Capitolo G13:
Piano sui razionali

G13:0.a In questo capitolo iniziamo ad introdurre nozioni di geometria analitica collocandole nell'insieme delle coppie di numeri razionali $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, ambient chiamato anche **piano sui razionali**. Questo è un ambiente computazionale ancora piuttosto semplice e con una portata che presenta limiti già trovati dai pitagorici nel VI secolo a.C. e superati dai geometri greco-ellenistici nel IV secolo a.C. (come documentato negli [[Elementi di Euclide]]). esso comunque consente di trovare formule utili per varie applicazioni, anche grazie al fatto di poter essere calcolate con i procedimenti razionali visti in G12:.
Le considerazioni che seguono servono anche per introdurre le prime tecniche per i calcoli geometrici approssimati che vengono sviluppati dalla computer grafica; va anche rilevato che con tali tecniche vengono costruiti strumenti software che consentono di effettuare sperimentazioni geometriche utili sia nella didattica della matematica (calcolatrici tascabili, [[Cabri géomètre]], [[Cinderella]], ...) che nelle applicazioni avanzate e nella ricerca ([[Mathematica]], [[Maple]], ...).

G13:1. Il piano delle coppie di razionali

G13:1.a Nella pratica del disegno le figure più semplici si possono tracciare servendosi di un foglio a quadretti; questo oggetto si può inquadrare concettualmente con il modello matematico del piano geometrico che si serve del solo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Si può migliorare la precisione consentita dalla carta quadrettata servendosi della carta millimetrata. Se si utilizza uno strumento informatico (un [[sistema CAD]]), un sistema per il [[fotoritocco]], ...) il passaggio da un supporto di visualizzazione ad uno che consente di disegnare in modo più dettagliato può consistere nel passare da un monitor ad una certa [[**risoluzione**]] ad uno schermo video con risoluzione più elevata; oppure può consistere in una operazione di zoom di una [[finestra (informatica)]] allo scopo di avere visualizzata una figura rappresentata ad una scala inferiore.
Un miglioramento in risoluzione del supporto si può vedere concettualmente come il passaggio dal modello $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ al modello che utilizza come unità delle lunghezze un sottomultiplo dell'unità, modello esprimibile con il prodotto cartesiano $\mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/m$ con un certo m intero maggiore di 2.
Va osservato che la logica delle elaborazioni sull'insieme delle coppie di multipli della frazione dell'unità $1/m$ differisce ben poco dalla logica delle elaborazioni sulle coppie di interi. Le argomentazioni sulle coppie di interi si possono adattare con facilità al trattamento dei problemi che si pongono in $\mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/m$.
Sul piano ideale (cioè prescindendo dalle difficoltà pratiche e dai problemi che incontra la fisica dei sistemi microscopici) il processo di miglioramento della precisione può essere portato avanti quanto si vuole: dopo aver considerato il piano $\mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/m$, se necessario, si può passare al piano $\mathbb{Z}/M \times \mathbb{Z}/M$ con $M > m$, costruito con l'unità di misura $1/M$ inferiore alla precedente $1/m$.

Per la pratica espositiva dei risultati geometrici si trova decisamente più conveniente servirsi del quadrato cartesiano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, cioè fare riferimento ad un processo di raffinamento delle costruzioni

portato avanti fino a rendere disponibili, potenzialmente, strumenti numerici e formali che fanno uso dei numeri razionali senza incontrare limiti di risoluzione.
Equivalentemente si pensa di poter attuare omotetie relative a fattori ρ dati da numeri razionali arbitrari (anche se questo risulta fisicamente impossibile per ρ molto piccolo o molto grande, come dimostrano i fenomeni che hanno richiesto l'uso di modelli non euclidei nella relatività generale e la meccanica quantistica).

G13:1.b Il quadrato cartesiano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, cioè l'insieme delle coppie di numeri razionali, estende il piano combinatorio in modo rilevante e si dice **piano razionale**.

Non è difficile dimostrare che, come $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, esso è un insieme numerabile.
In tale insieme si possono visualizzare molte situazioni di grande interesse: in esso si possono sviluppare numerose nozioni geometriche; possiamo dire esso è l'ambiente nel quale è opportuno iniziare lo sviluppo dei calcoli geometrici approssimati.

In $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si possono definire le **rette-QQ**, insiemi della forma $\{x, y \in \mathbb{Q} \lceil px + qy + m = 0\}$ determinati da arbitrari numeri $p, q, m \in \mathbb{Q}$; Una linea come la precedente si può individuare con la semplice equazione $px + qy + m = 0$, quando si può considerare implicito che x e y individuano due variabili che possono assumere valori razionali; diremo anche che x e y sono variabili che che corrono su $\mathbb{Q}$.

Si trova facilmente che ogni retta-ZZ è sottoinsieme proprio di una ed una sola retta-QQ.
Due rette-QQ si dicono parallele sse si possono mettere nelle forme $px + qy + m$ e $px + qy + m'$ o, equivalentemente sse, indicando i due insiemi con L ed M, sono entrambe verticali oppure esiste $k \in \mathbb{Q}$ t.c. $L + k = M$.
Consideriamo che due rette coincidenti costituiscano un caso particolare di coppia di rette parallele.

Si osserva poi che in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ due rette-QQ non parallele hanno sempre un punto in comune; questo accade solo per alcune coppie di rette-ZZ nel piano combinatorio $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Infatti per individuare tale punto devono essere soddisfatte entrambe le equazioni delle rette, cioè si deve trovare una soluzione e una sola Esso si trova facilmente, cioè si trovano facilmente espressioni razionali per le sue coordinate.
Esistenza ed univocità di un punto in comune a due rette-QQ non parallele e possibilità di individuare facilmente tale punto rendono QcQ un ambiente computazionale nettamente più efficiente di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Nel piano razionale trovano piena soluzione i sistemi di due equazioni lineari con coefficienti razionali.

G13:1.c Si possono inoltre definire triangoli-QQ, parallelogrammi-QQ e poligoni-QQ e tra questi è opportuno distinguere i convessi.

Si hanno difficoltà nel definire una distanza euclidea. e si hanno difficoltà nel definire dischi.

Per effettuare calcoli per risolvere siatemi di equazioni lineari conviene usare notazioni decimali o in altra base.
Questo equivale ad approssimare $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ con $\dfrac{\mathbb{Q}}{r} \times \dfrac{\mathbb{Q}}{r}$ con $r = 10^k$.
Si osserva che questo prodotto cartesiano è isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, anzi che questo accade per ogni r intero.

Per ogni $r \in \mathbb{Q}$ il piano $\dfrac{\mathbb{Q}}{r} \times \dfrac{\mathbb{Q}}{r}$ si può pensare ottenuto da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ per semplice cambiamento di unità di misura.
In questo ambiente per r opportuno si possono avere figure discrete in grado di raffigurare in modo accettabile le figure della geometria piana. Un segmento di retta è rappresentato da caselle ottenibili ciascuna dalla precedente con uno dei passi SN, NS, NE o NW. Il piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ è l'ambiente formale nel quale si può sviluppare la geometria degli schermi digitali e della [[computer grafica]].

Va osservato che si tratta di strumento in genere realistico, tenendo conto anche del fatto che il processo di visione umana è discreto, essendo finita la griglia di cellule a bastoncello che effettua la trasformazione dei segnali luminosi in segnali nervosi di natura elettrochimica.

G13:2. Rette ed equazioni nel piano razionale

G13:2.a Ogni punto $P = \langle a, b\rangle$ del piano razionale $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ è individuato da due numeri che sono chiamati le **coordinate [cartesiane]** del punto; la prima coordinata a viene detta anche **ascissa** del punto e la seconda coordinata b viene detta **ordinata** di P.

I punti del piano razionale possono chiamarsi punti-QQ; l'aggettivo sincopato -QQ verrà usato, quando si ritiene opportuno essere pignoli, per caratterizzare molte altre configurazioni individuate nell'ambiente $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$: rette-QQ, triangoli-QQ, poligoni-QQ, poligonali-QQ, ...

G13:2.b Spesso è utile considerare il piano $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ come ripartito nelle seguenti 9 parti:
$\mathbb{Q}_+\times\mathbb{Q}_+$, **primo quadrante-QQ aperto**, insieme dei punti $\langle a, b\rangle$ con entrambe le coordinate positive;
$\mathbb{Q}_-\times\mathbb{Q}_+$, **secondo quadrante-QQ aperto**;
$\mathbb{Q}_-\times\mathbb{Q}_-$, **terzo quadrante-QQ aperto**;
$\mathbb{Q}_+\times\mathbb{Q}_-$, **quarto quadrante-QQ aperto**;
$\{y\in\mathbb{Q}_+ :\mid \langle 0, y\rangle\} = \{0\}\times\mathbb{Q}_+$, **semiasse-QQ orizzontale positivo**;
$\{x\in\mathbb{Q}_+ :\mid \langle x, 0\rangle\} = \mathbb{Q}_+\times\{0\}$, **semiasse-QQ verticale positivo**;
$\{y\in\mathbb{Q}_- :\mid \langle 0, y\rangle\} = \{0\}\times\mathbb{Q}_-$, **semiasse-QQ orizzontale negativo**;
$\{x\in\mathbb{Q}_- :\mid \langle x, 0\rangle\} = \mathbb{Q}_-\times\{0\}$, **semiasse-QQ verticale negativo**;
$\{\langle 0, 0\rangle\}$, singoletto costituito dall'origine.

Talora serve riferirsi ad alcune unioni di queste parti, quali:
$\mathbb{Q}_{0+}\times\mathbb{Q}_{0+}$, **primo quadrante [chiuso]**;
$\mathbb{Q}_{0-}\times\mathbb{Q}_{0+}$, **secondo quadrante [chiuso]**;
$\mathbb{Q}_{0-}\times\mathbb{Q}_{0-}$, **terzo quadrante [chiuso]**;
$\mathbb{Q}_{0+}\times\mathbb{Q}_{0-}$, **quarto quadrante [chiuso]**;
$\{y\in\mathbb{Q}_{0+} :\mid \langle 0, y\rangle\}$, **semiasse orizzontale non negativo**;
$\{x\in\mathbb{Q}_{0+} :\mid \langle x, 0\rangle\}$, **semiasse verticale non negativo**;
$\{y\in\mathbb{Q}_{0-} :\mid \langle 0, y\rangle\}$, **semiasse orizzontale non positivo**;
$\{x\in\mathbb{Q}_{0-} :\mid \langle x, 0\rangle\}$, **semiasse verticale non positivo**;
$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}_+$, **semipiano superiore**.
$\mathbb{Q}_-\times\mathbb{Q}$, **semipiano occidentale**.

G13:2.c In $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ si definisce come **retta-QQ** ogni insieme determinato da una qualsiasi terna di numeri $a, b, c\in\mathbb{Q}$ e tali che $a^2+b^2>0$ avente la forma $\{\langle x, y\rangle \mid x, y\in\mathbb{Q}\ ,\ ax+by+c=0\}$. Nel seguito denotiamo con **RtlinQQ** l'insieme delle rette-QQ.
In questa espressione insiemistica si dice che i simboli x e y svolgono il ruolo di **variabili nell'insieme** $\mathbb{Q}$, o che sono **variabili che corrono in** $\mathbb{Q}$, o in breve che sono **variabili razionali**.
Questa precisazione su x e y può esprimersi con una notazione di tipo insiemistico $x, y\in\mathsf{Vrb}(\mathbb{Q})$.
Sono opportune due osservazioni sulla precedente scrittura. Non si pretende che $\mathsf{Vrb}(\mathbb{Q})$ denoti un insieme riconducibile a quelli finora introdotti. Non si intende affermare che ai simboli delle variabili

possono essere sostituiti tutti gli elementi dell'insieme $\mathbb{Q}$, ma solo che i valori che possono sostituire le variabili devono far parte di $\mathbb{Q}$.
La retta precedente si può denotare con
$$\overline{S}_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}(ax+by+c=0)\ .$$
Questa scrittura può leggersi
"insieme delle soluzioni $\langle x,y\rangle$ che soddisfano la richiesta $ax+by+c=0$" .
Con un linguaggio più geometrico si può anche leggere
"luogo dei punti $\langle x,y\rangle$ tali che sia $ax+by+c=0$" .
Quando si può sottintendere che $x,y\in$ **Vrb**($\mathbb{Q}$), la retta precedente si può denotare con
$$\overline{S}(ax+by+c=0)\ .$$

G13:2.d Le rette-QQ sono sottoinsiemi di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ che estendono le rette-ZZ, insiemi che sono stati definiti mediante un'espressione della forma $\{\nu\in\mathbb{Z} :| \langle i,j\rangle+\nu\cdot\langle h,k\rangle\}$, per i,j,h,k interi arbitrari e $|h|\perp|k|$. Si trova facilmente che ogni retta-ZZ è sottoinsieme proprio di una ed una sola retta-QQ.
Mentre una retta-ZZ si può associare ad una equazione della quale si cercano soluzioni intere, una retta-QQ si può associare ad una equazione per la quale si cercano soluzioni razionali.

L'insieme delle rette-QQ si denota con **RtlinQQ**
L'equazione $ax+by+c=0$ con $a^2+b^2>0$ si dice **equazione generale della retta**; essa viene chiamata **equazione polinomiale lineare** nelle due variabili x e y, in quanto l'espressione alla quale si impone di annullarsi è un polinomio di primo grado nelle variabili x e y, ovvero un polinomio lineare bivariato.
Nella espressione $ax+by+c=0$ ai simboli a, b e c che denotano numeri razionali che possono scegliersi arbitrariamente si attribuisce il cosiddetto ruolo dei **parametri**.

G13:2.e È utile distinguere varie classi di rette-QQ.
Le rette della forma $\overline{S}(y=y_0)$ con $y_0\in\mathbb{Q}$ si dicono **rette-QQ orizzontali**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $a=0$, $b=1$ e $c=-y_0$. L'asse-QQ Ox è la retta orizzontale $\overline{S}(y=0)$.
Le rette della forma $\overline{S}(x=x_0)$ con $x_0\in\mathbb{Q}$ si dicono **rette-QQ verticali**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $a=1$, $b=0$ e $c=-x_0$. L'asse-QQ Oy è la retta orizzontale $\overline{S}(x=0)$.
La $\overline{S}(y=x)$ si dice **bisettrice-QQ del I quadrante**. Le rette della forma $\overline{S}(y=x+y_0)$ si dicono **rette-QQ parallele alla bisettrice del I quadrante**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $a=1$, $b=-1$ e $c=y_0$.
La $\overline{S}(y=-x)$ si dice **bisettrice-QQ del II quadrante**. Le rette della forma $\overline{S}(y=-x+y_0)$ si dicono **rette-QQ parallele alla bisettrice del II quadrante**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $a=-1$, $b=-1$ e $c=y_0$.
Per ogni $m\in\mathbb{Q}$ le $\overline{S}(y=mx)$ sono tutte e sole le rette che passano per l'origine; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $a=-m$, $b=1$ e $c=0$.

Tutte queste rette si tracciano facilmente sopra un foglio di carta quadrettata o millimetrata servendosi delle loro intersezioni con gli assi. Ciascuna di tali intersezioni si ottiene tenendo conto congiuntamente dell'equazione della retta e di quella di un asse. Ad esempio l'intersezione della retta $\overline{S}(y=x+y_0)$ con l'asse Ox è ottenuta imponendo $y=0$ nella precedente equazione, cioè è $\langle -y_0,0\rangle$, mentre l'intersezione della $\overline{S}(y=x-y_0)$ con l'asse Oy si ottiene imponendo $x=0$ nella precedente e quindi è $\langle 0,-y_0\rangle$.

G13:2.f È immediato decidere se un punto $\langle\overline{x},\overline{y}\rangle$ appartiene o meno ad una retta $\overline{S}(ax+by+c=0)$: basta sostituire i valori $\overline{x}$ e $\overline{y}$ alle rispettive variabili nell'espressione $ax+by+c$ e verificare se il valore ottenuto, $a\overline{x}+b\overline{y}+c$ è uguale o diverso da zero.

Questo modo di procedere può essere genaralizzato. Si considerano insiemi ambiente riferibili a una, a due o a più coordinate che denotiamo sinteticamente con $\mathbf{x}$: alcuni esempi sono $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. Si individuano sottoinsiemi di tali ambienti mediante equazioni e relazioni nelle loro coordinate. Se denotiamo genericamente con $\mathcal{P}(\mathbf{x})$ una di queste relazioni, il corrispondente insieme può denotarsi con $\overline{S}(\mathcal{P}(\mathbf{x}))$; la decisione se un punto specifico le cui coordinate scriviamo $\overline{\mathbf{x}}$ appartenga o meno all'insieme S si riconduce a stabilire se sono soddisfatte le proprietà $\mathcal{P}(\overline{\mathbf{x}})$.
Le rette della forma $\overline{S}(ax+by=0)$ sono tutte e sole le rette passanti per l'origine. Infatti è evidente che l'origine appartiene a tutte queste rette, mentre una tale retta deve passare per l'origine: infatti se $a=0$ e $b\neq 0$ si ha $\overline{S}(y=0)$ cioè l'asse Ox, se $a\neq 0$ e $b=0$ si ha $\overline{S}(x=0)$ cioè l'asse Oy, se $a,b\neq 0$ si ha una retta che passa per l'origine.
L'insieme delle rette passanti per un punto P del piano si dicono costituire un **fascio di rette-QQ** di cui P è il **sostegno**. Si può quindi dire che l'equazione precedente, al variare dei parametri, caratterizza il fascio di rette avento come sostegno l'origine: questo può denotarsi con $\left\{a,b\in\mathbb{Q} :| \overline{S}(ax+by=0)\right\}$.

G13:2.g Per ogni numero razionale non nullo r, le due rette fornite dalle equazioni $ax+by+g=0$ e $rax+rby+rc=0$ coincidono. Infatti la seconda si ottiene dalla prima moltiplicandone tutti gli addendi per r e la seconda dalla prima "moltiplicandola" per $1/r$. Quindi i tre parametri che caratterizzano un'equazione lineare in due variabili razionali non sono indipendenti, ma presentano una determinata ridondanza.

Spesso conviene utilizzare delle varianti dell'equazione generale nelle quali si incontrano parametri indipendenti, non ridondanti. Purtroppo queste equazioni non sono completamente equivalenti alla generale, in quanto non riescono a individuare tutte le sue soluzioni.

G13:2.h Consideriamo l'equazione $ax+by+c=0$ con $b\neq 0$, cioè l'equazione di una retta $\mathcal{R}$ che non è una parallela all'asse Oy. Essa si riscrive nella forma equivalente

$$y=mx+q$$

nella quale compaiono solo i due parametri $m=-\frac{a}{b}$ e $q=-\frac{c}{b}$. Essa è detta **equazione canonica** della retta R, m è chiamato il suo **coefficiente angolare** e q la sua **ordinata all'origine**. Si osserva che m esprime la pendenza della $\mathcal{R}$: si ha $m>0$ sse la retta è crescente, cioè cresce all'aumentare della ascissa dei suoi punti (e tanto maggiore quanto più la $\mathcal{R}$ è inclinata); si ha $m=0$ sse R è parallela alla Ox; si ha $m<0$ sse la $\mathcal{R}$ è decrescente, cioè si abbassa all'aumentare della x (ed è tanto inferiore quanto maggiore è la pendenza verso il basso).

G13:2.i Consideriamo la retta $\mathcal{R}$ data da un'equazione generale $ax+by+c=0$ nella quale tutti i tre parametri sono diversi da zero; si tratta dunque di una retta che non passa per l'origine e non è parallela ad alcuno degli assi. L'equazione si può mettere nella forma equivalente $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1=0$: basta assumere $p:=-\frac{c}{a}$ e $q:=-\frac{c}{b}$ (come per l'equazione canonica). Essa è detta **equazione segmentaria** della retta; anche in questa equazione compaiono solo due parametri.
Si osserva che, fissato $x=0$, si trova $y=q$, cioè che la retta $\mathcal{R}$ interseca l'asse Ox nel punto $\langle p,0\rangle$; simmetricamente, posto $y=o$ si trova $x=p$, cioè che la retta intersecal'asse Oy nel punto $\langle 0,q\rangle$. L'equazione segmentaria dunque è in grado di esprimere tutte le rette-QQ che presentino due diverse intersezioni con gli assi; essa invece non è in grado di rappresentare le altre rette del piano $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, il cui insieme consiste esattamente nell'unione del fascio delle rette parallele all'asse delle x, del fascio delle rette parallele all'asse delle y e del fascio delle rette passanti per l'origine.

Segnaliamo esplicitamente anche le relazioni $p = \frac{q}{m}$ e $m = \frac{q}{p}$.

G13:2.j Consideriamo i due punti-QQ diversi $A = \langle x_A, y_A\rangle$ e $B = \langle x_B, y_B\rangle$ e il doppietto da loro costituito $D = \{A, B\}$. Si intuisce che per questi due punti passi una e una sola retta; esaminiamo la questione distinguendo le varie possibilità e cerchiamo una sua equazione.
Se $x_A = x_B$ i due punti appartengono alla retta verticale $x = x_A$ e a nessun'altra. In caso contrario cerchiamo rette nella forma canonica $y = mx + q$.
Devono valere le equazioni $y_A = mx_A + q$ e $y_B = mx_B + q$; sottraendo la prima dalla seconda si ricava $y_B - y_A = m(x_B - x_A)$ e questa, per la supposta collocazione non verticale dei punti, si può risolvere per ottenere univocamente $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
Dalla prima equazione si ricava poi univocamente $q = y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A = \frac{y_A x_B - x_A y_B}{x_B - x_A}$.
L'equazione cercata si può porre sotto una delle due forme

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x + y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A \qquad \text{ovvero} \qquad y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \ .$$

Altre forme equivalenti sono

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \qquad \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

e naturalmente quelle in cui si scambiano i ruoli i punti A e B e/o le coordinate x e y.
Può essere utile anche una forma più simmetrica rispetti allo scambio $x \longleftrightarrow y$ come la

$$(y - y_A) \cdot (x_B - x_A) = (x - x_A) \cdot (y_B - y_A) \ .$$

Si osserva che questa equazione rende conto anche del caso $x_A = x_B$. In effetti questa equazione è immediatamente riducibile alla forma

$$(y_B - y_A) \cdot x - (x_B - x_A) \cdot y + [y_A \cdot (x_B - x_A) - x_A \cdot (y_B - y_A)] \ ,$$

cioè alla equazione generale relativa ad $a = y_B - y_A$, $b = (x_B - x_A)$ e $c = y_A \cdot (x_B - x_A) - x_A \cdot (y_B - y_A)$.

G13:2.k È quindi lecito definire come **retta-QQ** determinata dal doppietto di punti-QQ $\{A, B\}$ l'insieme dei punti-QQ

$$\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \, [\, (y - y_A) \cdot (x_B - x_A) = (x - x_A) \cdot (y_B - y_A)\}$$

Questo insieme, se si sottintende $x, y \in$ **Vrb**($\mathbb{Q}$), si denota anche con

$$\overline{AB} := \overline{S}\left((y - y_A) \cdot (x_B - x_A) = (x - x_A) \cdot (y_B - y_A)\right)$$

G13:3. Segmenti, semirette, orientazioni, angoli

G13:3.a La funzione $\lceil \langle x, y\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto \langle x, 0\rangle \rceil$ si dice **proiettore dei punti-QQ sull'asse** Ox e si denota con $\mathbf{Prj}_x$.
La funzione $\lceil \langle x, y\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto \langle 0, y\rangle \rceil$ si dice **proiettore dei punti-QQ sull'asse** Oy e si denota con $\mathbf{Prj}_y$.
Il punto-QQ $\langle x, 0\rangle$ si dice **proiezione su** Ox di P; il punto-QQ $\langle 0, y\rangle$ si dice **proiezione su** Oy di P.

I due proiettori "cartesiani" introdotti si possono considerare funzioni del genere $\{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longmapsto \mathbb{Q}\}$ non invertibili, oppure endofunzioni di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Come endofunzioni esse sono idempotenti: in effetti $\mathbf{Prj}_x$ ha come codominio Ox e questo è anche l'insieme dei suoi punti fissi; simmetricamente Oy è il codominio e l'insieme dei punti fissi di Prj_y.

G13:3.b Consideriamo due punti-QQ diversi $A = \langle x_A, y_A \rangle$ e $B = \langle x_B, y_B \rangle$, la retta-QQ, unica, che li contiene $\mathcal{R} := \overline{AB}$ e il generico punto $P = \langle x, y \rangle \in \overline{AB}$.
Il proiettore Prj_x ristretto alla $\mathcal{R}$ è una biiezione del genere $\{\mathcal{R} \lhd\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\rhd Ox\}$ sse la $\mathcal{R}$ non è verticale, cioè sse $x_A \neq x_B$. Simmetricamente $\mathsf{Prj}_{y|\mathcal{R}} \in \{\mathcal{R} \lhd\!\!\!\longrightarrow\!\!\!\rhd Oy\}$ sse la $\mathcal{R}$ non è orizzontale, cioè sse $y_A \neq y_B$.

Per le proiezioni dei punti A e B scriviamo $A_x := \langle x_A, 0 \rangle$, $A_y := \langle 0, y_A \rangle$, $B_x := \langle x_B, 0 \rangle$, $B_y := \langle 0, y_B \rangle$.
Supponiamo che $\overline{AB}$ non sia verticale e più particolarmente che sia $x_A < x_B$.
I due punti A_x e B_x ripartiscono l'asse Ox in 5 parti:
- l'intervallo illimitato a sinistra $(\ :: x_A)$;
- il singoletto $\{x_A\}$;
- l'intervallo aperto $(x_A :: x_B)$;
- il singoletto $\{x_B\}$;
- l'intervallo illimitato a destra $(x_B ::\ )$.

Una pentapartizione corrispondente viene determinata sulla $\overline{AB}$ dalla biiezione ${\mathsf{Prj}_x}^{-1}$. Le 5 parti che corrispondono alle suddette successive parti dell'asse Ox sono:
- $\mathsf{Prj}^{-1}(\ :: x_A)$, chiamata **semiretta aperta con estremità** A;
- singoletto $\{A\}$;
- $\mathsf{Prj}^{-1}(x_A :: x_B)$, chiamata **segmento aperto** e denotata con $\overline{AB}$;
- singoletto $\{B\}$;
- $\mathsf{Prj}^{-1}(x_B ::\ )$, chiamata **semiretta aperta con estremità** B.

Discorso simmetrico si può fare se $\overline{AB}$ non è orizzontale servendosi del proiettore Prj_y.
Nel caso in cui la $\overline{AB}$ non è nè verticale nè orizzontale, le ripartizioni determinate da Prj_x e Prj_y coincidono, in quanto ${\mathsf{Prj}_x}^{-1} \circ \mathsf{Prj}_y$ pone in corrispondenza biunivoca Ox ed Oy.
In effetti, ricordando l'equazione canonica della $\overline{AB}$ (:2.10) si trova

$$ {\mathsf{Prj}_x}^{-1} \circ \mathsf{Prj}_y = \left\lceil\ x \in \mathbb{Q} \ \twoheadrightarrow\ \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x + y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A \ \right\rceil \ . $$

G13:3.c Supponiamo ancora che sia $x_A \neq x_B$ e consideriamo la funzione

$$ \sigma := \lceil t \in \mathbb{Q} \ \twoheadrightarrow\ x_A + (x_B - x_A) \cdot t \rceil \ . $$

Questa è una trasformazione di $\mathbb{Q}$ in se stesso invertibile, cioè una permutazione dell'insieme dei numeri razionali, tale che $\sigma(0) = x_A$ ed $\sigma(1) = x_B$.
Si può interpretare la t come la grandezza tempo e la funzione $\sigma(t)$ come la posizione di un corpo puntiforme che si muove sull'asse Ox di moto uniforme, cioè a velocità costante; questo corpo all'istante $t = 0$ si trova nel punto $A_x = \langle x_A, 0 \rangle$ e all'istante $t = 1$ nel punto $B_x = \langle x_B, 0 \rangle$.
Chiaramente se $x_A < x_B$ il corpo puntiforme si muove sulla Ox da sinistra a destra: al procedere del tempo aumenta la ascissa del corpo. Se invece $x_A > x_B$ il corpo si muove da destra verso sinistra.

Questo modello cinematico si può applicare anche alla retta $\overline{AB}$ interpretando la funzione $\sigma(t)$ come l'andamento nel tempo della proiezione su Ox di un corpo puntiforme che si muove di moto uniforme sulla retta stessa. Questo corpo all'istante $t = 0$ si trova nel punto A e nell'istante $t = 1$ nel punto B; per la sua ordinata, ovvero per la sua proiezione sulla Oy, dall'espressione della $sgm(t)$ e dall'espressione della ordinata del punto P mediante la sua ascissa si ricava

$$y = \tau(t) := y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) = y_A + (y_B - y_A) \cdot t \ .$$

G13:3.d Le due funzioni $\sigma(t)$ e $\tau(s)$ forniscono una descrizione cinematica della retta $\overline{AB}$ che spesso rende più intuitive le considerazioni geometriche su questa retta in relazione agli assi di riferimento del piano razionale. Il corpo puntiforme potrebbe descriversi come la punta molto fine di una penna che traccia la retta su un nastro di carta esteso quanto si vuole (quanto serve) il quale fa da modello fisico del supporto di $\mathbb{Q}$.
Prescindendo dalla interpretazione della t come variabile temporale, le due espressioni che riscriviamo

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A) \cdot t \\ y = y_A + (y_B - y_A) \cdot t \end{cases} \qquad \text{per} \quad t \in \mathbb{Q} \ .$$

possono comunque essere considerate scritture che consentono di individuare i punti della retta passante per A e per B servendosi di una variabile $t \in \mathsf{Vrb}(\mathbb{Q})$. Queste sono dette **espressioni parametriche** della $\overline{AB}$.
Questa retta può anche essere individuata come sottoinsieme di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mediante l'espressione

$$\overline{AB} = \{t \in \mathbb{Q} :| \ \langle x_A + (x_B - x_A) \cdot t \ , \ y_A + (y_B - y_A) \cdot t\} \ .$$

Sono opportune alcune osservazioni. Si nota che le espressioni parametriche valgono anche per rette orizzontali e verticali. La coppia delle espressioni risulta simmetrica rispetto allo scambio $x \longleftrightarrow y$, in accordo con la sostanziale equivalenza dei ruoli delle due coordinate nello studio delle rette di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Infine si osserva che la descrizione cinematica, ovvero la descrizione della retta come di una linea ottenuta con un tracciamento materiale, porta ad attribuirle una orientazione, ovvero ad assegnare un ordinamento totale ai suoi punti derivante dall'ordinamento dell'insieme $\mathbb{Q}$ nel quale "corre" il parametro t. Questo corrisponde ad attribuire un ordine tra i punti A e B, cioè a considerare che A venga prima di B.

G13:3.e Abbiamo visto che una coppia di punti diversi $\langle A, B\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ individua una retta-QQ e una sua biiezione con l'insieme ordinato $\mathbb{Q}$ rispecchiata da un sistema di equazioni parametriche. Una diversa coppia di punti-QQ appartenenti alla stessa retta $\langle C, D\rangle$ mediante il proprio sistema di equazioni parametriche individua la stessa retta, ma una diversa biiezione con $\mathbb{Q}$. Le due coppie $\langle A, B\rangle$ e $\langle C, D\rangle$ si dicono compatibili sse $(x_B - x_A) \cdot (x_D - x_C) \geq 0$ e $(y_B - y_A) \cdot (y_D - y_C) \geq 0$, incompatibili in caso contrario. La compatibilità corrisponde al fatto che percorrendo la retta in modo da incontrare prima A e poi B si incontra C prima di D (e viceversa). Si osserva che la compatibilità fra coppie di punti diversi su una retta-QQ è una equivalenza e che la coppia $\langle A, B\rangle$ e la sua riflessa $\langle B, A\rangle$ sono incompatibili. Vi sono quindi due classi di coppie di punti diversi di una retta. Queste due classi sono dette **sensi di percorrenza** della retta e questi due sensi si dicono **sensi opposti** l'uno dell'altro.

Possiamo ora definire come **retta orientata** associata alla coppia $\langle A, B\rangle$ di punti diversi di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ la retta $\overline{AB}$ munita del senso di percorrenza secondo il quale il punto A si incontra prima di B. Questa retta orientata si denota con $\overrightarrow{AB}$. La retta orientata $\overrightarrow{BA}$ si dice **retta orientata opposta** della $\overrightarrow{AB}$.

G13:3.f Come ad una retta sono associate due rette orientate opposte, così a ogni segmento aperto di una retta sono associati due segmenti orientati.

A questo proposito conviene individuare come segmento aperto associato al doppietto $\{A,B\}$ con l'espressione parametrica ottenuta riducendo l'espressione presentata in :3.4

$$\{\ t \in (0 :: 1)\ \ :|\ \ \langle x_A + (x_B - x_A)\cdot t\ ,\ y_A + (y_B - y_A)\cdot t\rangle\ \}\ .$$

Similmente si definisce **segmento chiuso** associato ad $\{A,B\}$ il sottoinsieme della retta che amplia il precedente

$$\overline{AB} = \{t \in [0 :: 1] :|\ \langle x_A + (x_B - x_A)\cdot t\ ,\ y_A + (y_B - y_A)\cdot t\rangle\}\ .$$

I punti A e B si dicono **estremi** o **estremità** di questi segmenti.

Si dice **segmento orientato aperto** associato alla coppia $\langle A,B\rangle$ il segmento associato a questa coppia munito del senso di percorrenza da A a B.
Similmente si definisce il **segmento orientato chiuso** associato alla $\langle A,B\rangle$: questa entità si denota con $\overrightarrow{AB}$.
Evidentemente i segmenti [orientati] aperti e chiusi definiti da un doppietto [una coppia] di punti-QQ si corrispondono biunivocamente. Si possono però considerare anche i segmenti orientati chiusi della forma $\overrightarrow{AA}$, i cui corrispondenti aperti come insiemi coincidono tutti con $\emptyset$.

In gran parte delle considerazioni geometriche non si distingue fra le versioni aperte e le chiuse di queste entità. In seguito ci riferiremo preferibilmente ai segmenti chiusi e ai segmenti orientati chiusi che chiameremo semplicemente segmenti e segmenti orientati. Si potrebbero considerare anche segmenti aperti da una parte e chiusi dall'altra, ma questa distinzione non hanno grande interesse.
Il punto A si dice **estremo iniziale** o **estremità iniziale** del segmento orientato aperto e del corrispondente chiuso; il punto B si dice **estremo finale** o **estremità finale** del segmento orientato aperto e del corrispondente chiuso.

G13:3.g Tra due segmenti (chiusi) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ si possono stabilire varie relazioni.
Essi si dicono **segmenti disgiunti** sse non hanno punti in comune. Si dicono **segmenti intersecati** in caso contrario.
Due segmenti intersecati più in particolare si dicono:
- **adiacenti-ee** sse hanno in comune uno e un solo punto che è estremità per entrambi;
- **adiacenti-ii** sse hanno in comune un solo punto diverso da A, B, C e D;
- **adiacenti-ei** sse hanno in comune un solo punto che può essere A o B;
- **adiacenti-ie** sse hanno in comune un solo punto che può essere C o D;
- **sovrapposti** sse hanno in comune almeno due punti diversi, e quindi tutti i punti del segmento che ha tali punti come estremi.

Due segmenti si dicono **segmenti collineari** sse sono sottoinsiemi della stessa retta.
Due segmenti sovrapposti sono collineari.
Se due segmenti sono collineari, possono essere:
- disgiunti (nessun punto in comune);
- adiacenti-ee (un solo punto in comune);
- sovrapposti (due e quindi infiniti punti in comume).

Se due segmenti sono sovrapposti possono essere:
- coincidenti;
- dotati di intersezione contenuta propriamente in entrambi (e in tal caso non sono confrontabili rispetto all'inclusione);
- l'uno sottoinsieme proprio dell'altro.

Se $\overline{AB} \subset \overline{CD}$ si distingue il caso in cui non hanno estremi comuni dai casi nei quali hanno un solo estremo comune, casi nei quali sono aut adiacenti-ei, aut adiacenti-ie.

G13:3.h Per due segmenti orientati (chiusi) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si possono riscontrare o meno tutte le relazioni che si possono riscontrare tra i due segmenti che arricchiscono rispettivamente $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
Inoltre se essi sono adiacenti-ee può accadere che: aut $\overrightarrow{AB}$ è consecutivo di $\overrightarrow{CD}$ sse $A = D$, aut $\overrightarrow{CD}$ è consecutivo di $\overrightarrow{AB}$ sse $B = C$, aut sono divergenti sse $A = C$, aut sono convergenti sse $B = D$; in tutte queste situazioni si distinguono i casi in cui essi sono collineari da quelli nei quali non lo sono.
Se sono collineari (disgiunti o sovrapposti) possono essere: aut concordi sse le rette orientate individuate dai due segmenti coincidono, aut discordi sse tali rette sono l'una l'opposta dell'altra.

G13:3.i Un punto P appartenente ad una retta la tripartisce in due semirette aperte e nel singoletto $\{A\}$; A si considera estremo di entrambe le semirette. Si dice **semiretta [chiusa]** l'unione di una semiretta e del suo estremo.
Una semiretta si può considerare come un segmento con un estremo posto all'infinito, oppure si può descrivere come un segmento avente un estremo che si allontana quanto si vuole dall'altro. È abbastanza naturale attribuire ad una semiretta l'orientazione indotta dal suo estremo considerato suo estremo iniziale, oppure indotto da una coppia formata dal suo estremo e da qualunque altro suo punto.

Una semiretta si può dunque individuare con un punto che costituisce il suo estremo (al finito) e con un secondo punto che le appartiene. La semiretta avente come estremo $A = \langle x_A, y_A\rangle$ e della quale fa parte come altro punto $B = \langle x_B, y_B\rangle$ si può denotare con $\overrightarrow{AB\,}$, notazione da non confondere con quella concernente il segmento orientato $\overrightarrow{AB}$. Questa semiretta si può individuare con l'espressione insiemistica dedotta da quella della retta $\overline{\ AB\ }$ trovata in :3.d

$$\overrightarrow{AB\,} \;=\; \{t \in \mathbb{Q}_{0+} :|\ \langle x_A + (x_B - x_A)\cdot t\ ,\ y_A + (y_B - y_A)\cdot t\rangle\}\ .$$

G13:3.j Date due semirette si possono loro attribuire relazioni di mutua posizione simili a quelle che si possono riscontrare tra due segmenti orientati.
La più interessante e feconda riguarda una coppia di semirette aventi in comune l'estremo (iniziale).
Una terna della forma $\langle\overrightarrow{VA\,}, V, \overrightarrow{VB\,}\rangle$ si dice **angolo-QQ**; di tale angolo V si chiama **vertice**, $\overrightarrow{VA\,}$ primo lato e $\overrightarrow{VB\,}$ secondo lato.
La definizione data stabilisce un ordine preciso tra i due lati, cioè riguarda angoli orientati. I due angoli $\langle\overrightarrow{VA\,}, V, \overrightarrow{VB\,}\rangle$ e $\langle\overrightarrow{VB\,}, V, \overrightarrow{VA\,}\rangle$ si dicono **angoli opposti**. Per molte considerazioni non occorre distinguere tra angoli opposti e si può parlare di angoli non orientati.
Si dice **angolo piatto** un angolo della forma $\langle\overrightarrow{VA\,}, V, \overrightarrow{VB\,}\rangle$ con i due lati costituenti semirette collineari e divergenti.
Si dice **angolo retto** un angolo della forma $\langle\overrightarrow{VA\,}, V, \overrightarrow{VB\,}\rangle$ con $\langle\overrightarrow{VA\,} \perp \overrightarrow{VB\,}\rangle$, ovvero con $\overrightarrow{VB\,}$ ottenuto ruotando $\overrightarrow{VB\,}$ di 90°.

G13:3.k Si introdurranno in seguito le nozioni di angolo retto, angoli congruenti e ampiezza di un angolo. Prima di queste nozioni conviene dare quelle di traslazioni, parallelismo e ortogonalità e le conseguenti nozioni di punti impropri.
Ad esempio chiameremo due rette-QQ L ed M **parallele** sse si possono associare a due equazioni aventi le forme $px + qy + m = 0$ e $rpx + rqy + rm' = 0$ con r razionale qualsiasi ed $m' \neq m$.

G13:4. Vettori, traslazioni e vettori applicati

G13:4.a Ampliando quanto si è presentato per il piano combinatorio, introduciamo per gli elementi di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ un linguaggio vettoriale e delle operazioni che aprono la strada alla possibilità di sviluppare procedimenti di calcolo per il piano razionale basati su considerazioni algebriche.

I punti-QQ sono in corrispondenza biunivoca con i segmenti orientati aventi come estremo iniziale l'origine; queste due entità possono essere confuse e il punto P può essere identificato con il segmento $\overrightarrow{OP}$. Ogni punto-QQ $P = \langle r, s\rangle$ si può chiamare **vettore-QQ** e questa entità può essere visualizzata come $\overrightarrow{OP}$ con una freccia che inizia nell'origine $\langle 0, 0\rangle$ e termina in P.
I vettori-QQ spesso vengono identificati con lettere in grassetto come $\mathbf{v}$ o con simboli come $\mathbf{w}_{(1)}$, $\mathbf{u}_k$ o $\mathbf{E}$. In particolare l'origine $\langle 0, 0\rangle$ si può chiamare vettore nullo e si può denotare con $\overrightarrow{OO}$ o concisamente con $\mathbf{0}$.

G13:4.b Consideriamo i vettori-QQ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2\rangle$ e numeri razionali a, b, c .
Si dice **somma dei vettori-QQ** il vettore-QQ $\mathbf{v} +^{ce} \mathbf{w} := \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2\rangle$.
Si dice **differenza dei vettori-QQ** il vettore-QQ $\mathbf{v} -^{ce} \mathbf{w} := \langle v_1 - w_1, v_2 + w_2\rangle$.
Si dice **moltiplicazione di un vettore-QQ per uno scalare razionale** $c \cdot^{ce} \mathbf{v} := \langle c \cdot v_1, c \cdot v_2\rangle$.
Il vettore $-^{ce}\mathbf{v} := \mathbf{0} -^{ce} \mathbf{v} = \langle -v_x, -v_y\rangle = -1 \cdot^{ce} \mathbf{v}$ si dice **vettore opposto** di $\mathbf{v}$; il passaggio al vettore opposto $\lceil \mathbf{v} \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto -\mathbf{v} \rceil$ si può considerare un'operazione unaria sui vettori-QQ, oppure una trasformazione biunivoca e involutoria; essa si chiama **simmetria centrale con centro nell'origine**.

Osserviamo che il segno $-^{ce}$, come accade al segno $-$ in vari contesti, viene usato sia per denotare un operatore unario (di passaggio all'opposto), sia per denotare un operatore binario. Notiamo anche che con notazioni della forma ω^{ce}, dove ω denota un operatore binario o unario, abbiamo indicato la cosiddetta **estensione cartesiana** di tale operatore, cioè la sua applicazione componente per componente a operandi costituiti da sequenze di entità più semplici. In genere però questa notazione viene semplificata trascurando gli esponenti ^{ce} ed usando espressioni come $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $c \cdot \overrightarrow{OP}$ e $-\mathbf{H}$.

I due vettori-QQ $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si dicono **vettori proporzionali** sse si trova un $c \in \mathbb{Q}_{nz}$ tale che $\mathbf{v} = c \cdot \mathbf{w}$.
Evidentemente la proporzionalità è una relazione di equivalenza; si osserva che $\mathbf{0}$ costituisce da solo una classe di tale equivalenza; le altre classi di questa equivalenza sono costituiti dai vettori che come punti-QQ appartengono ad una stessa retta-QQ per l'origine privata dello stesso punto $\langle 0, 0, \rangle$. Una tale retta ridotta viene chiamata anche **raggio-QQ**.

G13:4.c Se $\mathbf{v}$ denota un qualsiasi vettore-QQ, si dice **traslazione del piano razionale** di spostamento $\mathbf{v}$ una endofunzione di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ della forma

$$\lceil P \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto P + \mathbf{v} \rceil \ ,$$

Si dimostra facilmente che questa applicazione è del genere $\{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \leftrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\}$, cioè è una permutazione del piano razionale. Essa si denota con $Trsl_{\mathbf{v}}$ e il trasformato del punto P si può denotare con $Trsl_{\mathbf{v}}(P)$ o con $P \rceil Trsl_{\mathbf{v}}$. Per la composizione delle traslazioni, come per ogni prodotto di Peirce di trasformazioni, scriviamo

$$Trsl_{\mathbf{v}} \circ Trsl_{\mathbf{w}} = \lceil P \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto (P \rceil Trsl_{\mathbf{v}}) \rceil Trsl_{\mathbf{w}} \rceil = \lceil P \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto Trsl_{\mathbf{w}}(Trsl_{\mathbf{v}}(P)) \rceil \ .$$

Si dimostrano facilmente i seguenti fatti.
(1) $(Trsl_{\mathbf{v}})^{-1} = Trsl_{-\mathbf{v}}$;
(2) $Trsl_{\mathbf{v}} \circ Trsl_{\mathbf{w}} = Trsl_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} = Trsl_{\mathbf{w}} \circ Trsl_{\mathbf{v}}$;
(3) $Trsl_{\mathbf{0}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}$.

Queste uguaglianze dicono che le traslazioni di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ costituiscono un gruppo di trasformazioni; esso è detto **gruppo delle traslazioni del piano razionale**.
Questo gruppo è isomorfo al gruppo dei vettori di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ munito dell'operazione di somma.

G13:4.d Ogni coppia di punti-QQ viene anche chiamata **vettore-QQ applicato**.
I vettori-QQ applicati sono evidentemente in corrispondenza biunivoca con i segmenti-QQ orientati (chiusi) e con l'insieme delle quaterne di numeri razionali, cioè con elementi di $\mathbb{Q}^{\times 4}$. A rigore i segmenti orientati sono insiemi di punti lineari (individuati da equazioni lineari nelle variabili) e muniti di un senso di percorrenza, mentre i vettori applicati sono definiti come entità cui possono essere applicate determinate operazioni. Va segnalato anche la possibilità di porre in corrispondenza biunivoca i segmenti orientati con i rettangoli con i lati paralleli agli assi e con il perimetro orientato.
In effetti tra segmenti orientati chiusi, vettori applicati (ovvero quaterne di razionali) e rettangoli con perimetro orientato si possono stabilire dei criptomorfismi e spesso queste nozioni trattate come equivalenti e vengono identificate e individuate negli stessi modi. In particolare il vettore applicato $\langle P, Q\rangle$ si denota anche con $\overrightarrow{PQ}$

Un vettore applicato-QQ può essere sommato con un qualsiasi vettore-QQ. Si dice **somma** del vettore applicato $\langle P, Q\rangle = \big\langle \langle x_P, y_P\rangle, \langle x_Q, y_Q\rangle \big\rangle$ con il vettore-QQ $\mathbf{v} = \langle v_x, v_y\rangle$ il vettore

$$\langle P, Q\rangle + \mathbf{v} := \langle P + \mathbf{v}, Q + \mathbf{v}\rangle = \big\langle \langle x_P + v_x, y_P + v_y\rangle, \langle x_Q + v_x, y_Q + v_y\rangle \big\rangle = \mathit{Trsl}_{\mathbf{v}}(\langle P, Q\rangle\ .$$

Contrariamente ai vettori, per i vettori applicati si definisce la somma solo se l'estremo finale del primo addendo coincide con l'estremo iniziale del secondo, ovvero se i due corrispondenti segmenti orientati costituiscono una coppia di segmenti orientati consecutivi (v. :3.h). Precisamente si definisce come **somma dei vettori applicati** $\langle P, Q\rangle$ e $\langle Q, S\rangle$ il vettore applicato $\langle P, S\rangle$.

G13:4.e Ci chiediamo ora se o quando si può definire convenientemente la differenza fra due vettori applicati.
Preliminarmente diciamo che due segmenti orientati $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ sono **equipollenti** sse risultano coincidenti i due vettori associati $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR}$, cioè sse $x_Q - x_P = x_S - x_R$ e $y_Q - y_P = y_S - y_R$.
Grazie al criptomorfismo la relazione di equipollenza risulta definita anche tra vettori applicati. Chiaramente l'equipollenza è una relazione di equivalenza e si possono considerare le classi di equipollenza di segmenti orientati e di vettori applicati. La classe di equipollenza contenente $\overrightarrow{PQ}$ viene caratterizzata dal vettore $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.

Se $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ sono due vettori applicati equipollenti, si definisce come loro **differenza** il vettore $\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$; per l'equipollenza esso coincide con $\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OQ}$. Questo vettore può denotarsi semplicemente come differenza di vettori come $R - P$ o come $S - Q$.

G13:4.f Il risultato della somma di un vettore-QQ applicato con un vettore-QQ $\mathbf{v}$ può considerarsi il risultato dell'applicazione della trasformazione ${\mathit{Trsl}_{\mathbf{v}}}^{ce}$, estensione cartesiana all'insieme dei vettori-QQ applicati della traslazione di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ relativa allo spostamento $\mathbf{v}$. Anche per queste trasformazioni in genere si trascura di parlare di estensione cartesiana e si può dire che le traslazioni costituiscono delle **azioni** sull'insieme dei vettori-QQ applicati. Anche queste applicazioni costituiscono un gruppo di trasformazioni e valgono le uguaglianze presentate in :4.e per le traslazioni considerate azioni su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
Si osserva che ogni classe di equipollenza dei vettori applicati si può ottenere applicando le diverse traslazioni $\mathit{Trsl}_{\mathbf{v}}$ a un unico vettore applicato: in altri termini, la classe di equipollenza di $\overrightarrow{PQ}$ si può esprimere come $\{\mathbf{v} \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} :| \overrightarrow{PQ} + \mathbf{v}\}$. Inoltre la scelta dell'elemento rappresentativo di una classe si può effettuare senza alcun vincolo a priori e in luogo di $\overrightarrow{PQ}$ si potrebbe scegliere quello equipollente

avente come estremo iniziale l'origine $\langle O, Q-P\rangle$. Si osserva anche che le classi di equipollenza sono le orbite dell'insieme delle traslazioni agente sull'insieme dei vettori applicati.

G13:4.g La addizione di vettori si ottiene con la regola del parallelogramma. Analogamente la sottrazione.
Questo conviene vederlo servendosi delle traslazioni

G13:4.h In linea di principio risulta utile conoscere come si trasformano le varie entità che si costruiscono su $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ in conseguenza dell'applicazione delle traslazioni. Infatti le traslazioni trasformano queste entità in entità analoghe e gli effetti delle trasformazioni stabiliscono dei collegamenti tra le entità accennate che possono contribuire a conoscerle meglio. Questo è un fatto del tutto generale e può valere per ogni genere di trasformazioni applicabili ad ogni tipo di ambiente.
Particolare utilità rivestono le entità invarianti per tutte le traslazioni o per insiemi significativi di traslazioni.

Consideriamo il vettore-QQ $\mathbf{v}=\langle v_x, v_y\rangle$, il corrispondente vettore applicato nell'origine $\overrightarrow{OP}$, la retta passante per O e P $\overline{OV}$ e la corrispondente traslazione $Trsl_{\mathbf{v}}$. Alla $\overline{OP}$ si può dare la forma $\overline{S}(v_y\cdot x+v_x\cdot y=0)$
Tra le rette invarianti per traslazione relativa a $\mathbf{v}$ si trova sicuramente la $\overline{OP}$. Questa è invariante anche per ogni traslazione $Trsl_{r\cdot\mathbf{v}}$, ove r è un qualsiasi razionale non nullo e può essere posta nella forma $\{r\in\mathbb{Q} :| \langle r\cdot v_x\ ,\ r\cdot v_y\rangle\}$.
L'insieme delle traslazioni della forma $Trsl_{r\cdot\mathbf{v}}$ relative ai diversi $r\in\mathbb{Q}$ costituiscono un sottogruppo del gruppo delle traslazioni e precisamente il loro insieme può definirsi come il sottoinsieme delle traslazioni che lasciano invariata la $\overline{OP}$. Ogni altra retta-QQ invariante per $Trsl_{\mathbf{v}}$ si constata essere una retta parallela alla $\overline{OP}$.
La parallela alla $\overline{OP}$ contenente il punto-QQ $Q=\langle x_Q, y_Q\rangle$ ha la forma $\{r\in\mathbb{Q} :| Q+r\cdot\mathbf{v}\}$; per essa si usa anche la equivalente forma concisa $Q+\mathbb{Q}\mathbf{v}$.
Una parallela alla $\overline{OP}$ non può avere punti in comune con essa: in caso contrario il punto comune può essere trasformato dalle traslazioni in un qualsiasi punto delle due rette. Per transitività anche due qualsiasi parallele alla $\overline{OP}$ aut coincidono, aut non hanno punti comuni.
Dunque il parallelismo con la retta $\overline{OP}$ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

Consideriamo una retta $\mathcal{R}$ e la sua traslata per lo spostamento u $Trsl_{\mathbf{u}}(\mathcal{R})$; il loro parallelismo viene espresso dalla $Trsl_{\mathbf{u}}(\mathcal{R})/\!\!/\mathcal{R}$ e il fascio delle rette parallele alla $\mathcal{R}$ è dato da $\{\mathbf{u}\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} :| Trsl_{\mathbf{u}}(\mathcal{R})\}$.

G13:4.i L'insieme delle rette passanti per un punto S si dicono costituire un **fascio di rette** e il punto comune, unico, si dice **sostegno del fascio**.
Si osserva che l'appartenenza ad una retta del fascio avente come sostegno S è una relazione di equivalenza su $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\setminus\{S\}$
In generale due rette si dicono parallele sse non hanno punti di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ comuni. Le varie rette per l'origine ovviamente non possono presentare parallelismo, come pure due diverse rette di ogni altro fascio.

Le varie classi di parallelismo tra rette in $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ si dicono **direzioni delle rette razionali**. Due rette parallele hanno in comune la direzione. Ogni direzione può chiamarsi anche **punto improprio del piano razionale**. In accordo con questa dizione si può dire che le rette parallele hanno in comune un punto improprio. Questo punto improprio si può pensare come un punto all'infinito, raggiungibile percorrendo una delle rette parallele in modo da allontanarsi illimitatamente da un suo qualsiasi punto al finito. Con questa

terminologia una classe di rette parallele si può considerare un **fascio improprio**, cioè un fascio di rette avente come sostegno il loro comune punto improprio, ovvero la loro comune direzione.
Collettivamente i punti di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e i punti impropri si dicono **punti del piano proiettivo razionale**; a loro volta i fasci di rette propri e impropri si dicono **fasci proiettivi di rette**.

G13:5. Poligonali sui razionali, poligoni orientati e loro area

G13:5.a Consideriamo un intero positivo s e una sequenza di $s{+}1$ punti-PP $\sigma = \langle P_0, P_1, P_2, ..., P_s\rangle$.
Si dice **poligonale orientata** definita da σ la sequenza di s segmenti orientati consecutivi

$$\Pi := \left\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, ..., \overrightarrow{P_{s-1}P_s} \right\rangle \ .$$

Se $s = 1$ questa sequenza è costituita da un solo segmento orientato, $\overrightarrow{P_0P_0}$. L'intero positivo s si dice **cardinalità della poligonale orientata**. I punti-QQ componenti di σ ed estremi dei segmenti, sono detti **vertici** della poligonale. I segmenti orientati costituenti la poligonale Π si dicono anche **lati orientati** della Π. Per **poligonale trasposta** o **poligonale opposta** della precedente si intende la

$$\Pi := \left\langle \overrightarrow{P_sP_{s-1}}, \overrightarrow{P_{s-1}P_{s-2}}, ..., \overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_2P_1}, \overrightarrow{P_1P_0} \right\rangle \ .$$

L'estremo iniziale del primo segmento orientato si dice **vertice iniziale** della Π; l'estremo finale dell'ultimo segmento orientato si dice **vertice finale** della Π.
Una poligonale orientata si dice **ridondante** sse coincidono due successivi punti della sequenza σ, oppure se due suoi successivi segmenti sono collineari, oppure due suoi segmenti sono sovrapposti. Equivalentemente si definisce ridondante una poligonale che presenta segmenti puntiformi, oppure segmenti successivi sostituibili con la loro somma, oppure segmenti sovrapposti. Le poligonali ridondanti hanno interesse solo in quanto ottenibili modificando in modo "continuo" poligonali non ridondanti.

G13:5.b Si dice **poligonale orientata chiusa** una poligonale orientata nella quale estremo iniziale e finale coincidono; la precedente Π è chiusa sse $P_0 = P_s$.
Una poligonale orientata chiusa è individuata da una classe ciclica di punti-QQ che costituiscono i suoi successivi vertici e da un vertice evidenziato in quanto estremo iniziale e estremo finale. Questo non è un oggetto privilegiato e si può introdurre una relazione di equivalenza tra le poligonali orientate chiuse detta **equivalenza ciclica** che associa due poligonali che presentano lo stesso ciclo di vertici e due vertici privilegiati eventualmente diversi. In molte considerazioni contano solo queste classi cicliche di poligonali chiuse. consente di unificare poligonali chiuse.
Si dice **poligono orientato** l'insieme delle poligonali orientate chiuse ottenibili l'una dall'altra per permutazione circolare dei vertici, cioè delle poligonali che differiscono solo per i diversi vertici evidenziati. In modo più intuitivo si può dire che per poligono orientato si intende una poligonale chiusa per la quale si prescinde dal vertice iniziale e finale.

Sono molte le considerazioni su poligonali orientate e su poligoni orientati nelle quali l'orientamento non ha peso. Per alleggerire i discorsi si introducono le corrispondenti entità non orientate.
Si dice **poligonale [non orientata]** l'insieme costituito da una poligonale orientata e dalla sua trasposta. In modo più intuitivo per poligonale si intende una poligonale orientata per la quale si prescinde dal distinguere l'estremo iniziale dal finale.
Si dice **poligono [non orientato]** l'insieme costituito da un poligono e dal suo opposto.

Una poligonale e un poligono non degeneri possono presentare vertici (non consecutivi) ripetuti e possono presentare spigoli non consecutivi con punti comuni. In questi casi si parla di **poligonale intrecciata** e di **poligono intrecciato**.
Si dice invece **poligonale semplice** una poligonale non ridondante e non intrecciata e si dice **poligono semplice** un poligono non degenere e non intrecciato.
Un poligono semplice presenta un certo numero s di lati e un ugual numero di vertici.

G13:5.c Un poligono con un lato non può che essere costituito da un segmento puntiforme.
Un poligono di due lati si dice **digono**; esso deve avere la forma $\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QP} \rangle^{cc}$, dove con ^{cc} denotiamo la **chiusura per permutazione circolare** delle sequenze finite. Quindi ogni digono è ridondante ed equivale al segmento non orientato avente i suoi stessi estremi $\{P, Q\}$.

I poligoni con 3 lati si dicono **triangoli**, più raramente **trigoni**.
I triangoli ridondanti come insiemi di punti corrispondono ai segmenti.
Un triangolo semplice non orientato si può individuare con il solo insieme dei tre vertici. Un'altra notazione semplificata riguarda i particolari poligoni-ZZ che hanno come vertici punti-ZZ aventi coordinate in $[0:9]$. Questi poligoni si possono individuare con la sequenza delle coppie di cifre decimali che individuano i loro vertici.
Tra i triangoli semplici si distinguono i **triangoli rettangoli**, triangoli che presentano un angolo retto. Un esempio è dato dal triangolo $\{\langle 1,1\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle -1,2\rangle\}$. Si definiscono inoltre i **triangoli ottusangoli** come i triangoli con un angolo ottuso; i triangoli acutangoli, triangoli con tutti gli angoli acuti, i triangoli isosceli, triangoli che presentano due lati con la stessa lunghezzaquadrata.

I poligoni con 4 lati si dicono **quadrilateri** quelli con 5 lati si dicono **pentagoni**, con 6 lati **esagoni**, con 7 lati **ettagoni**, con 8 lati **ottagoni** e così via. Per la terminologia per i poligoni con un dato numero di lati v. [[en:Polygon]].

G13:5.d I poligoni con 4 lati sono detti **quadrilateri** o **quadrangoli**. I lati si raggruppano in doppietti di lati contigui e in doppietti di lati opposti; simili raggruppamenti per i vertici e per gli angoli interni.
In generale per dn diagonale di un poligono si definisce ogni segmento che ha come estremi due vertici non contigui. Possiedono diagonali solo i poligoni con 4 o più vertici. I quadrilateri possiedono 2 diagonali. Un poligono non degenere si dice **intrecciato** sse due suoi lati non contigui hanno punti in comune. Il quadrilatero $\langle 00, 10, 01, 11\rangle$ è intrecciato; sono intrecciati i due pentagoni $\langle 01, 02, 10, 22, 21\rangle$ e $\langle 10, 24, 30, 02, 42\rangle$; è intrecciato l'esagono $\langle 00, 11, 20, 21, 10, 01\rangle$.
Un poligono non intrecciato ripartisce i punti del piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ in tre parti: insieme dei punti dei suoi lati, insieme dei suoi punti interni e insieme dei suoi punti esterni.
Un poligono non intrecciato si dice **concavo** sse qualche sua diagonale contiene punti esterni, dn convesso in caso contrario. Non vi sono triangoli concavi con meno di 4 lati. Un quadrilatero concavo è $\langle 00, 30, 11, 03\rangle$; un pentagono concavo è $\langle 00, 20, 22, 11, 02\rangle$.
Un poligono convesso si caratterizza anche con il fatto che le rette che contengono i suoi lati no contengono alcun suo punto interno. Si può invece caratterizzare un poligono concavo con la presenza di almeno due lati contigui tali che le rette che li prolungano contengono punti interni.

G13:5.e Tra i quadrilateri convessi si distinguono quelli con due lati opposti paralleli chiamati **trapezi**; tra i trapezi si distinguono **trapezi rettangoli** con due angoli contigui retti e i **trapezi isosceli** con due coppie di angoli contigui uguali; i trapezi rettangoli che sono anche isosceli hanno tutti i quattro angoli interni retti e sono detti **rettangoli**.

Tra i quadrilateri convessi si distinguono anche gli **aquiloni**, definiti come quadrilateri con due coppie di lati contigui aventi la stessa lunghezzaquadrata. Le due diagonali di un aquilone sono segmenti ortogonali.
Si dicono invece **parallelogrammi** o **romboidi** i quadrilateri con i lati opposti paralleli; essi hanno i lati opposti con la stessa lunghezzaquadrata e sono particolari trapezi; le due diagonali di un parallelogramma si intersecano nel loro punto medio.
I quadrilateri che sono parallelogrammi e aquiloni sono detti **rombi**; (in inglese **diamonds**); essi hanno i quattro lati di uguale lunghezzaquadrata; le due diagonali di un rombo si intersecano nel loro punto medio e sono ortogonali.
Si dicono **quadrati** i quadrilateri che sono sia rettangoli che rombi; essi hanno i lati della stessa lunghezzaquadrata e gli angoli interni retti; le loro diagonali si intersecano nei loro punti medi e formano 4 angoli retti. Tra i quadrati vi sono quelli con due lati orizzontali e due lati verticali come $\langle 00, 01, 11, 10\rangle$ e quelli con i lati obliqui come $\langle 40, 64, 26, 02\rangle$.

G13:5.f Chiamiamo **regione poligonale** di un poligono non intrecciato il sottoinsieme di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ottenuto dall'unione dei punti del perimetro del poligono e dei suoi punti interni. La regione poligonale del poligono Π si denota con $\mathsf{Regpol}(\Pi)$; L'insieme dei suoi punti interni con $\mathsf{Intpt}(\Pi)$ o con $\mathsf{Intpt}(\mathsf{Regpol}(\Pi))$.
I punti del poligono costituiscono il cosiddetto **perimetro** della regione poligonale.
Dato un poligono orientato non intrecciato, possono darsi due situazioni: rispetto a una penna mobile che traccia il cammino perimetrale, i punti interni aut si trovano sempre alla sinistra aut sempre alla destra. Nel primo caso la regione si dice **positiva**, nel secondo **negativa**. Ad esempio la regione delimitata dal rettangolo orientato $\langle 00, 30, 32, 02\rangle$ è positiva, mentre la regione delimitata dal triangolo $\langle 00, 22, 40\rangle$ è negativa.
Un poligono non intrecciato con regione positiva si dice avere **verso antiorario**, mentre a un poligono non intrecciato con regione negativa si attribuisce **verso orario**.

Si dice chiusura convessa di un insieme di punti $S \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ l'insieme ottenuto ampliando S con tutti i punti dei segmenti aventi come estremi due punti di S o degli insiemi ottenuti ripetendo questo processo. Questo sovrainsieme di S si denota con $\mathsf{Cnvx}(S)$.

Si dice chiusura affine di un insieme di punti $S \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ l'insieme ottenuto ampliando S con tutti i punti delle rette passanti per due punti di S o degli insiemi ottenuti ripetendo questo processo. Questo sovrainsieme di S si denota con $\mathsf{Affcl}(S)$. La chiusura affine di un doppietto di punti $\langle P, Q\rangle$ è la retta passante per tali punti; essa è ottenibile come chiusura affine do ogni suo sottoinsieme con più di due punti e in particolare $\mathsf{Affcl}P, Q = \mathsf{Affcl}(\overline{PQ})$. La retta chiusura affine di un segmento si dice anche retta che prolunga il segmento.

Un'altra caratterizzazione dei poligoni non intrecciati concavi e dei convessi riguarda il fatto che un poligono non intrecciato Π è convesso sse $\mathsf{Cnvx}(\Pi) = \mathsf{Regpol}(\Pi)$, mentre è concavo sse $\mathsf{Cnvx}(\Pi) \supset \mathsf{Regpol}(\Pi)$.
I vertici di un poligono concavo Π che sono estremi di due lati tali che le rette che li prolungano contengono punti interni del poligono, punti di $\mathsf{Intpt}(\Pi)$, sono punti interni della chiusura convessa $\mathsf{Cnvx}(\Pi)$. Questi punti corrispondono ad angoli interni concavi e si dicono **vertici di concavità** del poligono. Un poligono non intrecciato è concavo sse possiede vertici di concavità.

La chiusura convessa di un poligono concavo Π porta alla regione poligonale di un poligono convesso Π' ottenuto da Π sostituendo i lati con estremi che sono vertici di concavità con segmenti aventi come estremi vertici non di concavità.

G13:5.g Ogni regione poligonale si può decomporre in regioni poligonali convesse. Ad esempio la regione del quadrilatero concavo $\langle 00, 30, 11, 03\rangle$ è data dall'unione della regione delimitata dal triangolo $\langle 00, 30, 11\rangle$ con la regione delimitata dal triangolo $\langle 00, 11, 03\rangle$.
In generale questa decomposizione porta a regioni dello stesso segno di quella decomposta, ovvero a poligonali dello stesso verso della iniziale. Essa inoltre si ottiene con successive decomposizioni in ciascuna delle quali si abbassa il numero dei vertici di concavità.
Consideriamo la poligonale chiusa

$$\Pi := \left\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, ..., \overrightarrow{P_{s-1}P_0} \right\rangle$$

e supponiamo che P_0 sia un suo vertice di concavità tale che il suo vertice successivo, P_1, non lo sia. Accade quindi che il segmento $\overline{P_0P_1}$ sia sottoinsieme di **Regpol**(Π). Di conseguenza il triangolo

$$\Pi := \left\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_0} \right\rangle$$

e il poligono definito dalla poligonale chiusa

$$\Pi := \left\langle \overrightarrow{P_0P_k}, \overrightarrow{P_kP_{k+1}}, ..., \overrightarrow{P_{s-1}P_0} \right\rangle$$

hanno lo stesso verso del poligono da decomporre e l'unione delle corrispondenti regioni poligonali è **Regpol**(Π).
Con questa manovra un poligono con s lati viene decomposto in uno di 3 lati ed uno di $s-1$; in effetti si sono usati due nuovi segmenti orientati, $\overrightarrow{P_kP_0}$ e $\overrightarrow{P_0P_k}$, l'uno opposto dell'altro.
Questa decomposizione può essere ripetuta fino ad ottenere un cero numero di triangoli ed un poligono convesso.

G13:5.h Ogni regione poligonale convessa con manovre simili alla precedente si decompone in triangoli orientati tutti dello stesso segno della originale.
Quindi ogni regione poligonale si può decomporre in triangoli orientati tutti del suo stesso segno.
Le regioni triangolari quindi in un certo senso sono le regioni poligonali fondamentali.
Si possono prendere in considerazione anche multipoligonali.

G13:5.i Una decomposizione più complessa che ancora porta a triangoli si può effettuare anche per poligoni orientati intrecciati. Infatti una poligonale chiusa intrecciata può essere ricondotta ad una poligonale dello stesso genere che attraversa se stessa solo in punti che sono suoi vertici. Per questo quando due segmenti orientati della poligonale data si intersecano occorre sostituire ciascuno di essi con due segmenti orientati collineari attraverso l'inserimento di un nuovo vertice nel punto di intersezione. Nella poligonale chiusa così ottenuta si individuano sottopoligonali chiuse più corte ciascuna delle quali presenta meno autoattraversamenti. La poligonale data può essere decomposta in queste poligonali. In questo caso però tra le regioni piane delimitate dalla poligonale non orientata definita di segmenti periferici (segmenti non racchiusi da altre poligonali non orientate) se ne possono trovare alcune racchiuse in più poligonali orientate chiuse e altre non racchiuse da alcuna poligonale orientata chiusa.
Questo processo di individuazione di poligonali con meno autoattraversamenti può essere proseguito fino a che si hanno solo poligonali non intrecciate. Queste possono essere sottoposte al procedimento di triangolarizzazione precedente. Quindi la poligonale intrecciata chiusa di partenza può essere decomposta in poligonali triangolari, le quali però possono avere versi opposti.
La situazione più semplice di questo genere riguarda la poligonale chiusa intrecciata $\langle 00, 22, 02, 20\rangle$. Per non avere più punti di attraversamento che non siano vertici si inserisce il vertice 11 e si ha la poligonale chiusa $\langle 00, 11, 22, 02, 11, 20\rangle$. In questa si individua la sottopoligonale chiusa che delimita una regione

esterna $\langle 00, 11, 20\rangle$; questa ha verso orario e la poligonale rimanente non presenta autoattraversamenti ed ha verso antiorario.

G13:5.j Procediamo ora ad assegnare ad ogni regione poligonale relativa a una poligonale non intrecciata un valore razionale positivo o negativo che rende conto dalla sua estensione e che chiamiamo **area**.
All'area si chiede
(a) di essere invariante per traslazione, rotazione (e simmetria centrale);
(b) di cambiare di segno per una riflessione;
(c) di essere additiva (multipoligonali);
(d) si chiede che per rettangoli con i lati orizzontali e verticali dia il prodotto delle lunghezze dei lati Eventualmente cambiato di segno.
Si trova che
- deve essere nulla per i digoni;
- una dilatazione per un fattore f per le lunghezze porti a un fattore f^2 per le aree.

Innanzi tutto si definisce l'area delle regioni rettangolari canoniche, delimitate da lati orizzontali e verticali.

$$Area(\big\langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle, \langle x_1, y_2\rangle\big\rangle := (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \ .$$

Questa è in accordo con invarianza per traslazione, rotazione e simmetria centrale.
Poi si definisce l'area di un triangolo rettangolo canonico, avente un cateto orizzontale ed uno verticale. Ad esso si attribuisce un'area che è la metà del rettangolo canonico che lo contiene.
Questo è richiesto da additività
Successivamente si definisce l'area di un qualsiasi triangolo considerando che può considerarsi parte assieme a tre triangoli canonici di un rettangolo canonico.
Questo è richiesto dalla additività.
Attraverso la triangolarizzazione delle regioni delimitate da poligonali chiuse non intrecciate si ricavano le aree per tutti i poligoni orientati.

G13:6. Trasformazioni lineari e matrici 2 per 2

G13:6.a Introduciamo ora un importante insieme di endofunzioni di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, le trasformazioni $\mathbb{Q}$-lineari. Queste applicazioni sono caratterizzate dalla proprietà di trasformare ogni combinazione lineare di vettori-QQ nella combinazione lineare con gli stessi coefficienti di partenza dei vettori ottenuti applicando la trasformazione ai vettori utilizzati nella combinazione. Più formalmente diciamo **trasformazione $\mathbb{Q}$-lineare** di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ogni funzione del genere $T \in \{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \longmapsto \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\}$ tale che

$$\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\ ,\ a, b \in \mathbb{Q}\ \ \vdots\ \ T(a\cdot\mathbf{v} + b\cdot\mathbf{w}) = a\cdot T(\mathbf{v}) + b\cdot T(\mathbf{w})\ .$$

Vedremo ora che questo insieme di trasformazioni contiene molte interessanti endofunzioni entro $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ che possono essere interpretate visivamente in modo significativo. Inoltre queste trasformazioni fanno parte dell'ampia famiglia delle trasformazioni lineari di moduli e spazi lineari, ambienti che generalizzano $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$; come vedremo in seguito (v. G13:, C0:, C5:, C6:, C9:) le trasformazioni lineari sono utilizzate in molti modelli matematici e possono essere trattate con metodi algoritmici di notevole efficacia; per queste caratteristiche esse rivestono grandissima importanza applicativa.
Denotiamo con **Lintr**$(\mathbb{Q}^2)$ l'insieme di queste trasformazioni.

Va segnalato che le trasformazioni lineari possono essere definite anche nell'ambiente più ridotto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e negli ambienti più estesi $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Nell'ambito di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ valgono solo alcune delle proprietà che troveremo in $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ e situazione analoga si riscontra passando da $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e da questo a $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Per il trattamento dei sistemi di equazioni lineari, argomento di primaria importanza, l'ambiente $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ risulta troppo povero algoritmicamente, mentre $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ risulta sostanzialmente ricco quanto i due ambienti più estesi. Quindi molte nozioni che serviranno alla soluzione dei sistemi di equazioni lineari risulta conveniente introdurle facendo riferimento a $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

G13:6.b Dato che ogni vettore-QQ si può esprimere come combinazione lineare dei due vettori $\mathbf{e}_1 := \langle 1,0\rangle$ ed $\mathbf{e}_2 := \langle 0,1\rangle$, ogni trasformazione $\mathbb{Q}$-lineare T è interamente individuata precisando le sue due immagini $T(\mathbf{e}_1)$ e $T(\mathbf{e}_2)$. In effetti

$$T^{\scriptscriptstyle\Gamma}\langle x,y\rangle = x\cdot T(\mathbf{e}_1) + y\cdot T(\mathbf{e}_2)\ .$$

Per trattare comodamente le trasformazioni di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ conviene rappresentare queste funzioni e i vettori-QQ mediante opportune matrici.
Diciamo **base canonica** di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ la coppia di vettori-QQ $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$. Diciamo **vettore colonna** rappresentante il vettore-ZZ $\mathbf{v}=\langle x,y\rangle$ la matrice di aspetto 2×1

$$\mathbf{v}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\ .$$

Se scriviamo $T(\mathbf{e}_1) =: \langle T_{1,1},T_{2,1}\rangle$ e $T(\mathbf{e}_2) =: \langle T_{1,2},T_{2,2}\rangle$, diciamo **matrice rappresentante T nella base canonica**, o anche **matrice canonica** della T, la matrice di aspetto 2×2

$$T_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2} = \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{bmatrix}\ ,$$

matrice che si può considerare ottenuta affiancando i due vettori colonna $T(\mathbf{e}_1)^{\mathsf{T}}$ e $T(\mathbf{e}_2)^{\mathsf{T}}$.
L'azione della trasformazione T sopra il generico vettore-ZZ $\mathbf{v}=\langle x,y\rangle$ si può rappresentare mediante la moltiplicazione della matrice rappresentante la T per il vettore colonna rappresentante $\mathbf{v}$:

$$\begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1,1}\cdot x + T_{1,2}\cdot y \\ T_{2,1}\cdot x + T_{2,2}\cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \end{bmatrix}\cdot x + \begin{bmatrix} T_{1,2} \\ T_{2,2} \end{bmatrix}\cdot y \quad .$$

L'espressione finale va confrontata con il secondo membro della prima di questo paragrafo.
Da essa si ricava che delle 4 entrate della $T_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}$:
$T_{1,1}$ fornisce la prima componente del trasformato di $\mathbf{e}_1$;
$T_{2,1}$ fornisce la seconda componente del trasformato di $\mathbf{e}_1$;
$T_{1,2}$ fornisce la prima componente del trasformato di $\mathbf{e}_2$;
$T_{2,2}$ fornisce la seconda componente del trasformato di $\mathbf{e}_2$.

G13:6.c Come si possa ricavare per linearità l'azione di una trasformazione lineare dalla sua azione sui vettori della base canonica viene reso utilmente da figure come la seguente.
. . . . .

G13:6.d Vediamo ora alcune trasformazioni particolari cercando di collegare la descrizione geometrica dei loro effetti alle loro matrici canoniche.
Preliminarmente osserviamo che tutte le trasformazioni lineari lasciano fisso il vettore nullo $\langle 0,0\rangle$, cioè nell'origine del piano sui razionali.

Una trasformazione molto semplice è il collasso che trasforma ogni vettore-QQ nel vettore $\langle 0,0\rangle$. Le entrate della sua matrice, secondo la loro interpretazione alla fine di :6.b, devono essere tutte uguali a 0, cioè

$$\lceil \langle x,y\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \mapsto \langle 0,0\rangle \rceil_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2} = \mathbf{0}_{2\times 2} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Un'altra trasformazione semplice è la trasformazione identica di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, trasformazione che lascia fissi tutti i vettori-ZZ. Dalla interpretazione dei $T_{i,j}$ si ricava che la sua matrice canonica è la matrice identica

$$\lceil \langle x,y\rangle \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \mapsto \langle x,y\rangle \rceil_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2} = \mathbf{1}_{2\times 2} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

G13:6.e Vediamo gli effetti delle matrici diagonali, matrici aventi entrate nulle al di fuori della diagonale principale.

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1\cdot x \\ d_2\cdot y \end{bmatrix} .$$

Quando $d_1 = d_2 \neq 0$ l'effetto della trasformazione consiste nel sostituire ogni vettore-QQ con quello aventi le componenti moltiplicate per il parametro d_1 Se $d_1 = d_2 > 1$ abbiamo la **dilatazione del piano** $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$: ad ogni vettore-QQ viene sostituito il vettore ingrandito d_1 volte.
Se $d_1 = d_2 = -1$, ogni vettore-QQ viene trasformato nel suo simmetrico rispetto all'origine: questa trasformazione viene detta **simmetria centrale** di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ avente come centro l'origine $\mathbf{0}$ e viene denotata con $Centrsym_{\mathbf{0}}$.
Se i due parametri sono diversi e positivi la trasformazione si può descrivere come ottenuta con due dilatazioni relative a fattori diversi nelle due direzioni orizzontale e verticale.
Se uno dei due parametri è uguale a 1 e l'altro a -1 si hanno le due riflessioni del piano rispetto all'asse orizzontale e rispetto all'asse verticale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} .$$

G13:6.f Esaminiamo le trasformazioni-ZZ lineari con tre entrate nulle ed una uguale ad 1. Se questa si trova sulla diagonale principale si hanno evidentemente i proiettori sui due assi-ZZ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\mathsf{Prj}_{x\,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathsf{Prj}_{y\,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Se l'entrata 1 si trova fuori della diagonale principale si ha:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} .$$

Prima di descrivere le trasformazioni corrispondenti consideriamo l'effetto della seguente matrice 2×2

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} ;$$

Essa quindi rappresenta la riflessione del piano $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ rispetto alla diagonale principale. Le due matrici precedenti quindi rappresentano le trasformazioni ottenute effettuando prima questa riflessione e poi la proiezione sull'asse x o sull'asse y rispettivamente.

G13:6.g Per la trasformazione che a un punto-QQ fa corrispondere il simmetrico rispetto alla codiagonale, si osserva che essa scambia le ascisse con le ordinate e cambia il loro segno. Quindi la sua azione è fornita dalla seguente espressione matriciale:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} .$$

La trasformazione che a un punto-QQ fa corrispondere il simmetrico rispetto all'origine, cioè la cosiddetta **simmetria centrale**, si limita allo scambiare le ascisse con le ordinate. Quindi la sua azione è fornita dalla seguente espressione matriciale:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} .$$

G13:6.h Consideriamo le trasformazioni corrispondenti alle matrici con due entrate uguali a 1 sulla diagonale principale, una entrata nulla e una non nulla. Per esse si trova

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+by \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ cx+y \end{bmatrix} .$$

Le trasformazioni del primo tipo, che denotiamo con $Glide_x(b)$, lasciano invariata l'ordinata di tutti i punti-QQ e quindi trasformano le rette orizzontali in se stesse, mentre alzano ($b > 0$) o abbassano ($b < 0$) le ascisse di una quantità by proporzionale all'ordinata. Esse quindi trasformano le rette-QQ verticali in rette oblique della forma $\langle h, 0\rangle + \mathbb{Q} \cdot \langle b, 1\rangle$.
Le trasformazioni del secondo tipo, che denotiamo con $Glide_y(c)$, hanno una interpretazione ottenibile dalla precedente scambiando le ascisse con le ordinate: esse lasciano invariata l'ascissa di tutti i punti-ZZ e quindi trasformano le rette-Z verticali in se stesse, mentre alzano ($c > 0$) o abbassano ($c < 0$) le ascisse di una quantità cx proporzionale all'ascissa. Esse quindi trasformano le rette-QQ orizzontali in rette oblique della forma $\langle 0, k\rangle + \mathbb{Z} \cdot \langle 1, c\rangle$.
Queste trasformazioni sono dette **scivolamenti** secondo la direzione orizzontale e secondo la verticale rispettivamente.

G13:6.i Definiamo **rotazione di** $90°$ **con centro nell'origine** la trasformazione il cui effetto è determinato dalla seguente relazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} .$$

Si osserva che la rotazione di $90°$ trasforma ogni retta per l'origine nelle retta per l'origine sua ortogonale.

G13:7. Combinazioni lineari e composizioni di trasformazioni lineari

G13:7.a Si possono definire le combinazioni lineari delle matrici-QQ e delle trasformazioni $\mathbb{Q}$-lineari e si trova che una combinazione lineare di trasformazioni-QQ viene rappresentata nella base canonica dalla stessa combinazione lineare delle matrici che rappresentano le trasformazioni di partenza.
Tutte le matrici-QQ possono essere considerate combinazioni $\mathbb{Q}$-lineari delle 4 matrici che presentano una entrata uguale a 1 e tre uguali a zero:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Le quattro matrici a secondo membro si possono chiamare **matrici-QQ di base**.

G13:7.b È interessante esprimere alcune matrici-QQ come combinazioni lineari di altre più semplici e di interpretare queste decomposizioni in termini di trasformazioni e dei loro significati geometrici.
Si trova ad esempio che $\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} = \mathbf{Prj}_x + \mathbf{Prj}_y$.
. . . . .

G13:7.c Le matrici-QQ possono essere anche moltiplicate tra di loro e si trova che il prodotto di due matrici costituisce la rappresentazione canonica della trasformazione ottenuta come composizione delle trasformazioni rappresentate dalle matrici di partenza.
Talora risulta utile ricondurre l'effetto di una trasformazione T alla applicazione successiva di trasformazioni T_1 e T_2 il cui prodotto fornisce la stessa T.
. . . . .

G13:7.d Eserc. (a) Verificare geometricamente e mediante le matrici l'uguaglianza

$$Glide_x(b_1) \circ Glide_x(b_2) = Glide_x(b_1 + b_2)\ .$$

G13:7.e È interessante individuare le trasformazioni-ZZ involutorie, cioè le trasformazioni che applicate due volte non portano alcuna modifica al piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e considerare la struttura delle loro matrici canoniche.
Sono involutorie le riflessioni rispetto agli assi, alla diagonale principale e alla codiagonale; è involutoria anche la simmetria centrale.
Delle trasformazioni involutorie è utile individuare i punti fissi e le coppie di punti duali. Le riflessioni rispetto ad una retta hanno questa retta come insieme dei punti fissi; la simmetria centrale ha come unico punto fisso solo l'origine.

G13:7.f È interessante individuare le trasformazioni-ZZ idempotenti, cioè le trasformazioni che hanno lo stesso effetto se applicate una volta o due volte (o più volte); è anche utile leggere la proprietà dell'idempotenza nelle corrispondenti matrici.
Sono idempotenti le due proiezioni sugli assi; ovviamente è idempotente anche la trasformazione identica di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

G13:7.g È utile distinguere le trasformazioni invertibili e più precisamente individuare le coppie costituite da una trasformazione invertibile e della sua inversa.
Tutte le involutorie sono invertibili e coincidono con la propria inversa.
Sono invertibili anche gli scivolamenti e si trova facilmente che l'inverso dello scivolamento $Glide_x(b)$ è $Glide_x(-b)$, mentre l'inverso dello scivolamento $Glide_y(c)$ è $Glide_y(-c)$.

G13:7.h Per le rotazioni con centro nell'origine si osserva che $Rot_{\mathbf{0}}(90°) \circ Rot_{\mathbf{0}}(90°) = Centrsym_{\mathbf{0}}$, che $Rot_{\mathbf{0}}(90°)^3 = Rot_{\mathbf{0}}(90°)^{\mathbf{-1}}$ e che $Rot_{\mathbf{0}}(90°)^4 = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}$; queste relazioni si possono leggere nelle seguenti uguaglianze matriciali:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\ .$$

G13:7.y Si dimostra che le due rette-QQ L ed M sono parallele sse si trova un $\langle p, q\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tale che $L +^{bl} k = M$, oppure accade che sono entrambe orizzontali, oppure si trova $k \in \mathbb{Q}$ tale che $L +^{bl} k = M$.
Rileviamo che si possono avere due costruzioni che conducono a due rette che si rivelano coincidenti: in una tale situazione si può parlare di caso particolare di doppietto di rette parallele.

Si trova facilmente che il parallelismo tra rette-QQ costituisce una relazione di equivalenza fra tali rette-QQ.
Condizione di parallelismo e determinante. Matrici 2×2

G13:7.z Si trova che in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ due rette-QQ non parallele hanno sempre uno e un solo punto in comune, cosa che in genere non accade in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Infatti per individuare tale punto devono essere soddisfatte entrambe le equazioni delle rette, cioè si deve trovare una soluzione e una sola Esso si trova facilmente, cioè si trovano facilmente espressioni razionali per le sue coordinate.
Dunque nel piano razionale trovano piena soluzione i sistemi di due equazioni lineari in due incognite con coefficienti razionali. Questo fatto si può generalizzare al caso di sistemi di n equazioni lineari in n incognite e costituisce una proprietà che procura elevata importanza computazionale ai numeri razionali.