordinato $\mathbb{R}$ rispecchiata da un sistema di espressioni parametriche cartesiane. Una diversa coppia di punti appartenenti alla stessa retta $\langle C, D\rangle$ mediante il proprio sistema di espressioni parametriche cartesiane individua la stessa retta, ma una diversa biiezione con $\mathbb{R}$. Le due coppie $\langle A, B\rangle$ e $\langle C, D\rangle$ si dicono compatibili sse $(x_B - x_A) \cdot (x_D - x_C) \geq 0$ e $(y_B - y_A) \cdot (y_D - y_C) \geq 0$, incompatibili in caso contrario. La compatibilità corrisponde al fatto che percorrendo la retta in modo da incontrare prima A e poi B si incontra C prima di D (e viceversa). Si osserva che la compatibilità fra coppie di punti diversi su una retta è una equivalenza e che la coppia $\langle A, B\rangle$ e la sua riflessa $\langle B, A\rangle$ sono incompatibili. Vi sono quindi due classi di coppie di punti diversi di una retta. Queste due classi sono dette **sensi di percorrenza** della retta e questi due sensi si dicono **sensi opposti** l'uno dell'altro.

Possiamo ora definire come **retta orientata** associata alla coppia $\langle A, B\rangle$ di punti diversi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la retta $\overline{AB}$ munita del senso di percorrenza secondo il quale il punto A si incontra prima di B. Questa retta orientata si denota con $\overrightarrow{AB}$. La retta orientata $\overrightarrow{BA}$ si dice **retta orientata opposta** della $\overrightarrow{AB}$.

G30:c.06 Come ad una retta sono associate due rette orientate opposte, così a ogni segmento aperto di una retta sono associati due segmenti orientati.
A questo proposito conviene individuare come segmento aperto associato al duetto $\{A, B\}$ con l'espressione parametrica ottenuta riducendo l'espressione presentata in :3.4

$$(1) \qquad \{ \ t \in (0,1) \ :| \ \langle x_A + (x_B - x_A) \cdot t \ , \ y_A + (y_B - y_A) \cdot t\rangle \ \} \ .$$

Similmente si definisce **segmento chiuso** associato ad $\{A, B\}$ il sottoinsieme della retta che amplia il precedente

(2) $$\overline{AB} = \{t \in [0,1] :| \langle x_A + (x_B - x_A) \cdot t \ , \ y_A + (y_B - y_A) \cdot t \rangle\} \ .$$

I punti A e B si dicono **estremi** o **estremità** di questi segmenti.

Si dice **segmento orientato aperto** associato alla coppia $\langle A, B\rangle$ il segmento associato a questa coppia munito del senso di percorrenza da A a B.
Similmente si definisce il **segmento orientato chiuso** associato alla $\langle A, B\rangle$: questa entità si denota con $\overrightarrow{AB}$.
Evidentemente i segmenti [orientati] aperti e chiusi definiti da un duetto [da una coppia] di punti si corrispondono biunivocamente.
Osserviamo che si possono considerare anche i segmenti orientati chiusi della forma $\overrightarrow{AA}$, i cui corrispondenti aperti si riducono all'insieme $\emptyset$, quale che sia A.

Il punto A si dice **estremo iniziale** o **estremità iniziale** del segmento orientato aperto e del corrispondente chiuso; il punto B si dice **estremo finale** o **estremità finale** del segmento orientato aperto e del corrispondente chiuso.
In gran parte delle considerazioni geometriche non si distingue fra le versioni aperte e le chiuse di queste entità. In seguito ci riferiremo preferibilmente ai segmenti chiusi e ai segmenti orientati chiusi che chiameremo semplicemente segmenti e segmenti orientati.
Alla coppia $\langle A, B\rangle$ si possono associare anche il **segmento orientato aperto-chiuso** contenente B ma non A e il **segmento orientato chiuso-aperto** contenente A ma non B.
In genere tuttavia la distinzione fra le quattro varianti di un segmento orientato non ha grande interesse: in molte considerazioni geometriche le quattro varianti dei segmenti orientati delimitati, nell'ordine, da A e da B sono sostanzialmente equivalenti. Spesso quindi invece di ricorrere ai segmenti orientati si potrebbe fare riferimento all'insieme di questi quattro insiemi geometrici lineari che potrebbe essere trattato come una classe di equivalenza.

G30:c.07 Tra due segmenti (chiusi) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ si possono stabilire varie relazioni.
Essi si dicono **segmenti disgiunti** sse non hanno punti in comune. Si dicono **segmenti intersecati** in caso contrario.
Due segmenti intersecati più in particolare si dicono:
- **adiacenti -ee** sse hanno in comune uno e un solo punto che è estremità per entrambi;
- **adiacenti -ii** sse hanno in comune un solo punto diverso da A, B, C e D;
- **adiacenti -ei** sse hanno in comune un solo punto che può essere A o B;
- **adiacenti -ie** sse hanno in comune un solo punto che può essere C o D;
- **sovrapposti** sse hanno in comune almeno due punti diversi, e quindi tutti i punti del segmento che ha tali punti come estremi.

Due segmenti si dicono **segmenti collineari** sse sono sottoinsiemi della stessa retta.
Due segmenti sovrapposti sono collineari.
Se due segmenti sono collineari, possono essere:
- disgiunti (nessun punto in comune);
- adiacenti-ee (un solo punto in comune);
- sovrapposti (due e quindi infiniti punti in comume).

Se due segmenti sono sovrapposti possono essere:
- coincidenti;

- dotati di intersezione contenuta propriamente in entrambi (e in tal caso non sono confrontabili rispetto all'inclusione);
- l'uno sottoinsieme proprio dell'altro.

Se $\overline{AB} \subset \overline{CD}$ si distingue il caso in cui non hanno estremi comuni dai casi nei quali hanno un solo estremo comune, casi nei quali sono aut adiacenti -ei, aut adiacenti -ie.

G30:c.08 Per due segmenti orientati (chiusi) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si possono riscontrare o meno tutte le relazioni che si possono riscontrare tra i due segmenti che arricchiscono, risp., $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
Inoltre se essi sono adiacenti-ee può accadere che: aut $\overrightarrow{AB}$ è consecutivo di $\overrightarrow{CD}$ sse $A = D$, aut $\overrightarrow{CD}$ è consecutivo di $\overrightarrow{AB}$ sse $B = C$, aut sono divergenti sse $A = C$, aut sono convergenti sse $B = D$; in tutte queste situazioni si distinguono i casi in cui essi sono collineari da quelli nei quali non lo sono.
Se sono collineari (disgiunti o sovrapposti) possono essere: aut concordi sse le rette orientate individuate dai due segmenti coincidono, aut discordi sse tali rette sono l'una l'opposta dell'altra.

G30:c.09 Un punto P appartenente ad una retta la tripartisce in due semirette aperte e nel singoletto $\{A\}$; A si considera estremo di entrambe le semirette. Si dice **semiretta [chiusa]** l'unione di una semiretta e del suo estremo.
Una semiretta si può considerare come un segmento con un estremo posto all'infinito, oppure si può descrivere come un segmento avente un estremo che si allontana quanto si vuole dall'altro. È abbastanza naturale attribuire ad una semiretta l'orientazione indotta dal suo estremo considerato suo estremo iniziale, oppure indotto da una coppia formata dal suo estremo e da qualunque altro suo punto.

Una semiretta si può dunque individuare con un punto che costituisce il suo estremo (al finito) e con un secondo punto che le appartiene. La semiretta avente come estremo $A = \langle x_A, y_A\rangle$ e della quale fa parte come altro punto $B = \langle x_B, y_B\rangle$ si può denotare con $\overrightarrow{AB\ }$, notazione da non confondere con quella concernente il segmento orientato $\overrightarrow{AB}$. Questa semiretta si può individuare con l'espressione insiemistica dedotta da quella della retta $\overline{\ AB\ }$ trovata in :3.d

$$\overrightarrow{AB\ } \;=\; \{t \in \mathbb{R}_{0+} :|\ \langle x_A + (x_B - x_A)\cdot t\ ,\ y_A + (y_B - y_A)\cdot t\rangle\}\ .$$

G30:c.10 Si dice **insieme piano convesso** di RcR un suo sottoinsieme $\boldsymbol{K}$ tale che presi due suoi punti qualsiasi, tutti i punti del segmento che ha tali punti come estremità appartengono all'insieme stesso.
Risulta formalmente conveniente considerare che sia convesso anche l'insieme vuoto.
In termini di geometria analitica, un insieme $\boldsymbol{K} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ si dice convesso sse

(1) $\qquad \forall P = \langle x_P, y_P\rangle, \langle x_Q, y_Q\rangle \in \boldsymbol{K}\ ,\ t \in (0,1)\ \ \vdots\ \ \big\langle x_P + t(x_Q - x_P)\ ,\ y_P + t(y_Q - y_p)\big\rangle \in \boldsymbol{K}\ .$

Gli insiemi piani convessi più semplici sono quelli costituiti da un unico punto e quelli appartenenti ad una retta: questi sono gli intervalli di tale retta, limitati o illimitati, aperti, chiusi o semiaperti.

Anche tra gli insiemi piani convessi contenenti punti interni ne esistono di limitati, come i rettangoli a lati paralleli agli assi, e di illimitati, come i semipiani. Va notato che un insieme piano convesso con punti interni può contenere tutti o in parte i suoi punti di frontiera. Consideriamo un semipiano convesso $\boldsymbol{S}$ ed i punti della sua retta di frontiera F: aut l'intera F appartiene ad $\boldsymbol{S}$, aut l'intera F non appartiene ad $\boldsymbol{S}$, aut appartengono ad $\boldsymbol{S}$ tutti i punti di una semiretta di F (compreso o escluso il suo punto estremità), aut appartengono ad $\boldsymbol{S}$ i punti di un suo solo segmento (questo potendo essere vuoi chiuso, vuoi aperto, vuoi chiuso ad una sola estremità).

Un lato di un poligono convesso P aut gli appartiene per intero, aut non gli appartiene per intero, aut presenta un solo segmento appartenente a P (questo potendo essere vuoi chiuso, vuoi aperto, vuoi semiaperto).

G30:c.11 Dalla definizione si deduce facilmente che l'intersezione di due insiemi convessi è convesso: in particolare l'intersezione di due semipiani è un insieme convesso. Si osserva che per l'intersezione di due semipiani possono darsi tre situazioni alternative. Chiamiamo $\mathcal{R}_1$ ed $\mathcal{R}_2$ le rette che delimitano i semipiani e che supponiamo diverse. Se le rette sono parallele aut un semipiano è contenuto nell'altro e coincide con la loro intersezione, aut i due semipiani non hanno punti in comune e l'intersezione è vuota, aut non sono confrontabili e la loro intersezione è costituita da una fascia illimitata delimitata dalle due rette.

Se le due rette frontiera non sono parallele si ottiene un insieme delimitato da un punto e da due semirette che hanno tale punto come estremità, cioè si ottiene un insieme angolare.

Intersecando tre semipiani si ottiene aut un triangolo (limitato), aut un insieme illimitato avente una frontiera costituita da un segmento e due semirette.

Anche intersecando più di tre semipiani aut si ottiene un insieme convesso limitato che viene chiamato poligono convesso, aut un insieme illimitato la cui frontiera è costituita da due semirette e da una sequenza di segmenti che un ulteriore segmento trasforma nel perimetro di un poligono convesso.

Le intersezioni di un numero finito di poligoni sono oggetto della [[programmazione lineare]].

G30:c.12 Si dimostra facilmente che sottoponendo un insieme convesso ad una traslazione, ad una dilatazione, ad una riflessione o ad una rotazione si ottiene un secondo insieme convesso.

G30:d. Vettori, traslazioni e vettori applicati

G30:d.01 Ampliando quanto si è presentato per il piano combinatorio (20:) e per il piano sui razionali (B31:), introduciamo per gli elementi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un linguaggio vettoriale ed operazioni che aprono la strada alla possibilità di sviluppare procedimenti di calcolo per il piano reale basati su considerazioni algebriche.

I punti di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sono in corrispondenza biunivoca con i segmenti orientati aventi come estremo iniziale l'origine; questi due tipi di entità si rivelano logicamente equivalenti e ogni punto $P = \langle r, s \rangle$ può essere identificato con il segmento $\overrightarrow{OP}$, si può chiamare **vettore** e può essere visualizzato con una freccia che inizia nell'origine $\langle 0, 0 \rangle$ e termina in P.

I vettori di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o di altri spazi vettoriali spesso vengono identificati con lettere in neretto: qui useremo preferibilmente scritture come v, $\mathsf{w}_{(1)}$, u_k ed E. In particolare l'origine $\langle 0, 0 \rangle$ si può chiamare vettore nullo e si può denotare con $\overrightarrow{OO}$, con $\mathsf{0}_2$ o concisamente con $\mathsf{0}$.

Talora avendo da trattare spazi diversi useremo due fonti leggermente diverse e accanto alle scritture precedenti utilizzeremo scritture come v, $\mathsf{w}_{(1)}$, u_k ed $\mathbf{E}$.

G30:d.02 Consideriamo i vettori $\mathsf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\mathsf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ e i numeri reali a, b e c .

Si dice **somma dei vettori** il vettore $\mathsf{v} +^{ce} \mathsf{w} := \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2 \rangle$.

Si dice **differenza dei vettori** il vettore $\mathsf{v} -^{ce} \mathsf{w} := \langle v_1 - w_1, v_2 + w_2 \rangle$.

Si dice **moltiplicazione di un vettore per uno scalare reale** $c \cdot^{ce} \mathsf{v} := \langle c \cdot v_1, c \cdot v_2 \rangle$.

Il vettore $-^{ce}\mathsf{v} := \mathsf{0} -^{ce} \mathsf{v} = \langle -v_x, -v_y \rangle = -1 \cdot^{ce} \mathsf{v}$ si dice **vettore opposto** di v; il passaggio al vettore opposto $\lceil \mathsf{v} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\vdash\; -\mathsf{v} \rceil$ si può considerare un'operazione unaria sui vettori, oppure una trasformazione biunivoca e involutoria su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e si può chiamare **simmetria centrale con centro nell'origine**.

Osserviamo che il segno $-^{ce}$, come accade al segno $-$ in vari contesti, viene usato sia per denotare un operatore unario (di passaggio all'opposto), sia per denotare un operatore binario. Ricordiamo anche che con notazioni della forma ω^{ce}, dove ω denota un operatore binario o unario, abbiamo indicato la cosiddetta **estensione cartesiana** di tale operatore, cioè la sua applicazione componente per componente a operandi costituiti da sequenze di entità più semplici. In genere però questa notazione viene semplificata trascurando gli esponenti ^{ce} ed usando espressioni come $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$, $c\cdot\overrightarrow{OP}$ e $-\mathbf{H}$.

I due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si dicono **vettori proporzionali** sse si trova un $c\in\mathbb{R}_{nz}$ tale che $\mathbf{v}=c\cdot\mathbf{w}$.
Evidentemente la proporzionalità è una relazione di equivalenza; si osserva che $\mathbf{0}$ costituisce da solo una classe di tale equivalenza; le altre classi di questa equivalenza sono costituiti dai vettori che come punti appartengono ad una stessa retta per l'origine privata dello stesso punto $\langle 0,0\rangle$. Un tale insieme viene chiamato anche **raggio**.

G30:d.03 Se $\mathbf{v}$ denota un qualsiasi vettore, si dice **traslazione del piano reale** di spostamento $\mathbf{v}$ una endofunzione di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ della forma

$$\lceil P\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto P+\mathbf{v}\rceil \ .$$

Si dimostra facilmente che questa applicazione è del genere $\{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longleftrightarrow\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$, cioè è una permutazione del piano reale. Essa si denota con $Trsl_{\mathbf{v}}$ e il trasformato del punto P si può denotare con $Trsl_{\mathbf{v}}(P)$ o con $P\,{}^\rceil Trsl_{\mathbf{v}}$. Per la composizione delle traslazioni, come per ogni prodotto di Peirce di trasformazioni, scriviamo

$$Trsl_{\mathbf{v}}\circ_{rl} Trsl_{\mathbf{w}} = \lceil P\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mapsto (P\,{}^\rceil Trsl_{\mathbf{v}})\,{}^\rceil Trsl_{\mathbf{w}}\rceil = \lceil P\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mapsto Trsl_{\mathbf{w}}(Trsl_{\mathbf{v}}(P))\rceil \ .$$

Si dimostrano facilmente i seguenti fatti.

(1) $(Trsl_{\mathbf{v}})^{-1} = Trsl_{-\mathbf{v}}$;

(2) $Trsl_{\mathbf{v}}\circ_{rl} Trsl_{\mathbf{w}} = Trsl_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} = Trsl_{\mathbf{w}}\circ_{rl} Trsl_{\mathbf{v}} = Trsl_{\mathbf{w}}\circ_{lr} Trsl_{\mathbf{v}} = Trsl_{\mathbf{v}}\circ_{lr} Trsl_{\mathbf{w}}$;

(3) $Trsl_{\mathbf{0}} = \boldsymbol{Id}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$.

Queste uguaglianze dicono che le traslazioni di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ costituiscono un gruppo abeliano di trasformazioni; esso è detto **gruppo delle traslazioni del piano reale**.
Questo gruppo è isomorfo al gruppo dei vettori di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ munito dell'operazione di somma.

G30:d.04 Ogni coppia di punti di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ viene anche chiamata **vettore applicato**.
I vettori applicati sono evidentemente in corrispondenza biunivoca con i segmenti orientati (chiusi) e con l'insieme delle quaterne di numeri reali, cioè con elementi di $\mathbb{R}^{\times 4}$. A rigore i segmenti orientati sono insiemi di punti lineari (cioè insiemi individuati da equazioni lineari nelle variabili) e muniti di un senso di percorrenza, mentre i vettori applicati sono definiti come entità cui possono essere applicate determinate operazioni. Va segnalato anche la possibilità di porre in corrispondenza biunivoca i segmenti orientati con i rettangoli con i lati paralleli agli assi e con il perimetro orientato.
In effetti tra segmenti orientati chiusi, vettori applicati (ovvero quaterne di reali) e rettangoli con perimetro orientato si possono precisare dei criptomorfismi e spesso queste nozioni trattate come equivalenti e vengono identificate e individuate negli stessi modi. In particolare il vettore applicato $\langle P,Q\rangle$ si denota anche con $\overrightarrow{PQ}$

Un vettore applicato può essere sommato con un qualsiasi vettore. Si dice **somma** del vettore applicato $\langle P,Q\rangle = \big\langle\langle x_P,y_P\rangle,\langle x_Q,y_Q\rangle\big\rangle$ con il vettore $\mathbf{v}=\langle v_x,v_y\rangle$ il vettore

$$\langle P,Q\rangle+\mathbf{v} := \langle P+\mathbf{v},Q+\mathbf{v}\rangle = \big\langle\langle x_P+v_x,y_P+v_y\rangle,\langle x_Q+v_x,y_Q+v_y\rangle\big\rangle = Trsl_{\mathbf{v}}(\langle P,Q\rangle) \ .$$

Contrariamente ai vettori, per i vettori applicati si definisce la somma solo se l'estremo finale del primo addendo coincide con l'estremo iniziale del secondo, ovvero se i due corrispondenti segmenti orientati costituiscono una coppia di segmenti orientati consecutivi (v. :3.h). Precisamente si definisce come **somma dei vettori applicati** $\langle P,Q\rangle$ e $\langle Q,S\rangle$ il vettore applicato $\langle P,S\rangle$; con notazioni equivalenti si scrive $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}$.

G30:d.05 Ci chiediamo ora se o quando si può definire convenientemente la differenza fra due vettori applicati.
Preliminarmente diciamo che due segmenti orientati $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ sono **equipollenti** sse risultano coincidenti i due vettori associati $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}$, cioè sse $x_Q-x_P=x_S-x_R$ e $y_Q-y_P=y_S-y_R$.
Grazie al criptomorfismo la relazione di equipollenza risulta definita anche tra vettori applicati. Chiaramente l'equipollenza è una relazione di equivalenza e si possono considerare le classi di equipollenza di segmenti orientati e di vettori applicati. La classe di equipollenza contenente $\overrightarrow{PQ}$ viene caratterizzata dal vettore $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$.

Se $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ sono due vettori applicati equipollenti, si definisce come loro **differenza** il vettore $\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$; per l'equipollenza esso coincide con $\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OQ}$. Questo vettore può denotarsi semplicemente come differenza di vettori come $R-P$ o come $S-Q$.

G30:d.06 Il risultato della somma di un vettore applicato con un vettore $\mathbf{v}$ può considerarsi il risultato dell'applicazione della trasformazione $\mathit{Trsl}_{\mathbf{v}}{}^{ce}$, estensione cartesiana all'insieme dei vettori applicati della traslazione di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ relativa allo spostamento $\mathbf{v}$. Anche per queste trasformazioni in genere si trascura di parlare di estensione cartesiana e si può dire che le traslazioni costituiscono delle **azioni** sull'insieme dei vettori applicati. Anche queste applicazioni costituiscono un gruppo di trasformazioni e valgono le uguaglianze presentate in :d.05 per le traslazioni considerate azioni su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Si osserva che ogni classe di equipollenza dei vettori applicati si può ottenere applicando le diverse traslazioni $\mathit{Trsl}_{\mathbf{v}}$ a un unico vettore applicato: in altri termini, la classe di equipollenza di $\overrightarrow{PQ}$ si può esprimere come $\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} :| \overrightarrow{PQ}+\mathbf{v}\}$. Inoltre la scelta dell'elemento rappresentativo di una classe si può effettuare senza alcun vincolo a priori e in luogo di $\overrightarrow{PQ}$ si potrebbe scegliere quello equipollente avente come estremo iniziale l'origine, cioè $\langle O,Q-P\rangle$. Si osserva anche che le classi di equipollenza sono le orbite del gruppo delle traslazioni agente sull'insieme dei vettori applicati.

G30:d.07 La addizione di vettori si ottiene con la **regola del parallelogramma**. Con una variante di questa regola si ottiene la regola corrispondente per la sottrazione tra vettori.
Queste situazioni conviene vederle servendosi delle traslazioni.

G30:d.08 In linea di principio risulta utile conoscere come si trasformano le varie entità che si costruiscono su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ in conseguenza dell'applicazione delle traslazioni. Infatti le traslazioni trasformano queste entità in entità analoghe e gli effetti delle trasformazioni stabiliscono dei collegamenti tra le entità accennate che possono contribuire a conoscerle meglio. Questo è un fatto del tutto generale e può valere per ogni genere di trasformazioni applicabili ad ogni tipo di ambiente.
Particolare utilità rivestono le entità invarianti per tutte le traslazioni o per insiemi significativi di traslazioni.

Consideriamo il vettore $\mathbf{v}=\langle v_x,v_y\rangle$, il corrispondente vettore applicato nell'origine $\overrightarrow{OP}$, la retta passante per O e P $\overline{OV}$ e la corrispondente traslazione $\mathit{Trsl}_{\mathbf{v}}$. Alla $\overline{OP}$ si può dare la forma $\mathbf{Soln}(v_y\cdot x+v_x\cdot y=0)$

Tra le rette invarianti per traslazione relativa a $\mathbf{v}$ si trova sicuramente la $\overline{OP}$. Questa è invariante anche per ogni traslazione $Trsl_{r \cdot \mathbf{v}}$, ove r è un qualsiasi reale non nullo e può essere posta nella forma $\{r \in \mathbb{R} :| \langle r \cdot v_x \ , \ r \cdot v_y \rangle\}$.

L'insieme delle traslazioni della forma $Trsl_{r \cdot \mathbf{v}}$ relative ai diversi $r \in \mathbb{R}$ costituiscono un sottogruppo del gruppo delle traslazioni e precisamente il loro insieme può definirsi come il sottoinsieme delle traslazioni che lasciano invariata la $\overline{OP}$.

Ogni retta ottenibile per traslazione da una retta data $\mathcal{R}$ si dice **parallela** della $\mathcal{R}$.

La parallela alla $\overline{OP}$ contenente il punto $Q = \langle x_Q, y_Q \rangle$ ha la forma $\{r \in \mathbb{R} :| Q + r \cdot \mathbf{v}\}$; per essa si usa anche la equivalente forma concisa $Q + \mathbb{R}\mathbf{v}$.

Si constata che ogni retta invariante per $Trsl_{\mathbf{v}}$ è una retta parallela alla $\overline{OP}$.

Una parallela alla $\overline{OP}$ che non coincide con essa non può avere punti in comune con essa: in caso contrario il punto comune può essere trasformato dalle traslazioni in un qualsiasi punto delle due rette. Per transitività anche due qualsiasi parallele alla $\overline{OP}$ aut coincidono, aut non hanno punti comuni.

Dunque il parallelismo con la retta $\overline{OP}$ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Per denotare il fatto che le rette $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ sono parallele si scrive $\mathcal{R} /\!\!/ \mathcal{S}$. Una classe di rette parallele viene anche detta **fascio di rette parallele**.

Consideriamo una retta $\mathcal{R}$ e la sua traslata per lo spostamento u $Trsl_{\mathbf{u}}(\mathcal{R})$; il loro parallelismo viene espresso dalla $Trsl_{\mathbf{u}}(\mathcal{R}) /\!\!/ \mathcal{R}$ e il fascio delle rette parallele alla $\mathcal{R}$ è dato da $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :| Trsl_{\mathbf{u}}(\mathcal{R})\}$.

G30:d.09 L'insieme delle rette passanti per un punto S si dicono costituire un **fascio di rette** e il punto comune, unico, si dice **sostegno del fascio**.

Si osserva che l'appartenenza ad una retta del fascio avente come sostegno S è una relazione di equivalenza su $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{S\}$

In generale due rette si dicono parallele sse non hanno punti di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ comuni. Le varie rette per l'origine ovviamente non possono presentare parallelismo, come pure due diverse rette di ogni altro fascio.

Le varie classi di parallelismo tra rette in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si dicono **direzioni delle rette reali**. Due rette parallele hanno in comune la direzione. Ogni direzione può chiamarsi anche **punto improprio del piano reale**. In accordo con questa dizione si può dire che le rette parallele hanno in comune un punto improprio. Questo punto improprio si può pensare come un punto all'infinito, raggiungibile percorrendo una delle rette parallele in modo da allontanarsi illimitatamente da un suo qualsiasi punto al finito. Con questa terminologia una classe di rette parallele si può considerare un **fascio improprio**, cioè un fascio di rette avente come sostegno il loro comune punto improprio, ovvero la loro comune direzione.

Collettivamente i punti di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e i punti impropri si dicono **punti del piano proiettivo reale**; a loro volta i fasci di rette propri e impropri si dicono **fasci proiettivi di rette**.

G30:e. Prodotto scalare, parallelismo, ortogonalità, distanze

G30:e.01 Si definisce **prodotto scalare** di due generici vettori $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2\rangle$ del piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ la composizione

(1) $$\big\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\big\rangle := v_1w_1 + v_2w_2 \ .$$

Si tratta di una funzione del genere $\{\mathbb{R}^{\times 2}\times\mathbb{R}^{\times 2} \longmapsto \mathbb{R}\}$ per la quale si dimostrano facilmente le seguenti proprietà:

(2) $\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \ : \ \big\langle\mathbf{w}|\mathbf{v}\big\rangle = \big\langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\big\rangle$ **simmetria**

(3) $\forall\mathbf{v}\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \ : \ \big\langle\mathbf{v}|\mathbf{v}\big\rangle \geq 0$ e $\big\langle\mathbf{v}|\mathbf{v}\big\rangle = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$ **definitezza positiva**

(4) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \ : \ \big\langle\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}|\mathbf{w}\big\rangle = \alpha\big\langle\mathbf{u}|\mathbf{w}\big\rangle + \beta\big\langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\big\rangle$ e

(5) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e $\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{x}\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \ : \ \big\langle\mathbf{v}|\alpha\mathbf{w}+\beta\mathbf{x}\big\rangle = \alpha\big\langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\big\rangle + \beta\big\langle\mathbf{v}|\mathbf{x}\big\rangle$ **bilinearità**

G30:e.02 Il prodotto scalare costituisce una composizione di grande importanza per la geometria e il calcolo vettoriale; la sua interpretazione geometrica completa verrà data dopo l'introduzione della nozione generale di angolo e delle funzioni trigonometriche. Ora ci limitiamo ai casi dei due vettori allineati e dei due vettori che diciamo ortogonali.
Il carattere definito positivo del prodotto scalare di un vettore con sé stesso consente di servirsene per definire come **lunghezza** o **norma** di un generico vettore di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

(1) $$\forall\mathbf{v}\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \ : \ ||\mathbf{v}|| := \sqrt{\big\langle\mathbf{v}|\mathbf{v}\big\rangle} = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} \ .$$

Se il vettore appartiene ad uno degli assi la definizione fa coincidere la lunghezza di un vettore con la lunghezza del segmento corrispondente sull'asse.
Nel caso di vettore generico si può scrivere

(2) $$\forall\mathbf{v}\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \ : \ ||\mathbf{v}|| := \sqrt{||\boldsymbol{Prj}_1(\mathbf{v})||^2 + ||\boldsymbol{Prj}_2(\mathbf{v})||^2} \ .$$

Evidentemente

(3) $$\forall\mathbf{v}\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ,\ k\in\mathbb{R} \ : \ \big\langle k\mathbf{v}|k\mathbf{v}\big\rangle = k^2||\mathbf{v}||^2 \quad \text{ovvero} \quad ||k\mathbf{v}|| = |k|\cdot||\mathbf{v}|| \ .$$

Questa uguaglianza contribuisce a giustificare la precedente definizione di norma di un vettore piano. Osserviamo che questa definizione è in accordo anche con il classico **teorema di Pitagora**, il cui ruolo vedremo in un punto seguente.

G30:e.03 Si definisce come **distanza euclidea tra due punti** $P = \langle x_P, y_P\rangle$ e $Q = \langle x_Q, y_Q\rangle$ come la lunghezza del vettore $\overrightarrow{PQ}$, cioè

$$\text{dist}_2(P,Q) := ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \ .$$

Questa funzione bivariata è chiaramente simmetrica e gode di tutte le proprietà delle funzioni distanza. Dunque RcR munito della distanza euclidea costituisce uno spazio metrico.

Nel piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ si possono definire altre interessanti funzioni distanza. Una distanza molto semplice è la **distanza Manhattan** $\text{dist}_1(P,Q) := |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q|$. Le due distanze definite sono casi particolari della funzione definibile per ogni $p\in[1,+\infty)$ con l'espressione seguente

$$\text{dist}_p(P,Q) := (|x_P - x_Q|^p + |y_P - y_Q|^p)^{\frac{1}{p}} \ .$$

È evidente che tutte queste distanze sono invarianti per tutte le traslazioni. Oltre alla invarianza per queste trasformazioni dimostreremo l'invarianza per altre trasformazioni, le riflessioni e le rotazioni. Queste proprietà di simmetria forniscono alle distanze suddette dei pregi che fanno di esse degli strumenti di calcolo facilmente utilizzabili per varie finalità.

La distanza euclidea è decisamente la più utile e più utilizzata. Essa quindi spesso viene chiamata *tout court* la distanza e viene denotata con $\text{dist}(P,Q)$, lasciando cadere il deponente $_2$.
Le trasformazioni di uno spazio che mantengono le distanze di un cero tipo si dicono **isometrie** per tale tipo di distanza. Vedremo varie isometrie del piano di grande importanza.

G30:e.04 La bilinearità del prodotto scalare implica

$$\forall \mathsf{v},\mathsf{w} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,:\, \big\langle \mathsf{v}+\mathsf{w}|\mathsf{v}+\mathsf{w}\big\rangle = \big\langle \mathsf{v}|\mathsf{v}\big\rangle + \big\langle \mathsf{w}|\mathsf{w}\big\rangle + 2\big\langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\big\rangle$$

e quindi l'espressione

$$(1) \qquad \forall \mathsf{v},\mathsf{w} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,:\, \big\langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\big\rangle = \frac{1}{2}\,\left(||\mathsf{v}+\mathsf{w}||^2 - ||\mathsf{v}||^2 - ||\mathsf{w}||^2\right) \ .$$

A questo punto si osserva che le norme si possono ottenere dai prodotti scalari mediante la :e.01(1) e che i prodotti scalari si possono ottenere dalle norme mediante la (1). Possiamo dunque dire che le conoscenze sui prodotti scalari e quelle sulle lunghezze dei vettori (piani) si equivalgono.

Per il prodotto scalare di due vettori non nulli allineati abbiamo

$$(2) \qquad \forall k\in\mathbb{R}\ ,\ \mathsf{v}\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{\mathbf{0}\}\ :\ \big\langle \mathsf{v}|k\mathsf{v}\big\rangle = k\ ||\mathsf{v}||^2 \ .$$

Questo prodotto scalare quindi non è mai nullo; inoltre esso è positivo sse i vettori hanno la stessa orientazione ed è negativo sse hanno orientazioni opposte.

Ogni vettore di lunghezza uguale ad 1 viene chiamato **versore** o **vettore normalizzato**.
Grazie alla :e.02(3), ogni vettore v non nullo si può normalizzare, cioè ridurre ad un vettore proporzionale di lunghezza 1, trasformandolo in uno dei due vettori opposti

$$(2) \qquad \pm\frac{1}{\sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2}}\ \mathsf{v} \ .$$

L'espressione (1) nel caso in cui v e w sono due versori diventa $\big\langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\big\rangle = \dfrac{||\mathsf{v}+\mathsf{w}||^2}{2} - 1$. Dato che la lunghezza $||\mathsf{v}+\mathsf{w}||$ può assumere tutti i valori da 0 a 2 (0 nel caso $\mathsf{v}=-\mathsf{w}$, 2 quando $\mathsf{v}=\mathsf{w}$), si ha che l'insieme dei possibili valori del prodotto scalare di due versori è $[-1,+1]$.

G30:e.05 Due vettori si dicono **ortogonali** sse il loro prodotto scalare è nullo. Abbiamo dunque la relazione di ortogonalità tra vettori piani ed evidentemente essa è una relazione simmetrica, antiriflessiva e di conseguenza non transitiva. Per esprimere il fatto che due vettori sono ortogonali si scrive

$$\mathsf{v}\perp\mathsf{w} \iff \big\langle \mathsf{v}|\mathsf{w}\big\rangle = 0 \ .$$

. Esempi di duetti di vettori ortogonali sono:

$$\langle 1,0\rangle \perp \langle 0,1\rangle \quad,\quad \langle 1,1\rangle \perp \langle -2,2\rangle \quad,\quad \langle 1,3\rangle \perp \langle 3,-1\rangle \quad,\quad \langle a,b\rangle \perp \langle -b,a\rangle \quad,\quad \langle a,b\rangle \perp \langle kb,-ka\rangle \ .$$

In effetti dalla definizione :e.01(1) si ha che $\mathsf{v}\perp\mathsf{w} \iff \ulcorner \frac{v_1}{v_2} = -\frac{w_2}{w_1} \urcorner$.

G30:f. Circonferenze, triangoli e costruzioni con riga e compasso

G30:f.01 Per ogni punto $C = \langle x_C, y_C \rangle$ del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ed ogni numero reale positivo r si definisce **circonferenza** avente come **centro** C e come **raggio** r il luogo dei punti del piano che presentano dal centro la stessa distanza (euclidea) r.
Per questi punti si trova che soddisfano l'equazione

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \quad \text{o la equivalente} \quad x^2 + y^2 - 2xx_C - 2yy_C + {x_C}^2 + {y_C}^2 - r^2 = 0 \ .$$

Da qui si ricava che un'equazione della forma $x^2 + y^2 + Bx + Cy + D = 0$ rappresenta la circonferenza avente il centro in $\left\langle -\dfrac{B}{2}, -\dfrac{C}{2} \right\rangle$ e di raggio $\sqrt{\dfrac{B^2 + C^2}{4} - D}$, sotto la condizione che B, C e D rendano il radicando positivo.

G30:f.02 Nozioni associate a quella di circonferenza. Diametro, settore circolare, ...
Il compasso come strumento in grado idealmente di tracciare circonferenze.
Uso del compasso per costruire l'asse di un segmento, un segmento parallelo ad uno dato, una retta parallela ad una data, un segmento ortogonale ad uno dato, per tracciare triangoli equilateri, pentagono regolari, esagoni, e altre figure dotate di regolarità.

G30:f.11 Teorema di Talete, teoremi di Euclide, teorema di Pitagora.

G30:h. Angoli convessi e concavi

G30:h.01 In matematica il termine angolo riguarda oggetti di larghissimo uso, innanzi tutto nella geometria e nell'analisi infinitesimale, che conviene definire a diversi livelli di generalità. Cominceremo con una definizione di angolo convesso che consente di sviluppare senza eccessivi preliminari le basi della geometria piana euclidea. Ad ogni angolo convesso si associa una ampiezza, una misura che, seguendo abitudini diffuse, esprimiamo in gradi, che ha valori reali compresi tra 0 e 180. Alla definizione degli angoli convessi si aggiunge facilmente quella di angoli concavi; per questi si hanno ampiezze ancora solo positive, ma con valori fino a 360 gradi. Con gli angoli convessi e concavi si possono organizzare le prime nozioni di trigonometria, si possono affrontare numerose costruzioni geometriche e si possono risolvere molti problemi.

In una fase successiva si possono introdurre gli angoli con segno, entità meno intuitive, ma che consentono di definire funzioni trigonometriche con argomenti reali qualsiasi (fatte salve eventuali singolarità). Gli angoli con segno sono da considerare in collegamento con il problema della rettificazione degli archi di circonferenza dotati di verso, alla natura del numero π e alle questioni relative alle aree con segno. Tutti questi elementi forniscono contributi essenziali alla strumentazione del calcolo infinitesimale e alle applicazioni alla fisica classica e alle conseguenti discipline quantitative.

inuh.02Date due semirette si possono loro attribuire relazioni di mutua posizione simili a quelle che si possono riscontrare tra due segmenti orientati.
La più interessante e feconda riguarda una coppia di semirette aventi in comune l'estremità. Una terna della forma $\langle \overrightarrow{VA}, V, \overrightarrow{VB} \rangle$ si dice **angolo**; di tale angolo V si chiama **vertice**, $\overrightarrow{VA}$ primo lato e $\overrightarrow{VB}$ secondo lato.

La definizione data stabilisce un ordine preciso tra i due lati, cioè riguarda angoli orientati. I due angoli $\langle\overrightarrow{VA}, V, \overrightarrow{VB}\rangle$ e $\langle\overrightarrow{VB}, V, \overrightarrow{VA}\rangle$ si dicono **angoli opposti**. Per molte considerazioni non occorre distinguere tra angoli opposti e si può parlare di angoli non orientati.
Si dice **angolo piatto** un angolo della forma $\langle\overrightarrow{VA}, V, \overrightarrow{VB}\rangle$ con i due lati costituenti semirette collineari e divergenti.
Si dice **angolo retto** un angolo della forma $\langle\overrightarrow{VA}, V, \overrightarrow{VB}\rangle$ con $\langle\overrightarrow{VA} \perp \overrightarrow{VB}\rangle$, ovvero con $\overrightarrow{VB}$ ottenuto ruotando $\overrightarrow{VB}$ di 90°.

G30:h.03 Si introdurranno in seguito le nozioni di angolo retto, angoli congruenti e ampiezza di un angolo. Prima di queste nozioni conviene dare quelle di traslazioni, parallelismo e ortogonalità e le conseguenti nozioni di punti impropri.
Le rette L ed M sono dette **rette parallele** sse si possono associare a due equazioni aventi le forme si possono mettere nelle forme $ax+by+c$ e $ax+by+c'$. Va notato che due rette coincidenti costituiscano un caso particolare di coppia di rette parallele.
Si trova che due rette L ed M sono parallele sse esse sono entrambe verticali oppure esiste $k \in \mathbb{R}$ t.c. $L + k = M$.

Si osserva poi che due rette parallele non coincidenti non hanno alcun punto in comune, mentre due rette non parallele hanno sempre un punto in comune (come accade per le rette -QQ).
Infatti per individuare tale punto devono essere soddisfatte entrambe le equazioni delle rette, cioè si deve trovare una soluzione e una sola Esso si trova facilmente, cioè si trovano facilmente espressioni reali per le sue coordinate.

G30:h.04 Il termine **angolo convesso** riguarda una parte di piano definita da due semirette aventi l'origine in comune; le semirette (che denotiamo con S e T) vengono dette **lati dell'angolo** e la loro origine (che denotiamo con V) viene chiamata **vertice dell'angolo**.
Se le semirette sono diverse ma appartengono alla stessa retta R, ciascuno dei due semipiani definiti da R muniti del vertice (necessario per distinguere le due semirette) si dice **angolo piatto**.
Se invece le due semirette appartengono a due rette diverse (e incidenti), il piano viene tripartito in tre insiemi ben distinti: l'insieme dei punti appartenenti alle due semirette (tra i quali il vertice) che diciamo **frontiera dell'angolo**, e due insiemi connessi K_1 e K_2 separati dai punti della frontiera. Uno solo di questi due insiemi, chiamiamolo K_1, è costituito da punti che appartengono a segmenti con un estremo su una semiretta e l'altro sull'altra.
Dei due precedenti insiemi, dunque, solo K_1 è un insieme convesso. Il terzo insieme, K_2, non convesso.
Definiamo **angolo convesso** determinato da S e T l'unione di questo insieme convesso e della frontiera, $K_1 \cup S \cup T$.

G30:h.05 Definiamo poi **angolo concavo** determinato da S e T l'unione del terzo insieme non convesso e della frontiera, $K_2 \cup S \cup T$. Si dice che i due angoli definiti dalle due semirette sono **angoli esplementari**, ovvero che si trovano nella relazione di esplementarità.
Angoli convessi e concavi sono, quindi, sottoinsiemi infiniti del piano, e quindi insiemi non misurabili attraverso una loro [[area]] (che avrebbe valore infinito).
Spesso con angolo (convesso) si indica anche la parte di piano delimitata da due segmenti con un estremo (vertice). Va sottolineato che questa definizione costituisce un ampliamento naturale della precedente, in quanto può ricondursi ad essa utilizzando le due semirette ottenute prolungando i due segmenti dalla parte del loro estremo diverso dal vertice. Questa estensione della definizione rende lecito associare a ciascuno dei tre vertici di un qualsiasi triangolo un angolo (convesso).

Un angolo piatto si può considerare un elemento di separazione fra gli angoli convessi e gli angoli concavi che hanno in comune con esso il vertice e uno dei lati.
Si osserva che una definizione equivalente di angolo convesso lo vede come intersezione di due semipiani definiti da due rette che si intersecano in uno e un solo punto.

G30:h.06 È naturale porsi il problema di "misurare un angolo": gli angoli possono servire per tante costruzioni e se ad essi si associano misure numeriche ci si aspetta che per molte costruzioni possano essere utili calcoli numerici su queste misure.
Se si hanno due angoli convessi o concavi A e B con lo stesso vertice ed A è sottoinsieme di B (situazione che si determina solo se i lati di B sono sottoinsiemi di A) è ragionevole chiedere che la misura di A sia maggiore della misura di B.
Dato un angolo convesso A si dice **semiretta bisettrice** di tale angolo la semiretta avente il vertice di A come estremo ed i cui punti sono equidistanti dai lati di A. Essa si può costruire facilmente con un compasso.
La semiretta bisettrice di un angolo concavo si definisce come la semiretta che ha come estremo il vertice dell'angolo ed è allineata con la semiretta bisettrice del suo angolo (convesso) esplementare.
La semiretta bisettrice β di un angolo A convesso o concavo e ciascuno dei suoi due lati determinano due angoli convessi. La riflessione rispetto alla retta contenente la β scambia i due lati di A e trasforma uno dei due sottoangoli nell'altro. È quindi ragionevole attribuire ai due angoli determinati dalla bisettrice una misura che sia la metà della misura di A. È anche ragionevole affermare, sbrigativamente, che i due angoli determinati dalla semiretta bisettrice "sono la metà" dell'angolo di partenza.

G30:h.07 Un angolo convesso si dice **angolo retto** se i suoi due lati sono ortogonali; in parole povere un angolo retto è la metà di un angolo piatto.
Un angolo strettamente contenuto in un angolo retto avente il suo stesso vertice si dice **angolo acuto**.
Un angolo convesso contenente un angolo retto avente lo stesso vertice si dice **angolo ottuso**.
Due angoli A e B che hanno in comune solo una semiretta si dicono **angoli adiacenti**. L'unione di due angoli adiacenti convessi è l'angolo definito dalle due semirette che sono i lati di uno solo dei due angoli.
Un tale angolo che potrebbe essere convesso o concavo: è sicuramente convesso
Un tale angolo unione può chiamarsi **angolo somma dei due angoli adiacenti** A e B; inoltre è ragionevole assegnargli come misura la somma delle misure degli angoli adiacenti.
L'angolo somma di due angoli adiacenti convessi potrebbe essere convesso o concavo: è sicuramente convesso l'angolo somma di due angoli acuti.

Si dice **angolo giro** la somma di due angoli piatti adiacenti. Un tale angolo come insieme coincide con l'intero piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; esso va associato anche ad una semiretta alla quale si affidano i due ruoli dei suoi lati coincidenti.
Un angolo giro si può anche considerare come il limite di angoli concavi aventi in comune un solo lato e via via più estesi, ovvero definiti da un lato "fisso" e un lato mobile che si muove fino a sovrapporsi al precedente.

G30:h.08 Il processo di dimezzamento di un angolo può essere portato avanti quanto si vuole. Quindi, dato un angolo si possono individuare quanti si vogliono suoi sottomultipli relativi a potenze di 2. Con i multipli di questi ogni altro angolo può essere "approssimato" quanto si vuole. Questa affermazione naturalmente richiede che venga definito con precisione la nozione di angolo che approssima un altro angolo. Queste considerazioni comunque inducono ad attribuire agli angoli misure costituite da numeri reali.

Due angoli trasformabili l'uno nell'altro mediante isometrie si dicono **congruenti**.
Evidentemente una misura degli angoli invariante per le isometrie costituisce uno strumento con molti vantaggi: in particolare consente di individuare le classi di congruenza degli angoli. Quindi si chiede una misura degli angoli a valori reali e invariante per congruenza.

G30:h.09 Nella nomenclatura degli angoli contenuti in un angolo giro si è soliti usare aggettivi particolari per gli angoli che si trovano in una data relazione con un particolare angolo dato.
Si dice **angolo complementare** di un angolo acuto ogni angolo (acuto) che sommato al precedente fornisce un angolo retto.
Si dice **angolo supplementare** di un angolo convesso ogni angolo (convesso) che sommato al precedente fornisce un angolo piatto.
Come si è già rilevato, si dice **angolo esplementare** di un angolo convesso o concavo ogni angolo che sommato al precedente fornisce un angolo giro.

G30:i. Angoli con segno, radianti e rotazioni piane

G30:i.01 Una circonferenza particolare è quella con centro nell'origine e raggio 1; essa viene detta **circonferenza goniometrica**. La circonferenza generica viene trasformata nella canonica dalla **traslomotetia** $Trsl(\langle -x_C, -y_C\rangle) \circ Hmtt(1/r)$. Di conseguenza molte proprietà delle circonferenze si possono ottenere da proprietà della circonferenza goniometrica attraverso opportune traslazioni e omotetie.

G30:i.02 Definiamo ora la lunghezza della circonferenza goniometrica. Intuitivamente essa è la lunghezza del segmento che si ottiene tagliando la circonferenza in un suo punto e "rettificando" questa curva, cioè immaginandola costituita da un materiale filiforme flessibile ma non estendibile e facendo assumere a tale oggetto forma rettilinea.
Più matematicamente tale lunghezza si ottiene come limite della Sincc dei perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti nella circonferenza gonioetrica aventi 4, 8, 16, ..., 2^n, ... lati.
Si ottiene quindi un numero reale costruibile che si denota con π. La ricerca di approssimazioni sempre più precise di questo numero reale è stata considerata una sfida intellettuale da numerosi ricercatori dai tempi antichi alle attuali attività che utilizzano in modi sofisticate potenti computers [[History of numerical approximations of pi]]. La sua approssimazione con 50 cifre è la seguente:

$$\pi \approx 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\ .$$

G30:i.03 La lunghezza di una circonferenza di raggio r è data da $r\pi$. Infatti tutti i poligoni che servono alle approssimazioni successive di questa lunghezza, rispetto ai poligoni utilizzati per la circonferenza goniometrica hanno lati e perimetri moltiplicati per r.
Si dice **arco iniettivo** di una circonferenza l'insieme dei suoi punti determinati da una coppia di essi, chiamiamola $\langle P, Q\rangle$, e dall'essere toccati da un punto che si muove nel verso orario da P a Q. Esso si denota con $\overline{PQ}$. Una circonferenza con una coppia di suoi punti coincidenti $\langle P, P\rangle$ si può associare a un arco di lunghezza 0 ridotto al punto P o all'intera circonferenza da percorrere d P a P.
Si definisce come **lunghezza di un arco iniettivo** il limite della Sincc ottenuta con le poligonali inscritte e circoscritte all'arco stesso; in particolare quelle determinate dagli angoli ottenuti con successivi dimezzamenti (e aventi ampiezze esprimibili mediante l'ampiezza α dell'angolo dato come $\dfrac{k}{2^n}\alpha$. La lunghezza dell'arco $\langle P, Q\rangle$ si denota con $|\langle P, Q\rangle|$.

La lunghezza di una circonferenza si può considerare come un caso limite delle lunghezze dei suoi archi. Le lunghezze degli archi di una circonferenza di raggio 1 sono esprimibili significativamente come parti di π.

G30:i.04 Ad un arco iniettivo $\overline{PQ}$ si associano due ordinamenti totali dei suoi punti che chiamiamo **versi di percorrenza**: quello che porta da P a Q che diciamo **verso positivo** o **verso antiorario** e quello che porta da Q a P che diciamo **verso negativo** o **verso orario**.
Si dice **arco orientato iniettivo** di una circonferenza una coppia costituita da un suo arco iniettivo $\overline{PQ}$ e da uno dei suoi due versi di percorrenza. L'arco orientato corrispondente ad $\overline{PQ}$ con verso positivo si denota con $+\overline{PQ}$; l'arco orientato opposto del precedente, corrispondente ad $\overline{PQ}$ con verso negativo, si denota con $-\overline{PQ}$. Agli archi orientati iniettivi con verso antiorario $+\overline{PQ}$ si attribuisce una lunghezza positiva, $|\overline{PQ}|$, cioè la lunghezza del relativo arco; agli archi orientati con verso orario $-\overline{PQ}$ una lunghezza negativa, $-|\overline{PQ}|$.

Consideriamo una circonferenza di centro C e raggio r un suo arco iniettivo $\overline{PQ}$ e i corrispondenti due archi orientati $+\overline{PQ}$ e $-\overline{PQ}$.
All'arco orientato antiorario $+\overline{PQ}$ associamo la coppia $\left\{\overline{CP}\,, \frac{|\overline{PQ}|}{r}\right\}$ che chiamiamo **angolo orientato positivo**.
All'arco orientato orario $-\overline{PQ}$ associamo la coppia $\left\{\overline{CP}\,, \frac{-|\overline{PQ}|}{r}\right\}$ che chiamiamo **angolo orientato negativo**.
A un arco limite $\overline{PP}$ costituito dal solo punto P si associa l'angolo $\langle\overline{CP}\,, 0\rangle$.
A un arco costituito dai punti dell'intera circonferenza percorsi a partire da un punto P in verso antiorario si attribuisce l'angolo $\langle\overline{CP}\,, 2\pi\rangle$; al suo opposto, ovvero alla circonferenza percorsa in verso orario, l'angolo $\langle\overline{CP}\,, -2\pi\rangle$.
Gli angoli degli archi orientati iniettivi sono quindi coppie $\langle\sigma, a\rangle$ costituite da una semiretta e da un numero reale di $[-2\pi, 2\pi]$. Questo si dice **ampiezza in radianti dell'angolo**.
Può servire presentare queste entità con descrizioni intuitive; $\left\{\overline{CP}\,, +\frac{|\overline{PQ}|}{r}\right\}$ si presenta come l'insieme dei punti del piano toccati muovendo una semiretta variabile $\overline{CA}$ determinata dal punto A che si muove sull'arco da P a Q; $\left\{\overline{CP}\,, -\frac{|\overline{PQ}|}{r}\right\}$ si visualizza come l'insieme dei punti del piano toccati muovendo una semiretta variabile $\overline{CA}$ determinata dal punto A che si muove sull'arco da Q a P.
Chiaramente l'ampiezza di un arco orientato iniettivo non dipende dal raggio della circonferenza alla quale appartiene l'arco utilizzato per la definizione. Può essere vantaggioso riferirsi a circonferenze di raggio 1, in quanto le lunghezze con segno dei loro archi forniscono direttamente le ampiezze degli angoli orientati.

G30:i.05 In generale si definisce **angolo orientato** del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ogni coppia $\langle\overline{CP}\,, \alpha\rangle$ costituita da una qualsiasi semiretta e da un numero reale qualsiasi; C si dice vertice dell'angolo e α ampiezza dell'angolo.
Intuitivamente un angolo orientato corrisponde a un movimento di una semiretta di estremo C che parte dalla posizione $\overline{CP}$ e ruota in verso antiorario se $\alpha > 0$, in verso orario se $\alpha < 0$, in modo da percorrere sulla circonferenza di centro C e raggio 1 un arco di lunghezza $|\alpha|$, con la possibilità di compierere più di un giro.
In molte questioni della geometria e delle sue applicazioni interessano soprattutto ampiezze inferiori a π di angoli non orientati e la definizione data può essere considerata inutilmente complicata.

La definizione data però consente di utilizzare gli angoli e le loro ampiezze in molte costruzioni formali e in molte procedure di grande utilità. In particolare si possono effettuare senza restrizioni tutte le operazioni aritmetiche sulle ampiezze degli angoli orientati e queste operazioni si possono utilizzare in molte composizioni e trasformazioni geometriche.
In molti contesti comunque risulta comodo confondere gli angoli con le loro ampiezze e trascurare le orientazioni di archi e angoli.

G30:i.06 Si dice **angolo retto** ogni angolo di ampiezza $\frac{\pi}{2}$; si dice **angolo piatto** ogni angolo di ampiezza π; si dice **angolo acuto** ogni angolo avente ampiezza appartenente all'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$; si dice **angolo ottuso** ogni angolo avente ampiezza appartenente a $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

In molte attività pratiche conviene esprimere le ampiezze degli angoli nella scala dei gradi sessagesimali. Si tratta di una scala proporzionale alla scala dei radianti secondo la quale all'ampiezza π radianti, ampiezza degli angoli piatti, corrisponde l'ampiezza di 180°; alla scala sessagesimale inoltre si chiede di utilizzare come sottomultipli del grado le sue sessantesime parti chiamate **gradi primi**, come sottomultipli del grado primo le sue sessantesime parti chiamate **gradi secondi** e i sottomultipli decimali dei gradi secondi.
Si usano quindi notazioni come $37°\ 23'\ 07.56''$ per denotare l'ampiezza di

$$36 + \frac{23}{60} + \frac{7.56}{3\,600} = \frac{36 \cdot 360\,000 + 23 \cdot 6\,000 + 756}{360\,000} = \frac{13\,098\,756}{360\,000} = 36.3854\overline{3} \text{ gradi sessagesimali.}$$

Si hanno dunque le seguenti uguaglianze

$$1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi} \text{ gradi} \qquad 1' = \frac{1}{60} \text{ gradi} \qquad 1'' = \frac{1}{3\,600} \text{ gradi}$$

e si utilizzano i seguenti fattori di conguaglio

$$1° = 0.017\,453\,29... \text{ rad} \qquad 1' = 0.000\,290\,888... \text{ rad} \qquad 1'' = 0.000\,000\,484\,81 \text{ rad} \;,$$

$$1 \text{ rad} = 57.295\,779\,51° = 3\,437.7468' = 206\,264.81'' \;.$$

Talora però si esprimono gli angoli mediante i gradi ed i loro sottomultipli decimali; in questo caso si parla di scala dei gradi decimali.

Nel seguito, salvo avvertimento contrario, esprimeremo tutte le ampiezze degli angoli in radianti.

G30:j. Omotetie e riflessioni

G30:j.01 Ad ogni punto $C = \langle x_C, y_C \rangle$ e ad ogni $\rho \in \mathbb{R}_{nz}$ si associa una permutazione del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chiamata **omotetia** il cui **centro** è C ed il cui **rapporto** è ρ.
Per tale trasformazione usiamo la notazione $Hmtt(C, \omega)$ e si definisce

$$Hmtt(C, \rho) := \ulcorner \mathbf{v} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \overrightarrow{OC} + \rho(\mathbf{v} - \overrightarrow{OC}) \urcorner \;.$$

Se $\rho > 0$ si parla di **omotetia diretta**, se $\rho < 0$ di **omotetia inversa**; nel primo caso se $\rho > 1$ si parla di **dilatazione**, mentre se $0 < \rho < 1$ si parla di **contrazione**.

Dalla definizione segue che solo il centro è punto fisso di una omotetia; sono invece rette invarianti tutte le rette passanti per il centro C e solo esse.

G30:j.02 Conviene considerare in particolare le omotetie aventi centro nell'origine, in quanto semplici da analizzare.

$$Hmtt(\mathbf{0},\rho) = \ulcorner \mathbf{v} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \rho\,\mathbf{v} \urcorner \ .$$

Evidentemente $Hmtt(\mathbf{0},1)$ è la trasformazione identità, mentre $Hmtt(C,-1)$ è la simmetria centrale di centro C. È chiaro inoltre che per il prodotto di due omotetie con centro nell'origine si ha

$$\forall \rho_1,\rho_2 \in \mathbb{R}_{nz} \ :\ Hmtt(\mathbf{0},\rho_1)\circ Hmtt(\mathbf{0},\rho_2) = Hmtt(\mathbf{0},\rho_1\cdot\rho_2) = Hmtt(\mathbf{0},\rho_2)\circ Hmtt(\mathbf{0},\rho_1) \ .$$

Abbiamo quindi che le omotetie aventi centro nell'origine costituiscono un gruppo isomorfo al gruppo moltiplicativo dei numeri reali diversi da 0.

Le omotetie con centro nell'origine agiscono in modo molto semplice sulle coordinate cartesiane dei punti:

$$Hmtt(\mathbf{0},\rho)\,(\langle a,b\rangle) = \langle \rho\,a, \rho\,b\rangle \ .$$

È quindi evidente la loro azione sulle distanze:

$$\forall P,Q \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ ,\ \rho\in\mathbb{R}_{nz}\mathrm{dist}\,(Hmtt(\mathbf{0},\rho)(P), Hmtt(\mathbf{0},\rho)(Q)) = |\rho|\,dist(P,Q) \ .$$

Dunque le sole omotetie con centro nell'origine che non cambiano le distanze sono l'identità del piano e la simmetria centrale $\ulcorner \mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v} \urcorner$ con centro nell'origine

G30:j.03 Una omotetia generica si può ottenere come prodotto di composizione di traslazioni e omotetia con centro nell'origine:

$$Hmtt(C,\rho) = Trsl_{\overrightarrow{CO}} \circ_{rl} Hmtt(\mathbf{0},\rho) \circ_{rl} Trsl_{\overrightarrow{OC}} \ .$$

Da questa, per la invarianza delle distanze per traslazione, discende la seguente formula di trasformazione delle distanze per omotetia:

$$\forall C,P,Q \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ ,\ \rho\in\mathbb{R}_{nz} \ :\ \mathrm{dist}\,(Hmtt(C,\rho)(P), Hmtt(C,\rho)(Q)) = |\rho|\,\mathrm{dist}(P,Q) \ .$$

G30:j.04 Un'altro genere di trasformazioni del piano di primario interesse sono le riflessioni rispetto ad una retta. Le più semplici sono le riflessioni rispetto agli assi Ox e Oy date, risp., dalle seguenti definizioni:

$$Mirr_{Ox} := \ulcorner \langle a,b\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \langle -a,b\rangle \qquad , \qquad Mirr_{Oy} := \ulcorner \langle a,b\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \langle a,-b\rangle \ .$$

È evidente che queste permutazioni del piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sono involuzioni e che la composizione delle due, quale che sia l'oerdine dei fattori, coincide con la simmetria centrale con centro nell'origine:

$$Mirr_{Ox}\circ Mirr_{Oy} = Mirr_{Oy}\circ Mirr_{Ox} = \ulcorner \langle a,b\rangle \mapsto \langle -a,-b \urcorner = Hmtt(\mathbf{0},-1) \ .$$

G30:j.05 In generale si dice **riflessione rispetto ad una generica retta** del piano $\mathcal{R}$ la trasformazione che ad un punto P associa il punto $\overline{P}$ ottenuto considerando la retta passante per P e ortogonale alla $\mathcal{R}$ e su questa trovando il punto che dista da $\mathcal{R}$ quanto P ma, se non appartiene alla $\mathcal{R}$ (caso in cui $\overline{P}=P$), appartiene al semipiano aperto delimitato da $\mathcal{R}$ diverso da quello cui appartiene P.
Questa trasformazione del piano viene detta anche **simmetria assiale** relativa all'asse $\mathcal{R}$.
Dalla definizione risulta chiaro che questa trasformazione è un'involuzione e che i suoi punti fissi sono i punti della $\mathcal{R}$. Risulta chiaro anche che una riflessione trasforma rette in rette e segmenti in segmenti di uguale lunghezza; essa quindi mantiene le distanze, cioè è un'isometria piana. Inoltre è chiaro che tutte le rette ortogonali all'asse di riflessione sono invarianti per tale trasformazione e sono le sole con questa proprietà, oltre alla stessa $\mathcal{R}$.

La riflessione rispetto alla retta passante per l'origine individuata da un vettore a lei ortogonale n è data dall'espressione

$$Mirr_{\perp\mathsf{n}} \;=\; \lceil \mathsf{v} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\mapsto\; 2\,\boldsymbol{Prj}_{\perp\mathsf{n}}(\mathsf{v}) - \mathsf{v} \rceil \;.$$

Questa si ricava considerando il parallelogramma (rombo) individuato dall'aver $\overrightarrow{OP}$ per lato e $2\,\boldsymbol{Prj}_{\perp\mathsf{n}}(\mathsf{v})$ per diagonale.

Questa formula si può riscrivere servendosi dei prodotti scalari dei vettori in causa nella seguente forma:

$$\forall \mathsf{v} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\; \vdots \;\; Mirr_{\perp\mathsf{n}}(\mathsf{v}) = 2\,\frac{\langle \mathsf{v}|\mathsf{n}\rangle}{\langle \mathsf{n}|\mathsf{n}\rangle}\,\mathsf{n} - \mathsf{v} \;.$$

G30:j.06 Una espressione per $Mirr_{\mathcal{R}}$, la riflessione rispetto ad una generica retta $\mathcal{R}$ che non necessariamente passa per l'origine si ottiene riconducendo questa trasformazione del piano a una riflessione del tipo precedente mediante traslazioni. Infatti, se R è un qualsiasi punto della $\mathcal{R}$, la traslazione $Trsl_{\overrightarrow{RO}}$ porta tale retta a passare per l'origine e quindi, denotando con n un qualsiasi vettore ortogonale alla $\mathcal{R}$, si ha l'espressione

$$Mirr_{\mathcal{R}} = Trsl_{\overrightarrow{RO}} \circ_{lr} Mirr_{\perp\mathsf{n}} \circ_{lr} Trsl_{\overrightarrow{OR}} \;.$$

G30:j.07 Vediamo ora il risultato dell'applicazione di due successive riflessioni rispetto a due rette parallele $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$. Per semplicità di esposizione supponiamo che le due rette siano poco inclinate rispetto all'asse Ox e che si possa dire senza ambiguità che la Scl si colloca al di sopra della Rcl ad una distanza d da essa. Inoltre denotiamo con d il vettore ortogonale alle due rette che porta la $\mathcal{R}$ nella $\mathcal{S}$. Si tratta di esaminare le azioni delle trasformazioni $T_1 := Mirr_{\mathcal{R}} \circ_{lr} Mirr_{\mathcal{S}}$ e $T_2 := Mirr_{\mathcal{S}} \circ_{lr} Mirr_{\mathcal{R}}$.

La T_1 porta la $\mathcal{R}$, invariante rispetto alla $Mirr_{\mathcal{R}}$, nella retta parallela a $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ e posta al di sopra della seconda a distanza d da essa e a distanza $2d$ dalla retta dipartenza. Essa porta invece la $\mathcal{S}$ in un primo momento nella retta parallela al di sotto della $\mathcal{R}$ a distanza d da questa e alla fine nella parallela al di sopra della $\mathcal{S}$ a distanza $2d$ da questa. Si constata anche che tutti i punti, oltre a quelli delle due rette, vengono traslati di $2d$ nella direzione ortogonale alle rette e verso l'alto. Quindi $T_1 = Trsl_{2\mathsf{d}}$.

L'azione della T_2 si ottiene dalla precedente scambiando il ruolo delle due rette e quindi deve essere la traslazione relativa allo spostamento $-2\mathsf{d}$, opposto del precedente. Quindi

$$Mirr_{\mathcal{R}} \circ_{lr} Mirr_{\mathcal{S}} = Trsl_{2\mathsf{d}} = \left(Mirr_{\mathcal{S}} \circ_{lr} Mirr_{\mathcal{R}}\right)^{-1} \;.$$

Vedremo, dopo aver introdotte le rotazioni, che la composizione di due riflessioni rispetto a rette incidenti è una rotazione avente come centro il punto di intersezione dei due assi. Vedremo anche che questo risultato generalizza il precedente, in quanro le traslazioni si possono considerare rotazioni degeneri, cioè rotazioni con centro di rotazione all'infinito.

G30:k. Varianti delle equazioni per le rette nel piano

G30:k.01 Abbiamo introdotto le rette piane mediante la loro equazione generale

$$\mathsf{Rtlin}_g(a,b,c) = \mathsf{Soln}(ax+by+c=0) \qquad \text{con} \quad a^2+b^2>0\ .$$

Si parla di **equazione incompleta** quando qualcuno dei parametri a, b e c è uguale a 0. Queste equazioni si caratterizzano facilmente.
Se $c=0$ si ha l'equazione generale delle rette passanti per l'origine.
Se $b=0$ deve essere $a \neq 0$ e si ha l'equazione delle rette verticali $x = -\frac{c}{a}$; se in particolare $b=c=0$, si ha l'equazione $x=0$ caratterizzante l'asse Ox.
Se $a=0$, simmetricamente, deve essere $b \neq 0$ e si ha l'equazione delle rette orizzontali $y = -\frac{c}{b}$; se in particolare $a=c=0$, si ha l'equazione $y=0$ esprimente i punti dell'asse Oy.
Le rette date da una equazione generale completa sono dunque le rette che non passano per l'origime e non sono parallele agli assi Ox e Oy. Usando la terminologia della geometria proiettiva, sono le rette che non passano per i tre punti $\langle 0,0\rangle$, $\langle\infty,0\rangle$ e $\langle 0,\infty\rangle$.

G30:k.02 Consideriamo la retta passante per un dato punto $P_0 = \langle x_0,y_0\rangle$; se la sua equazione generale è $ax+by+c=0$, deve essere $ax_0+by_0+c=0$ e da queste due equazioni segue

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0\ .$$

Si consideri il vettore $\mathbf{n} = \langle a,b\rangle$; l'equazione dice che tale vettore è ortogonale a ogni vettore applicato $\overrightarrow{PP_0}$ determinato dal punto fisso P_0 e dal punto $P = \langle x,y\rangle$ variabile sulla retta. Quindi la precedente equazione definisce la retta che passa per P_0 ed è ortogonale a un dato vettore.

L'affermazione della equivalenza di due equazioni $ax+by+c=0$ e $a_1x+b_1y+c_1=0$ equivale alla relazione di parallelismo $\langle a_1,b_1\rangle//\langle a,b\rangle$, ovvero equivale alle uguaglianze $a_1=ka,\ b_1=kb,\ c_1=kc$ per qualche scalare k diverso da 0, ovvero equivale ad affermare la proporzionalità

$$\ulcorner\, \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \,\urcorner\ .$$

Si osserva che ogni retta del piano è in biiezione con il raggio dello spazio tridimensionale a cui appartiene il vettore $\langle a,b,c\rangle$.

G30:k.03 Consideriamo le rette date da equazione generale completa, rette che non passano per l'origine e non sono parallele agli assi. L'equazione $ax+by+c=0$, introdotti $A := -\frac{c}{a}$ e $B := -\frac{c}{b}$, assume la forma

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1\ .$$

Questa viene detta **equazione segmentaria** o **equazione delle intercette** della retta. Questi nomi sono dovuti al fatto che A esprime la ascissa del punto nel quale la retta interseca l'asse Ox, retta di equazione $y=0$, e che B esprime la ordinata del punto nel quale la retta interseca l'asse Oy, retta di equazione $x=0$.
Per tracciare concretamente una retta è particolarmente conveniente servirsi della sua equazione segmentaria, ovvero dei punti in cui essa interseca gli assi.

G30:k.04 Una retta del piano può essere determinata dalla conoscenza di un suo punto $P_1 = \langle x_1,y_1\rangle$ e di un vettore che esprime la sua direzione $\mathbf{d} = \langle l,m\rangle$.

Consideriamo il punto variabile $P = \langle x, y\rangle$ e il vettore $\overrightarrow{P - P_1}$; P appartiene alla retta cercata sse $\overrightarrow{P - P_1} // \mathbf{d}$ sse vale la relazione di proporzionalità

$$\ulcorner \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} \urcorner \ .$$

Questa caratterizza la retta cercata e viene detta **equazione canonica** della retta.

G30:k.05 Spesso serve individuare l'equazione della retta passante per due dati punti $P_1 = \langle x_1, y_1\rangle$ e $P_2 = \langle x_2, y_2\rangle$. Per questo si considerano due vettori: il primo determinato da uno dei punti dati, scegliamo P_1, e dal punto variabile $P = \langle x, y\rangle$, $\overrightarrow{P - P_1} = \langle x - x_1, y - y_1\rangle$ e il secondo determinato dai due punti dati $\overrightarrow{P_2 - P_1} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$. Il punto P appartiene alla retta data sse $\overrightarrow{P - P_1} // \overrightarrow{P_2 - P_1}$ cioè sse vale la relazione di proporzionalità

$$\ulcorner \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \urcorner \ .$$

Questa equazione caratterizza la retta per due punti assegnati.

G30:k.06 Ogni retta del piano può essere individuata da una coppia di espressioni che forniscono le coordinate del suo punto generico $P = \langle x, y\rangle$ in funzione di un parametro reale t. Queste espressioni vengono detti **equazioni parametriche** della retta e si ottengono facilmente da una sua equazione canonica $\ulcorner \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} \urcorner$ Supposto, senza perdere in generalità, che $l \neq 0$, si introduce il parametro $t := \frac{x - x_1}{l}$; per il significato della variabile x, la t varia sull'intero $\mathbb{R}$ e si può scrivere $x = x_1 + lt$; introducendo la t nell'equazione che precisa la proporzionalità $m(x - x_1) = l(y - y_1)$ si ricava $mlt = l(y - y_1)$ e in definitiva si può caratterizzare la retta con le equazioni

$$x = x_1 + lt \quad , \quad y = y_1 + mt \qquad \text{per } -\infty < t < +\infty \ .$$

G30:k.07 Un'altra equazione che risulta spesso utile per trattare una retta non verticale pone in evidenza la sua pendenza, ovvero l'angolo θ che essa forma con l'asse delle x. Questo angolo viene detto **angolo di inclinazione** della retta e chiediamo che assuma i valori espresssi da $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Chiamiamo poi **pendenza** o **coefficiente angolare** della retta $\tau := \tan\theta$. Si osserva che per le rette verticali si avrebbe $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ e di τ si potrebbe dire solo che "tende all'infinito".

Cerchiamo ora un'equazione della retta passante per un dato punto $P_1 = \langle x_1, y_1\rangle$ e avente data pendenza. Questa retta può essere individuata fornendo un suo vettore di direzione $\mathbf{d} = \langle l, m\rangle$. Chiamiamo δ l'angolo con segno definito dalla coppia di semirette $\langle Ox, \mathbb{R}_{0+}\mathbf{d}\rangle$; per esso si trova:

- se $\mathbf{q}$ appartiene al I quadrante $l = |\mathbf{q}|\cos\delta = |\mathbf{q}|\cos\theta$ ed $m = |\mathbf{q}|\sin\delta = |\mathbf{q}|\sin\theta$;
- se $\mathbf{q}$ appartiene al II quadrante $l = |\mathbf{q}|\cos\delta = |\mathbf{q}|\cos(-\theta)$ ed $m = |\mathbf{q}|\sin\delta = |\mathbf{q}|\sin(-\theta)$;
- se $\mathbf{q}$ appartiene al III quadrante $l = |\mathbf{q}|\cos\delta = |\mathbf{q}|\cos(-\theta)$ ed $m = |\mathbf{q}|\sin\delta = |\mathbf{q}|\sin(-\theta)$;
- se $\mathbf{q}$ appartiene al IV quadrante $l = |\mathbf{q}|\cos\delta = |\mathbf{q}|\cos\theta$ ed $m = |\mathbf{q}|\sin\delta = |\mathbf{q}|\sin\theta$.

In ogni caso si ha $\tau = \tan\theta = \frac{m}{l}$ e la relazione di proporzionalità $\ulcorner \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} \urcorner$ implica $y - y_1 = \tau(x - x_1)$; da questa, posto $B := y_1 - \tau x_1$,

$$y = \tau x + B \quad \text{con} \quad B := y_1 - \tau x_1 \quad \text{e} \quad \tau := \frac{m}{l} \ .$$

Chiamiamo τ la **pendenza** della retta, mentre B esprime l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse Ox.

G30:k.08 Molte elaborazioni chiedono di individuare angoli formati da due rette secanti $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, angoli che appartengono ad una quaterna di angoli opposti-supplementari. Forniamo alcune formule

che calcolano $\cos\phi$, coseno dei suddetti angoli, grandezza unica per tutta la quaterna che consente di risolvere tutti i problemi nei quali non risulta necessario assegnare un orientamento alle due rette.
Le diverse formule che otteniamo fanno riferimento a diverse modalità di individuazione di $\mathcal{R}_1$ ed $\mathcal{R}_2$.

Se le rette sono date mediante le equazioni generali $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, il problema si riduce al calcolo del coseno dell'angolo formato dai vettori $\mathbf{n}_1 := \langle a_1, b_1\rangle$ ed $\mathbf{n}_1 := \langle a_1, b_1\rangle$ ortogonali,, risp., ad $\mathcal{R}_1$ e ad $\mathcal{R}_2$; tenuto conto che $\big\langle \mathbf{n}_1 | \mathbf{n}_2 \big\rangle = ||\mathbf{n}_1|| \cdot ||\mathbf{n}_2|| \cos\phi$, si ottiene

$$(1) \qquad \cos\phi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2} \cdot \sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2}} \ .$$

Da questa espressione scendono la condizione di parallelismo

$$\mathcal{R}_1 // \mathcal{R}_2 \iff \ulcorner \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \urcorner$$

e la condizione di ortogonalità

$$\mathcal{R}_1 \perp \mathcal{R}_2 \iff a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \ .$$

Se le rette sono date da equazioni canoniche

$$\ulcorner \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} \urcorner \qquad , \qquad \ulcorner \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} \urcorner \ ,$$

si ottiene formula analoga esprimente il coseno dell'angolo formato dai vettori di direzione invece che da vettori ortogonali:

$$(2) \qquad \cos\phi = \pm \frac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{{l_1}^2 + {m_1}^2} \cdot \sqrt{{l_2}^2 + {m_2}^2}} \ .$$

Ora abbiamo la condizione di parallelismo

$$\mathcal{R}_1 // \mathcal{R}_2 \iff \ulcorner \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} \urcorner$$

e la condizione di ortogonalità

$$l_1l_2 + m_1m_2 = 0 \ .$$

Se le rette sono definite da equazioni caratterizzate da pendenze

$$y = \tau_1 x + b_1 \qquad y = \tau_2 x + b_2$$

conviene considerare gli angoli di inclinazione di $\mathcal{R}_1$, θ_1, e di $\mathcal{R}_2$, θ_2. Per gli angoli formati dalle due rette abbiamo $\phi = \theta_2 - \theta_1$ e $\phi' = \pi - \phi$. Si ottiene facilmente la tangente di ϕ e da questa la tangente di ϕ':

$$(3) \qquad \tan\phi = \tan\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{1 + \tau_1\tau_2} \qquad , \qquad \tan\phi' = -\tan\phi = \frac{\tau_2 - \tau_1}{1 + \tau_1\tau_2} \ .$$

Ora la condizione di parallelismo è data da $\tan(\theta_2 - \theta_1) = 0$, cioè

$$\mathcal{R}_1 // \mathcal{R}_2 \iff \tau_1 = \tau_2 \ ,$$

mentre la condizione di ortogonalità è data dall'annullarsi del denominatore $1 + \tau_1\tau_2 = 0$, cioè

$$\mathcal{R}_1 \perp \mathcal{R}_2 \iff \mathcal{R}_1 \perp \mathcal{R}_2 \iff \tau_2 = \frac{1}{\tau_1} \ .$$

G30:k.09 Un modo spesso utile per individuare una retta $\mathcal{R}$ del piano si serve della sua distanza dall'origine che denotiamo con p, e di uno dei due versori ortogonali alla stessa $\mathcal{R}$. Se la retta non

passa per l'origine, chiamato H il punto della retta più vicino all'origine (in modo che $HO = p$), si considera il versore $\mathbf{n}$ diretto come $\overrightarrow{H-O}$; se $\mathcal{R}$ passa per l'origine la scelta è indifferente, in quanto in definitiva è priva di effetti. Chiamato θ l'angolo con segno determinato dai vettori $\mathsf{e}_1 = \langle 1, 0\rangle$ ed $\mathbf{n}$ da considerare in quest'ordine, possiamo scrivere $\mathbf{n} = \langle\cos\theta, \sin\theta\rangle$.
Il punto variabile $P = \langle x, y\rangle$ appartiene alla $\mathcal{R}$ sse la proiezione di $\overrightarrow{PO}$ sull'asse definito dal versore $\mathbf{n}$ è uguale a p, cioè, ricordando la definizione del prodotto scalare, sse $\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{n}}(\overrightarrow{PO}) = \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{PO} = p$. Dato che $\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{PO} = x\cos\theta + y\sin\theta$, per i punti di $\mathcal{R}$ si ottiene l'equazione

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0\ . \tag{1}$$

Questa viene chiamata **equazione normalizzata** della retta.

G30:k.10 La precedente equazione consente di introdurre la nozione di **deviazione da una retta di un punto** del piano. Per deviazione dalla generica retta $\mathcal{R}$ i un punto arbitrario $P = \langle x, y\rangle$ intendiamo un numero reale che denotiamo con $\operatorname{devn}(\mathcal{R}, P)$ uguale in valore assoluto alla distanza del punto dalla retta e preso con segno positivo se P e l'origine si trovano sui due diversi semipiani delimitati dalla retta, con segno negativo in caso contrario.

(1) Prop.: Se la retta $\mathcal{R}$ è determinata dall'equazione normalizzata $x\cos\theta+y\sin\theta-p = 0$, la deviazione da tale retta di un punto $\overline{P} = \langle\overline{x}, \overline{y}\rangle$ si ottiene dal primo membro dell'equazione come

$$\operatorname{devn}(\mathcal{R}, \overline{P}) = \overline{x}\cos\theta + \overline{y}\sin\theta - p\ .$$

Dim.: Consideriamo la retta orientata ν definita da $\mathbf{n} = \langle\cos\theta, \sin\theta\rangle$ e chiamiamo H l'intersezione di questa con la $\mathcal{R}$; consideriamo inoltre la proiezione di $\overline{P}$ sulla ν e chiamiamo Q il punto ottenuto. La deviazione richiesta è data dalla differenza $QO - HO$; il primo addendo si può esprimere mediante il prodotto scalare $\overrightarrow{\overline{P}-O}\cdot\mathbf{n} = \overline{x}\cos\theta + \overline{y}\sin\theta$ ed il secondo è uguale a p ▮

La formula precedente consente di ottenere la distanza di un punto $\overline{P}$ dalla retta $\mathcal{R}$ come $|\operatorname{devn}(\mathcal{R}, \overline{P})|$.

L'equazione normalizzata della retta $\mathcal{R}$ si può ottenere da una sua qualsiasi equazione generale $ax + by + c = 0$ sulla base delle considerazioni in :9.b sulla proporzionalità dei parametri di due equazioni equivalenti. Si tratta di determinare un reale non nullo k tale che sia $ka = \cos\theta$, $kb = \sin\theta$ e $kc = -p$. Sommando i quadrati delle prime due espressioni si ottiene $k^2(a^2 + b^2) = 1$, da cui

$$k = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ .$$

La scelta del segno in questa espressione discende dalla convenzione sul segno della deviazione: dato che si chiede che p sia positivo, il segno di $k = -\dfrac{p}{c}$ deve essere l'opposto di quello del parametro c, supposto sempre diverso da 0. Quindi l'equazione normalizzata della retta $\mathbf{Rtlin}(a, b, c)$ è

$$\frac{sa}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{sb}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{sc}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \quad \text{con} \quad s := -\operatorname{sign}(c)\ .$$

G30:k.11 Per **fascio delle rette** aventi il centro in un dato punto C si intende l'insieme delle rette passanti per tale C; questo punto viene detto anche **sostegno del fascio**. Il centro di un fascio di rette è completamente determinato dalla conoscenza di due rette del fascio. Trovato C si determina facilmente l'equazione di una retta del facio con una data direzione o con una data pendenza. Spesso è conveniente prendere in considerazione l'intero fascio attraverso una sua equazione; troviamola nel caso in cui si conoscano le equazioni generali di due rette.

(1) Prop.: Date due rette $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ secanti mediante le equazioni $a_1x+b_1y+c_1=0$ e $a_2x+b_2y+c_2=0$ con ${a_i}^2+{b_i}^2>0$ per $i=1,2$, l'equazione

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)=0 \tag{2}$$

con λ e μ numeri reali non entrambi nulli individua tutte le rette del fascio determinati da $\mathcal{R}_1$ ed $\mathcal{R}_2$.
Dim.: L'equazione precedente è l'equazione lineare nelle variabili x e y

$$(\lambda a_1+\mu a_2)x+(\lambda b_1+\mu b_2)y+(\lambda c_1+\mu c_2)=0 \tag{3}$$

Non può accadere che i coefficienti delle due variabili si annullino entrambi: infatti in tal caso, supposto senza ledere la generalità che sia $\lambda\neq 0$, si avrebbero le proporzionalità

$$\ulcorner \frac{a_1}{a_2}=-\frac{\mu}{\lambda}\urcorner \quad , \quad \ulcorner \frac{b_1}{b_2}=-\frac{\mu}{\lambda}\urcorner \quad \text{ovvero} \quad \ulcorner \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\urcorner \quad ;$$

ma l'ultima relazione esprime il parallelismo delle rette date, situazione esclusa per ipotesi.
Quindi la equazione precedente, per ogni scelta di λ e μ tali che $\lambda^2+\mu^2>1$ esprime una retta passante per C, in quanto tale punto porta all'annullamento di entrambe le equazioni combinate linearmente; dunque l'equazione precedente esprime una retta del fascio.
Resta da dimostrare che tutte le rette del fascio sono ottenibili dalla (2) con una scelta opportuna di λ e μ. Consideriamo la retta del fascio diversa da quelle di partenza e caratterizzata dal fatto di passare per un punto $\overline{P}=\langle\overline{x},\overline{y}\rangle$; si tratta di garantire la possibilità di individuare un valore per λ ed uno per μ tali da rendere soddisfatta la (2) quando in essa si sostituiscano la x con $\overline{x}$ e la y con $\overline{y}$, cioè la

$$\lambda(a_1\overline{x}+b_1\overline{y}+c_1)+\mu(a_2\overline{x}+b_2\overline{y}+c_2)=0\ .$$

Questa va considerata un'equazione in λ e μ i cui coefficienti sono diversi da 0, in quanto in caso contrario si avrebbe $\langle\overline{x},\overline{y}\rangle$ appartenente ad una delle rette di partenza. Si possono quindi trovare per le due variabili dei valori soddisfacenti: dunque ogni retta del fascio è rappresentata dalla (2) ∎

Si osserva che i due parametri della (2) si possono ridurre ad uno, ma a scapito della generalità. Nell'ipotesi restrittiva $\lambda\neq 0$, posto $\alpha:=\dfrac{\mu}{\lambda}$ si ha l'espressione nel solo parametro α

$$(a_1x+b_1y+c_1)+\alpha(a_2x+b_2y+c_2)=0 \tag{2}$$

espressione talora più comoda della (2), ma non in grado di esprimere la retta soluzione della $a_2x+b_2y+c_2=0$. Situazione simmetrica nell'ipotesi $\mu\neq 0$, anch'essa restrittiva.

vbox **G30:I. Problemi concernenti rette nel piano**

G30:I.01 Cerchiamo di determinare una retta $\mathcal{R}$ che passa per un dato punto $P_1=\langle x_1,y_1\rangle$ e che forma un dato angolo ϕ con una retta $\mathcal{R}_1$ espressa mediante la sua pendenza dalla $y=\tau_1x+b_1$. La $\mathcal{R}$ è individuata dall'equazione

$$y-y_1=\tau(x-x_1)$$

e si deve trovare la τ per la quale l'angolo formato da $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}$ sia ϕ.
La soluzione, se non accade che sia $\phi=\dfrac{\pi}{2}$, è data da due rette; queste, per la :9.h(3), sono caratterizzate da

$$\pm\tan\phi=\frac{\tau-\tau_1}{1+\tau\tau_1}\ .$$

Questa relazione consente di determinare le pendenze τ dalle $\tau-\tau_1=\pm\tan\phi\pm\tau\tau_1\tan\phi$, e quindi, se $1\pm\tau_1\tan\phi\neq 0$, si ricava
$$\tau=\frac{\tau_1\pm\tan\phi}{1\mp\tau_1\tan\phi}\ .$$
Se invece $1\mp\tau_1\tan\phi=0$ si ha retta verticale $x=x_1$

Si possono quindi scrivere le equazioni delle due rette che risolvono il problema

(1) $$y-y_1=\frac{\tau_1+\tan\phi}{1-\tau_1\tan\phi}(x-x_1)\quad,\quad y-y_1=\frac{\tau_1-\tan\phi}{1+\tau_1\tan\phi}(x-x_1)\quad\text{per}\quad\tau_1\tan\phi\neq\pm1\ ;$$

(2) $$y-y_1=\frac{\tau_1+\tan\phi}{1-\tau_1\tan\phi}(x-x_1)\quad,\quad x=x_1\quad\text{per}\quad\tau_1\tan\phi=-1\ ;$$

(3) $$x=x_1\quad,\quad y-y_1=\frac{\tau_1-\tan\phi}{1+\tau_1\tan\phi}(x-x_1)\quad\text{per}\quad\tau_1\tan\phi=1\ ;$$

G30:I.02 Cerchiamo le due rette bisettrici di due rette secanti date. Per questo conviene avere le rette date in forma normalizzata
$$x\cos\theta_1+y\sin\theta_1-p_1=0\qquad x\cos\theta_2+y\sin\theta_2-p_2=0$$
Le due bisettrici si possono individuare, risp., come luogo dei punti aventi uguali le deviazioni dalla rette date

(1) $$(x\cos\theta_1+y\sin\theta_1-p_1)-(x\cos\theta_2+y\sin\theta_2-p_2)=0$$

e come luogo dei punti che presentano le deviazioni dalla rette date uguali in valore assoluto ma di segno opposto

(2) . $$(x\cos\theta_1+y\sin\theta_1-p_1)+(x\cos\theta_2+y\sin\theta_2-p_2)=0$$

G30:I.03 Poniamoci il problema di decidere se una retta data $\mathcal{R}$ interseca o meno un dato segmento $\overline{P_1P_2}$ Per questo conviene disporre dell'equazione normalizzata della retta $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$; sostituendo in questa le coordinate degli estremi del segmento si ottengono le deviazioni $\text{devn}(\mathcal{R},P_1)$ e $\text{devn}(\mathcal{R},P_2)$. si conclude quindi che la $\mathcal{R}$ interseca il segmento in un punto interno sse le due deviazioni hanno segno opposto. Naturalmente se la deviazione di un punto è nulla il punto sta sulla retta e se entrambe sono nulle il segmento fa parte della retta.

G30:I.04 In varie elaborazioni delle immagini serve stabilire come si collocano un punto $\overline{P}=\langle\overline{x},\overline{y}\rangle$ e l'origine rispetto ai 4 angoli formati da due date rette secanti non passanti per l'origine $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$. Più esplicitamente si tratta di stabilire se $\overline{P}$ e O si trovano (1) nello stesso angolo, (2) in due angoli adiacenti e supplementari, (3) in due angoli opposti.
Anche questo problema si risolve considerando le equazioni normalizzate delle rette. Queste forniscono direttamente le deviazioni $\text{devn}(\mathcal{R}_1,\overline{P})$ e $\text{devn}(\mathcal{R}_2,\overline{P})$ Se entrambe le deviazioni sono negative sia O che $\overline{P}$ si trovano nello stesso angolo. Se entrambe le deviazioni sono positive O e $\overline{P}$ appartengono a due angoli opposti. Se le deviazioni hanno segni opposti O e $\overline{P}$ appartengono a due angoli supplementari, cioè adiacenti.

G30:I.05 Date tre rette nel piano ci si chiede se si intersecano in uno stesso punto, ovvero se appartengono ad uno stesso fascio. Consideriamo che le rette $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ ed $\mathcal{R}_3$ siano date, risp., dalle equazioni generali $a_1x+b_1y+c_1=0\qquad a_2x+b_2y+c_2=0\qquad a_3x+b_3y+c_3=0$. Le due rette di ciascuna delle tre coppie devono essere secanti: in caso contrario si avrebbero due rette parallele e nessun punto in comune, oppure rette coincidenti. Inizialmente dobbiamo stabilire che sia diverso da 0 almeno uno dei tre determinanti

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \ .$$

Assumiamo senza perdere generalità, di avere accertato che le prime due rette hanno un punto in comune. Accade che le tre rette si intersecano in un punto sse la terza retta $\mathcal{R}_3$ appartiene al fascio determinato dalle prime due, $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, ovvero sse la $a_3x+b_3y+c_3=0$ equivale ad una delle equazioni $\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)=0$. Per le considerazioni in :9.b questo equivale ad affermare che si trovi un fattore di proporzionalità ν tale che valgano le uguaglianze

$$\lambda a_1 + \mu a_2 = -\nu a_3 \qquad \lambda b_1 + \mu b_2 = -\nu b_3 \qquad \lambda c_1 + \mu c_2 = -\nu c_3 \ .$$

Dunque le tre rette si incontrano in un solo punto sse si trova una soluzione diversa dalla $\lambda=\mu=\nu=0$ per il seguente sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3 = 0 \\ \lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3 = 0 \\ \lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3 = 0 \end{cases} \ .$$

Questo implica che la matrice dei coefficienti

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

abbia determinante nullo. Tenuto conto che si era chiesto che almeno una sottomatrice di ordine 2 avesse determinante diverso da 0, si ha l'enunciato che segue.

(1) Prop.: Tre rette del piano si incontrano in un solo punto sse una matrice dei coefficienti di equazioni generali per le rette ha rango 2 ▮

G30:I.06 Si debba considerare un punto C determinato come intersezione di due rette individuate mediante le equazioni generali $a_1x+b_1y+c_1=0$ e $a_2x+b_2y+c_2=0$ e si cerchino rette che passano per C e soddisfino un'ulteriore condizione. Per questi problemi conviene ricercare la soluzione entro il fascio di rette relativo all'equazione

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)=0 \ .$$

Si chieda la retta passante per C e parallela ad una terza retta $\mathcal{R}_3$ data dall'equazione $a_3x+b_3y+c_3=0$. Questa richiesta (v. :9.h) si traduce nella proporzionalità per i coefficienti delle variabili x e y

$$\ulcorner \frac{\lambda a_1 + \mu a_2}{a_3} = \frac{\lambda b_1 + \mu b_2}{b_3} \urcorner$$

ovvero alla richiesta di risoluzione dell'equazione in λ e μ

$$\lambda(a_1b_3 - b_1a_3) = \mu(b_2a_3 - a_2b_3) \ .$$

I coefficienti delle incognite non possono essere entrambi nulli, perché in tal caso sarebbe $a_1b_3=b_1a_3$ e $b_2a_3=a_2b_3$ dalle quali seguirebbe la proporzionalità $\ulcorner \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2} \urcorner$, equivalente al parallelismo delle prime due rette. Quindi è garantito che si possa trovare una soluzione dell'equazione in λ e μ diversa dalla $\lambda=\mu=0$, ovvero una retta che soddisfa le richieste.

Si chieda la retta passante per C ed ortogonale ad una terza retta $\mathcal{R}_3$ data dall'equazione $a_3x+b_3y+c_3 = 0$. La richiesta di ortogonalità (v. :9.h) si traduce nella uguaglianza a 0 di un prodotto scalare $(\lambda a_1 + \mu a_2)a_3 + (\lambda b_1 + \mu b_3)b_3 = 0$ ovvero alla richiesta di risoluzione dell'equazione in λ e μ

$$\lambda(a_1a_3 + b_1b_3) = -\mu(a_2a_3 + b_2b_3) \ .$$

Ancora i coefficienti delle incognite non possono essere entrambi nulli, perché in tal caso sarebbe $a_1a_3 = -b_1b_3$ e $a_2a_3 = -b_2b_3$ dalle quali seguirebbe ancora la proporzionalità $\ulcorner \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \urcorner$, equivalente al parallelismo delle due rette $\mathcal{R}_1$ ed $\mathcal{R}_2$. Quindi è garantito che si possa trovare una soluzione dell'equazione in λ e μ diversa dalla $\lambda = \mu = 0$, ossia una retta che soddisfa le richieste.

Si cerchino le rette passanti per C che intercettano sugli assi segmenti di uguale lunghezza. In questo caso si cercano rette dirette come la bisettrice del primo e del terzo quadrante $y = x$ o dirette come la bisettrice del secondo e del quarto quadrante $y = -x$ Queste rette sono caratterizzate da coefficienti delle variabili x e y uguali in valore assoluto; quindi occorre uguagliare i valori assoluti dei coefficienti dell'equazione del fascio: $|\lambda a_1 + \mu a_2| = |\lambda b_1 + \mu b_2|$. Da qui si ricavano le due richieste

$$\lambda(a_1 - b_1) = -\mu(a_2 - b_2) \qquad \lambda(a_1 + b_1) = -\mu(a_2 + b_2) \ .$$

Anche per queste equazioni i coefficienti delle incognite non si possono annullare entrambi, perché ancora si avrebbe il parallelismo delle rette $\mathcal{R}_1$ ed $\mathcal{R}_2$. Quindi è garantita la possibilità di trovare una soluzione utile, cioè diversa dalla $\lambda = \mu = 0$, per entrambe le equazioni.