Capitolo G10:
Algoritmi, interi, insiemi, relazioni, funzioni

G10:0.a Questo capitolo è dedicato alla introduzione delle prime nozioni matematiche di base necessarie alla comprensione della geometria. All'inizio si introducono le computazioni e gli algoritmi, considerati come motivazioni per gli sviluppi successivi, sottolineando che è sufficiente chiedere che essi agiscano su stringhe, cioè sulle entità costituzionalmente più elementari. Mediante stringhe si definiscono entità più notoriamente legate alla matematica come interi ed insiemi (finiti), ma anche entità come gli elenchi notoriamente legate all'informatica; qui si incontrano anche i primi esempi di operazioni, entità che fin dall'inizio cerchiamo di trattare sia in modo astratto che con attenzione alla implementazione.
Sulla precedenti entità si definiscono nozioni via via più ricche come relazioni, funzioni e matrici; alle prime operazioni su interi e insiemi si aggiungono i prodotti.
Le prime nozioni riguardavano oggetti finiti e quindi evidentemente oggetti di elaborazioni concrete; per procedere si rende tuttavia necessaria una prima nozione di infinito la cui natura è soltanto potenziale: si definiscono procedure che si chiede possano operare illimitatamente (si fa riferimento alle macchine di Turing) e con queste gli insiemi numerabili, a cominciare dall'insieme degli interi naturali. Il problema dell'operazione inversa della somma porta a definire l'operazione di differenza e all'ampliamento dei naturali all'insieme degli interi relativi: questo è un ambiente nel quale si possono sviluppare calcoli più efficaci e in esso si possono trattare in modo soddisfacente le operazioni somma, differenza e prodotto.

G10:1. Problemi, modelli, stringhe e computazioni

G10:1.a In queste pagine la matematica viene considerata come la disciplina delle attività computazionali e quindi come area di conoscenze in stretto contatto con l'informatica.
Usiamo il termine **computazioni** per comprendere svariate attività che possono essere effettuate da **esecutori** che possono essere persone o macchine in grado di operare con precisione su informazioni ben definite.
Una computazione, nel suo complesso, può considerarsi un processo che trasforma informazioni inizialmente disponibili, i **dati**, in informazioni conseguenti che costituiscono i suoi **risultati**. Il fine di una computazione è l'ottenimento di risultati che diano soluzione a un **problema** espresso dai dati.
Le computazioni di cui si occupa la matematica si vuole che riguardino problemi rilevanti, cioè problemi di ampia portata, problemi che si presentano in numerose circostanze. Si vuole inoltre che le computazioni di un certo tipo possano essere riprodotti con risultati coerenti ed attendibili nelle diverse ciscostanze. Quindi la matematica, nei confronti della soluzione dei problemi mediante procedimenti computazionali, ha un atteggiamento essenzialmente metodologico. Essa si propone di individuare **metodi** computazionali di portata tendenzialmente generale, metodi che possano essere applicati con elevate garanzie di correttezza a numerosi casi concreti particolari.

G10:1.b Spesso per essere chiari si deve distinguere fra un problema e le sue diverse istanze. Un esempio di **istanza di problema** potrebbe riguardare il calcolo del volume di un contenitore cubico avente il lato

di 31 cm; il problema entro il quale si colloca questa istanza riguarda il calcolo del volume di un cubo il cui lato ha una lunghezza rappresentata da una x, un simbolo che sta a rappresentare un qualunque "valore numerico reale positivo". A un simbolo che si utilizza per rappresentare uno generico dei valori di una data gamma viene chiamato **variabile**. La tendenza alla generalità metodologica della matematica rende le variabili strumenti matematici molto importanti.
La soluzione dell'istanza del problema viene ottenuta con un calcolo specifico: $(31\text{cm})^3 = 29\,791\text{cm}^3$.
La soluzione del problema in generale viene fornita da una formula: $V = x^3$.
Il calcolo specifico può essere effettuato servendosi soltanto di una matita e un foglietto. La soluzione generale invece serve come nozione generale per le persone che devono effettuare dei calcoli nell'ambito della geometria dell'ordinario spazio tridimensionale e viene utilizzata per arricchire meccanismi e sistemi per il calcolo automatico, ad esempio i pacchetti software del settore della progettazione computerizzata (CAD = [[*computer assisted design*]]).

G10:1.c Alla matematica interessano procedimenti computazionali che possono rappresentarsi come segue

Dati caratterizzanti una singola istanza	$\longrightarrow$	Procedura computazionale valida per tutte le istanze	$\longrightarrow$	Risultati per la singola istanza

Come si è detto, la procedura può essere eseguita da un esecutore umano o da un meccanismo. Dalle antiche civiltà (Mesopotamia, Egitto, India, Cina, ...) fino al 1900 circa sono stati disponibili solo strumenti di calcolo costituiti da apparati meccanici; nella prima metà del secolo XX si sono resi disponibili apparati elettromeccanici e dalla metà del secolo si sono rapidamente diffusi i sistemi elettronici per il calcolo automatico e la elaborazione dei dati. In ogni caso all'esecutore si chiede una precisa comprensione dei dati e la capacità di seguire un complesso di istruzioni esecutive.
Un complesso di istruzioni per la soluzione delle istanze di un problema ben definito prende il nome di **algoritmo**. Alcuni algoritmi corrispondono a formule matematiche, ma per definire la maggior parte degli algoritmi interessanti per le applicazioni le formule non sono sufficienti.
Per la esecuzione di computazioni mediante un computer o un altro simile sistema elettronico viene utilizzato un **programma** o un sistema software costituito da più programmi. I programmi più semplici servono a risolvere problemi tendenzialmente circoscritti. Un tale programma costituisce la cosiddetta **implementazione** di un algoritmo (eventualmente di una formula) e consiste in un testo scritto in un definito **linguaggio di programmazione** che traduce il complesso delle istruzioni costituente l'algoritmo per il meccanismo concreto che sarà utilizzato per eseguire fisicamente le operazioni computazionali, tenendo conto di tutte le sue esigenze.

G10:1.d Programmi che risolvono problemi articolati sono organizzati in diversi componenti computazionali aventi finalità ben definite e dotate di una certa autonomia chiamati moduli, sottoprogrammi o *routines*. Per risolvere problemi complessi che si presentano in circostanze diverse e con aspetti diversi oggi si utilizzano strumenti ancor più complessi e articolati chiamati procedure, pacchetti software o sistemi software. In questi sistemi si possono individuare moltissime routines associabili ad algoritmi ben definiti.
La matematica oggi può vedersi come la disciplina che organizza le conoscenze che consentono di definire gli algoritmi e gli strumenti computazionali associati cercando di definire metodi di ampia portata e/o di elevata precisione e quindi con una tendenziale indipendenza dalle peculiarità dei meccanismi esecutivi (legati a tecnologie che in certi periodi subiscono modifiche radicali).

G10:1.e La risoluzione di un problema concreto, posto da un settore scientifico o dal mondo reale, quale che sia la sua natura (matematica (anche), fisica, chimica, tecnologica, biologica, economica, aziendale, amministrativa, ...) richiede che si effettui una schematizzazione tendenzialmente semplificativa delle entità e dei processi concernenti il problema, schematizzazione che consenta di rappresentarli con entità e strutture adatte ad essere sottoposte a procedimenti computazionali. Questa schematizzazione porta alle informazioni sulle quali possono agire degli algoritmi e in particolare possono essere applicate formule matematiche. Essa viene detta **modellizzazione** ed ha come scopo la definizione di un **modello** capace di controllare tutti gli elementi che servono a definire il problema.

Un modello richiede che si definiscano funzioni di **codifica** che alle entità del problema posto facciano corrispondere dei dati per le procedure computazionali e funzioni di decodifica che ai risultati della computazione associno le entità (numeri, grandezze, opzioni, schemi operativi) che rappresentano la soluzione del problema.

Può essere utile la seguente visualizzazione schematica.

Problema definito da oggetti, c e strutture e processi	Finalità: risolvere il problema $\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$	Soluzione del problema
$\downarrow$ $\downarrow$ codifica $\downarrow$ $\downarrow$		$\uparrow$ $\uparrow$ decodifica $\uparrow$ $\uparrow$
Dati da immettere nella procedura risolutiva	Algoritmo risolutore $\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$ Programma Meccanismo elaboratore	Risultati emessi

G10:1.f Nel seguito faremo uso della nozione di **stringa**. Con questo termine intendiamo una sequenza di simboli tendenzialmente semplici che vengono utilizzati per comunicare fra due operatori che possono essere due persone o due sistemi per l'elaborazione dei dati o una persona e un sistema.
I segni devono essere distinguibili e singolarmente riconoscibili; questo è un presupposto perchè i due esecutori possano comunicare utilmente. Nelle comunicazioni reali si possono incontrare svariate difficoltà, ma nell'ambito della scienza e della tecnologia si presume di riuscire a comunicare con ridotto rischio di ambiguità e confusione di segni.
Gli esecutori comunicanti alle stringhe che si scambiano attribuiscono dei **significati**. Qui non vogliamo approfondire questa nozione e diciamo solo che i significati appartengono al livello superiore dello schema precedente, riguardano gli elementi del problema e dell'ambiente nel quale esso è stato posto.
Le stringhe possono considerarsi le rappresentatrici dei significati al livello inferiore dello schema precedente: su di esse agiscono i dispositivi del meccanismo che effettua le elaborazioni per la determinazione dei risultati che conducono alla soluzione del problema.

G10:1.g Tutte le computazioni che incontreremo si possono ricondurre ad elaborazioni di sequenze di simboli.
Per sostenere questo enunciato generale cominciamo con il presentare un primo ventaglio di problemi per i quali non è difficile trovare procedimenti risolutivi costituiti da elaborazioni di simboli.

- Calcolare manualmente il prodotto di due numeri interi: dalle scuole elementari è noto il procedimento per ricavare dalle due notazioni decimali dei fattori la notazione decimale del prodotto.
- Cercare un nome in un elenco anagrafico o un titolo nel catalogo di una biblioteca.
- Ordinare una sequenza di numeri o un elenco di denominazioni.
- Verificare l'equivalenza di due espressioni algebriche.
- Calcolare la derivata di una funzione data mediante un'espressione in cui compaiono operazioni e funzioni elementari.
- Trovare un percorso che consenta di uscire da un labirinto.
- Risolvere un rompicapo matematico, ad esempio completare una matrice di [[sudoku]].
- Risolvere un problema geometrico.

Segnaliamo anche che si possono ricondurre a elaborazione di sequenze di simboli tutte le computazioni che tratteremo in seguito, in particolare le risoluzioni dei sistemi di equazioni lineari e dei problemi geometrici che prenderemo in esame.

G10:1.h Oggi è importante rendersi conto che tutte le elaborazioni dei computers sono riconducibili a elaborazioni di stringhe. I programmi che vengono scritti per governarne il funzionamento sono essi stessi dei testi e vengono definite accuratamente tecniche che consentono di interpretare tali testi, di diagnosticarne eventuali errori e di tradurli in programmi più vicini al linguaggio della macchina.
L'esecuzione che risolve un problema posto al computer può descriversi come una serie di elaborazioni su stringhe binarie rette da istruzioni che stabiliscono come operare sui dispositivi per la registrazione delle sequenze di bits; va sottolineato che anche le istruzioni sono codificate come sequenze binarie.
Tutte le informazioni trattate dagli elaboratori (siano testi discorsivi o artificiali, immagini, suoni o animazioni), sono codificate mediante sequenze di bits e l'odierna tecnologia consente di registrarle, elaborarle e trasmetterle da un punto all'altro del globo con elevatissima efficienza e attendibilità.
La matematica e la geometria stessa fanno sistematicamente riferimento a formule, espressioni, enunciati (assiomi, teoremi, congetture, ...) che sono da esprimere con grande precisione e sono riconducibili a stringhe. È quindi importante che i problemi matematici e geometrici più impegnativi si riescano a tradurre in programmi eseguibili dal computer.

G10:1.i Le stringhe, oltre che per comunicare, per riorganizzare ed elaborare dati e per eseguire calcoli, servono per effettuare deduzioni e dimostrazioni. I processi deduttivi e dimostrativi sono studiati dalla [[logica matematica]], una disciplina cresciuta fra la matematica e la filosofia che oggi presenta stretti collegamenti anche con l'informatica. Va segnalato che oggi vengono sviluppate anche efficaci procedure che consentono di effettuare manipolazioni di formule complesse e dimostrazioni automatiche di teoremi.
La geometria è stata la prima disciplina scientifica impostata in modo formale e rigoroso negli [[Elementi di Euclide]], opera che ha avuto una enorme importanza per la storia del pensiero in quanto per 20 secoli ha costituito il massimo esempio di costruzione teorica dotata di coerenza logica.
La tecnologia odierna, come si è già accennato, consente di presentare e manipolare disegni ed immagini. Va quindi considerato come una acquisizione naturale la disponibilità di **sistemi software** che consentono di automatizzare la soluzione di problemi geometrici e di presentare le loro soluzioni attraverso grafici controllabili interattivamente. Esempi di questi strumenti sono i pacchetti [[Cabri géomètre]], [[Cinderella]], [[Maple]] e [[Mathematica]].

Negli ultimi anni si sono poi resi disponibili sistemi software in grado di agevolare grandemente la circolazione, la condivisione e la riutilizzazione delle conoscenze ed in particolare delle conoscenze scientifiche e tecnologiche.

Le tecnologie e le competenze che consentono lo sviluppo delle attività di elaborazione delle informazioni e della gestione delle conoscenze oggi sono quindi da considerare come valori primari per la società e per il suo auspicato progredire.

G10:1.j Nel seguito di questo capitolo procediamo ad una presentazione delle nozioni preliminari per la successiva trattazione della geometria. Questa esposizione cerca di dare una giustificazione per tutte le nozioni che si introducono segnalando la loro utilità per la definizione di procedimenti e metodi che, direttamente o indirettamente servono per la soluzione di problemi di interesse applicativo.
Coerentemente con le considerazioni precedenti, la presentazione parte dalla nozione di stringa assunta come "nozione primitiva".

G10:2. Interi naturali, elenchi, insiemi finiti, e operazioni sugli insiemi

G10:2.a Per organizzare la gran parte delle attività riproducibili e ampiamente riutilizzabili serve precisare informazioni e comunicarle ad altri operatori, umani o automatismi.
Facciamo riferimento al seguente schema

Significato convenuto
↓
Codifica concordata
↓
Sequenze di segni convenzionali
Sistema emittente $\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ Sistema ricevente
CANALE TRASMISSIVO

I segni trasmessi fanno parte di un alfabeto determinato: esempi di segni:
`a b ... z A B ... Z 0 1 2 ... 9 + -` $\times \cdot$ `/ = ( , )` $< >$
La trasmissione può riguardare due persone, una persona munita di tastiera e un computer munito di video, due elaboratori, due dispositivi di un elaboratore, un sensore e un computer, un computer ed un attuatore, ...
Ci interessiamo solo della comunicazione di informazioni dotate di effetti operativi; non ci poniamo su un piano emotivo, psicologico, artistico o simile. I segni devono essere distinguibili e riconoscibili dai comunicanti e le stringhe devono essere strutturate (lessico e sintassi) e portare significati (semantica) su basi condivise dai comunicanti.

G10:2.b Si comunica per vari scopi.
Essenzialmente per fornire agli operatori elementi di scelta e dati utilizzabili in algoritmi e in procedure. L'informazione elementare è un bit: aut 0 aut 1, aut falso aut vero, aut no aut sì. Si comunicano numeri, grandezze fisiche, coordinate temporali e geografiche, ... Si comunicano nomi: `Aldo`, `Bruna`, `Carlo`, `Dora`, `Elisa`; convenzioni: `M` per maschio, `F` per femmina; sigle che seguono convenzioni standard: `en` (lingua inglese), `fr` (francese), `it` (italiana), ... si comunicano elenchi contenenti nomi, sigle convenzionali, quantità, coordinate, ...

Le stringhe si possono giustapporre: giustapponendo `piano` e `forte` ottengo `pianoforte`; se invece giustappongo `forte` e `piano` ottengo `fortepiano`, qualcosa di diverso, sia lessicalmente che semanticamente. Quindi per due generiche stringhe w e v può accadere che sia $wv \neq vw$.

Abbiamo introdotto la **giustapposizione**, una cosiddetta operazione binaria fra stringhe. In generale usiamo il termine **operazione binaria** per denotare un meccanismo che a due oggetti di una opportuna natura (gli **operandi** dell'operazione) fanno corrispondere un altro oggetto della stessa natura, il risultato dell'operazione: nel caso della giustapposizione gli oggetti sono stringhe. In genere sono da distinguere l'operando sinistro dall'operando destro. Il fatto che scambiando gli operandi si possa modificare il risultato dell'operazione si esprime dicendo che la giustapposizione è un'**operazione non commutativa**.
È importante, cioè molto utile, dare una ben definita considerazione anche la trasmissione di nessun segno, ovvero alla trasmissione della cosiddetta stringa muta μ. Giustapponendo la stringa muta alla sinistra o alla destra di un'altra stringa qualsiasi non la si cambia: $\mu w = w\mu = w$ per ogni stringa w. Si dice che la stringa muta è un **elemento neutro** per la giustapposizione.

G10:2.c I numeri interi positivi costituiscono un tipo di strumento matematico di fondamentale importanza: essi servono innanzi tutto a contare oggetti materiali o simbolici (caratteri, nomi, figure, operazioni, ...) e a stabilire le posizioni che ciascuna di queste entità occupa quando esse vengono organizzate in una sequenza.
Il modo primitivo per denotare un numero intero positivo si serve di una sequenza di segni il più possibile simili (tacche, quadratini, ...); si parla in questi casi di **rappresentazioni unadiche** degli interi positivi.
I numeri positivi si possono definire come entità stringhe, cioè il "numero" dei segni che le compongono. Spesso se w denota una stringa con $|w|$ si denota la sua lunghezzza. Ad esempio si può scrivere $|$`stringa`$| =$ `|||||||` $= 7$. In questa scrittura compare anche il segno 7 da considerare come una semplice abbreviazione di un numero $7 :=$ `|||||||`.
Enormemente utile si è rivelato l'entità chiamata numero **zero**, definibile come lunghezza della stringa muta e abbreviata con 0: $0 := |\mu|$. Un numero che può essere un intero positivo o lo zero si dice **numero naturale**.
Consideriamo due stringhe v e w e la loro giustapposizione vw; si dice **somma** dei due interi naturali $|v|$ e $|w|$ esprimenti le lunghezze ddelle due stringhe il numero $|vw|$ esprimente la lunghezza della loro giustapposizione vw; questo numero naturale lo denotiamo con $|w| + |v|$. Essendo wv lunga quanto vw accade che $|w| + |v| = |v| + |w|$: si dice allora che la somma di numeri naturali è un'operazione binaria commutativa.

G10:2.d Diciamo **elenco** o **lista** una stringa nella quale compare un segno particolare con funzione di separatore di sottostringhe: ad esempio

`Aldo, Bruna, Carlo, Dora, Elisa`

è una lista che presenta $5 :=$ `|||||` sottostringhe componenti. Gli interi naturali servono anche per contare le componenti delle liste.
Vanno distinte le liste con componenti tutte diverse, **liste non ripetitive** da quelle con componenti ripetute. Le prime servono, ad esempio, a individuare le persone che abitano in un edificio di abitazioni. Esse si dicono **rappresentazioni di un insieme esplicito**; la lista dell'esempio rappresenta l'insieme degli abitanti dell'edificio. Le seconde servono a registrare entità associate ad eventi; ad esempio a registrare in ordine temporale gli abitanti che durante una giornata hanno oltrepassato l'ingresso dell'edificio: infatti un abitante in una giornata può oltrepassare l'ingresso più volte o anche non oltrepassarlo.
Due liste non ripetitive nelle quali compaiono in ordini diversi le stesse componenti si dice che "rappresentano lo stesso insieme esplicito". Astraendo dalle rappresentazioni si individua la nozione di **insieme esplicito**, entità individuabile con una lista non ripetitiva; le stringhe componenti di una tale lista si dicono **elementi** dell'insieme. Per affermare che una stringa w è un elemento dell'insieme esplicito E si

usa la notazione $v \in E$; questa scrittura si comunica con la frase "l'elemento v appartiene all'insieme E". Il numero di elementi di un insieme esplicito E si dice **cardinalità** di E e si denota con $|E|$.
Un insieme esplicito ha un numero finito di elementi e si dice **insieme finito**. La nozione di insieme finito è leggermente più generale e meno concreta di quella di insieme esplicito: riguarda una entità per la quale si può parlare di elementi che appartengono o meno ad essa e per la quale in linea di principio si può trovare una lista non ripetitiva che lo rappresenta. Può accadere che in un dato stadio delle conoscenze questa lista non sia disponibile e sia difficile da ottenere: un esempio è quello dei numeri primi compresi tra 10^{10000} e 10^{20000}, essi sono in numero finito ma, all'attuale stato delle nostre conoscenze, in numero maggiore degli atomi dell'universo attualmente esplorabile, cosa che non rende facile la disponibilità di una loro lista esplicita.
È di grande utilità la nozione di **insieme vuoto**, denotato con $\emptyset$: questo è definito come l'insieme corrispondente alla lista muta e al quale va attribuita la cardinalità 0.

G10:2.e Per gli insiemi espliciti si definiscono molte relazioni e operazioni utili in molte circostanze e che si possono verificare e effettuare con algoritmi che operano su liste che in linea di principio non presentano difficoltà.
Diamo per note le nozioni e le notazioni che seguono.

E **sottoinsieme** di F, ossia $E \subseteq F$, sse ogni elemento di E appartiene anche ad F.
Uguaglianza degli insiemi E e F, $E = F$, sse $E \subseteq F$ e $F \subseteq E$.
Disuguaglianza degli insiemi E e F, $E \neq F$, negazione della relazione di uguaglianza, verificata sse esiste un elemento di E non appartenente ad F oppure esiste un elemento di F non appartenente ad E.
E **sottoinsieme proprio** di F, $E \subset F$, sse $E \subseteq F$ ed $E \neq F$.
Unione di E ed F, $E \cup F$, insieme costituito dagli oggetti che sono elementi di E oppure di F.
Intersezione di E ed F, $E \cap F$, insieme costituito dagli oggetti che sono elementi sia di E che di F.
Eliminazione da E di F, $E \setminus F$, insieme degli elementi di E che non apartengono ad F.
Differenza simmetrica di E ed F, $E \ominus F := (E \setminus F) \cup (F \setminus E) = (E \cup F) \setminus (E \cap F)$, insieme degli elementi che si trovano in uno solo dei due insiemi E ed F.
Unione, intersezione, eliminazione e differenza simmetrica sono operazioni binarie sugli insiemi (finiti); ad eccezione dell'eliminazione si tratta di operazioni binarie commutattive. Uguaglianza, disuguaglianza, essere sottoinsieme e essere sottoinsieme proprio sono proprietà che possono essere verificate o meno per ciascuna coppia di insiemi: esse sono dette **relazioni binarie** tra insiemi.

G10:2.f Molti sviluppi riguardano insiemi omogenei, costituiti da elementi di un unico genere; questi insiemi di possono considerare sottoinsieme di un unico insieme che di conseguenza assume il ruolo di ambiente o di universo. Nell'ambito di uno di questi sviluppi risulta comodo considerare implicito che tutti gli insiemi E che si trattano siano sottoinsiemi di un determinato U, $E \subseteq U$.
In questi casi è opportuno definire come **insieme complementare** di un dato insieme E l'insieme $E^{\complement} := U \setminus E$. Si osserva che la notazione $E^{\complement}$ non rende conto di U, in quanto il suo ruolo di universo si ritiene implicito. Conviene ricordare che spesso, invece di $E^{\complement}$, si usa la scrittura $\overline{E}$, altrettanto incompleta.
Il simbolo $\complement$ ad esponente dell'identificatore dell'insieme denota un cosiddetto **operatore unario**, entità che agisce sopra un insieme di un universo per fornire un altro insieme dello stesso ambiente.

Senza difficoltà si dimostrano proprietà come le seguenti:

$$\emptyset^{\complement} = U \quad , \quad \left(E^{\complement}\right)^{\complement} = E \quad , \quad (E \cup F)^{\complement} = E^{\complement} \cap F^{\complement} \quad , \quad E \subseteq F \iff F^{\complement} \subseteq E^{\complement}$$

Per individuare un sottoinsieme di un dato ambiente $E \subseteq U$ può essere conveniente servirsi della cosiddetta **funzione caratteristica** di E entro U, funzione degli elementi di U definita ponendo

$$\chi_U^E(x) \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{sse} \;\; x \in E \; ; \\ 0, & \text{sse} \;\; x \notin E \; . \end{cases}$$

La funzione caratteristica permette di individuare E in modo più conciso di una lista quando l'insieme E contiene un numero di elementi confrontabile con la cardinalità di U; inoltre costituisce una struttura di dati utilizzabile naturalmente dalle procedure per il computer.

G10:2.g L'esecuzione delle operazioni e la verifica delle relazioni sugli insiemi espliciti sono semplici, ai limiti della banalità, nel caso di insiemi con pochi elementi, come gli insiemi che si presentano negli esempi che introducono a queste operazioni e relazioni.
In questi casi sono utili e sufficienti schemi grafici come i [[diagrammi di Eulero-Venn]] o le [[mappe di Karnaught]].
Le operazioni su insiemi espliciti sono sempre effettuabili: infatti si individuano algoritmi che date due liste non ripetitive rappresentanti due insiemi E ed F, sono in grado di costruire le liste che rappresentano gli insiemi $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$ ed $E \ominus F$.
L'esecuzione di questi algoritmi sono invece impegnative quando si tratta di insiemi che interessano applicazioni impegnative: si pensi agli archivi che riguardano insiemi di entità numerose come i libri di una grande biblioteca o i contribuenti di uno stato. In questi casi servono tecnologie complesse (in particolare quelle delle [[basi di dati]]), in quanto l'attendibilità e la velocità dell'esecuzione sono fattori determinanti.

G10:3. Prodotto cartesiano, relazioni, funzioni, matrici

G10:3.a Consideriamo due generici insiemi finiti A e B e indichiamo rispettivamente con h ed k le loro cardinalità: $h := |A|$ e $k := |B|$. Per essi si può quindi scrivere $A = \{a_1, ..., a_h\}$ e $B = \{b_1, ..., b_k\}$ e si può fare riferimento ai due ordinamenti degli insiemi determinati da queste scritture. Usiamo poi la scrittura $\langle a_i, b_j \rangle$ per indicare la coppia avente come prima componente l'elemento $a_i \in A$ e come seconda componente l'elemento $b_j \in B$.
Non è difficile costruire un elenco di tutte queste coppie facendo riferimento alle loro presentazioni ordinate: si organizza una corsa su tutti gli elementi di A e per ciascuno di questi a_i scorrendo un elenco degli elementi di B si procede ad emettere su un nastro di uscita le coppie $\langle a_i, b_1 \rangle$, $\langle a_i, b_2 \rangle$, ..., $\langle a_i, b_k \rangle$. Alla fine delle successive fasi relative ad a_1, a_2, ... , a_h su un nastro di uscita si ottiene l'elenco delle coppie

$$\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_1, b_2 \rangle, ..., \langle a_1, b_k \rangle, \langle a_2, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, ..., \langle a_2, b_k \rangle, \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; \langle a_h, b_1 \rangle, \langle a_h, b_2 \rangle, ..., \langle a_h, b_k \rangle.$$

Si può quindi parlare di insieme finito di tutte le coppie $\langle a_i, b_j \rangle$. Tale insieme si dice **prodotto cartesiano** di A e B e si indica $A \times B$. Gli insiemi di partenza A e B si dicono **insiemi fattori** del suddetto prodotto.

G10:3.b Gli elementi di un prodotto cartesiano possono essere utilmente presentati in uno schieramento rettangolare discreto su un supporto piano (foglio di carta, schermo video, ...) come il seguente

$$\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_1, b_2 \rangle, ..., \langle a_1, b_k \rangle$$

$$\langle a_2, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, ..., \langle a_2, b_k\rangle$$
$$.................$$
$$\langle a_h, b_1\rangle, \langle a_h, b_2\rangle, ..., \langle a_h, b_k\rangle$$

Questo schieramento si può considerare equivalente ad una stringa ottenuta modificando la precedente stringa elenco sostituendo con un nuovo separatore ";" le occorrenze del separatore "," poste fra una coppia $\langle a_i, b_k\rangle$ che è l'ultima avente come primo componente a_i e la successiva coppia $\langle a_{i+1}, b_1\rangle$, la prima tra le coppie hanno come primo componente a_{i+1}.

G10:3.c L'elencazione degli elementi di $A \times B$ può effettuarsi anche organizzando una corsa su tutti gli elementi di B e per ciascuno di questi b_j scorrendo un elenco degli elementi di A procedere ad emettere su un nastro di uscita le coppie $\langle a_1, b_j\rangle$, $\langle a_2, b_j\rangle$, ..., $\langle a_h, b_j\rangle$.
Alla fine delle successive fasi relative a b_1, b_2, ... , b_k si ottiene l'elenco di coppie che è naturale presentare in righe successive su un supporto piano come segue:

$$\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_1\rangle, ..., \langle a_h, b_1\rangle,$$
$$\langle a_1, b_2\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, ..., \langle a_h, b_2\rangle,$$
$$.................$$
$$\langle a_1, b_k\rangle, \langle a_2, b_k\rangle, ..., \langle a_h, b_k\rangle.$$

Questo modo di procedere non differisce sostanzialmente dal precedente: si può pensare come una diversa visualizzazione bidimensionale. Anticipando termini geometrici parliamo di "rotazione" del supporto piano di 180° intorno alla "linea" delle caselle contenenti le coppie $\langle a_1, b_1\rangle$, $\langle a_2, b_2\rangle$, ... si passa da una disposizione all'altra; questa trasformazione può chiamarsi **trasposizione del supporto**.
I due diversi modi di presentare le coppie $\langle a_i, b_j\rangle$ corrispondono a due diverse elencazioni di $A \times B$ detti risp. **ordinamento lessicografico** ed **ordinamento antilessicografico** subordinati alla elencazione $a_1 < a_2 < ... < a_h$ di A e alla $b_1 < b_2 < ... < b_k$ di B.
Altre diverse elencazioni si ottengono sostituendo la precedente elencazione di A con l'opposta $a_h < ... < a_2 < a_1$ e/o sostituendo la precedente elencazione di B con la $b_k < ... < b_2 < b_1$.
Le disposizioni che si ottengono si possono ottenere anche mediante rotazioni nel piano del supporto di 90° o di suoi multipli intorno ad un asse verticale passante per la prima casella e mediante trasposizioni (precedenti o successive).

Le due disposizioni più interessanti sono la prima fornita e quella ottenuta ruotando questa prima di 90° intorno alla casella di $\langle a_1, b_1\rangle$:

$$\langle a_1, b_k\rangle, \langle a_2, b_k\rangle, ..., \langle a_h, b_k\rangle,$$
$$.................$$
$$\langle a_1, b_2\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, ..., \langle a_h, b_2\rangle,$$
$$\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_1\rangle, ..., \langle a_h, b_1\rangle.$$

Esse verranno dette rispettivamente **raffigurazione matriciale** e **raffigurazione geografica** del prodotto cartesiano, sottintendendo la elencazione $a_1 < a_2 < ... < a_h$ di A e la $b_1 < b_2 < ... < b_k$ di B.

G10:3.d Consideriamo due elenchi di caratteri privi di ripetizioni, ad es. $\alpha =$`abc` e $\nu =$`1234567`, e l'elenco delle stringhe di due caratteri, il primo fornito da α ed il secondo da ν:

```
a1  a2  a3  a4  a5  a6  a7
b1  b2  b3  b4  b5  b6  b7
c1  c2  c3  c4  c5  c6  c7
```

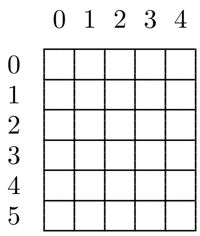
Questo schieramento si riconduce ad un prodotto cartesiano come precedentemente definito sostituendo ogni digramma `xi` con la corrispondente coppia $\langle \mathtt{x}, \mathtt{i} \rangle$.
Lo schieramento precedente si può considerare la presentazione più concisa del prodotto cartesiano

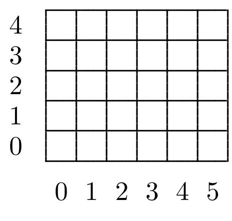
$$\begin{array}{ccccccc}
\langle \mathsf{a}, 1\rangle & \langle \mathsf{a}, 2\rangle & \langle \mathsf{a}, 3\rangle & \langle \mathsf{a}, 4\rangle & \langle \mathsf{a}, 5\rangle & \langle \mathsf{a}, 6\rangle & \langle \mathsf{a}, 7\rangle \\
\langle \mathsf{b}, 1\rangle & \langle \mathsf{b}, 2\rangle & \langle \mathsf{b}, 3\rangle & \langle \mathsf{b}, 4\rangle & \langle \mathsf{b}, 5\rangle & \langle \mathsf{b}, 6\rangle & \langle \mathsf{b}, 7\rangle \\
\langle \mathsf{c}, 1\rangle & \langle \mathsf{c}, 2\rangle & \langle \mathsf{c}, 3\rangle & \langle \mathsf{c}, 4\rangle & \langle \mathsf{c}, 5\rangle & \langle \mathsf{c}, 6\rangle & \langle \mathsf{c}, 7\rangle .
\end{array}$$

G10:3.e Consideriamo in particolare il prodotto cartesiano di due insiemi numerici come $\{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$. I suoi elementi $\langle i, j\rangle$ si possono associare a punti tracciati su un foglio di carta o su uno schermo video disposti con regolarità in posizioni equidistanziate su linee equidistanziate, in modo da costituire i punti di una cosiddetta **griglia regolare**. Alternatamente si possono associare alle tessere quadrate uniformi di un mosaico rettangolare. Per raffigurare questi insiemi non sono necessarie le coppie, ma bastano i valori delle coordinate.
Ad es. le raffigurazioni matriciale e geografica a nodi del prodotto $(7] \times (5]$ sono:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
2 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
3 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
4 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
5 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
6 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
7 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccc}
5 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
4 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
3 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
2 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7
\end{array}$$

Per le raffigurazioni mediante caselle quadrate matriciale e geografica di $[5] \times [4]$ si ha:





Queste raffigurazioni presentano l'intero contenuto informativo di un prodotto cartesiano di due insiemi finiti dotati di un ordinamento naturale. Esse sono di grande interesse in quanto, come vedremo, costituiscono degli "ambienti neutri ma accoglienti", cioè ambienti nei quali possono essere utilmente collocati molti oggetti di rilevante interesse matematico ed informatico. In effetti con essi iniziamo lo studio della geometria (v. cap. G12:).

G10:3.f Come mostra l'esempio di $\{p, q\} \times \{1, 2, 3\}$, per un prodotto cartesiano sono possibili 8 raffigurazioni:

$$\begin{array}{ccc} p1 & p2 & p3 \\ q1 & q2 & q3 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} p3 & q3 \\ p2 & q2 \\ p1 & q1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} q3 & q2 & q1 \\ p3 & p2 & p1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} q1 & p1 \\ q2 & p2 \\ q3 & p3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} q1 & q2 & q3 \\ p1 & p2 & p3 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} q3 & p3 \\ q2 & p2 \\ q1 & p1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} p3 & p2 & p1 \\ q3 & q2 & q1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} p1 & q1 \\ p2 & q2 \\ p3 & q3 \end{array}$$

Anticipando termini geometrici, si può dire che seconda, terza e quarta si ottengono dalla prima con rotazioni di multipli di 90°, mentre le ultime 4 sono ottenibili dalle precedenti con le riflessioni che scambiano p_1 con q_1, p_2 con q_2 e p_3 con q_3.

G10:3.g Conviene chiarire il rapporto fra un prodotto cartesiano e una sua raffigurazione, che conviene chiamare raffigurazione cartesiana.

Partiamo dando importanza primaria al prodotto cartesiano come costruzione formale: una sua raffigurazione può vedersi come una sua presentazione intuitiva. La sua rilevanza non va sottovalutata, in quanto di grande utilità in molte esposizioni semiintuitive di questioni matematiche e informatiche, esposizioni praticamente indispensabili per comunicare efficacemente nozioni che per essere esposte in modo completo e rigoroso richiederebbero una pletora di dettagli, difficili da comprendere dalla mente umana per le sue limitate capacità di tenere sotto controllo esposizioni piene di tecnicismi dettagliati.

Viceversa ha senso dare importanza primaria ad una raffigurazione di prodotto cartesiano come costruzione fisica della quale il prodotto cartesiano costituisce e il modello matematico. La costruzione presuppone la disponibilità di un regolo materiale che presenti uno spigolo di andamento rettilineo nel senso del percorso di un fascio luminoso sufficientemente sottile e che si muove nel vuoto, la cui lunghezza rimanga immutata con lo scorrere del tempo e quando sottoposto a movimenti traslazionali e rotazionali; inoltre presuppone la possibiità di scegliere arbitrariamente una unità di misura delle lunghezze da far corrispondere alla distanza fra due punti adiacenti in verticale o orizzontale. Inoltre si presuppone che la luce si propaghi in linea retta in ogni direzione del piano (o dello spazio).

Nell'ambito di questi presupposti fisici una raffigurazione cartesiana risulta adatta a descrivere le caratteristiche fisiche di una griglia rettangolare collocata in un'area piana.

Queste possibilità sembrano ovvie e fino agli anni tra il 1820 e il 1830 si è ritenuto che queste costruzioni cartesiane fossero le uniche in grado di costituire la base per una comprensione completa dello spazio fisico nel quale ci troviamo.

Per arrivare a trattare lo spazio fisico in realtà occorre portare avanti queste costruzioni trattando griglie sempre più ampie e sempre più fitte, considerando anche griglie regolari tridimensionali e introducendo l'idea di continuo spaziale.

Sulle costruzioni cartesiane si basa la geometria euclidea, disciplina usata da più di 2300 anni come modello dello spazio fisico tridimensionale nel quale siamo immersi. Questo modello è servito per lo sviluppo della scienza moderna (Galileo, Newton, Laplace, Maxwell, ...).

G10:3.h Molti filosofi, in particolare l'autorevole [[Immanuel Kant]], ritenevano che queste costruzioni logiche fossero innate e costituissero realtà indiscutibili.

È invece accaduto, ad opera soprattutto di [[Gauss]], [[Lobachevski]] e [[Janos Bolyai]], che sono stati messi in dubbio i principi ([[assioma delle parallele]]) a base della geometria euclidea e sono nate geometria alternative chiamate [[geometrie non euclidee]]. Inoltre intorno a 1900 si sono posti in dubbio altri presupposti, trovando che risultano validi solo entro determinati limiti, che hanno dovuto

essere superati per formulare due teorie fondamentali per la fisica odierna, la [[teoria della relatività]] e la [[meccanica quantistica]].
Va rilevato che oggi anche queste teorie non sono completamente accettate ma sono considerate modelli che potrebbero essere ulteriormente perfezionati.

G10:3.i Un prodotto cartesiano nel quale uno o entrambi i fattori coincidono con l'insieme vuoto si riduce a tale insieme:

$$A \times \emptyset = \emptyset \qquad\qquad \emptyset \times B = \emptyset .$$

Un prodotto cartesiano nel quale uno dei fattori è un singoletto non differisce sostanzialmente dall'altro fattore:

$$\{a_1, ..., a_h\} \times \{e\} = \{\langle a_1, e\rangle, ..., \langle a_h, e\rangle\}.$$

Infatti gli elementi dei due insiemi si mettono facilmente in corrispondenza biunivoca ed i discorsi e le elaborazioni riguardanti un insieme possono ripetersi, previe opportune modifiche formali, per l'altro insieme fornendo risultati corrispondenti, cioè riconducibili ai precedenti dopo gli opportuni riadattamenti. In casi di questo genere parleremo di **equivalenza conoscitiva**.

G10:3.j Veniamo ora al prodotto di interi naturali. Consideriamo $A \times B$; evidentemente se si sostituiscono gli insiemi A e B con insiemi C e D aventi rispettivamente le stesse cardinalità, cioè con $|C| = |A|$ e $|D| = |B|$, si ottiene un prodotto cartesiano, $C \times D$, avente la stessa cardinalità. La cardinalità di un prodotto cartesiano $A \times B$ dipende quindi solo dalle cardinalità dei suoi insiemi fattori A e B, non da altre loro caratteristiche. Questo giustifica la seguente definizione.

Si dice **prodotto** di due interi positivi h e k la cardinalità di ogni prodotto cartesiano di un insieme di h elementi per un insieme con k elementi. Tale numero si denota $h \cdot k$, ma talora anche con $h \times k$ e, nell'ambito dei linguaggi di programmazione procedurali, con $h * k$. Si può quindi scrivere

$$|A| \cdot |B| := |A \times B| \ .$$

Il significato, ovvero l'utilità computazionale del prodotto di naturali si chiariscono rifacendosi alle notazioni unadiche. Se $|A| =$ `||||` e $|B| =$ `|||||||||`, per la cardinalità di $A \times B$ si può scrivere:

`||||||||| ||||||||| ||||||||| |||||||||  =  ||||  ·  ||||||||| .`

Già questo esempio mostra che un numero naturale elevato che sia esprimibile come prodotto di due interi sensibilmente inferiori può essere individuato da una scrittura unadica molto più corta e più facilmente interpretabile a vista della scrittura unadica che non si avvale del segno di prodotto.
Questo corrisponde al fatto che un insieme costituito da un numero esprimibile come prodotto di oggetti identici, ad es. dei quadratini, può essere presentato in modo visivamente più chiaro con i suoi elementi schierati a matrice piuttosto che allineati (o, peggio, disposti a caso).
Queste considerazioni fanno intravvedere che servendosi della nozione di prodotto si arrivi a notazioni per i numeri naturali sensibilmente più maneggevoli delle unadiche. Prima di precisarla conviene ampliare le conoscenze su prodotto cartesiano e prodotto di interi naturali.

G10:3.k I prodotti cartesiani $A \times B$ e $B \times A$, dato che sono messi in corrispondenza biunivoca dalla trasformazione che alla coppia $\langle a_i, b_j\rangle$ associa la riflessa $\langle b_j, a_i\rangle$, hanno la stessa cardinalità: $|A \times B| = |B \times A|$. Da qui si ricava la **proprietà commutativa del prodotto** di naturali

$$h \cdot k = k \cdot h \ .$$

In particolare si ha

$$h \cdot 1 = 1 \cdot h = h \ .$$

Inoltre dalle considerazioni sui prodotti cartesiani con un fattore vuoto (1.7) segue

$$h \cdot 0 = 0 \cdot h = 0 \ .$$

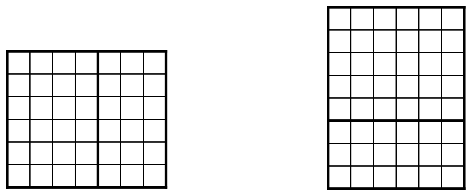
G10:3.l Se si ripartisce B in due sottoinsiemi disgiunti $B = B_1 \dot\cup B_2$, con $k_1 := |B_1|$ e $k_2 := |B_2|$ si trova $A \times B = (A \times B_1) \dot\cup (A \times B_2)$. Passando alle cardinalità, per h, k_1 e k_2 naturali qualsiasi:

$$h \cdot (k_1 + k_2) = h \cdot k_1 + h \cdot k_2 \ .$$

Accanto a questa relazione si ottiene la analoga derivata considerando una suddivisione di $A = A_1 \dot\cup A_2$ con $h_1 := |A_1|$ e $h_2 := |A_2|$, cioè, per h_1, h_2 e k naturali qualsiasi

$$(h_1 + h_2) \cdot k = h_1 \cdot k + h_2 \cdot k \ .$$

Queste uguaglianze, che sono ottenibili l'una dall'altra grazie alla proprietà commutativa, costituiscono la proprietà di **distributività della somma rispetto al prodotto** per i naturali. Casi particolari come $6 \cdot (4+3) = 6 \cdot 4 + 6 \cdot 3$ e come $(5+3) \cdot 6 = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 3$ si possono leggere agevolmente in coppie di figure come la seguente

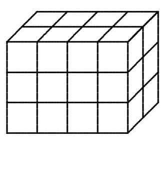


Si osservi che per il significato delle espressioni delle forme $h \cdot k_1 + h \cdot k_2$ e $h_1 \cdot k + h_2 \cdot k$ si è assunto implicitamente che all'operatore prodotto viene attribuita la precedenza di esecuzione rispetto all'operatore somma.

G10:3.m Si introduce il prodotto cartesiano della forma $A \times B \times C$ per denotare l'insieme delle terne di elementi di tre insiemi. Confrontando questo insieme con $(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$ si trova che gli elenchi di questi insiemi si pongono facilmente in corrispondenza biunivoca associando stringhe come $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \rangle$, $\langle \langle \mathsf{a}, \mathsf{b} \rangle, \mathsf{c} \rangle$ ed $\langle \mathsf{a}, \langle \mathsf{b}, \mathsf{c} \rangle \rangle$.
Passando alle cardinalità, posto $j := |C|$, si ha che per h, k e j interi naturali qualsiasi

$$(h \cdot k) \cdot j = h \cdot (k \cdot j) \ ;$$

questa uguaglianza esprime la **associatività del prodotto** di interi naturali. Essa rende lecito esprimere l'intero naturale precedente scrivendo semplicemente $h \cdot k \cdot j$.
Tre stringhe come le precedenti possono spesso confondersi senza generare confusione: con tale *abuso di notazione* si può scrivere $A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$; in tal modo si attribuisce l'associatività anche al prodotto cartesiano.
Gli elementi dei prodotti cartesiani di tre insiemi finiti si possono raffigurare con una certa efficacia come cubetti di lato uguale disposti a parallelepipedo



G10:3.n Si può considerare anche il prodotto cartesiano di un insieme per se stesso: esso viene detto **quadrato cartesiano** o **seconda potenza cartesiana** dell'insieme. Invece di scrivere $A \times A$ si può scrivere $A^{\times 2}$. Naturalmente si possono considerare anche le successive potenze cartesiane:

$A^{\times 3} := A \times A \times A$, **terza potenza cartesiana** o **cubo cartesiano**;
$A^{\times 4} := A \times A \times A \times A$, **quarta potenza cartesiana**;
. . . . . .
$A^{\times d} := A^{\times\, d-1} \times A$, d-**esima potenza cartesiana** per $d = 1, 2, 3, \ldots$.

L'ultima definizione esplicitata dice in particolare che la scrittura $A^{\times 1}$ equivale alla A.
Per la associatività del prodotto si trova, per d ed e positivi arbitrari: $A^{\times d} \times A^{\times e} = A^{\times\, d+e}$.

In genere, cioè nelle formule nelle quali si distinguono con chiarezza i numeri dagli insiemi, le precedenti notazioni si possono semplificare scrivendo A^d invece di $A^{\times d}$.

G10:3.o Se A è un alfabeto, gli elementi delle sue successive potenze cartesiane si possono confondere con le stringhe su A delle successive lunghezze. Ad es. se $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, gli elementi di A^3, $\langle \mathtt{a}, \mathtt{a}, \mathtt{a}\rangle$, $\langle \mathtt{a}, \mathtt{a}, \mathtt{b}\rangle$, $\langle \mathtt{a}, \mathtt{a}, \mathtt{c}\rangle$, $\langle \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{a}\rangle$, $\langle \mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{b}\rangle$,... si possono confondere con i trigrammi `aaa`, `aab`, `aac`, `aba`, `abb`, ... Quindi l'insieme delle stringhe di lunghezza d sull'alfabeto A si può individuare come A^d, potenza cartesiana d-esima dell'alfabeto. La precedente uguaglianza $A^d \times A^e = A^{d+e}$ corrisponde a dire che ogni stringa di lunghezza $d+e$ su A si può ottenere come giustapposizione di una stringa di lunghezza d e di una stringa di lunghezza e.

A questo punto si è indotti a definire come potenza cartesiana nulla di un alfabeto A l'insieme costituito dalla sola stringa muta: questa infatti è l'unica stringa di lunghezza 0 sopra un qualsiasi alfabeto. μ si può definire anche come unico elemento costituente la potenza cartesiana nulla di qualsiasi insieme (finito o meno).

G10:3.p Consideriamo ora le cardinalità delle potenze cartesiane di un insieme di h elementi. Esse sono date dai prodotti di due, tre, ..., d repliche dell'intero naturale h. Questi prodotti si chiamano seconda, terza, ..., d-esima **potenza** dell'intero h ; per questi numeri si scrive:

$$h^2 := h \cdot h \qquad h^3 := h \cdot h \cdot h \qquad h^d := h^{d-1} \cdot h.$$

Passando dagli insiemi alle cardinalità, dalla $A^{d+e} = A^d \times A^e$ si ricava

$$h^{d+e} = h^d \cdot h^e.$$

G10:3.q Per maggiore generalità si pone anche $h^1 := h$. Inoltre, coerentemente con la $A^0 = \{\mu\}$, si è indotti a definire $h^0 := 1$. Queste definizioni si giustificano anche con la possibilità di estendere la validità della uguaglianza $h^{d+e} = h^d \cdot h^e$ a tutti gli esponenti d ed e interi naturali. È utile anche porre $0^d := 0$ per ogni d positivo.
Per quanto riguarda l'espressione 0^0, qui ci limitiamo a segnalare che la sua definizione risulta problematica.

G10:4. Insiemi infiniti numerabili, numeri negativi, insieme degli interi

G10:4.a Per organizzare sistematicamente le conoscenze che servono alle computazioni si impone l'esigenza di generalità: interessano primariamente metodi computazionali di ampia portata. È opportuno essere in grado di trattare interi molto grandi e stringhe molto lunghe e complesse. Sul piano pratico per gli interi si individuano le notazioni posizionali e gli algoritmi per l'esecuzione delle operazioni numeriche che hanno portata generale e sono sufficientemente semplici da essere oggetto di insegnamento elementare.
Per le stringhe le cose sono più complicate (in buona parte per colpa della non commutatività della giustapposizione) e vengono sviluppate svariate tecniche di codifica e di manipolazione di stringhe per affrontare i numerosi problemi algoritmici che le riguardano. Situazione non meno impegnativa per le elaborazioni che riguardano le molte altre strutture informative che si incontrano nella elaborazione dei dati.

G10:4.b Sul piano dell'esposizione dei risultati matematici risulta di grande utilità non limitarsi a parlare di insiemi finiti, ma fare riferimento ad insiemi infiniti.
In matematica si considerano varie specie di insiemi infiniti. Per procedere con atteggiamento costruttivo è necessario iniziare introducendo i cosiddetti insiemi numerabili; queste entità non possono essere oggetto diretto di elaborazioni effettive in quanto questi processi, come tutti i procedimenti reali possono effettuarsi solo utilizzando risorse effettive e finite (tempi di elaborazione finiti, supporti di memoria finiti, algoritmi codificati in testi di programma finiti).
Gli insiemi infiniti e le strutture infinite che su di essi si basano, sono entità che vengono utilizzate solo nelle fasi di studio, di sviluppo logico, di organizzazione conoscitiva e di presentazione delle proprietà formali alle quali fanno riferimento gli algoritmi.
Gli insiemi infiniti numerabili consentono di trattare agevolmente gli algoritmi sui numeri interi, sulle stringhe e sui testi e su tutte le altre strutture discrete (grafi, automi, codici, ...) che si incontrano per affrontare tutti i problemi di base per la organizzazione delle elaborazioni automatiche e per le attività generali della programmazione.

Lo sviluppo della geometria (come vedremo) e della analisi infinitesimale richiede poi di introdurre i cosiddetti insiemi infiniti continui. Questi sono essenziali per lo studio delle strutture sulle quali si basano sostanzialmente tutti i rimanenti risultati della matematica, come il calcolo differenziale, il calcolo integrale, la soluzione delle equazioni differenziali, il calcolo delle probabilità (supporto della statistica), la geometria differenziale, la fisica matematica ecc.
Conviene accennare subito al fatto che anche i calcoli effettivi che si sviluppano in queste ultime discipline riguardano solo oggetti finiti: ad esempio i complessi calcoli che servono alla [[computer grafica]] sono calcoli costituiti da catene finite di operazioni sopra approssimazioni finite di entità (ad esempio vettori con componenti reali) che si collocano in ambienti infiniti continui.
In parole povere gli insiemi e le strutture infinite servono per inquadrare teoricamente ed espositivamente entità e proprietà che vengono ridotte (tipicamente attraverso approssimazioni) ad oggetti finiti e ad algoritmi sui quali si effettuano i calcoli che portano alle soluzioni (spesso approssimate) dei problemi concreti.

G10:4.c Le elaborazioni riguardanti gli insiemi finiti viste in precedenza si possono tutte ricondurre ad elaborazioni di macchine concrete o almeno realizzabili concretamente dotate di strutture tendenzialmente semplici e che operano su stringhe finite.

Di queste macchine interessano primariamente quelle controllabili mediante programmi di versatilità generale. Di queste macchine ne sono stati studiati vari generi e si è trovato che hanno il grande pregio di essere equivalenti: ogni calcolo effettuabile con una di queste macchine si può effettuare con gli stessi risultati con una di un altro genere. Alcune di queste macchine sono costituite con dispositivi molto semplici e sono rette da istruzioni di tipi altrettanti semplici. Altre presentano dispositivi più differenziati e schemi assemblativi elaborati.
Tra le macchine del primo genere ci limitiamo a citare la [[**macchina di Turing**]], in sigla MdT. Tra quelle più elaborate si collocano i moltissimi modelli degli elaboratori elettronici costruiti e fatti funzionare a partire dagli anni 1940.
La macchina di Turing si dice (1) essere in grado di operare con un nastro di memoria "infinito", capace di registrare funzioni del genere $\mathbb{N} \longrightarrow A$ con A alfabeto finito, (2) essere in grado di procedere con elaborazioni di durata infinita, (3) essere programmabile con sistemi di istruzione complessi quanto si vuole. Più realisticamente si dovrebbe dire invece di (1) che essa è in grado di registrare informazioni su un nastro che se necessario può essere esteso quanto serve e invece di (2) che essa è in grado di procedere nelle elaborazioni per tanti passi quanto rendono necessarie ed opportune le esigenze che vengono presentate dai suoi utenti.

G10:4.d Gli elaboratori elettronici che sono stati utilizzati nel passato e che sono tuttora in uso effettivo sono invece macchine estremamente complesse, costituite da dispositivi altamente sofisticasti e differenziati; questi sono stati adottati per renderle più versatili, più affidabili e più facili da usare, eventualmemnte per problemi specialistici. Esse dispongono di dispositivi finiti, ma di capacità ormai molto elevata e sono estendibili ampiamente, anche grazie alle possibilità consentite dalla telematica. Accade comunque che tutte le elaborazioni che esse hanno svolto avrebbero potuto essere effettuate da macchine di Turing (pur con efficienza e versatilità molto inferiori). Questa macchina si può considerare un modello per tutti gli elaboratori elettronici odierni.
Si può chiedere che una MdT proceda ad operare utilizzando le risorse di tempo e memoria quante servono per procedere in costruzioni illimitate.
Non è difficile individuare intuitivamente MdTs che procedono a costruire insiemi estesi quanto si vuole utili alla nostra esposizione; se si dovesse definire precisamente queste macchine occorrerebbe precisare un gran numero di dettagli tecnici.

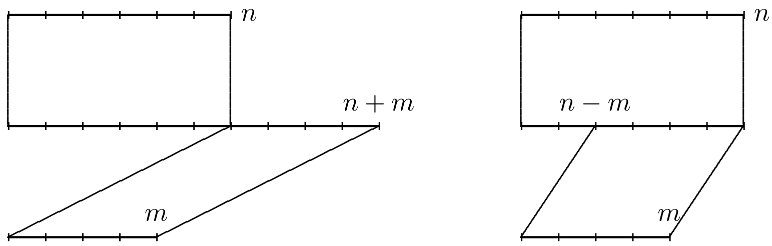
G10:4.e Inizialmente ci serve individuare MdTs che procedono a generare i successivi numeri interi naturali e le stringhe su un dato alfabeto considerando via via le successive lunghezze e considerando quelle di data lunghezza in un ordine lessicografico.
Concretamente in un dato istante sono disponibili solo insiemi finiti di interi o di stringhe. Procedendo ulteriormente questi insiemi si ampliano senza incontrare limiti di principio.
Con una estrapolazione definiamo l'insieme di tutti i numeri naturali come l'entità corrispondente alle possibili produzioni della MdT per gli interi.
Un tale entità si dice **insieme numerabile** e la si denota con $\mathbb{N}_+$.

G10:4.f Mediante una MdT si riesce a procedere nella generazione delle coppie di numeri naturali, ad esempio seguendo un procedimento diagonale (v. o.). Si può quindi prendere in considerazione un prodotto cartesiano di insiemi numerabili come $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Si possono considerare algoritmi che a ciascun intero naturale o a ciascuna coppia di interi naturali associano un dato oggetto costruibile. Si ottengono in questo modo entità che chiamiamo **funzioni costruibili** definite su $\mathbb{N}$ o su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

In particolare si definiscono funzioni che a $\mathbb{N}$ o a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ associano altri elementi di $\mathbb{N}$. Nel primo caso si hanno successioni di interi naturali, come la successione dei successivi, la successione dei quadrati e la successione dei numeri primi. Queste funzioni sono trattate anche come operazioni unarie su $\mathbb{N}$. Casi interessanti di funzioni da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$ riguardano distanza Manhattan da $\langle 0, 0 \rangle$, massimo, minimo, somma e prodotto. Queste funzioni sono trattate anche come operazioni binarie su $\mathbb{N}$.

G10:5. Numeri interi relativi, differenza e prodotto fra interi

G10:5.a I numeri interi naturali sono stati introdotti per esprimere quantità di entità di varia natura (oggetti materiali, esseri viventi, entità mentali, ...) caratterizzati dall'essere ciascuno ben individuabili (e spesso dotati di caratteristiche simili). Un'altra loro importante applicazione riguarda la possibilità di esprimere spostamenti per lunghezze multiple di una fissata unità.
La somma di interi naturali permette di esprimere l'accumularsi di oggetti e il succedersi di spostamenti nella stessa direzione.
Se si considerano due interi $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, si definisce come differenza tra n ed m, e si indica $n - m$, l'intero naturale d t.c. $m + d = n$.
La somma e la differenza di interi naturali si presentano molto intuitivamente mediante un modello cinematico che presenta i numeri naturali allineati orizzontalmente ed equidistanziati. La somma $n + m$ si collega a due spostamenti: il primo verso destra di n unità dal punto 0 al punto n, il secondo anch'esso verso destra di m unità dal punto n al punto $n + m$. La differenza $n - m$ con $n > m$ si collega invece alla coppia di spostamenti formata ancora da quello verso destra di n unità dal punto 0 al punto n e da un secondo verso sinistra di m unità dal punto n al punto $n - m$.
Una presentazione del tutto equivalente raffigura gli spostamenti in verticale: questa è particolarmente significativa nel caso di interi utilizzati per operazioni finanziarie o attività di magazzino che comportano il sommarsi di crediti o l'accumularsi di beni materiali per l'espressione $n + m$ e il ridursi di un credito a causa di una restituzione o il diminuire di una scorta in conseguenza di un asporto per l'espressione $n - m$.



G10:5.b La varietà delle situazioni che si possono incontrare considerando possibili spostamenti secondo una linea orizzontale e studiando scambi di denaro suggeriscono che sia utile disporre di un'estensione dell'operazione differenza applicabile a numeri n ed m per i quali non accade che sia $n \geq m$; questa dovrebbe potersi utilizzare per eventi finanziari nei quali si possono avere debiti superiori ai crediti e per spostamenti secondo una direzione che potrebbero riguardare arretramenti superiori agli avanzamenti (o abbassamenti maggiori degli innalzamenti).
Come vedremo, per effettuare una tale estensione delle operazioni si rende necessario disporre di un ambiente più ampio dell'insieme dei naturali. Tale ampliamento risulta pienamente giustificato se

fornisce un ambiente operativo più versatile: è opportuno estendere ad esso, oltre alla differenza, le operazioni di somma e prodotto e fare in modo che le operazioni estese mantengano tutte o quasi le proprietà che si sono dimostrate utili.

Osserviamo che la differenza fra naturali $n - m$ con $n \geq m$ è una funzione del genere $\{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\}$ avente come dominio il sottinsieme "triangolare" di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\mathsf{T} := \mathsf{Arc}(\mathbb{N}, \leq) := \{n \in \mathbb{N} \, , m \in [n] \,:|\, \langle n, m\rangle\} = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\lceil\, n \geq m\} \ .$$

La differenza fra naturali viene significativamente presentata con la seguente tabella illimitata:

$$\begin{array}{c|cccccc}
\multicolumn{1}{c}{} & m & & & & & \\
5 & & & & & & 0 \\
4 & & & & & 0 & 1 \\
3 & & & & 0 & 1 & 2 \\
2 & & & 0 & 1 & 2 & 3 \\
1 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \quad n \\
\hline
- & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}$$

Da questa tabella risultano evidenti le classi della equivalenza associata canonicamente alla funzione differenza, relazione che denotiamo con E'_{-} e che riguarda le coppie di naturali di T caratterizzate dalla richiesta $\langle n, m\rangle E'_{-} \langle p, q\rangle$ sse $n + q = m + p$. Queste classi corrispondono agli insiemi delle caselle di T che sono allineate parallelamente alla diagonale principale.
Questa raffigurazione suggerisce di ampliare la E'_{-} all'intero $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aggiungendole come nuove classi di equivalenza gli insiemi di coppie di naturali $\langle n, m\rangle$ con $m > n$ tali che sia costante $m-n$; questi insiemi sono disgiunti e costituiscono una partizione di $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \mathsf{T}$. L'equivalenza così ottenuta la denotiamo con E''_{-}.

Gli elementi rappresentativi di maggiore evidenza delle nuove classi di equivalenza sono le coppie $\langle 0, m\rangle$ nelle posizioni più a sinistra nella tabella, come per le classi in T le più in evidenza sono le coppie più in basso $\langle n, 0\rangle\rangle$. È naturale contraddistinguere le nuove classi servendosi degli interi m delle coppie $\langle 0, m\rangle$; questi interi positivi però non si possono utilizzare direttamente, in quanto darebbero classi indistinguibili da quelle rappresentate dagli interi positivi n ricavati dalle caselle $\langle n, 0\rangle$. Utilizziamo quindi le loro varianti tipografiche in una forma come $\overline{m}$.

G10:5.c Per rendere utili le classi della equivalenza E''_{-} non contenute in T si è indotti ad associare alle coppie che le rappresentano $\langle 0, d\rangle$, per $d \in \mathbb{P}$ dei nuovi numeri, cioè entità sottoponibili ad operazioni come somma e prodotto insieme agli interi naturali.
Denotiamo un tale numero con $\overline{d}$; inoltre diciamo che due numeri d e $\overline{d}$ sono l'uno l'**opposto** dell'altro. In tal modo la tabella della differenza assume il seguente aspetto:

Definiamo come insieme dei **numeri interi negativi** $\mathbb{Z}_{-} := \{n \in \mathbb{P} :| \overline{n}\}$ e come insieme dei **numeri interi [relativi]** $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \dot{\cup} \mathbb{Z}_{-}$.
Riferendosi alla presentazione dei numeri naturali allineati orizzontalmente, si è indotti a collocare i numeri $\overline{d}$ a sinistra dello 0; questa operazione corrisponde a ridurre la tabella precedente alla sua prima riga e alla sua prima colonna e a ruotare questa in modo da disporla alla sinistra della suddetta riga.
Risultano utili due raffigurazioni dell'insieme $\mathbb{Z}$, la raffigurazione a punti e la raffigurazione a caselle:

Queste si possono chiamare **raffigurazioni della retta-Z**. La prima rappresenta più efficacemente $\mathbb{Z}$ come primo ambiente per la costruzione della geometria della retta. La seconda serve a suggerire la presentazione sequenziale delle funzioni aventi come dominio $\mathbb{Z}$.

la scrittura -Z da usare come suffisso del sostantivo retta. Questo costituisce un primo esempio di una cosiddetta **specifica sincopata**, elemento linguistico artificioso ma che permette di esprimere concisamente la portata di varie qualifiche

G10:5.d A questo punto si rende opportuno considerare $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ come estensione di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ per estendere all'intero $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le operazioni di somma, prodotto e differenza fra interi. Dobbiamo ora sviluppare i calcoli su $\mathbb{Z}$ estendendo le operazioni di somma e differenza; successivamente introdurremo anche il prodotto fra interi relativi. A questo punto si rende opportuno considerare $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ come estensione di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ per estendere all'intero $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le tavole di composizione delle operazioni attraverso considerazioni facilmente visualizzabili; queste servono anche per introdurre nozioni ed espressioni geometriche.

Vedremo che risulta opportuno che per la differenza sia mantenuta la proprietà espressa dalla

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \vdots \ (n+k) - (m+k) = n - m \ .$$

Iniziamo con considerazioni immediatamente visualizzabili. Chiamiamo **successore-N** la relazione che collega un qualsiasi intero naturale al suo successivo, cioè $\{z \in \mathbb{N} :| \langle z, z+1 \rangle\}$; inoltre chiamiamo **predecessore-N** la sua trasposta $\{z \in \mathbb{N} :| \langle z+1, z \rangle\}$ e **adiacenza-N** la loro unione. La relazione successore-N (le altre due le sono strettamente collegate) fornisce la caratterizzazione strutturale di base della semiretta-Z.

Si osserva innanzi tutto che ogni elemento di $\mathbb{N}$ può essere raggiunto dal numero 0, muovendosi attraverso coppie di interi costituenti successore-N.

Le operazioni di somma e differenza fra interi naturali conservano la relazione successore-N: infatti se a e b sono interi naturali con $b = a+1$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ sono nella stessa relazione rispettivamente $a+k$ e $b+k$, $a-k$ e $b-k$, $k-a$ e $k-b$ (ammesso che queste differenze abbiano senso in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$).

Questa conservazione della relazione corrisponde alla osservazione che nel quadrante-NN $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le coppie delle prime due relazioni costituiscono le due semirette-NN parallele alla diagonale principale ed a lei più vicine.

G10:5.e Vogliamo ora estendere queste relazioni al piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ chiedendo che siano mantenute dalle operazioni di somma e differenza in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Il mantenimento da parte della somma equivale a dire che questi insiemi di coppie siano invarianti per scorrimento parallelo alla diagonale principale. Quindi definiamo **successore-Z** l'insieme di coppie $\{z \in \mathbb{Z} :| \langle z, z+1 \rangle\}$, **predecessore-Z** $\{z \in \mathbb{Z} :| \langle z+1, z \rangle\}$ e **adiacenza-Z** la loro unione. Queste relazioni visivamente consistono nelle due rette-ZZ adiacenti alla

diagonale principale di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, prolungamenti delle semirette-ZZ concernenti le relazioni omologhe per $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Il prolungamento della relazione successore-N corrisponde a chiedere che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ sia $\overline{n} + 1 = \overline{n-1}$.

Per la differenza, dopo avere esteso $\mathbb{N}$ sulla sinistra, si è indotti ad estendere la differenza prolungando nella direzione SW le linee parallele alla diagonale principale e mantenendo in esse i valori d o $\overline{d}$, ottenendo in definitiva:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\overline{10} & \overline{9} & \overline{8} & \overline{7} & \overline{6} & \boldsymbol{\overline{5}} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} & 0 \\
\overline{9} & \overline{8} & \overline{7} & \overline{6} & \overline{5} & \boldsymbol{\overline{4}} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} & 0 & 1 \\
\overline{8} & \overline{7} & \overline{6} & \overline{5} & \overline{4} & \boldsymbol{\overline{3}} & \overline{2} & \overline{1} & 0 & 1 & 2 \\
\overline{7} & \overline{6} & \overline{5} & \overline{4} & \overline{3} & \boldsymbol{\overline{2}} & \overline{1} & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\overline{6} & \overline{5} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{2} & \boldsymbol{\overline{1}} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\boldsymbol{\overline{5}} & \boldsymbol{\overline{4}} & \boldsymbol{\overline{3}} & \boldsymbol{\overline{2}} & \boldsymbol{\overline{1}} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\
\overline{4} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} & 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\overline{3} & \overline{2} & \overline{1} & 0 & 1 & \mathbf{2} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\overline{2} & \overline{1} & 0 & 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\overline{1} & 0 & 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \mathbf{5} & 6 & 7 & 8 & 9 & 10
\end{array}
$$

Da questa tabella avente come dominio $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si ricava, innanzi tutto, che scambiando i due operandi della differenza si passa da un valore positivo p al numero negativo opposto $\overline{p}$ e viceversa da un intero negativo $\overline{q}$ al suo opposto positivo q. Il passaggio all'intero opposto risulta quindi una trasformazione involutiva; per essa 0 è l'unico punto fisso.
Si osserva poi che:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \;\vdots\; n - \overline{m} = n + m \qquad \overline{n} - m = \overline{n+m} \qquad \overline{n} - \overline{m} = m - n$$

$$0 - m = \overline{m} \qquad n - 0 = n \qquad 0 - \overline{m} = m \qquad \overline{n} - 0 = \overline{n}\ .$$

Si può allora osservare che il passaggio da un qualsiasi intero z all'opposto si può convenientemente esprimere come $\overline{z}$. Con questa convenzione il suo carattere involutorio si esprime mediante la $\overline{\overline{z}} = z$ e dalle precedenti uguaglianze si ricavano le seguenti:

$$\forall z, w \in \mathbb{Z} \;\vdots\; 0 - z = \overline{z} \qquad z - 0 = z \qquad z - w = \overline{w} - \overline{z} = \overline{w - z}.$$

G10:5.f Cerchiamo ora di estendere la somma a tutte le coppie di interi; anche per questo procediamo ad una analoga estensione della presentazione tabellare su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ della operazione:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & \uparrow m \\
5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
+ & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ \rightarrow n
\end{array}
$$

Su questa tabella si riconosce la distanza Manhattan dall'origine e l'uguagliamza $n+m=(n+1)+(m-1)$.
Per mantenere le proprietà della somma conviene passare a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ attribuendo valori unici alle classi di caselle allineate parallelamente alla codiagonale, in una prima fase estendendo verso SE e NW i segmenti del primo quadrante e successivamente procedendo ad assegnare i valori $\overline{p}$ per $p=1,2,3,...$ alle rette-ZZD2 via via più spostate verso SW. Alla fine si ottiene:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \mathbf{5} & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\overline{1} & 0 & 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\overline{2} & \overline{1} & 0 & 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\overline{3} & \overline{2} & \overline{1} & 0 & 1 & \mathbf{2} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\overline{4} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} & 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\overline{\mathbf{5}} & \overline{\mathbf{4}} & \overline{\mathbf{3}} & \overline{\mathbf{2}} & \overline{\mathbf{1}} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\
\overline{6} & \overline{5} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{\mathbf{1}} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\overline{7} & \overline{6} & \overline{5} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{\mathbf{2}} & \overline{1} & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\overline{8} & \overline{7} & \overline{6} & \overline{5} & \overline{4} & \overline{\mathbf{3}} & \overline{2} & \overline{1} & 0 & 1 & 2 \\
\overline{9} & \overline{8} & \overline{7} & \overline{6} & \overline{5} & \overline{\mathbf{4}} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} & 0 & 1 \\
\overline{10} & \overline{9} & \overline{8} & \overline{7} & \overline{6} & \overline{\mathbf{5}} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} & 0
\end{array}
$$

Si nota che la precedente matrice si ottiene da quella per la differenza riflettendola rispetto alla linea orizzontale relativa ad $m=0$, cioè scambiando i valori di m con gli opposti; questo è in pieno accordo con la $n+m=n-\overline{m}$. Si osserva anche che l'estensione equivale alle scelte:

$$
n+\overline{m}:=n-m \qquad \overline{n}+m:=m-n \qquad \overline{n}+\overline{m}:=\overline{n+m}\ .
$$

Infine si osserva che su $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ si mantengono le principali proprietà della somma, la sua simmetria (o commutatività) e la sua associatività.

G10:5.g Naturalmente si sente anche la necessità di estendere a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ il prodotto di naturali e ancora si procede ad ampliare la presentazione tabellare su $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dell'operazione:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & m\uparrow & & & & & \\
5 & 0 & 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \\
4 & 0 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\
3 & 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\
2 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
\cdot & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}
\;\rightarrow n
$$

Questa tabella è interpretabile piuttosto naturalmente in termini di aree.
Si rivela utile mantenere per la moltiplicazione di un naturale n per un intero z il compito di esprimere la somma di n addendi uguali a z: quindi si chiede

$$
n\cdot z := \underbrace{z+z+\cdots z}_{n-volte}\ .
$$

In particolare si ha

$$n \cdot \overline{m} = \underbrace{\overline{m} + \overline{m} + \cdots + \overline{m}}_{n-volte} = \overline{n \cdot m}.$$

La precedente richiesta consente applicazioni come quella riguardante il calcolo del debito complessivo di n debitori che devono a un creditore una stessa quantità di denaro m o quella riguardante la valutazione dell'arretramento complessivo dovuto all'applicazione di n arretramenti successivi, tutte della stessa estensione m.
È poi naturale presupporre che si evitano complicazioni se si mantiene la simmetria dell'operazione chiedendo

$$\overline{n} \cdot m := \overline{n \cdot m} \ .$$

Effettivamente questa scelta si rivela vantaggiosa anche sul piano pratico.
Seguendo lo stesso criterio di attenzione alla praticità della simmetria, si richiede infine la completa simmetria della tabella del prodotto rispetto al centro $\langle 0, 0\rangle$ ponendo $\overline{n} \cdot \overline{m} := n \cdot m$.

La presentazione tabellare geografica del prodotto di interi assume allora il seguente aspetto comodamente simmetrico:

$\overline{25}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	**0**	5	10	15	20	25
$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	**0**	4	8	12	16	20
$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	**0**	3	6	9	12	15
$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	**0**	2	4	6	8	10
$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	**0**	1	2	3	4	5
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
5	4	3	2	1	**0**	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
10	8	6	4	2	**0**	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
15	12	9	6	3	**0**	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$
20	16	12	8	4	**0**	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$
25	20	15	10	5	**0**	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\overline{25}$

L'opportunità della scelta simmetrica si rivela pienamente con l'introduzione delle aree con segno per figure-ZZ orientate (v. o. ??).

G10:5.h La scrittura $\overline{z}$ si può considerare una semplificazione di una scrittura del tipo z^{-s} che si serve di un operatore unario suffisso. Si può considerare come sua alternativa una scrittura che si serve di un operatore unario prefisso $-_u z$; questo operatore **meno unario** $-_u$ esprime la involuzione $\lceil z \in \mathbb{Z} \;\; \mapsto \;\; \overline{z} \rceil = Mirr_0$.
Esso consente di scrivere le uguaglianze $-_u m = (-_u 1) \cdot m \qquad n - m = n + (-_u m) \qquad 0 - m = -_u m$.

In genere il segno meno unario viene scritto come il binario: questo apre la possibilità di scritture ambigue che però in genere il contesto consente di interpretare con le corrette distinzioni.

L'ordine $\leq$ si estende a tutti gli interi in accordo con la raffigurazione di $\mathbb{Z}$ con i numeri negativi allineati alla sinistra dei numeri naturali. Presi m ed n tra gli interi positivi, si chiede che sia:

$$-_u n \ < \ 0 \ < \ m \qquad\qquad -_u n < -_u m \iff m < n \ .$$

Le proprietà di antisimmetria e transitività si verificano facilmente.

Si possono allora estendere facilmente dai naturali a tutti gli interi, cioè da $\mathbb{N}$ all'intero $\mathbb{Z}$le nozioni di intervallo e le funzioni massimo e minimo:

$\forall w, z \in \mathbb{Z} \ : \quad [w : z] := \{w, w+1, ..., z\} \ \text{ sse } \ w < z \qquad := \{w\} \ \text{ sse } \ w = z \qquad := \emptyset \ \text{ sse } \ w > z$;

$$(w:z] := [w:z] \setminus \{w\} \qquad [w:z) := [w:z] \setminus \{z\} \qquad (w:z) := [w:z] \setminus \{w,z\}\ .$$

$$\max(w,z) := w \ \text{ sse } \ w \le z \ \text{ sse } \min(w,z) = z \qquad \max(w,z) := z \ \text{ sse } \ w \ge z \ \text{ sse } \min(w,z) = w\ .$$

Si introducono anche gli intervalli illimitati di interi:

$$(-\infty : z] \ := \ \{k \in \mathbb{Z} \ \rceil \ k \le z\} = \{..., z-1, z\} \qquad [w : +\infty) \ := \ \{k \in \mathbb{Z} \ \rceil \ w \le k\} = \{w, w+1, ...\}\ .$$

$$(-\infty : +\infty) := \mathbb{Z}$$

G10:5.i Si dice insieme dei multipli (interi) dell'intero z l'insieme $\{w \in \mathbb{Z} :| \ w \cdot z\}$; questo insieme si denota anche $z \cdot \mathbb{Z}$. Si osserva che $1 \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, $1 \cdot \mathbb{Z} = \{0\}$ e $-z \cdot \mathbb{Z} = z \cdot \mathbb{Z}$.
Fissato $w \in \mathbb{Z}$ si dice **omotetia-Z** di fattore w la trasformazione $Omtt(f) := \lceil z \in \mathbb{Z} \ \vdash\!\!\!\!\rightarrow \ w \cdot z \rceil$. Questa trasformazione associa a ogni intero uno dei suoi multipli.
Mentre $Omtt(1)$ non è che l'identità di $\mathbb{Z}$, $Omtt(-1)$ si trova coincidere con la riflessione rispetto a 0, $Mirr_0$. Queste sono le due sole dilatazioni che sono anche permutazioni di $\mathbb{Z}$.

$Omtt(0)$ è il collasso $\lceil z \in \mathbb{Z} \ \vdash\!\!\!\!\rightarrow \ 0 \rceil$. Si verifica inoltre che $\forall f, g \in \mathbb{Z} \ :\ Omtt(f) \circ Omtt(g) = Omtt(f \cdot g)$.
Per ogni $f \in [2 : +\infty)$ la trasformazione $Omtt(f)$ ha come codominio l'insieme degli interi multipli di f, $f \cdot \mathbb{Z}$ e quindi non è suriettiva ma solo iniettiva; trasformazioni analoghe sono le $Omtt(-f)$ relative ad un fattore negativo appartenente a $(-\infty : -2]$.

Si dimostra facilmente che $\forall w, y \in \mathbb{Z} \ :\ Omtt(w) \circ Omtt(y) = Omtt(w \cdot y)$.
Denotiamo con $Omtt(\mathbb{Z})$ l'insieme delle omotetie-Z.
Accade dunque che la maggior parte delle dilatazioni sono trasformazioni non invertibili nell'intero $\mathbb{Z}$. Con il linguaggio che introduciamo nel paragrafo successivo non si può quindi dire che $Omtt(\mathbb{Z})$ costituisce un gruppo di trasformazioni, ma solo che costituisce un esempio di monoide.