Capitolo G12:
Piano delle coppie di interi e numeri razionali

G12:0.a In questo capitolo introduciamo le prime nozioni geometriche collocandole nell'insieme delle coppie di interi. Questo è un ambiente molto essenziale, ma in grado di consentire l'introduzione di varie nozioni di portata generale che permettono di risolvere problemi rilevanti facendo uso solo di manipolazioni sui numeri interi.

G12:A. Vettori-ZZ e rette-ZZ

G12:A.01 L'insieme delle coppie di interi $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ viene chiamato anche **piano combinatorio** e **piano di Pólya** (da [[György Pólya]]) ed i suoi elementi $\langle i, j\rangle$ vengono detti anche **punti-ZZ**. Per queste entità spesso è vantaggioso utilizzare termini e notazioni vettoriali. L'origine $\langle 0, 0\rangle$ di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ viene anche denotata con $\mathbf{0}_2$ e chiamata vettore-ZZ nullo.

Definiamo come **somma** di due vettori-ZZ $\langle i, j\rangle$ e $\langle h, k\rangle$ l'**estensione cartesiana** alle coppie di elementi di $\mathbb{Z}$ della somma di interi naturali:

$$\langle i, j\rangle +^{ce} \langle h, k\rangle := \langle i + h, j + k\rangle \ .$$

Si definisce come **moltiplicazione del vettore-ZZ** $\langle i, j\rangle$ **per il numero intero** c il vettore-ZZ

$$c \cdot^{ce} \langle i, j\rangle := \langle c \cdot i, c \cdot j\rangle \ .$$

In particolare $0 \cdot^{ce} \langle i, j\rangle = \langle 0, 0\rangle$, $1 \cdot^{ce} \langle i, j\rangle = \langle i, j\rangle$, $-1 \cdot^{ce} \langle i, j\rangle = \langle -i, -j\rangle$; quest'ultimo vettore-ZZ si dice **vettore opposto** di $\langle i, j\rangle$.
Definiamo come **differenza** di due vettori-ZZ $\langle i, j\rangle$ e $\langle h, k\rangle$ l'**estensione cartesiana** alle coppie di elementi di $\mathbb{Z}$ della differenza di interi naturali:

$$\langle i, j\rangle -^{ce} \langle h, k\rangle := \langle i - h, j - k\rangle \ .$$

Si osserva che $\langle i, j\rangle -^{ce} \langle h, k\rangle = \langle i, j\rangle +^{ce} (-1 \cdot^{ce} \langle h, k\rangle)$.

In genere i simboli $+^{ce}$, $-^{ce}$ e $\cdot^{ce}$ si semplificano trascurando l'esponente: inoltre una scrittura come $c \cdot \langle i, j\rangle$ si semplifica nella $c\langle i, j\rangle$ e una scrittura come $-1 \cdot \langle i, j\rangle$ si semplifica nella $-\langle i, j\rangle$.
I vettori $\langle 1, 0\rangle$ e $\langle 0, 1\rangle$ si dicono **versori canonici** e per essi si usano anche, rispettivamente, le notazioni $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$, oppure le notazioni $\mathbf{e}_x$ ed $\mathbf{e}_y$, o anche le scritture $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$.

Ogni vettore-ZZ della forma $c \cdot \langle i, j\rangle + d \cdot \langle h, k\rangle$ con c e d interi naturali si dice **combinazione lineare-Z** dei vettori-ZZ $\langle i, j\rangle$ e $\langle h, k\rangle$ effettuata con i **coefficienti** c e d.
Si osserva che ogni vettore-ZZ $\langle h, k\rangle$ si può esprimere come combinazione lineare dei versori canonici:

$$\langle h, k\rangle = h\langle 1, 0\rangle + k\langle 0, 1\rangle = h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 \ .$$

Questo fatto si esprime anche dicendo che $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ costituisce una base per $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (v. G40:A.08).

G12:A.02 Diciamo **vettori-ZZ primitivi superiori** i vettori $\langle 1,0\rangle$, $\langle 0,1\rangle$ e tutti i vettori della forma $\langle \pm p,q\rangle$ dove $p,q\in\mathbb{N}_+$ e $\mathrm{MCD}(p,q)=1$, cioè dove p e q sono interi positivi coprimi.
Diciamo **vettori-ZZ primitivi** i vettori $\langle 1,0\rangle$, $\langle 0,1\rangle$ e tutti i vettori della forma $\langle p,q\rangle$ dove $p,q\in\mathbb{Z}_{nz}$ e $\mathrm{MCD}(|p|,|q|)=1$, cioè dove $|p|$ e $|q|$ sono interi positivi coprimi.

(1) Prop. Ogni vettore-ZZ si può esprimere come prodotto di un numero intero per un vettore-ZZ primitivo superiore.

Dim.: La cosa è evidente per i vettori degli assi-ZZ orizzontale e verticale; per ogni altro vettore-ZZ $\langle h,k\rangle$ (con h e k interi non nulli) si ha:

$$\langle h,k\rangle = \mathrm{sign}(k)\big\langle \mathrm{sign}(hk)|h|,|k|\big\rangle = \mathrm{sign}(k)\mathrm{MCD}(|h|,|k|)\left\langle \mathrm{sign}(hk)\frac{|h|}{\mathrm{MCD}(|h|,|k|)},\frac{|k|}{\mathrm{MCD}(|h|,|k|)}\right\rangle \quad \blacksquare$$

Ad esempio $\langle 8,14\rangle = 2\langle 4,7\rangle$, $\langle -6,15\rangle = 3\langle -2,5\rangle$, $\langle 28,-77\rangle = -7\langle -4,11\rangle$, $\langle -7,-5\rangle = -\langle 7,5\rangle$.

(2) Eserc. Dimostrare che ogni vettore-ZZ si può esprimere come prodotto di un numero naturale per un vettore-ZZ primitivo.

G12:A.03 Ad ogni coppia di punti-ZZ diversi $\langle P,Q\rangle = \big\langle\langle x_P,y_P\rangle,\langle x_Q,y_Q\rangle\big\rangle$ si associano il vettore-ZZ

$$\overrightarrow{Q-P} = \overrightarrow{PQ} := Q-P = \langle x_Q-x_P, y_q-y_P\rangle$$

e un un unico vettore-ZZ primitivo chiamato **vettore orientazione** della coppia $\langle P,Q\rangle$:

$$Orient(P,Q) := \begin{cases} \mathrm{sign}(x_Q-x_P)\langle 1,0\rangle & \text{sse } \; y_P=y_Q \\ \mathrm{sign}(y_Q-y_P)\langle 0,1\rangle & \text{sse } \; x_P=x_Q \\ \frac{1}{\mathrm{MCD}(|x_Q-x_P|,|y_Q-y_P|)}\cdot\big\langle x_Q-x_P,y_Q-y_P\big\rangle & \text{altrimenti}\end{cases} \quad .$$

Ad esempio $\overrightarrow{\langle 7,-3\rangle\langle 5,-3\rangle} = \langle 2,0\rangle$, $Orient(\langle 7,-3\rangle,\langle 5,-3\rangle) = -\langle 1,0\rangle$,
$Orient(\langle 7,4\rangle,\langle -1,0\rangle) = \langle -2,-1\rangle$, $Orient(\langle 27,-3\rangle,\langle 3,9\rangle) = \langle -2,1\rangle$.
Si constata facilmente che $Orient(Q,P) = -Orient(P,Q)$.
Inoltre $\overrightarrow{PQ}$ è un vettore-ZZ multiplo positivo di $Orient(P,Q)$:

$$\overrightarrow{PQ} = \mathrm{MCD}(|x_Q-x_P|,|y_Q-y_P|)\cdot Orient(P,Q) \ .$$

Si dice **segmento-ZZ orientato** associato alla coppia di punti-ZZ $\langle P,Q\rangle$ la sequenza dei punti-ZZ

$$\big\langle n=0,1,...,\mathrm{MCD}(|x_Q-x_P|,|y_Q-y_P|) :|\ P+n\cdot Orient(P,Q)\big\rangle \ .$$

Questa sequenza inizia con P, termina con Q, ha lunghezza $\mathrm{MCD}(|x_Q-x_P|,|y_Q-y_P|)+1$ e presenta i successivi punti-ZZ ottenibili sommando a P i successivi multipli di $Orient(P,Q)$.
Si dice **segmento opposto** del precedente il segmento orientato associato alla coppia riflessa $\langle Q,P\rangle$; questo segmento è ottenuto dalla sequenza riflessa da quella di partenza.

G12:A.04 Si dice **semiretta-ZZ** ogni sottoinsieme di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ della forma $\{n\in\mathbb{N} :|\ \langle h,k\rangle + n\langle p,q\rangle\}$, dove $\langle h,k\rangle$ è un qualsiasi punto-ZZ e viene detto **estremo della semiretta-ZZ**, mentre $\langle p,q\rangle$ è un qualsiasi vettore-ZZ primitivo; questo vettore-ZZ viene detto **orientazione della semiretta-ZZ**.

Si dice **retta-ZZ** ogni sottoinsieme di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ della forma $\{n\in\mathbb{Z} :|\ \langle h,k\rangle + n\langle p,q\rangle\}$, dove $\langle h,k\rangle$ è un qualsiasi punto-ZZ, mentre $\langle p,q\rangle$ è un qualsiasi vettore-ZZ primitivo.
Si osserva che l'insieme $\{n\in\mathbb{Z} :|\ \langle h,k\rangle + n(-\langle p,q\rangle)\}$ coincide con la suddetta retta; inoltre questa retta si può individuare concisamente con $\langle h,k\rangle + \mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$.
Nel seguito denotiamo con **RtlinZZ** l'insieme delle rette-ZZ.

Le rette-ZZ della forma $\{n \in \mathbb{Z} :| \, n\langle p,q\rangle)\} = \mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$ passano per l'origine (costituita dalla componente con $n=0$). Si dice anche che per ogni $\langle p,q\rangle$ vettore-ZZ primitivo la retta $\mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$ passa per l'origine.

G12:A.05 Consideriamo due punti-ZZ $A = \langle x_A, y_A\rangle$ e $B = \langle x_B, y_B\rangle$ e gli insiemi $A + \mathbb{Z}\cdot \mathit{Orient}(A,B)$ e $B+\mathbb{Z}\cdot \mathit{Orient}(B,A)$. Si mostra facilmente che essi coincidono, che individuano una retta-ZZ contenente sia A che B e che nessun'altra retta contiene entrambi questi punti. La retta-ZZ determinata da A e B nel modo precedente si dice **retta passante per i due punti** A e B. Come **direzione** della retta precedente si assume il duetto formato dal vettore-ZZ $\langle p,q\rangle$ e dal suo opposto $-\langle p,q\rangle$; questa direzione si può denotare con $\pm\langle p,q\rangle$.

La retta-ZZ passante per A e B, che denotiamo con R, si individua anche come insieme dei punti-ZZ che costituiscono soluzioni di una equazione. Denotiamo con $C = \langle x,y\rangle$ il punto generico della R; l'appartenenza di C alla R equivale alla possibilità di trovare due interi a e b tali che valgano le uguaglianze fra vettori-ZZ $C = A + a\langle p,q\rangle$ e $C = B + b\langle p,q\rangle$. Queste a loro volta equivalgono alle uguaglianze fra numeri interi

$$x = x_A + ap \ , \quad x = x_B + bp \ , \quad y = y_A + aq \ , \quad y = y_B + bq \ .$$

Da queste si ricava

$$(x - x_A)(y - y_B) = apbq \ , \quad (x - x_B)(y - y_A) = bpaq$$

e quindi l'equazione

(1)
$$(x - x_A)(y - y_B) = (x - x_B)(y - y_A) \ ;$$

questa si può riscrivere nella forma equivalente

(2)
$$x(y_A - y_B) + y(x_B - x_A) + x_A y_B - y_A x_B = 0 \ .$$

G12:A.06 Se un duetto di punti-ZZ diversi $\{P,Q\}$ individua una retta $\mathcal{R}$, ciascuna delle due corrispondenti coppie $\langle P,Q\rangle$ e $\langle Q,P\rangle$ individuano un'entità che costituisce un arricchimento della $\mathcal{R}$. I due arricchimenti sono dati dalla distinzione che chiamiamo **senso di percorrenza**; la coppia $\langle P,Q\rangle$ determina il senso di percorrenza secondo il quale P viene incontrato prima di Q, la coppia $\langle Q,P\rangle$ il senso opposto, secondo il quale P viene incontrato dopo Q. Una coppia costituita da una retta e da un suo senso di percorrenza viene detta **retta orientata**.

La retta orientata associata a una coppia $\langle P,Q\rangle$ può essere individuata anche dal punto P e da $\mathit{Orient}(P,Q)$, oppure da un qualsiasi altro suo punto $P + n\cdot \mathit{Orient}(P,Q)$ e dallo stesso $\mathit{Orient}(P,Q)$. Questo vettore-ZZ primitivo viene detto **orientazione della retta-ZZ**.

In modo conciso la retta orientata passante per $\langle h,k\rangle$ e di orientazione $\langle p,q\rangle$ si può denotare con $\langle h,k\rangle + \mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$.

G12:B. Parallelismo, traslazioni e ortogonalità

G12:B.01 Consideriamo un vettore-ZZ primitivo superiore $\langle p,q\rangle$ e due rette-ZZ individuate dalle scritture $\langle h,k\rangle + \mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$ e $\langle m,n\rangle + \mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$.
Si danno due possibilità: aut il punto $\langle m,n\rangle$ appartiene alla prima retta, aut non vi appartiene.
Si ha il primo caso sse il punto $\langle h,k\rangle$ appartiene alla seconda retta sse le due rette coincidono.
Si ha il secondo caso sse le due rette non hanno punti in comune. In questo caso si dice che si hanno due **rette parallele**; questo fatto, se le due rette si denotano, rispettivamente, con R ed S, si esprime scrivendo $R/\!\!/S$; queste rette si dicono avere in comune la direzione $\pm\langle p,q\rangle$.
Nel caso particolare $\langle p,q\rangle = \langle 1,0\rangle$, si hanno le cosiddette **rette-ZZH**; quando invece $\langle p,q\rangle = \langle 0,1\rangle$, si hanno le **rette-ZZV**; quando $\langle p,q\rangle = \langle 1,1\rangle$, si hanno le **rette-ZZD1**; quando $\langle p,q\rangle = \langle -1,1\rangle$, si hanno le **rette-ZZD2**.
La relazione di parallelismo fra rette-ZZ è chiaramente una relazione di equivalenza.

La relazione di parallelismo si estende ai segmenti e alle semirette. Due insiemi di punti-ZZ, ciascuno dei quali può essere un segmento, una semiretta o una retta, si dicono paralleli sse lo sono le rette-ZZ che li contengono.
Anche questa relazione estesa di parallelismo è chiaramente una relazione di equivalenza sull'unione delle rette-ZZ, delle semirette-ZZ e dei segmenti-ZZ.

G12:B.02 Per ogni vettore-ZZ $\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle$, si dice **traslazione del piano** $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ di spostamento $\langle v_1,v_2\rangle$ la trasformazione

$$Trsl_{\mathbf{v}} := \ulcorner\ \langle i,j\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mapsto \langle i+v_1, j+v_2\rangle\ \urcorner\ .$$

Si dimostrano facilmente i fatti che seguono.
(1) Ogni traslazione di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ è una permutazione di tale insieme ▮
(2) La traslazione inversa della $Trsl_{\mathbf{v}}$ è $Trsl_{-\mathbf{v}}$ ▮
(3) La traslazione corrispondente al vettore-ZZ nullo è la identità di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ▮
(4) La composizione delle due traslazioni corrispondenti ai due vettori-ZZ $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è la traslazione corrispondente alla somma dei due vettori:

$$Trsl_{\mathbf{v}} \circ Trsl_{\mathbf{w}} = Trsl_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}\ ▮$$

(5) Tutte le traslazioni commutano, cioè

$$\forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ \ \vdots\ \ Trsl_{\mathbf{v}} \circ Trsl_{\mathbf{w}} = Trsl_{\mathbf{w}} \circ Trsl_{\mathbf{v}}\ ▮$$

(6) Le traslazioni del piano $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ costituiscono un gruppo isomorfo al gruppo costituito dallo stesso $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ munito della somma di vettori-ZZ ▮
(7) Ogni traslazione del piano si può ottenere dalla composizione di una traslazione orizzontale con una verticale ▮

G12:B.03 Le traslazioni del piano $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ trasformano le rette-ZZ in rette-ZZ; più precisamente la traslazione corrispondente allo spostamento $\langle t,u\rangle$ trasforma la retta-ZZ della forma $\langle h,k\rangle + \mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$ nella retta esprimibile come $\langle h+t, k+u\rangle + \mathbb{Z}\cdot\langle p,q\rangle$. La nuova retta è parallela a quella di partenza.
Si può quindi affermare

$$\forall R \in \mathsf{RtlinZZ}\ ,\ \mathbf{v} \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ \ \vdots\ \ Trsl_{\mathbf{v}}(R)/\!\!/R\ .$$

Di conseguenza le traslazioni mantengono la direzione di ciascuna retta-ZZ e la relazione di parallelismo tra rette-ZZ.
La traslazione $Trsl_{\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\rangle}$ trasforma in se stesse tutte le rette-ZZ della forma $\langle h,k\rangle + \mathbb{Z}\cdot Orient(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$, mentre modifica tutte le altre rette-ZZ.

G12:B.04 Definiamo ora per ampliamenti successivi la **relazione di ortogonalità** fra rette-ZZ.
Innanzi tutto chiediamo che le rette corrispondenti all'asse x e all'asse y siano ortogonali.
Consideriamo poi due rette-ZZ $R = \langle a, b\rangle + \mathbb{Z} \cdot \langle p, q\rangle$ ed $S = \langle c, d\rangle + \mathbb{Z} \cdot \langle r, s\rangle$, dove $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, mentre $\langle p, q\rangle$ e $\langle r, s\rangle$ sono vettori-ZZ primitivi.
Esse sono dette **rette ortogonali** sse $pr = -qs$, cioè sse $pr + qs = 0$; in questo caso si scrive $R \perp S$.
Si osserva che la ortogonalità è una relazione simmetrica: infatti se si scambiano i corrispondenti parametri delle due rette l'equazione $pr + qs = 0$ non cambia di forma. Si osserva anche che una retta non può essere ortogonale a se stessa, in quanto dovrebbe essere $p^2 + q^2 = 0$: quindi l'ortogonalità è una relazione antiriflessiva. L'ortogonalità è anche antitransitiva. Se $R \perp S$ ed $S \perp T$, sicuramente R non è perpendicolare a T, mentre si può concludere che $R/\!\!/T$.

Anche l'ortogonalità si estende a segmenti e semirette. Due insiemi di punti-ZZ, ciascuno dei quali può essere un segmento, una semiretta o una retta-ZZ, si dicono ortogonali sse lo sono le rette-ZZ che li contengono.

L'ortogonalità e il parallelismo sono invarianti per traslazione: in formule

$$\forall R, S \in \textsf{\textbf{RtlinZZ}}\ ,\ \mathbf{v} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad : \quad R \perp S \Longrightarrow Trsl_{\mathbf{v}}(R) \perp Trsl_{\mathbf{v}}(S)\ ,\quad R/\!\!/S \Longrightarrow Trsl_{\mathbf{v}}(R)/\!\!/Trsl_{\mathbf{v}}(S)$$ ▮

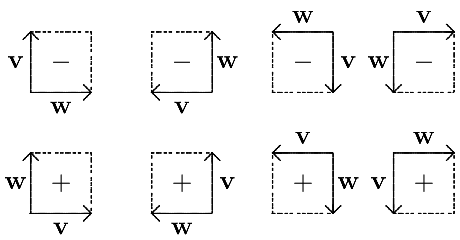
G12:C. Cammini e aree nel piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

G12:C.01 Come notato in precedenza, i vettori–ZZ applicati orizzontali, sono equivalenti ai segmenti–ZZ orientati e alle sequenze di interi consecutivi. Ai due orientamenti verso destra e verso sinistra dei vettori e dei segmenti e ai due ordinamenti crescente e decrescente delle sequenze di interi consecutivi si possono associare rispettivamente i segni $+$ e $-$ corrispondenti alle operazioni del sommare e del sottrarre quntità espresse da interi naturali.

L'attribuzione di un segno ad entità che vengono visualizzate in una sola dimensione è stata motivata dalla opportunità di ampliare la gamma delle loro applicazioni e delle loro prestazioni computazionali (trattare crediti e debiti, pesi e contrappesi, traslazioni in una direzione e nella direzione opposta).
Un analogo ampliamento si rende opportuno per entità che vengono visualizate in due o più dimensioni.
Ora ci proponiamo di attribuire un segno alle figure–ZZ e ai circuiti-ZZ motivando l'introduzione di questi elementi distintivi.

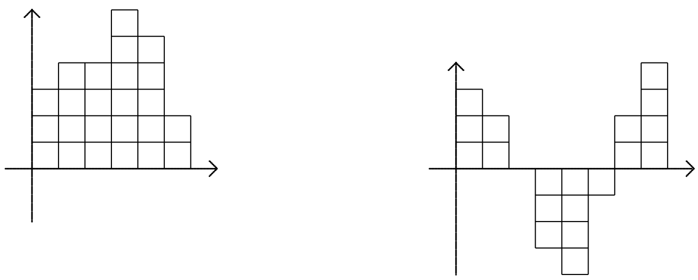
G12:C.02 Cominciamo ad attribuire un segno alle figure rettangolari. Se $h, k \in \mathbb{P}$, definiamo il **rettangolo–ZZ** determinato dalla coppia di vettori, orizzontale il primo $\langle h, 0\rangle$ e verticale il secondo $\langle 0, k\rangle$, come insieme dei quadratini aventi vertici NE nei punti $\langle i, j\rangle$ per $i = 1, ..., h$ e $j = 1, ..., k$.
Per **area** di un tale rettangolo si intende il numero dei suoi quadratini, $h \cdot k$.
Se h e k possono essere elementi di $\mathbb{Z}$, si hanno insiemi rettangolari di quadratini simili. Se alla loro area si assegna ancora il valore $h \cdot k$, essi possono avere come area un intero negativo: in tal modo si giunge all'opportunità di trattare aree dotate di segno.
Ad un rettangolo, definito da una coppia di vettori–ZZ, il primo orizzontale e il secondo verticale, si attribuisce area positiva sse si porta il primo vettore–ZZ ad avere la stessa direzione del secondo (verso Nord oppure verso Sud) ruotandolo nel verso antiorario o positivo; si attribuisce invece area negativa in caso contrario, cioè sse si porta il primo vettore–ZZ ad avere la stessa direzione del secondo ruotandolo nel verso orario o negativo.

Altri rettangoli si possono definire con una coppia di vettori applicati $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, uno dei quali orizzontale, l'altro verticale. A questi rettangoli vengono attribuite aree con segno come mostra la seguente figura:



Si osserva che l'area con segno è un invariante per tutte le traslazioni, per la rotazione di 90° e per le sue potenze.

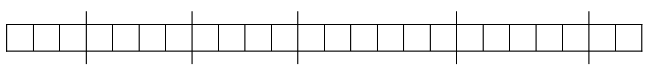
G12:C.03 Consideriamo una sequenza di interi $\mathbf{s} = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$; si dice **istogramma** della $\mathbf{s}$ la figura della griglia combinatoria costituita da n successive barre verticali di caselle collocate in modo che la i-esima abbia un vertice in $\langle i-1, 0 \rangle$ ed un vertice opposto in $\langle i, a_i \rangle$.
Ad es. gli istogrammi delle sequenze $\mathbf{s}_1 = \langle 3, 4, 4, 6, 5, 2 \rangle$ e $\mathbf{s}_2 = \langle 3, 2, 0, -3, -4, -1, 2, 4 \rangle$ sono



G12:C.04 Nel caso della sequenza $\mathbf{s}_1$ di interi positivi la somma dei componenti $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$ coincide con l'area della figura e la valutazione dell'area dell'istogramma può dare una utile presentazione visiva del meccanismo della sommatoria di interi positivi
Con questa raffigurazione risulta molto intuitiva la associatività della sommatoria espressa dalla formula

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \quad \text{con} \quad \sum_{i \in \emptyset} a_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=i_0}^{i_0} a_i = a_{i_0} \ .$$

Questa proprietà infatti traduce la additività delle cardinalità di insiemi disgiunti e in definitiva la additività delle lunghezze di stringhe giustapposte; questa proprietà si ottiene visivamente allineando in un unico nastro le barre di un istogramma relativo ai soli interi positivi: nel caso $\mathbf{s}_1$:



G12:C.05 Può essere utile estendere la precedente interpretazione visiva al caso degli interi non necessariamente positivi, come per la sequenza $\mathbf{s}_2$: in questo modo si visualizzano situazioni applicative come calcoli finanziari riguardanti sequenze di crediti (guadagni) e di debiti (perdite) (barre al di sopra e al di sotto dell'asse Ox); altre situazioni con grandezze di segno opposto riguardano spostamenti secondo le due orientazioni di una retta.
Il calcolo della sommatoria corrisponde alla differenza fra le aree delle figure formate risp. dalle barre al di sopra e al di sotto dell'asse (attribuendo naturalmente area zero alle barre senza caselle). Si possono pensare processi di accumulo separato delle caselle al di sopra e al di sotto dell'asse Ox e processi di annichilazione di un certo numero di caselle positive con un ugual numero di caselle negative.

G12:C.06 Un'area $Area(F)$ si può attribuire ad altre figure–ZZ F riconducibili a rettangoli R definiti da una coppia $\big\langle\langle h,0\rangle,\langle 0,k\rangle\big\rangle$ attraverso determinate trasformazioni chiedendo che queste lascino l'area invariata.
In questo modo si attribuiscono aree a trapezi e parallelogrammi definiti da coppie di vettori–ZZ applicati nello stesso punto di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Inoltre si attribuisce un'area ai triangoli–ZZ ottenibili "dimezzando" parallelogrammi.
La nozione di area può essere estesa a figure F delimitate da poligonali–ZZ chiuse, dette **poligonali di frontiera**, alle quali si considera attribuito un senso di percorrenza. La frontiera si considera percorsa in verso orario (risp. in verso antiorario) sse nel semipiano a sinistra (a destra) di ogni segmento della frontiera si trova sempre almeno un vertice di F.
Degli 8 rettangoli della figura precedente le prime 4 hanno frontiera antiorarie, le ultime 4 frontiere orarie.
Alle figure con frontiera oraria si attribuisce area positiva a quelle con frontiera antioraria, area negativa.
Una di queste figure F può dividersi, in genere in più modi, in due figure F_1 e F_2 con frontiere che presentano una sottopoligonale comune ma percorsa in sensi opposti. Si chiede allora che $Area(F) = Area(F_1) + Area(F_2)$.
Con successive suddivisioni ogni figura–ZZ si può ricondurre a unioni con segno di parallelogrammi o di triangoli e quindi si può calcolare la sua area come numero intero o semidispari.
Con questa nozione di area si possono impostare calcoli su integrali discreti applicabili a calcoli finanziari riguardanti sequenze di crediti e debiti.

G12:D. Coefficienti binomiali I

G12:D.01 Nel piano combinatorio $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ diciamo **passo WE** ogni segmento orientato avente come estremi due punti della forma $\langle h,k\rangle$ e $\langle h+1,k\rangle$, cioè ogni passo verso destra; diciamo **passo SN** ogni segmento orientato avente come estremi due punti della forma $\langle h,k\rangle$ e $\langle h,k+1\rangle$, cioè ogni passo verso l'alto; diciamo **passo NE** ogni segmento orientato avente come estremi due punti della forma $\langle h,k\rangle$ e $\langle h+1,k+1\rangle$; infine diciamo **passo SE** ogni segmento orientato avente come estremi due punti della forma $\langle h,k\rangle$ e $\langle h+1,k-1\rangle$. Diciamo inoltre **cammino-ZZ non discendente** ogni cammino costituito da una sequenza di passi WE e SN consecutivi. Ogni cammino non discendente può essere visualizzato in modo molto evidente.

In particolare chiamiamo **cammini binomiali** i cammini non discendenti che iniziano nell'origine $\langle 0,0\rangle$; loro estremi finali possono essere tutti i punti $\langle h,k\rangle\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, punti costituenti il cosiddetto primo quadrante del piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Definiamo dunque come **coefficiente binomiale simmetrico** relativo agli interi naturali h e k e denotiamo con $\mathsf{cbins}(h,k)$, il numero dei cammini binomiali che terminano nel punto $\langle h,k \rangle$.

Il simbolo cbins individua una **matrice enumerativa**, cioè una funzione del genere $\mathsf{cbins} \in \{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}\}$ i cui valori forniscono le cardinalità di insiemi finiti significativi.

G12:D.02 Dalla definizione si ricavano facilmente e in modo naturale varie proprietà dei coefficienti binomiali simmetrici.

(1) $\mathsf{cbins}(h,k) = \mathsf{cbins}(k,h)$ (simmetria)

Questa uguaglianza deriva dal fatto che la riflessione del piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ rispetto alla diagonale $h = k$ implica una biiezione fra i cammini binomiali che terminano in $\langle h,k \rangle$ e quelli che terminano in $\langle k,h \rangle$. Di conseguenza il numero dei cammini del primo di questi insiemi è uguale al numero dei cammini del secondo insieme ▮

(2) $\mathsf{cbins}(h,0) = \mathsf{cbins}(0,h) = 1$ (condizioni al contorno)

I cammini binomiali che terminano in un punto $\langle h,0 \rangle$ dell'asse orizzontale si riducono ad un solo cammino, quello costituito da h passi WE. Simmetricamente è uno solo il cammino binomiale che termina in $\langle 0,h \rangle$ ▮

(3) $\mathsf{cbins}(h,1) = \mathsf{cbins}(1,h) = h+1$

La collezione dei cammini binomiali che terminano in un punto $\langle h,1 \rangle$ della linea orizzontale $y = 1$ comprende i cammini binomiali di $h+1$ passi, uno solo dei quali è un passo SN; comprende quindi $h+1$ cammini; l'enunciato si completa per simmetria ▮

(4) $\mathsf{cbins}(h,2) = \mathsf{cbins}(2,h) = \dfrac{(h+2)(h+1)}{2}$

La collezione dei cammini binomiali che terminano in un punto $\langle h,2 \rangle$ della linea orizzontale $y = 2$ è data dall'insieme dei cammini di $h+2$ passi due dei quali sono passi SN, i restanti passi WE; dato che il primo dei due passi SN si può incontrare in una qualsiasi delle prime $h+1$ posizioni (chiamiamola posizione j) e il secondo in una qualsiasi delle restanti $h+2-j$ posizioni, il loro numero è uguale a $(h+1)+h+(h-1)...+2+1$, cioè ad $(h+2)(h+1)/2$; per concludere si invoca ancora la simmetria ▮

(5) $\mathsf{cbins}(h+1,k+1) = \mathsf{cbins}(h,k+1) + \mathsf{cbins}(h+1,k)$ (formula di addizione)

Ogni cammino binomiale che termina nel punto $T = \langle h+1,k+1 \rangle$ deve provenire aut dal punto $\langle h,k+1 \rangle$ immediatamente a sinistra di T aut da $\langle h+1,k \rangle$, punto immediatamente al di sotto di T; quindi il numero dei cammini binomiali che terminano nel punto $T = \langle h+1,k+1 \rangle$ è dato dalla somma del numero dei cammini binomiali che terminano nel punto $\langle h,k+1 \rangle$ e del numero dei cammini binomiali che terminano nel punto $\langle h+1,k \rangle$. Questo fatto e quello ottenibile per simmetria, si traducono nell'enunciato ▮

G12:D.03 Dalle uguaglianze esprimenti le condizioni al contorno e l'additività segue un procedimento per individuare effettivamente i valori della funzione che porta a una tabella come la seguente

$$\begin{array}{cccccccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
1 & 8 & 36 & 120 & 330 & 792 & 1716 & 3432 & \cdots \\
1 & 7 & 28 & 84 & 210 & 462 & 924 & 1716 & \cdots \\
1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & 462 & 792 & \cdots \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & 210 & 330 & \cdots \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 & 120 & \cdots \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & \cdots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots
\end{array}$$

Si tratta di una porzione di una matrice con le righe e le colonne individuate dai numeri naturali.

G12:D.04 I coefficienti binomiali simmetrici si possono interpretare anche come cardinalità di insiemi di sequenze binarie e di collezioni di sottoinsiemi.

Ogni cammino binomiale che termina in $\langle h, k\rangle$ si può rappresentare con una sequenza binaria di lunghezza $h + k$ e di peso h, cioè con una sequenza di $h + k$ bits (cifre uguali a 0 o 1) comprendente h bits uguali ad 1 (e quindi k bits uguali a 0). In effetti fra i suddetti cammini binomiali e queste sequenze binarie sussiste criptomorfismo, cioè questi due tipi di entità sono logicamente del tutto equivalenti; le sequenze binarie si possono considerare delle codifiche concise dei cammini binomiali. Quindi il coefficiente binomiale simmetrico $\mathsf{cbins}(h, k)$ si può interpretare come numero delle sequenze binarie di lunghezza $h + k$ e di peso h.

Consideriamo ora un generico insieme esplicito U, cioè un insieme finito individuato da un elenco (o lista) E dei suoi elementi; si osserva che questo elenco stabilisce un [[ordine sequenziale]] fra gli elementi di U. Ogni sottoinsieme S di U si può individuare con un sottoelenco di E, cioè con un elenco ottenuto da E eliminando gli elementi di U non appartenenti ad S. Denotiamo poi con $h := |S|$ il numero di elementi del sottoinsieme, con $n := |U|$ la cardinalità dell'intero U, che nelle attuali considerazioni può essere conveniente chiamare *insieme ambiente*, e con k il numero degli elementi del complementare di S in U, definendo quindi $k := n - h$.
Il sottoinsieme S, invece che con il sottoelenco suddetto, si può individuare con la sequenza binaria di lunghezza $n = h+k$ e di peso h ottenuta facendo riferimento ad E e assumendo per $i = 1, 2, ..., n$ come bit nella posizione i-esima 0 o 1 secondo che l'elemento nella posizione i di E non appartiene oppure appartiene al sottoinsieme S. Osserviamo che questa sequenza binaria costituisce una rappresentazione della [[funzione indicatrice]] del sottoinsieme S di U; precisamente la rappresentazione relativa alla sequenzializzazione di U fornita dall'elenco E.

G12:D.05 A questo punto risulta individuata un'applicazione significativa dei cammini binomiali terminanti in $\langle h, n - h\rangle$: ciascuno di essi consente di individuare biunivocamente un sottoinsieme S di h elementi di un insieme ambiente U di n elementi ($n = h, h + 1, ...$), quando si faccia riferimento ad un elenco esplicito E degli elementi dell'ambiente. Si osserva che un cammino binomiale di lunghezza n potrebbe servire per descrivere visivamente un processo consistente nello scorrere l'elenco E degli elementi di U per decidere per ciascuno di essi se va incluso o meno in un sottoinsieme S che si vuole costituito da elementi da privilegiare in quanto soddisfano una qualche condizione, ovvero che si devono selezionare per una qualche applicazione.
Risulta inoltre disponibile un'altra interpretazione dei cooefficienti binomiali simmetrici, forse la più rilevante: $\mathsf{cbins}(h, k)$ fornisce il numero dei sottoinsiemi con h elementi di un insieme di cardinalità $h + k$.

Si osserva anche che ogni sottoelenco che fornisce un sottoinsieme S di h elementi di un ambiente U di $h+k$ elementi dato mediante un elenco esplicito non è che una combinazione senza ripetizione di h degli $h+k$ contrassegni degli elementi di S. Quindi $\mathsf{cbins}(h,k)$ fornisce anche il numero delle combinazioni senza ripetizioni di lunghezza h che si possono ottenere servendosi di $h+k$ elementi.
Per il numero di queste sequenze si trova che è fornito dal numero delle disposizioni di $h+k$ oggetti di lunghezza h diviso per $h!$; quindi

$$\mathsf{cbins}(h,k) = \frac{(h+k)^{\underline{h}}}{h!} = \frac{(h+k)!}{h!\,k!} \ .$$

G12:D.06 Introduciamo ora i **coefficienti binomiali** usuali come varianti dei simmetrici mediante la seguente formula

$$\binom{n}{h} := \mathsf{cbins}(h, n-h) \ ;$$

in essa i coefficienti binomiali sono individuati con la usuale notazione introdotta da Albert von Ettinghausen che può leggersi "n binomiale h" oppure "scelte di h in n". Per il collegamento inverso serve la formula

$$\mathsf{cbins}(h,k) = \binom{h+k}{h} \ .$$

A questo punto può essere utile riscrivere per i coefficienti binomiali usuali i risultati trovati in precedenza:

(1) $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(2) $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

(3) $$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

(4) $$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

(5) $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

(6) $$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \ .$$

Può anche essere inoltre utile esplicitare le interpretazioni di queste formule in termini di insiemi e sottoinsiemi.

G12:D.07 La tavola numerica dei coefficienti simmetrici viene riferita ai due assi delle variabili h e k; i punti che corrispondono ai sottoinsiemi di un ambiente di $n=h+k$ oggetti relativi a diversi valori di h e $k=n-h$ si trovano allineati sulla linea di equazione cartesiana $x+y=n$. Per ottenere i valori dei coefficienti binomiali riferiti agli assi delle variabili n ed h (o k) basta modificare la tabella precedente facendo slittare la seconda linea dal basso, relativa a $k = 1$, di una posizione a destra, la linea relativa a $k = 2$ di due posizioni e così via. Si ottiene quindi la tabella triangolare

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & \cdots \\
 & & & & & & & 1 & 8 & \cdots \\
 & & & & & & 1 & 7 & 28 & \cdots \\
 & & & & & 1 & 6 & 21 & 56 & \cdots \\
 & & & & 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & \cdots \\
 & & & 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & \cdots \\
 & & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & \cdots \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots
\end{array}$$

In questo quadro non è difficile individuare una variante nel solo aspetto del [[triangolo di Chou-Tartaglia-Pascal]], ottenibile con una sorta di rotazione della suddetta tabella.

G12:D.08 Sommando i valori che si trovano nelle successive colonne si ottiene la successione delle potenze di 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ... In effetti gli interi positivi nella colonna relativa a un dato valore di n forniscono i numeri dei sottoinsiemi di un ambiente di n elementi aventi rispettivamente $h = 0, 1, 2, ..., n-1, n$ elementi. La somma di queste cardinalità fornisce il numero complessivo dei sottoinsiemi di un ambiente di n elementi: questo coincide con il numero delle sequenze binarie di lunghezza n che, come abbiamo visto, si possono porre in corrispondenza biunivoca con i suddetti sottoinsiemi (sono le rispettive funzioni indicatrici) e tale numero è chiaramente pari a 2^n (coincide con il numero delle [[disposizioni con ripetizione]] di lunghezza n di 2 oggetti).
Risulta quindi dimostrata la seguente **formula di sommazione per i coefficienti binomiali**:

(1) $$\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} = 2^n \ .$$

Questa identità si può anche ricavare come caso particolare dello sviluppo del binomio di Newton, formula che vedremo più avanti e che esprime un fatto più elaborato del precedente.
Conviene osservare che la formula di sommazione per un dato n corrisponde alla distribuzione dei nodi del [[reticolo booleano]] dei sottoinsiemi di un ambiente di n elementi sui diversi livelli (ranghi) di tale reticolo graduato. Inoltre la formula precedente può essere utilmente considerata da un punto di vista probabilistico in relazione alla cosiddetta "distribuzione binomiale".

G12:D.09 I coefficienti binomiali si trovano soddisfare una grande varietà di identità. Prima di presentare le più importanti, conviene effettuare una prima estensione dei coefficienti binomiali ponendo

(1) $$\forall k = n+1, n+2, ... \ : \ \binom{n}{k} := 0 \ .$$

La formula

(2) $$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

discende dalla :4.f(6) isolando i primi fattori del numeratore e del denominatore ▮

(3) $$\sum_{h=0}^{n} \binom{h}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Si ottiene applicando più volte la formula di addizione :4.f(5):

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k+1}$$
$$= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k} + \binom{k}{k+1}.$$

Per la (1) l'ultimo addendo vale 0, come ogni $\binom{k}{m}$ per $k < m$ ∎

(4)
$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

Entrambi i membri sono uguali a $\dfrac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}$ ∎

G12:D.10 Prop. sviluppo del binomio Siano x e y due variabili nel campo dei numeri razionali. Vale la seguente identità fra polinomi nelle due variabili

(1)
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$$

Dim.: Dimostriamo la formula per induzione; essa vale per $n = 0$ (e per $n = 1$). Supponiamola vera per un generico esponente n intero positivo e dimostriamo che vale la

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k\, y^{n+1-k} \ .$$

Questa si ottiene dal seguente sviluppo

$$(x+y)(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}\, y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k+1}$$
$$= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1}\, y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k+1} + y^{n+1}$$
$$= x^{n+1} + \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} x^h\, y^{n-h+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k+1} + y^{n+1}$$
$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] x^k\, y^{n+1-k} + y^{n+1} = [\text{per :4f.(5)}] = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k\, y^{n+1-k}$$ ∎

G12:D.11 Si osserva che la formula :4.h(1) si può considerare un caso particolare dalla precedente relativo alla specializzazione valori $x = y = 1$.
Se invece si pone $y = 1$ si ottiene

(1)
$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Inoltre se nella precedente si modifica y in $-y$ si ottiene

(2)
$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$$

G12:E. Piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e numeri razionali

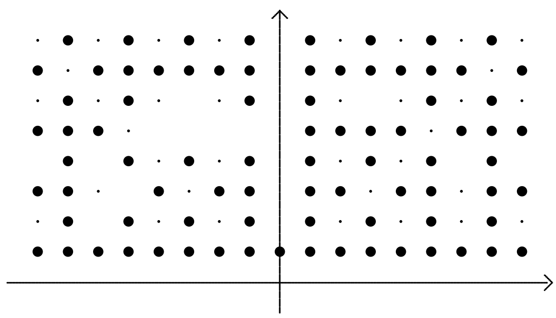
G12:E.01 In questo paragrafo introduciamo i numeri razionali attraverso una loro interpretazione geometrica nel piano combinatorio, come strumenti che consentono di risolvere importanti problemi di calcolo.
Ricordiamo preliminarmente la **fattorizzazione mediante numeri primi di un intero positivo** m, espressione della forma

$$ftrprm(m) = 2^{e_2} 3^{e_3} 5^{e_5} ... p^{e_p} \ , \quad \text{con } p \in \mathbb{P} \text{ ed } e_2, e_3, ..., e_p \in \mathbb{N} \ ,$$

e ricordiamo che la fattorizzazione è unica.
Ad es. $ftrprm(48) = 2^4 \cdot 3$, $ftrprm(90) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

G12:E.02 Due punti–ZZ $\langle i, j\rangle$ e $\langle h, k\rangle$ si dicono **punti allineati con l'origine**, e si scrive $\langle i, j\rangle E_l \langle h, k\rangle$, sse $i \cdot k = j \cdot h$. Ad es. $\langle 3, 2\rangle E_l \langle 9, 6\rangle$, $\langle 14, -4\rangle E_l \langle 35, -10\rangle$, $\langle -40, 30\rangle E_l \langle 60, -45\rangle$.
Osserviamo che $\langle 0, 0\rangle$ si trova nella relazione E_l con ogni altro punto–ZZ.
Si trova facilmente che E_l è una relazione di equivalenza entro $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \langle 0, 0\rangle$. Tra le sue classi si hanno in particolare l'asse orizzontale e l'asse verticale.
Le classi della E_l si dicono **rette–ZZ passanti per l'origine**. Ciascuna di queste classi, ad esclusione dell'asse orizzontale, viene detta **classe–ZZ razionale**.
Ricorrendo alla fattorizzazione mediante primi, si vede che ogni classe di E_l contiene una ed una sola coppia $\langle n, d\rangle$ con $n \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{P}$ t.c. $|n| \perp d$. Tale coppia di interi privi di divisori comuni viene detta **coppia ridotta della classe razionale** e l'insieme delle coppie ridotte costituisce un insieme di rappresentativi delle classi–ZZ razionali.

La raffigurazione delle coppie–ZZ come punti delle rette–ZZ delle classi di E_l più vicini all'asse orizzontale ed appartenenti al semipiano superiore $\mathbb{Z} \times \mathbb{P}$ è la seguente:



(1) Eserc. Studiare le simmetrie dell'insieme delle coppie ridotte.

G12:E.03 Si osserva che le classi razionali aventi coppie ridotte della forma $\langle z, 1\rangle$, cioè appartenenti alla linea orizzontale $\{x \in \mathbb{Z} :| \langle x, 1\rangle\}$ immediatamente sopra l'asse orizzontale, sono in evidente biiezione con i numeri interi relativi.
Introduciamo ora l'**insieme dei numeri razionali**, che si denota $\mathbb{Q}$, come insieme di entità ottenibili per astrazione collettivizzante dalle classi razionali che estende l'insieme degli interi relativi e nel quale sono definite operazioni di somma, differenza e prodotto che estendono quelle definite su $\mathbb{Z}$.
Vedremo inoltre che su $\mathbb{Q}$ si può definire un'operazione, di grande utilità, la divisione, che costituisce un notevole ampliamento del passaggio al quoziente fra interi e permette di effettuare l'inversione della moltiplicazione.

Un numero razionale r, in quanto associato ad una classe–ZZ razionale in una corrispondenza biunivoca, può essere rappresentato da tutte le scritture h/k, o dalle equivalenti $\frac{h}{k}$, per ogni $\langle h,k\rangle$ di tale classe. Le h/k vengono dette **forme frazionarie** esprimenti il razionale r. Sono particolarmente utili le **forme frazionarie ridotte** n/d corrispondenti alle coppie ridotte rappresentative delle varie classi.
Invece che di forma frazionaria, in breve si parla di **frazione**; di una frazione h/k h è detto **numeratore** e k **denominatore**. Denotiamo $\mathbb{Q}_{ffr}$ l'insieme delle forme frazionarie ridotte dei numeri razionali.
Il passaggio da una generica forma frazionaria alla frazionaria ridotta si dice **riduzione della frazione ai minimi termini** e si effettua riferendosi alle fattorizzazione mediante primi di numeratore e denominatore. Si dice invece più genericamente **semplificazione di una frazione** la sua trasformazione in una equivalente avente numeratore e denominatore minori e non necessariamente ridotta: una frazione h/k si semplifica trovando un intero positivo c divisore comune ad h e k e sostituendola con $\frac{h/c}{k/c}$.

Le frazioni della forma $\frac{n \cdot f}{f}$ si dicono **frazioni improprie**. I numeri razionali dati da frazioni improprie, cioè da frazioni ridotte della forma $z/1$, si possono identificare con i numeri interi, in quanto i due insiemi sono equivalenti logicamente.

G12:E.04 Dobbiamo ora giustificare il termine "numero" per i razionali definendo sulle loro forme frazionarie le operazioni di somma, sottrazione e prodotto e introducendo una relazione d'ordine in modo che estendano le omologhe definite sugli interi, cioè in modo che applicate alle frazioni apparenti si riducano a quelle definite su $\mathbb{Z}$ e in modo che mantengano la maggior parte delle proprietà di queste. Dobbiamo anche mostrare che questa estensione risulta effettivamente utile grazie al fatto che, nell'ambito dei razionali, sono disponibili procedimenti di calcolo non definibili nell'ambito degli interi e di ampia utilità. Precisamente sopra i razionali si introduce una operazione di divisione che è l'inversa del prodotto e che si riduce alla divisione esatta definita su coppie di numeri interi dei quali il primo multiplo del secondo, ma che si può effettuare su tutte le coppie di razionali ad esclusione di quelle con secondo componente nullo. Essa inoltre si può effettuare con automatismi.

Siano dunque $m,p \in \mathbb{Z}$ e $n,q,c,k \in \mathbb{Z}_{+-}$ e cominciamo con due regole che riassumono proprietà delle forme frazionarie.

– Regola dell'uguaglianza: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \iff mq = np$.

– Regola di semplificazione: $\frac{mc}{nc} = \frac{m}{n}$.

G12:E.05 Definiamo ora le operazioni fra frazioni:

– **somma di due frazioni**: $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} := \frac{m \cdot q + p \cdot n}{n \cdot q}$;

– **opposto di una frazione**: $-\left(\frac{m}{n}\right) := \frac{-m}{n} = \frac{m}{-n}$;

– **prodotto di due frazioni**: $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} := \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$;

– **divisione fra due frazioni**: $\left(\frac{m}{n}\right) : \left(\frac{k}{q}\right) := \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{k} = \frac{m \cdot q}{n \cdot k}$;

– **inversa di una frazione**: $\left(\frac{m}{n}\right)^{-1} := \frac{n}{m}$.

G12:E.06 **(1) Eserc.** Dimostrare che la somma di frazioni è commutativa e associativa. Dimostrare che la somma di una frazione e della oppoesta dà 0. Dimostrare che il prodotto è commutativo e associativo e che $1/1$ è elemento neutro per tale operazione. Dimostrare la distributività del prodotto rispetto alla somma.

Si osserva che la divisione è l'operazione inversa del prodotto, grazie al fatto che $\left(\frac{m}{n} : \frac{k}{q}\right) \cdot \frac{k}{q} = \frac{m}{n}$.
Si osserva anche che la divisione estende in misura notevole l'operrazione di quoziente fra un intero ed un suo sottomultiplo. Si vede inoltre che la divisione si mantiene non commutativa:

$$((12/5)\ /\ (3/2))\ /\ (7/9) \ = \ 75/35 \ \neq \ (12/5)\ /\ ((3/2)\ /\ (7/9)) \ = \ 162/35.$$

G12:E.07 Per estendere l'ordinamento degli interi alle forme frazionarie basta considerare quelle con denominatori positivi, chiedendo che sia $\forall n, q \in \mathbb{P},\ m, p \in \mathbb{Z} : \ \dfrac{m}{n} \leq \dfrac{p}{q} \iff m \cdot q \leq p \cdot n$. Si osserva che questa nel caso $n = q = 1$ si riduce a una tautologia, fatto che garantisce che questa relazione estende quella sugli interi.
Si possono allora distinguere i **razionali positivi**, $> 0 = 0/1$, dati da frazioni con numeratore e denominatore dello stesso segno, dallo 0 e dai **razionali negativi** minori di 0, dati da frazioni con numeratore e denominatore di segni opposti. chiaramente se $m, n, k, q \in \mathbb{P}$ si ha $-\dfrac{m}{n} < 0 < \dfrac{k}{q}$.
L'insieme dei numeri razionali positivi si denota $\mathbb{Q}_+$, quello dei razionali negativi $\mathbb{Q}_-$.

La relazione $\leq$ è evidentemente riflessiva ed antisimmetrica; inoltre è transitiva, in quanto:
$\forall m, p, r \in \mathbb{Z},\ n, q, s \in \mathbb{Z}_{nz} \ : \ \dfrac{m}{n} \leq \dfrac{p}{q} \wedge \dfrac{p}{q} \leq \dfrac{r}{s} \iff mqs \leq pns \leq rnq \implies ms \leq rn \iff \dfrac{m}{n} \leq \dfrac{r}{s}$.

G12:E.08 Si definiscono le **potenze intere dei numeri razionali** ponendo:

$$\forall m, p \in \mathbb{N}\ ,\ n \in \mathbb{N}_{nz} \quad : \quad \left(\frac{m}{n}\right)^p := \frac{m^p}{n^p},\ \ \left(\frac{m}{k}\right)^{-p} := \left(\left(\frac{m}{k}\right)^p\right)^{-1} = \frac{k^p}{m^p}\ .$$

(1) Eserc. Verificare le seguenti proprietà delle potenze dei razionali:

$$\forall m \in \mathbb{N}\ ,\ n \in \mathbb{N}_{nz} \quad : \quad \left(\frac{m}{n}\right)^0 = 1 \qquad \left(\frac{m}{n}\right)^{p+q} = \left(\frac{m}{n}\right)^p \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^q$$

(2) Eserc. Verificare le seguenti disuguaglianze concernenti potenze dei razionali:

$$m > n > 0, p > 0 \implies \left(\frac{m}{n}\right)^p > 1 \qquad m > n > 0, p < 0 \implies \left(\frac{m}{n}\right)^p < 1$$
$$n > m > 0, p > 0 \implies \left(\frac{m}{n}\right)^p < 1 \qquad n > m > 0, p < 0 \implies \left(\frac{m}{n}\right)^p > 1$$

G12:E.09 Due vettori–ZZ $\langle i, j\rangle$ e $\langle h, k\rangle$ si dicono **equipendenti** sse si trovano due interi naturali a e b t.c. $a \cdot \langle i, j\rangle = b \cdot \langle h, k\rangle$. Ad es. sono equipendenti$\langle 4, 3\rangle$ e $\langle 12, 9\rangle$, $\langle 10, 2\rangle$ e $\langle -15, -3\rangle$, $\langle -1, 1\rangle$ e $\langle 3, -3\rangle$.
Si mostra facilmente che la equipendenza è una equivalenza di vettori–ZZ.
Una classe di equipendenza è formata dai vettori orizzontali $\langle z, 0\rangle$ per $z \in \mathbb{Z}$; un'altra dai vettori verticali $\langle 0, x\rangle$ per $x \in \mathbb{P}$. Le classi di equipendenza, ad esclusione della classe dei vettori orizzontali, sono in biiezione con l'insieme dei razionali.
Si dice **retta–ZZ** ogni insieme dato da $\{n \in \mathbb{Z} :| \langle i, j\rangle + n \cdot \langle h, k\rangle\}$, per i, j, h, k interi arbitrari.

G12:E.10 Si dice numero frazionario proprio o **frazione propria** ogni forma frazionaria ridotta di un razionale positivo minore di 1. Evidentemente ogni razionale si può scrivere come somma di un intero e di una frazione propria.
Si dice **numero frazionario unitale** o **frazione dell'unità** ogni razionale la cui frazione ridotta ha la forma $\dfrac{1}{n}$ per qualche n intero positivo.

Si verifica facilmente che per ogni n intero positivo

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \ .$$

Quindi ogni frazione unitale si può decomporre come frazione di due (o più) frazioni unitali minori.
Le frazioni unitali hanno avuto particolare importanza nella matematica dell'antico Egitto. Infatti gli antichi egizi hanno scoperto che tutti i calcoli aritmetici sui numeri frazionali si possono ridurre a calcoli su frazioni unitali.
In effetti ogni frazione propria si può scrivere come somma di frazioni unitali con denominatori tutti diversi. Questo fatto era noto nel passato ed è stato affermato senza dimostrazione da Fibonacci; è stato riscoperto e dimostrato da James Sylvester nel XIX secolo.
Ad esempio si hanno le seguenti decomposizioni: $\dfrac{7}{24} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{24}$ e $\dfrac{2}{35} = \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{630}$.

G12:F. Scritture decimali dei numeri razionali

G12:F.01 Ci proponiamo di ampliare le notazioni decimali ai numeri razionali. Il problema riguarda principalmente le frazioni proprie: le considerazioni che si sviluppano per questi razionali si possono poi estendere facilmente ai razionali positivi e da questi a tutti i razionali. Infatti per ogni razionale positivo si può scrivere $\dfrac{h}{k} = z + \dfrac{n}{m}$ e ogni razionale negativo si può scrivere nella forma $-z - \dfrac{n}{m}$, dove z è un intero naturale e $\dfrac{n}{m}$ frazione propria.

G12:F.02 Si dice **numero razionale proprio esprimibile in forma decimale limitata** ogni numero razionale esprimibile nella forma

$$\frac{n}{m} = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_k}{10^k}$$

con $n < m$ e k intero positivo. Questo numero si scrive anche come

$$\frac{n}{m} = \frac{c}{10^k} \quad \text{con} \quad c := c_1\, 10^{k-1} + c_2\, 10k - 2 + \cdots + c_k$$

Mediante la notazione decimale per c si ottiene la notazione decimale per il razionale proprio dato

$$\frac{n}{m} = 0.c_1 c_2 \ldots c_k$$

Ad esempio

$$\frac{1}{16} = \frac{6}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4} = \frac{625}{10^4} = 0.0625$$

In generale ogni numero razionale avente frazione ridotta della forma $\frac{m}{2^h \cdot 5^k}$ è esprimibile in forma decimale limitata. Infatti se $h \le k$ si ha $\dfrac{m \cdot 2^{k-h}}{10^k}$, mentre se $h \ge k$ si ha $\dfrac{m \cdot 5^{h-k}}{10^h}$.

G12:F.03 Non ammettono invece forma decimale limitata frazioni proprie come

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{300} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{11} = \frac{9}{99} = \frac{9}{100} + \frac{9}{9900} = \frac{9}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{11} = \frac{9}{100} + \frac{9}{10000} + \frac{1}{10000} \cdot \frac{1}{11}$$

Dalle espressioni trovate si intuisce come si possa procedere a cercare addendi della forma $\dfrac{c_k}{10^k}$ con k sempre maggiore senza arrivare mai ad una conclusione.

Nuneri razionali come i precedenti si dicono **numeri razionali periodici**.
Per i due numeri precedenti si può scrivere

$$\frac{1}{3} = 0.333\overline{3} \qquad \frac{1}{11} = 0.090909\overline{09}$$

Il numero di cifre che si devono ripetere illimitatamente si dice **periodo** della scrittura: $\frac{1}{3}$ ha periodo 1, $\frac{1}{11}$ ha periodo 2. In generale si vede che un numero razionale unitale $\frac{1}{r}$ con $r \notin 2^h \cdot 5^k \cdot \mathbb{P}$ è un numero periodico di periodo p se $10^{p-1} < r < 10^p$

G12:G. Aree e determinante 2 per 2

G12:G.01 Consideriamo l'effetto della trasformazione data dalla matrice $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; Per i versori di base si ha $T_f\langle 1,0\rangle = \langle 3,1\rangle$ e $T_f\langle 0,1\rangle = \langle\rangle 2,4\rangle$ e il circuito che delimita nel verso antiorario il quadrato di base $\big\langle\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,0\rangle\big\rangle$ viene trasformato nel circuito $\big\langle\langle 0,0\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 0,0\rangle\big\rangle$ che delimita il parallelogramma della trasformazione lineare. L'area di questo parallelogramma, evidentemente positiva, si ottiene sottraendo dall'area del quadrato con vertice in $\langle 5,5\rangle$ le aree dei due rettangoli con un lato appartenente a un asse $(2\cdot 2\cdot 1)$, le aree dei triangoli rettangoli in basso e in alto $(1\cdot 3)$ e le aree dei triangoli rettangoli a sinistra e a destra $(2\cdot 4)$; l'area del parallelogramma dunque vale 10.
Se in generale si considera la trasformazione data dalla matrice $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ il parallelogramma viene delimitato dal cammino $\big\langle\langle 0,0\rangle\langle a,c\rangle, \langle a+b, c+d\rangle, \langle b,d\rangle, \langle 0,0\rangle\big\rangle$ e la sua area è data da

$$(a+b)(c+d) - 2bc - ca - bd = ad + bc - 2bc = ad - bc\ .$$

L'area del parallelogramma orientato trasformato del quadrato di base orientato viene data da una funzione nelle entrate della matrice 2×2 data da una ben definita espressione e chiamata **determinante** della matrice M; per questa funzione si scrive

$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := ad - cd\ .$$

G12:G.02 L'espressione trovata vale quali che siano i segni delle entrate della matrice. Infatti la catena di uguaglianze che hanno condotto alla precedente espressione vale quali che siano i segni delle entrate della matrice, cioè i segni delle coordinate dei vertici del parallelogramma della trasformazione.
Il segno del determinante:
- è positivo sse l'angolo $\langle a,c\rangle, \langle 0,0\rangle, \langle b,d\rangle$ è positivo, in quanto il circuito che delimita il parallelogramma orientato è antiorario;
- è negativo sse tale angolo è negativo, caso in cui il circuito che delimita il parallelogramma orientato è antiorario;
- è negativo sse l'angolo è nullo, cioè sse $\langle a,c\rangle$ e $\langle b,d\rangle$ sono allineati con l'origine, situazione geometrica che equivale all'uguaglianza $ad = bc$.

G12:G.03 Il determinante, definito finora solo per matrici 2×2 sugli interi, è un numero che fornisce una caratterizzazione importante per le matrici quadrate e per le corrispondenti trasformazioni. Può

essere utile prendere in considerazione i determinanti delle trasformazioni speciali viste in :C e :D, insieme ai corrispondenti parallelogrammi.
Tra le trasformazioni con determinante nullo vi sono la trasformazione $\mathbf{0}_{2\times2}$ nel vettore nullo e le proiezioni Prj_x Prj_y; i corrispondenti parallelogrammi si riducono rispettivamente al punto origine, al segmento delimitato da $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\langle 0,0\rangle\big\rangle$ e a quello delimitato da $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle\langle 0,0\rangle\big\rangle$.

Tra le trasformazioni con determinante uguale a 1 vi sono
- $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ avente come parallelogramma il cammino delimitante il quadrato di base;
- gli **scivolamenti** $Glide_x(b)$ con parallelogrammi delimitati da $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle b+1,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle 0,0\rangle\big\rangle$;
- gli **scivolamenti** $Glide_y(c)$ con parallelogrammi delimitati da $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle 1,c\rangle,\langle 1,c+1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 0,0\rangle\big\rangle$;
- la **rotazione** $Rot_{\mathbf{0}}(90°)$ con parallelogramma delimitato da $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle -1,1\rangle,\langle -1,0\rangle,\langle 0,0\rangle\big\rangle$;
- la **rotazione** $Rot_{\mathbf{0}}(180°)$ con parallelogramma delimitato da $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle -1,0\rangle,\langle -1,-1\rangle,\langle 0,-1\rangle,\langle 0,0\rangle\big\rangle$;
- la **rotazione** $Rot_{\mathbf{0}}(270°)$ con parallelogramma delimitato da $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle 0,-1\rangle,\langle 1,-1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 0,0\rangle\big\rangle$.

Tutte queste trasformazioni sono invertibili e non cambiano i versi dei circuiti-ZZ.

Tra le trasformazioni con determinante uguale a -1 vi sono:
- la **riflessione rispetto all'asse orizzontale** con parallelogramma delimitato da $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,-1\rangle,\langle 0,-1\rangle,\langle 0,0\rangle\big\rangle$;
- la **riflessione rispetto all'asse verticale** con parallelogramma delimitato da $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle -1,1\rangle,\langle -1,0\rangle,\langle 0,0\rangle\big\rangle$;
- la **riflessione rispetto alla diagonale principale** con parallelogramma delimitato da $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 0,0\rangle\big\rangle$;
- la **riflessione rispetto alla codiagonale principale** con parallelogramma delimitato da $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle 0,-1\rangle,\langle -1,-1\rangle,\langle -1,0\rangle,\langle 0,0\rangle\big\rangle$;
- la simmetria centrale con centro nell'origine $Centrsym_{\mathbf{0}}$ con parallelogramma delimitato da $\big\langle\langle 0,0\rangle,\langle -1,0\rangle,\langle -1,-1\rangle,\langle 0,-1\rangle,\langle 0,0\rangle\big\rangle$.

Tutte queste trasformazioni sono invertibili e cambiano i versi dei circuiti-ZZ.

Abbiamo infine considerate le dilatazioni $\mathrm{D}il_{d_x,d_y}$ (per d_x e d_y diversi da zero) il cui determinante è uguale a $d_x \cdot d_y$. Queste non cambiano i versi dei circuiti sse entrambi i parametri hanno lo stesso segno e lo cambiano sse hanno segni opposti. Esse sono invertibili sse il loro determinante è uguale a 1 o a -1, fatto che si verifica in particolare con l'identità, con le riflessioni rispetto agli assi e con la simmetria con centro nell'origine.

G12:G.04 Eserc. Determinare graficamente come vengono modificati dalle trasformazioni speciali i due circuiti $\big\langle\langle 1,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,1\rangle\big\rangle$ e $\big\langle\langle 1,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,1\rangle\big\rangle$. Discutere quanto le modifiche di questi circuiti riescano a caratterizzare le trasformazioni lineari che le provocano.

G12:G.05 Esaminiamo ora come si modificano i determinanti delle matrici in $\mathsf{Mat}_2(\mathbb{Z})$ in conseguenza di determinati cambiamenti delle matrici stesse; spesso ci riconduciamo al suo significato geometrico e ci riferiamo ai circuiti caratteristici.
Qui di seguito denotiamo con $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ed N due matrici di $\mathsf{Mat}_2(\mathbb{Z})$, con T e U le corrispondenti trasformazioni, con d ed e due interi.

G12:G.06 Prop. (1) Prop. L'applicazione di una trasformazione lineare T porta a modificare l'area di ogni figura delimitata da una poligonale orientata chiusa per il determinante della trasformazione $\det(T)$.

Dim.: La moltiplicazione per $\det(T)$ si riscontra per ogni quadrato elementare, per ogni rettangolo in quanto unione di quadrati elementari, per ogni triangolo rettangolo con cateto orizzontale in quanto metà di rettangolo, per ogni triangolo in quanto ottenuto componendo disgiuntamente triangoli rettangoli e per ogni figura delimitata da poligonali orientate chiuse in quanto triangolarizzabili.

(2) Prop. $\det(M^\top) = \det(M)$.
Dim.: Discende dalla invarianza dell'espressione rispetto allo scambio fra b e c ∎

(3) Prop. Se M' si ottiene dalla M scambiando le sue colonne $\det(M') = -\det(M)$.
Dim.: Il parallelogramma caratteristico cambia di verso ∎

(4) Prop. Se M' si ottiene dalla M scambiando le sue righe $\det(M') = -\det(M)$.
Dim.: Le trasformazione della matrice si ottiene dalla applicazione successiva delle modifiche precedenti e il determinante subisce le due modifiche precedenti, che portano al cambiamento di segno ∎

G12:G.07 Prop. $\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$
Dim.: L'applicazione successiva delle trasformazioni porta alle successive moltiplicazioni delle aree ∎

G12:G.08 Prop. Se M' si ricava da M sommando alla prima riga la seconda $\det(M') = \det(M)$
Se M' si ricava da M sommando alla prima colonna la seconda $\det(M') = \det(M)$