Capitolo G15:
geometria interposizionale

Contenuti delle sezioni

4 pagine

G15:**0.01** In questo capitolo viene presentato il sistema degli assiomi individuati da Pash e Veblen che si possono porre a fondamento della teoria qui chiamata **geometria interposizionale**, ed abbreviata con GIp, ma che più spesso viene chiamata insiemi-E, **geometria ordinata**.

Con questo sistema di assiomi relativamente contenuto, oltre che con le nozioni sulle strutture di incidenza, risulta possibile introdurre molteplici nozioni geometriche e ottenere una vasta gamma di risultati.

Le pagine che seguono sono state riprese soprattutto dal testo di Coxeter ma con termini e notazioni più in sintonia con le nozioni geometriche esposte negli altri capitoli.

G15:a. assiomi sulla interposizione e prime conseguenze

G15:**a.01** Le entità basilari della geometria dell'interposizione, in sigla GIp, sono i punti, i segmenti aperti (termine che in questo capitolo verrà spesso abbreviato con "segmenti") e la relazione ternaria sui punti che chiamiamo **interposizione**. Va segnalato che usualmente in italiano si usa il termine intermediazione, mentre in inglese si usa betweenness.

Se con N denotiamo un cardinale o un insieme di cardinali, denotiamo con $\mathbf{Pnt}_{\mathsf{N}}$ la collezione degli insiemi di punti aventi un cardinale consentito da N. In particolare spesso si prendono in considerazione insiemi costituiti da due punti diversi, cioè insiemi di punti appartenenti alla collezione $\mathbf{Pnt}_2$, e spesso insiemi costituiti da tre punti diversi, cioè insiemi di punti appartenenti alla collezione $\mathbf{Pnt}_3$.

Per enunciare che tra i punti A, B e C sussiste questa relazione useremo la notazione globale $IntPos(A, B, C)$ e la più concisa notazione locale $[ABC]$; se i punti sono forniti da espressioni sarà necessario servirsi di scritture della forma $[A, B, C]$. Per un enunciato della forma $[ABC]$ useremo dizioni quali "il punto B è posizionato tra A e C" o "B si trova tra A e C" .
Gli assiomi della GIp vanno associati ai nomi di Moritz Pash (1843-1930) e di Oswald Veblen (1880-1960) e a essi attribuiamo contrassegni della forma [[PVn]].

G15:**a.02**
[[PV1]] Esistono almeno due punti.
Questo assioma assicura un minimo di consistenza per ogni GIp.

[[PV2]] Se A e C sono due punti distinti esiste almeno un punto B tale che $[ABC]$.
Questo assioma contribuisce a stabilire l'infinitezza di **Pnt**.

[[PV3]] L'enunciato $[ABC]$ implica che $A \neq C$.

[[PV4]] L'enunciato $[ABC]$ implica $[CBA]$ e $\neg[BCA]$.

(1) Prop.: L'enunciato $[ABC]$ implica $\neg[CAB]$ e $\neg[BAC]$.

Dim.: Da [[PV4]] si ricava anche $\neg[CAB]$. ▮

(2) Prop.: $[ABC]$ implica che A, B e C sono punti diversi.

Dim.: L'enunciato $[ABC]$ potrebbe consentire $B = C$, ma questo rende contradditorie le due conclusioni di [[PV3]]; simile contraddizione è conseguenza della $A = B$ ▮

A questo punto conviene chiarire le proprietà della relazione di interposizione di fronte alle permutazioni dei suoi tre argomenti, che contraddistinguiamo con 1, 2 e 3; in altre parole si tratta di chiarire le proprietà di simmetria della relazione ternaria.

Evidentemente l'identità $\mathsf{Id}_{1,2,3}$ e lo scambio $(1, 3)$ lasciano invariata la proprietà $[ABC]$, mentre gli scambi $(1, 2)$ e $(2, 3)$ la trasformano nella sua negazione. Questa è anche la conseguenza delle permutazioni circolari $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$, mutuamente inverse, come conseguenze della proposizione (1).

G15:**a.03** Se A e C sono due punti distinti della GIp si dice **segmento aperto** avente come estremità A e C l'insieme dei punti P per i quali vale la $[APC]$; tale insieme di punti verrà denotato con $\hat{AC}$.
L'enunciato $[APC]$ si legge anche "P giace su $\hat{AC}$", nonché " P e $\hat{AC}$ sono incidenti" .
Osserviamo esplicitamente che $A, C \notin \hat{AC}$ in quanto sia AAC che ACC contraddicono la proposizione (2).

(1) Prop.: $\hat{AC} = \hat{(}CA)$.

Dim.: La prima implicazione di [[PV4]] comporta che l'insieme dei P tali che. $[APC]$ coincide con l'insieme dei P tali che $[CPA]$ ▮

Si dice **segmento chiuso** avente come estremità due punti A e C supposti distinti e si denota con $\overline{AC}$ l'insieme

$$\overline{AC} := \{A\} \dot\cup \hat{A}\hat{C} \dot\cup \{C\} \ .$$

Evidentemente $\overline{AC} = \overline{CA}$.

Si dice **semiretta aperta** avente estremità in A e passante per C l'insieme dei punti P tali che $[ACP]$. Questo insieme di punti verrà denotato con $\hat{A}\overline{C}$.

Diciamo **semiretta chiusa** avente estremità in A e passante per B l'ampliamento della corrispondente semiretta chiusa con la sua estremità.
Questo insieme di punti verrà denotato con $\overline{AB}$, ossia si definisce $\overline{AB} := \{A\} \dot\cup \hat{A}\overline{C}$.

Un'altra utile notazione viene usata per una semiretta definita a partire da due punti distinti A e C come insieme dei punti P tali che $[ACP]$. Questo insieme di punti si denota con C/A e si può definire come

$$C/A := \overline{AB} \setminus \overline{AB} \ .$$

Se si conosce un punto $D \in C/A$ si può anche affermare $C/A = \hat{C}\overline{CD}$.

G15:**a.04** Si dice **retta passante per due punti** distinti A e C, e si denota con $\overline{AC}$, l'insieme di punti esprimibile con la seguente unioni di insiemi:

$$\overline{AC} := A/C \dot\cup \overline{AC} \dot\cup AC/A \ .$$

Dalla simmetria $(1,3)$ della relazione di interposizione segue che $\forall A, B \in \textsf{Pnt}_2 \ \vdots \ \overline{AC} = \overline{CA}$.
Chiaramente la retta passante per A e C si può esprimere anche con la seguente ripartizione:

$$\overline{AC} = \overline{A}\hat{A} \dot\cup \{A\} \dot\cup \hat{A}\hat{C} \dot\cup \{C\} \dot\cup \hat{C}\overline{C} \ .$$

Un insieme di 3 o più punti si dice insieme di **punti collineari** sse esiste una retta sulla quale giacciono tutti.
L'enunciato $[ABC]$ implica che l'insieme $\{A, B, C\}$ è costituito da tre punti collineari.

Altri assiomi della geometria GIp fanno riferimento alle rette.

[[PV5]] Se C e D sono punti distinti della retta $\overline{AB}$, allora $A \in \overline{CD}$.

Questo assioma porta a un enunciato più chiarificante.

(2) Prop.: Se C e D sono punti distinti della retta $\overline{AB}$, allora

$$\overline{AB} = \overline{CD} \ .$$

(3) Coroll.: Due punti diversi appartengono a una e una sola retta.

(4) Coroll.: Dati tre punti distinti A, B e C giacenti si una retta, vale una e una sola delle tre relazioni $[ABC]$, $[BCA]$ e $[CAB]$.

G15:**a.05** Alla definizione assiomatica della GIp mancano ancora due assiomi.

[[PV6]]

G15:**a.06** [[PV7]] Consideriamo un triangolo $\Delta(A, B, C)$ e altri due punti D ed E per i quali valgano le relazioni $[BCD]$ e $[CEA]$; allora sulla linea $\overline{DE}$ si trova un punto F tale che $[AFB]$.

G15:b. problema di Sylvester sui punti collineari

G15: b.01

G15: b.02

G15: b.03

G15:c. piani e iperpiani

G15: c.01

G15: c.02

G15: c.03

G15:d. continuità

G15: d.01

G15: d.02

G15: d.03

G15:e. parallelismo

G15: e.01

G15: e.02

G15: e.03

`Testi dell'`*esposizione* `in http://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e in http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/`