Capitolo D68:
Quadrati magici e varianti

Contenuti delle sezioni

D68:0.01 Il capitolo è dedicato all'introduzione e alle prime proprietà dei quadrati magici, strutture discrete che nel passato hanno destato grande interesse sia in ambito numerologico, in quanto considerate portatrici di proprietà magiche e taumaturgiche, sia per le loro proprietà matematiche.

D68:a. Prime nozioni sui quadrati magici

D68:a.01 sia n un intero maggiore o uguale a 2. Diciamo **quadrato magico** (in breve q.m.) di ordine n una matrice quadrata $n \times n$ avente come entrate interi non tutti uguali e t.c., sommando i numeri su ciascuna delle sue righe, su ciascuna delle sue colonne e su ciascuna delle sue diagonali si ottiene un unico valore. Chiameremo tale valore il **totale** del quadrato magico; il totale di un q.m. Q lo denoteremo con $\mathrm{tot}(Q)$.

Un quadrato magico di ordine n può vedersi come funzione intera di due variabili intere il cui codominio è l'insieme degli interi costituenti le sue componenti.
Si constata subito che sommando ad ogni componente di un quadrato magico Q di ordine n un qualsiasi intero a si ottiene ancora un quadrato magico il cui codominio si ottiene traslando $\mathrm{dom}(Q)$ di $+a$ ed il cui totale è $\mathrm{tot}(Q) + n\,a$.

Quindi ci si può limitare a studiare quadrati magici con una fissata entrata minima.
In genere si considerano q.m. con entrata minima 1; talora conviene considerare quelli con entrata minima 0. La scelta dell'entrata minima è solo convenzionale, in quanto con scelte diverse si ottengono quadrati e proprietà equivalenti facilmente collegabili.
Quando serve precisare questa convenzione denotiamo ${}^{m}\mathsf{Qm}$ l'insieme dei quadrati magici con entrata minima m. Più genericamente l'insieme dei quadrati magici si può denotare con Qm.
In genere seguiremo questo atteggiamento. Denotiamo quindi $\mathsf{Qm}^{(n)}$ l'insieme dei quadrati magici di ordine n con entrata minima 1.

D68:a.02 Per ordini piccoli i quadrati magici con piccoli codomini si possono costruire abbastanza facilmente: ad esempio si individuano quadrati magici come i seguenti:

$$\begin{bmatrix}1&1&1&2\\2&1&1&1\\1&1&2&1\\1&2&1&1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}3&2&2&3\\3&2&2&3\\2&3&3&2\\2&3&3&2\end{bmatrix}.$$

Il primo è ottenuto aumentando di 1 tutte le entrate della rappresentazione matriciale binaria della permutazione (4 1 3 2); il secondo si può ottenere dal precedente sommandolo a quello ottenuto riflettendo le sue colonne. Inoltre tutti i quadrati latini di ordine n con codominio $(n]$ sono quadrati magici aventi come totale $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Sono quindi considerati più pregevoli e più meritevoli di studio i q.m. con codomini estesi. In particolare sono considerati interessanti i q.m. con le entrate tutte diverse e, ancor più, quelli con l'insieme delle entrate costituito da n^2 interi consecutivi. Denotiamo con **QmD** l'insieme dei primi e con **QmC** l'insieme dei secondi; se ci limitiamo ai q.m. di ordine n scriviamo $\mathsf{QmD}^{(n)}$ e $\mathsf{QmC}^{(n)}$.
Evidentemente $\mathsf{QmC} \subseteq \mathsf{QmD}$ e $\mathsf{QmC}^{(n)} \subseteq \mathsf{QmD}^{(n)}$

I quadrati magici con interi diversi consecutivi, dunque, si possono ricondurre ai quadrati magici aventi come codominio $(n^2] = \{1, ..., n^2\}$. Evidentemente il totale di questi quadrati di ordine n è $\dfrac{1+2+...+n^2}{n} = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Due quadrati magici di $\mathsf{QmC}^{(4)}$ ed uno di $\mathsf{QmC}^{(6)}$ sono i seguenti:

$$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 12 & 8 & 13 \\ 14 & 7 & 11 & 2 \\ 15 & 6 & 10 & 3 \\ 4 & 9 & 5 & 16 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 35 & 1 & 6 & 26 & 19 & 24 \\ 3 & 32 & 7 & 21 & 23 & 25 \\ 31 & 9 & 2 & 22 & 27 & 20 \\ 8 & 28 & 33 & 17 & 10 & 15 \\ 30 & 5 & 34 & 12 & 14 & 16 \\ 4 & 36 & 29 & 13 & 18 & 11 \end{bmatrix}$$

D68:a.03 I quadrati magici, e strutture che si discostano poco dalla definizione data all'inizio del capitolo, sono stati conosciuti fin dall'antichità in Cina (2000 a. C. ?) ed in India e spesso sono stati considerati entità dotate di poteri magici e taumaturgici (e lo sono tuttora). Essi quindi sono stati utilizzati spesso nella confezione di amuleti e di oggetti con fini rituali.

Essi sono comparsi nella letteratura occidentale a Costantinopoli intorno al 1300 ed hanno avuto una certa fama nel Rinascimento: il primo dei tre quadrati magici precedenti compare in una celebre litografia di [[Albrecht Dürer]] del 1514 intitolata "Melencolia I"; [[Cornelio Agrippa]] presentò quadrati magici degli ordini da 3 a 9. I q.m. sono stati oggetto di studio costruttivo da parte dello stesso Eulero intorno al 1780.

I quadrati magici oggi, oltre a presentare interesse puramente numerico-combinatorio (e interessare come amuleti e come oggetti di arredamento), giocano un ruolo importante in applicazioni pratiche come negli esperimenti a scopo statistico o nella costruzione di codici diagnostici e correttivi di errori per la trasmissione di dati tra apparecchiature elettroniche.

D68:a.04 Se fosse sensato non preoccuparsi dell'efficienza, non sarebbe difficile costruire una procedura che genera tutti i quadrati magici di un dato ordine n e con un dato codominio ed in particolare tutti i q.m. di $\mathsf{QmC}^{(n)}$: si tratta di generare tutte le matrici di ordine n con il dato codominio e decidere per ciascuna di esse con semplici verifiche se si tratta di un quadrato magico. Si vede quindi che **QmC** e **Qm** sono insiemi numerabili.
Si trova anche che tutti i q.m. di $\mathsf{QmD}^{(n)}$ con entrata minima 1 sono riconducibili a q.m. con entrata massima finita.
Data l'elevatezza del numero delle matrici di ordine n candidate al ruolo di q.m. quando n è alto, anche per riuscire ad avere un controllo procedurale effettivo di queste configurazioni discrete è necessario disporre di maggiori conoscenze dei loro insiemi e delle loro proprietà.

D68:b. Quadrati magici e quadrati latini

D68:b.01 I quadrati magici più strettamente collegati con i quadrati latini sono quelli che, nel caso dell'ordine n, presentano solo n entrate distinte, ciascuna occorrente n volte. Evidentemente si tratta di quadrati latini t.c. la somma degli elementi sulle due diagonali coincide con la somma degli elementi su ciascuna riga o colonna.
Chiamiamo **quadrato latino magico di ordine** n ogni quadrato latino canonico di ordine n che sia anche quadrato magico; denotiamo con $\mathsf{QIM}^{(n)}$ il loro insieme. Chiaramente il totale di tali quadrati è $0+1+...+n-1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
In particolare si dice **quadrato latino diagonale -p** [**diagonale -s**] un ql canonico con gli elementi della diagonale principale [secondaria] distinti. Si definisce poi **quadrato latino bidiagonale** un ql che sia contemporaneamente diagonale -p e diagonale -s.

D68:b.02 Prop. Per ogni $n = 3, 4, ...$ esiste almeno un quadrato latino p-diagonale di ordine n.
Dim.: È noto che se $n \in [3 : +\infty)$ esiste un semigruppo idempotente di ordine n e la tavola di moltiplicazione di un semigruppo idempotente è un quadrato latino diagonale -p ▮

D68:b.03 Coroll.: Se $n \in [3 : +\infty)$ esiste almeno un quadrato latino diagonale -s di ordine n.
Dim.: Capovolgendo l'ordine delle colonne del quadrato latino diagonale -p si può ottenere un quadrato latino diagonale -s ▮

D68:b.04 Prop. Se n è un generico intero dispari non multiplo di 3, allora esiste almeno un quadrato latino bidiagonale di ordine n ▮

D68:b.05 Prop. Esiste almeno un quadrato latino bidiagonale di ordine 2^k sse $k > 1$.
Dim.: È immediato vedere che non è possibile costruire un quadrato latino bidiagonale di ordine 2; quindi supponiamo che $k \geq 2$. I casi $k = 2, 3$ sono dati dai seguenti esempi di quadrati latini di ordine 4 e 8.

$$qmlb_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad qmlb_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 0 & 1 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 5 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 0 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 6 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 0 & 2 & 7 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Per $k \geq 3$ procediamo per induzione e prendiamo come ipotesi induttiva che esiste almeno un quadrato latino bidiagonale di ogni ordine $n = 2^h$ con $2 \leq h \leq k$. Poichè $2^k = 4 \cdot 2^{k-2}$, segue dall'ipotesi induttiva che 2^k può essere scritto come il prodotto $n_1 \cdot n_2$ di due interi n_1 e n_2 tali che esistono i quadrati latini bidiagonali sia di ordine n_1 che di ordine n_2. Supponiamo ora che A e B siano quadrati latini canonici bidiagonali di ordine risp. n_1 e n_2. Costruiamo l'assemblaggio latino guidato da A di ${n_1}^2$ repliche di B: è facile vedere che otterremo un quadrato latino bidiagonale di ordine $n_1 \cdot n_2 = 2^k$. La dimostrazione può essere così completata per induzione su k ▮

D68:b.06 L'assemblaggio latino guidato da $qmlb_4$ di 16 repliche di $qmlb_4$ è fatto utilizzando gli interi da 0 a 15 come nel seguente esempio di quadrato latino di ordine 16:

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\
2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & 10 & 11 & 8 & 9 & 14 & 15 & 12 & 13 \\
3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 11 & 10 & 9 & 8 & 15 & 14 & 13 & 12 \\
1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 9 & 8 & 11 & 10 & 13 & 12 & 15 & 14 \\
8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
10 & 11 & 8 & 9 & 14 & 15 & 12 & 13 & 2 & 3 & 0 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 \\
11 & 10 & 9 & 8 & 15 & 14 & 13 & 12 & 3 & 2 & 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & 4 \\
9 & 8 & 11 & 10 & 13 & 12 & 15 & 14 & 1 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 \\
12 & 13 & 14 & 15 & 8 & 9 & 10 & 11 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
14 & 15 & 12 & 13 & 10 & 11 & 8 & 9 & 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
13 & 12 & 15 & 14 & 9 & 8 & 11 & 10 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 \\
4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 12 & 13 & 14 & 15 & 8 & 9 & 10 & 11 \\
6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & 14 & 15 & 12 & 13 & 10 & 11 & 8 & 9 \\
7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 \\
5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 & 13 & 12 & 15 & 14 & 9 & 8 & 11 & 10
\end{bmatrix}$$

D68:b.07 Prop. Se n è un intero positivo multiplo di 4, esiste almeno un quadrato latino bidiagonale di ordine n.

Dim.: La costruzione utilizzata per la dimostrazione di questo teorema è simile a quella del teorema precedente. Costruiamo quadrati latini di ordine $4 \cdot r$ con $r \geq 3$. Se $L \in \mathbf{Ql}^{(n)}$, basta costruire l'assemblaggio latino guidato da L di r^2 repliche di $qmlb_4$ ▮

D68:b.08 Prop. Non esistono quadrati latini bidiagonali di ordine 3.

Dim.: Supponiamo che la matrice quadrata $[a_{ij} \mid: i,j = 1,2,3]$, sia un quadrato latino bidiagonale. Allora, per definizione, gli elementi a_{11}, a_{22}, a_{33} sono tutti distinti e lo stesso vale per gli elementi a_{13}, a_{22}, a_{31}. Questo implica necessariamente che $a_{11} = a_{13}$ o $a_{11} = a_{31}$. Se una di queste uguaglianze è vera, il fatto che $[a_{ij}]$ è un quadrato latino è contraddetto ▮

D68:b.09 Ricordiamo che si definisce **insieme trasversale** di un quadrato latino di ordine n un insieme di n celle, una in ogni riga, una in ogni colonna, tali che due di queste celle non contengono lo stesso volore.

(1) Teorema Per ogni $n \in [3 : +\infty)$ esiste un quadrato latino p-diagonale di ordine n che possiede almeno un trasversale disgiunto dalla diagonale principale ▮

D68:b.10 Teorema Per $n \in [4 : +\infty)$ esiste almeno un quadrato latino bidiagonale di ordine n ▮

D68:b.11 Esempi di ql bidiagonali degli ordini 4, 5 e 6 sono i seguenti:

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 0 & 1 \\
3 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 3 & 2
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\
4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 4 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 3 & 5 & 0 & 2 & 4 \\
2 & 0 & 4 & 1 & 5 & 3 \\
4 & 2 & 0 & 5 & 3 & 1 \\
3 & 5 & 1 & 4 & 0 & 2
\end{bmatrix}$$

D68:b.12 Si dimostra anche che si possono costruire quadrati magici con entrate consecutive servendosi di coppie di quadrati latini ortogonali. Una tale costruzione risale allo stesso Eulero. Per questa costruzione considereremo coppie di quadrati latini isotope al quadrato che rappresenta la tavola di moltiplicazione del gruppo ciclico C_n con $n = 5$ (il metodo è efficace per n dispari).

D68:b.13 Denotiamo con L^* il quadrato latino che rappresenta la tavola di moltiplicazione di C_5 quando questo è rappresentato come gruppo additivo. Scambiando gli elementi $n-1$ e $1/2n(n-1)$ in ogni riga di L^*, quest'ultimo può essere trasformato in un quadrato latino L per il quale la somma degli elementi su ciascuna riga, su ciascuna colonna e su ciascuna diagonale è uguale a $1/2n(n-1)$. L può essere caratterizzato in questo modo: la diagonale principale forma un trasversale di L (così L è p-diagonale) e ogni diagonale spezzata parallela alla principale forma anche essa un trasversale. La diagonale secondaria contiene l'elemento $1/2n(n-1)$ n volte e ogni diagonale spezzata parallela alla diagonale secondaria ha tutti i suoi elementi uguali.

Un quadrato latino L_1 ortogonale a L può essere ottenuto da L scambiando le colonne di L a coppie: la r-esima colonna viene scambiata con la $(n-1-r)$-esima per $r = 0, 1, ..., 1/2(n-3)$, mentre la $1/2(n-1)$-esima colonna è fissata (si ricordi che le colonne sono numerate da 0 a $n-1$).
L'ortogonalità segue dal fatto che tutti gli elementi di ogni diagonale spezzata parallela alla principale di L_1 sono uguali, mentre in L essi sono tutti distinti. Inoltre gli elementi di ogni diagonale spezzata parallela alla secondaria di L_1 formano un trasversale, mentre in L essi sono tutti uguali. Illustriamo qui di seguito risp. i quadrati latini L^*, L e L_1:

$$\begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\1&2&3&4&0\\2&3&4&0&1\\3&4&0&1&2\\4&0&1&2&3\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}0&1&4&3&2\\1&4&3&2&0\\4&3&2&0&1\\3&2&0&1&4\\2&0&1&4&3\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}2&3&4&1&0\\0&2&3&4&1\\1&0&2&3&4\\4&1&0&2&3\\3&4&1&0&2\end{bmatrix}$$

Possiamo quindi enunciare il teorema che segue.

D68:b.14 Teorema Siano $L = [a_{ij}]$ e $L_1 = [b_{ij}]$ due quadrati latini ortogonali di ordine n dispari costruiti come appena descritto. Una matrice quadrata $M = [c_{ij}]$ sia costruita da L e L_1 ponendo $c_{ij} = na_{ij} + b_{ij}$. Allora la somma degli elementi di ogni riga, colonna e diagonale della matrice M è uguale a $1/2n(n^2-1)$ e gli elementi di M sono gli interi consecutivi $0, 1, ..., n^2-1$ ▮

Se consideriamo i quadrati latini rappresentati sopra, possiamo vedere che, in base al teorema 06:F.9, nL, L_1 e M sono, risp., i seguenti:

$$\begin{bmatrix}0&5&20&15&10\\5&20&15&10&0\\20&15&10&0&5\\15&10&0&5&20\\10&0&5&20&15\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}2&3&4&1&0\\0&2&3&4&1\\1&0&2&3&4\\4&1&0&2&3\\3&4&1&0&2\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}2&8&24&16&10\\5&22&18&14&1\\21&15&12&3&9\\19&11&0&7&23\\13&4&6&20&17\end{bmatrix}$$

D68:b.15 Teorema Esiste una coppia di quadrati latini bidiagonali ortogonali di ogni ordine dispari che non sia multiplo di 3 ▮

D68:b.16 Teorema Coppie di quadrati latini bidiagonali ortogonali di ordine n possono essere costruite ogni volta che n sia dispari o un multiplo di 4, tranne quando n è un multiplo di 3 ma non di 9 ▮

D68:b.17 Teorema Se n è un generico intero per il quale esiste una coppia di quadrati latini bidiagonali ortogonali, allora può essere costruito il quadrato magico $n \times n$ le cui entrate sono gli interi consecutivi $0, 1, ..., n^2-1$ ▮

D68:b.18 È stato inoltre dimostrato da G. Tarry che se $n = 8m$, con m dispari e non multiplo di 3 ($n = 8, 40, 56, 88, 104, ...$), allora è possibile ottenere coppie di quadrati latini bidiagonali ortogonali, L_1 e L_2, tali che il quadrato magico ottenuto con la composizione matriciale $M = (n-1)L_1 + L_2$ ha

l'ulteriore proprietà che le somme dei quadrati degli elementi di ogni riga, di ogni colonna e di ogni diagonale principale sono uguali.
La costruzione di quadrati magici con l'uso di coppie di quadrati latini ortogonali è nota ed usata da più di due secoli, ma non è l'unico metodo disponibile.

D68:b.19 Un **quadrato magico** è detto **pandiagonale** sse la somma degli elementi in ognuna delle sue diagonali spezzate è la stessa ed è uguale alla somma degli elementi di ogni riga, colonna e diagonale. Un esempio è fornito dal seguente quadrato di ordine 7 il cui totale è 175:

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 49 & 37 & 32 & 27 & 15 \\ 41 & 29 & 24 & 19 & 14 & 2 & 46 \\ 16 & 11 & 6 & 43 & 38 & 33 & 28 \\ 47 & 42 & 30 & 25 & 20 & 8 & 3 \\ 22 & 17 & 12 & 7 & 44 & 39 & 34 \\ 4 & 48 & 36 & 31 & 26 & 21 & 9 \\ 35 & 23 & 18 & 13 & 1 & 45 & 40 \end{bmatrix}$$

Spesso i quadrati magici pandiagonali vengono definiti anche **quadrati magici perfetti** o **diabolici** a causa di una loro proprietà: una riga o una colonna che forma uno dei quattro lati del quadrato può essere trasportata al lato opposto del quadrato senza che questo perda gli attributi *magico* e *pandiagonale*.

D68:b.20 In passato fu inoltre studiato da W.W. Horner un metodo per la costruzione di quadrati magici nei quali non solo la somma, ma anche il prodotto degli elementi di ogni riga, colonna e diagonale fosse la stessa. Questo tipo di quadrato viene chiamato **quadrato magico somma-prodotto**. Non spiegheremo questo metodo che richiederebbe troppo spazio e ci limitiamo a segnalare che si basa sui quadrati latini.

D68:c. Una proprietà di affiancamento

D68:c.01 Consideriamo il seguente quadrato magico 4×4:

$$M = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando la notazione decimale, affianchiamo le entrate delle prime due colonne per formare un'unica colonna di numeri e calcoliamone la somma. Ripetiamo l'operazione per le ultime due colonne:

$$\begin{array}{rcr} C_1\&C_2 & \qquad & C_3\&C_4 \\ 162 & & 313 \\ 511 & & 108 \\ 97 & & 612 \\ \underline{414} & & \underline{151} \\ 1184 & & 1184 \end{array}$$

Qui & indica l'operazione di affiancamento. Come si può notare la somma ottenuta è la stessa e questa è un'altra proprietà che caratterizza i quadrati magici. Analogamente a quanto fatto sopra, possiamo affiancare le altre coppie di colonne (con l'ulteriore condizione, però, che l'entrata 9 sia vista come 09):

Ripetendo questo procedimento con le altre quattro possibili scelte otteniamo un diverso insieme di somme uguali:

$C_1\&C_4$	$C_4\&C_1$	$C_2\&C_3$	$C_3\&C_2$
1613	1316	23	32
58	85	1110	1011
912	1209	76	67
41	14	1415	1514
2624	2624	2624	2624

D68:c.02 La stessa operazione può essere fatta con le righe di M trovando, anche in questo caso, delle combinazioni che generano colonne per le quali la somma delle entrate è la stessa:

$R_1\&R_2$	$R_4\&R_3$	$R_1\&R_4$	$R_4\&R_1$
165	409	164	416
211	147	214	142
310	156	315	153
138	112	131	113
824	824	824	824

D68:c.03 Come abbiamo già detto in questa operazione l'entrata 9 è stata sostituita con il numero a due cifre 09 per rendere i numeri a una cifra e a due cifre all'interno del quadrato convenientemente simmetrici. Per evitare questo stratagemma si possono riscrivere le entrate del quadrato in base nove piuttosto che con la usuale notazione decimale: con la notazione in base nove, infatti, i numeri a due cifre sono distribuiti simmetricamente nel quadrato come è evidente riscrivendo M con questa base:

$$M_9 = \begin{bmatrix} 17 & 2 & 3 & 14 \\ 5 & 12 & 11 & 8 \\ 10 & 7 & 6 & 13 \\ 4 & 15 & 16 & 1 \end{bmatrix}$$

D68:c.04 La proprietà di affiancamento per un quadrato magico M di ordine 4 è una conseguenza della **proprietà del quadrato magico** 2×2, la quale afferma che M può essere ripartito in quattro quadrati 2×2 per ognuno dei quali la somma delle entrate è uguale al totale di M. Questo fatto ci permette di dire che la proprietà di affiancamento di un quadrato 4×4 può essere considerata come una delle simmetrie interne che caratterizzano un quadrato magico.

D68:d. Quadrati fortemente magici

D68:d.01 Consideriamo il seguente quadrato magico M di ordine 4 avente come totale 34:

$$M = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

Si può osservare che tra i sottoquadrati 2×2 contenuti in M, solamente i 5 che seguono hanno la proprietà di avere la somma delle entrate uguale al totale di M.

$$\begin{bmatrix} 16 & 2 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 4 & 14 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Si può trovare un altro sottoquadrato con la stessa proprietà formato dai quattro elementi angolari;

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 16 \end{bmatrix}$$

Se, invece, consideriamo il seguente quadrato magico 4×4, il cui totale è ancora 34

$$M^* = \begin{bmatrix} 9 & 16 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 11 & 14 \\ 12 & 13 & 8 & 1 \\ 6 & 3 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

notiamo che tutti i suoi sedici sottoquadrati 2×2 hanno la proprietà che la somma delle loro entrate è 34.

D68:d.02 Ci chiediamo, quindi, quali altri quadrati magici hanno questa proprietà. La risposta a questa domanda la troviamo nella seguente definizione: sia M un quadrato magico 4×4

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Diciamo che M è un **quadrato fortemente magico** se $a_{m,n} + a_{m,n+1} + a_{m+1,n} + a_{m+1,n+1} = T$, dove T denota il totale di M e $1 \leq m, n \leq 3$.
I quadrati fortemente magici sono molto interessanti per le loro proprietà e per le trasformazioni a cui possono essere sottoposti. Analizziamo, quindi, queste proprietà.

D68:d.03 In un quadrato fortemente magico come quello rappresentato sopra vale la relazione

$$a_{11} + a_{12} = a_{23} + a_{24} = a_{31} + a_{32} = a_{43} + a_{44} = A$$

e

$$a_{13} + a_{14} = a_{21} + a_{22} = a_{33} + a_{34} = a_{41} + a_{42} = T - A,$$

Dim.: Questa proprietà segue direttamente dalla definizione di quadrato latino fortemente magico ▮

D68:d.04 Prop. (proprietà del quadrato 3×3) Consideriamo un quadrato 3×3 costruito all'interno di un quadrato fortemente magico M. La somma dei quattro angoli di questo quadrato è T e la somma di ciascuna coppia di angoli diagonalmente opposti è $T/2$. Se denotiamo con C_1, C_2, C_3 e C_4 gli elementi angolari del sottoquadrato 3×3 di M allora

$$C_1 + C_4 = C_2 + C_3 = T/2 \ .$$

Dim.: Questa proprietà può essere dimostrata facilmente: ognuno elementi angolari C_1, C_2, C_3 e C_4 di un qualsiasi sottoquadrato 3×3 di M può essere considerato angolo di un sottoquadrato 2×2. Di questi, 3 sono quadrati di angolo, mentre 1 è il quadrato interno centrale. Per esempio consideriamo il sottoquadrato 3×3

$$M_3 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = a_{22}, \text{ un angolo di } \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ (quadrato interno centrale)}$$

$$C_2 = a_{24}, \text{ un angolo di } \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \text{ (quadrato angolare)}$$

$$C_3 = a_{42}, \text{ un angolo di } \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \text{ (quadrato angolare)}$$

$$C_4 = a_{44}, \text{ un angolo di } \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \text{ (quadrato angolare)}$$

Gli elementi angolari di un quadrato M possono inoltre essere scritti in questo modo:

$$C_1 = T - S_1 \ , \qquad C_2 = T - S_2 \ , \qquad C_3 = T - S_3 \ , \qquad C_4 = T - S_4$$

dove S_1, S_2, S_3 e S_4 sono le somme degli altri tre elementi del rispettivo quadrato magico 2×2. Facendo riferimento al quadrato M_3 si ha che

$$S_1 = a_{23} + a_{32} + a_{33} \ , \qquad S_2 = a_{13} + a_{14} + a_{23} \ ,$$

$$S_3 = a_{31} + a_{32} + a_{41} \ , \qquad S_4 = a_{33} + a_{34} + a_{43} \ .$$

La somma degli elementi angolari può essere scritta in questo modo:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 4 \times T - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4),$$

Raggruppando i termini che costituiscono S_1, S_2, S_3 e S_4 nella somma $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, si può vedere che $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ è uguale alla somma di una riga, alla somma di una colonna e alla somma di una diagonale del quadrato 4×4 e ciascuna è uguale a T.
Per esempio, considerando ancora M_3, possiamo scrivere:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =$$
$$(a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34}) + (a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{43}) + (a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41}) = T + T + T.$$

Quindi

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 4 \times T - 3 \times T = T \ . \blacksquare$$

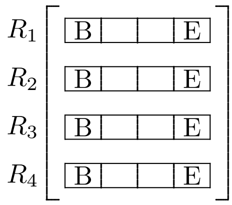
D68:d.05 Prop. (proprietà triangolare) In un quadrato fortemente magico 4×4 si può costruire un triangolo ogni lato del quale è costituito da tre numeri del quadrato. Due esempi di triangoli sono i seguenti:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & & a_{24} \\ & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}$$

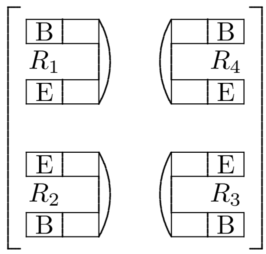
In un quadrato fortemente magico, la somma dei sei numeri che costituiscono i lati di un triangolo è la stessa per tutti i triangoli in esso contenuti.

Esistono inoltre molte trasformazioni che, quando sono applicate a un quadrato fortemente magico generano un altro quadrato dello stesso tipo. Queste trasformazioni sono:

1) Cicli delle righe ($cycR$) o delle colonne ($cycC$).
2) Scambio delle colonne 1 e 3 ($C_{1\Leftrightarrow 3}$) o delle righe 1 e 3 ($R_{1\Leftrightarrow 3}$).
3) Scambio delle colonne 2 e 4 ($C_{2\Leftrightarrow 4}$) o delle righe 2 e 4 ($R_{2\Leftrightarrow 4}$).
4) Riflessione rispetto alla diagonale (DRD se rispetto alla diagonale principale, DRA se rispetto alla secondaria).
5) Sostituzione di ogni elemento x con l'elemento $T/2 - x$.
6) "Torsione" delle righe (TWR) o delle colonne (TWC). I grafici seguenti descrivono la torsione delle righe; per quanto riguarda le colonne la trasformazione avviene in maniera analoga, semplicemente scambiando il ruolo di righe e colonne:



dove B ed E indicano l'inizio e la fine delle righe. Il quadrato ottenuto dopo la torsione delle righe è il seguente:



Se facciamo riferimento al quadrato M^* considerato all'inizio, otteniamo i seguenti risultati:

$$TWR(M^*) = \begin{bmatrix} 9 & 16 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 10 & 15 \\ 14 & 11 & 8 & 1 \\ 7 & 2 & 13 & 12 \end{bmatrix} \qquad TWC(M^*) = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 14 & 4 \\ 6 & 12 & 1 & 15 \\ 3 & 13 & 8 & 10 \\ 16 & 2 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

Si può notare che $TWC(M^*) = TRW({M^*}^T)$ dove ${M^*}^T$ è la trasposta della matrice M^*.

D68:e. Equivalenza di quadrati fortemente magici

D68:e.01 Due **quadrati fortemente magici** sono detti **equivalenti** sse uno può essere trasformato nell'altro attraverso una trasformazione o una sequenza di trasformazioni.

(1) Prop.: Ogni quadrato fortemente magico è equivalente ad altri 383 quadrati.
Dim.: Consideriamo il generico quadrato fortemente magico

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Applicando alcune delle trasformazioni definite nel paragrafo precedente possiamo ottenere da M_1 24 quadrati fortemente magici distinti con a_{11} come primo elemento:

$M_2 = TWR(M_1)$
$M_3 = TWR(M_2)$
$M_4 = DRA(M_1); M_5 = DRA(M_2); M_6 = DRA(M_3)$
$M_7 = C_{2\Leftrightarrow 4}(M_1); M_8 = C_{2\Leftrightarrow 4}(M_2); M_9 = C_{2\Leftrightarrow 4}(M_3)$
$M_10 = C_{2\Leftrightarrow 4}(M_4); M_11 = C_{2\Leftrightarrow 4}(M_5); M_12 = C_{2\Leftrightarrow 4}(M_6)$
$M_{da13a24} = R_{2\Leftrightarrow 4}(M_{da1a12})$

Si nota che a_{11} può essere uno qualsiasi dei numeri da 1 a 16, in quanto ciascuno di questi numeri può essere portato nella posizione $(1,1)$ da un'opportuna sequenza di cicli di righe e di colonne. Ognuno di questi quadrati può a sua volta essere trasformato in 24 quadrati fortemente magici distinti utilizzando le trasformazioni indicate qui sopra.
Quanto appena detto ci fa concludere che si possono ottenere $384 = 16 \times 24$ quadrati fortemente magici tra loro equivalenti. È anche chiaro da quanto detto che esistono 24 quadrati fortemente magici diversi per ciascuna posizione che un numero può occupare all'interno del quadrato: infatti dalla posizione $(1,1)$ un numero può essere portato in un'altra posizione qualsiasi attraverso una successione di cicli di righe e colonne ▮

D68:f. Quadrati antimagici di ordine 3

D68:f.01 Una matrice quadrata di ordine 3 è detta **quadrato antimagico** sse i 3 elementi lungo ciascuna riga, ciascuna colonna e ciascuna diagonale hanno somma diversa. Un quadrato antimagico, quello ottenuto da una sua riflessione e quello ottenuto da una sua rotazione sono equivalenti e sono considerati come un unico quadrato.
Se consideriamo un quadrato magico di ordine 3, non è difficile modificare la distribuzione delle sue cifre attorno a quella centrale trasformandolo in un quadrato antimagico, basta conservare l'alternanza di cifre pari e dispari lungo il perimetro come nel seguente esempio:

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 8 \\ 9 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

D68:f.02 Un altro metodo per ottenere una sequenza di quadrati antimagici (ancora attorno alla cifra centrale) è quello di costruirne uno scambiando due cifre del precedente:

$$\begin{bmatrix}1&3&2\\9&5&8\\6&7&4\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&3&2\\9&5&8\\4&7&6\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&3&2\\9&5&7\\4&8&6\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&3&2\\9&5&6\\4&8&7\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&3&2\\7&5&6\\4&8&9\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&3&2\\7&5&6\\4&9&8\end{bmatrix}$$

Possiamo inoltre ottenere i **complementari** di questi quadrati sottraendo ogni cifra da 10. In questo modo otteniamo la seguente tabella di quadrati antimagici:

$$\begin{bmatrix}9&7&8\\1&5&2\\4&3&6\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}9&7&8\\1&5&2\\6&3&4\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}9&7&8\\1&5&3\\6&2&4\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}9&7&8\\1&5&4\\6&2&3\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}9&7&8\\3&5&4\\6&2&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}9&7&8\\3&5&4\\6&1&2\end{bmatrix}$$

Naturalmente se un quadrato è antimagico, anche il suo complementare lo è; le 8 somme di un quadrato complementare potrebbero essere ottenute sottraendo da 30 le diverse somme del quadrato origine.

D68:f.03 A questo punto è naturale chiedersi quale sia il minimo numero di cifre che devono cambiare posizione e quale sia il minimo numero di movimenti o scambi necessari per trasformare un quadrato magico in un quadrato antimagico.
Prima di tutto dobbiamo dire che devono essere verificate le due seguenti condizioni:
(1) Non può rimanere inalterata più di una linea;
(2) Se due o più linee contengono lo stesso singolo elemento trasformato, solo una di queste può non essere ulteriormente sottoposta a un altro cambiamento.

D68:f.04 Vediamo, quindi qual è il minimo numero di cifre che devono essere scambiate per ottenere un quadrato antimagico. Consideriamo un marcatore x: sappiamo che ci sono 16 modi diversi per distribuire 3 marcatori nelle 9 celle di una matrice 3×3:

$$\begin{matrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&x&0\\0&x&0\\x&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x&0&x\\0&x&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x&0&x\\0&0&0\\0&x&0\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}0&x&0\\x&0&0\\0&0&x\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x&x&x\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&0&0\\x&x&x\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x&x&0\\x&0&0\\0&0&0\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}x&0&0\\x&x&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&x&0\\x&x&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x&x&0\\0&0&x\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x&x&0\\0&0&0\\x&0&0\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}x&x&0\\0&0&0\\0&x&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x&x&0\\0&0&0\\0&0&x\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x&0&x\\0&0&0\\x&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&x&0\\x&0&x\\0&0&0\end{matrix}$$

Se x indica gli elementi da muovere nello scambio, allora solo le prime 5 configurazioni verificano la prima condizione, ma nessuna di queste verifica la seconda. Questo ci dice che devono essere scambiati almeno 4 elementi: in tal caso ci sono 23 modi diversi per distribuire 4 marcatori (x) nelle 9 celle di una matrice di ordine 3:

$$\begin{matrix}x&x&x\\x&0&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x&x&x\\0&0&0\\0&x&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x&0&0\\x&x&x\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}0&x&0\\x&x&x\\0&0&0\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}x&x&0\\x&x&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x&x&0\\0&0&0\\x&x&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x&x&0\\0&0&0\\0&x&x\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x&x&0\\x&0&x\\0&0&0\end{matrix}$$

$$
\begin{matrix} x & x & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{matrix} \qquad
\begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \end{matrix} \qquad
\begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{matrix} \qquad
\begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{matrix}
$$

$$
\begin{matrix} 0 & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{matrix} \qquad
\begin{matrix} x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{matrix} \qquad
\begin{matrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{matrix} \qquad
\begin{matrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{matrix}
$$

$$
\underset{A}{\begin{matrix} x & x & x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \qquad
\underset{B}{\begin{matrix} x & x & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{matrix}} \qquad
\underset{C}{\begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \end{matrix}} \qquad
\underset{D}{\begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}
$$

$$
\underset{E}{\begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{matrix}} \qquad
\underset{F}{\begin{matrix} x & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x \end{matrix}} \qquad
\underset{G}{\begin{matrix} x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 \end{matrix}}
$$

Abbiamo raffigurato i quadrati in questo modo perchè, se anche in questo caso x indica gli elementi che devono essere cambiati, allora solo le ultime 7 configurazioni (che abbiamo identificato con le lettere A, B, ..., G) verificano entrambe le condizioni enunciate in precedenza. Ognuna delle 3 disposizioni simmetriche (A, F e G) e ognuna delle 4 disposizioni asimmetriche (B, C, D ed E) e delle loro immagini speculari possono essere applicate a un quadrato magico in 4 modi diversi; ci sono quindi 44 esempi di cambiamento da considerare.

D68:f.05 Per quanto riguarda la seconda domanda sul minimo numero di trasformazioni o scambi da effettuare, procediamo in questo modo: iniziamo a considerare il caso in cui si verificano 2 scambi. Sappiamo che 4 elementi possono essere divisi in due coppie in 3 modi distinti: applichiamo questi accoppiamenti (cioè questi scambi) ai 7 modelli A, B, ..., G .
Se entrambi gli elementi di una coppia appartengono alla stessa linea, il loro scambio non modifica la somma degli elementi di quella linea. Ognuno dei modelli A, C, D, E presenta una linea del tipo 000, cioè non affetta da alcuno scambio, mentre in ogni accoppiamento dei loro elementi x un qualsiasi scambio tra i membri della coppia lascia la somma degli elementi di una delle linee coinvolte inalterata. Questo ci dice che due linee del quadrato conservano le loro somme originali, cioè uguali tra di loro.

D68:f.06 Nei modelli F e G lo scambio fra i membri delle coppie lascia le coppie nelle linee originali oppure scambia gli elementi di una riga e di una colonna; queste ultime conservano le loro somme originali e quindi uguali fra loro.

Nel caso asimmetrico B lo scambio

$$
\begin{matrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} c & d & a \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{matrix}
$$

lascia solamente la somma di una linea inalterata. Comunque quando applicato a un quadrato magico di ordine 3 in ognuno degli 8 modi diversi, fa apparire due volte alcune somme. Possiamo quindi dire che nessun quadrato antimagico può essere costruito applicando solamente due scambi agli elementi di un quadrato magico di ordine 3.

D68:f.07 Proviamo allora a considerare 3 scambi: consideriamo 4 elementi M, N, P, Q; sappiamo che esistono 24 permutazioni di 4 elementi. In 15 di queste almeno uno degli elementi non ha cambiato la sua posizione originale; in altre 3 ci sono stati due scambi; le altre 6 possono essere ottenute da MNPQ attraverso 3 successivi scambi:

U – NPQM: MN, MP, MQ
V – NQMP: MN, MP, PQ
W – PMQN: MP, NM, NQ
X – PQNM: MP, NQ, MN
Y – QMNP: PQ, MQ, NM
Z – QPMN: MQ, NP, NM

Queste 6 permutazioni, identificate dalle lettere U, V, W, X, Y, Z possono essere applicate ai 7 modelli A, B, ..., G nelle loro varie orientazioni sul quadrato magico. Vediamo, quindi, l'applicazione di queste permutazioni sui 7 modelli.

D68:f.08 Iniziamo dal modello B; esso è asimmetrico, quindi, insieme alla sua immagine speculare può essere applicato al quadrato magico in 4 orientazioni diverse procedendo in senso orario. I quadrati magici sui quali è stato applicato il modello B diventano:

$$\begin{array}{ccc} M & N & P \\ 3 & 5 & 7 \\ Q & 9 & 2 \\ & B_1 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Q & 1 & M \\ 3 & 5 & N \\ 4 & 9 & P \\ & B_2 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 8 & 1 & Q \\ 3 & 5 & 7 \\ P & N & M \\ & B_3 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P & 1 & 6 \\ N & 5 & 7 \\ M & 9 & Q \\ & B_4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P & N & M \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & Q \\ & B_5 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 8 & 1 & P \\ 3 & 5 & N \\ Q & 9 & M \\ & B_6 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Q & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ M & N & P \\ & B_7 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M & 1 & Q \\ N & 5 & 7 \\ P & 9 & 2 \\ & B_8 & \end{array}$$

In B_1, $M = 8$, $N = 1$, $P = 6$ e $Q = 4$, così per le 6 permutazioni abbiamo:

$$U - \begin{array}{cccc} N & P & Q & M \\ 1 & 6 & 4 & 8 \end{array} \qquad X - \begin{array}{cccc} N & Q & M & P \\ 1 & 4 & 8 & 6 \end{array} \qquad W - \begin{array}{cccc} P & M & Q & N \\ 6 & 8 & 4 & 1 \end{array}$$

$$X - \begin{array}{cccc} P & Q & M & N \\ 6 & 4 & 1 & 8 \end{array} \qquad Y - \begin{array}{cccc} Q & M & N & P \\ 4 & 8 & 1 & 6 \end{array} \qquad Z - \begin{array}{cccc} Q & P & M & N \\ 4 & 6 & 8 & 1 \end{array}$$

Non tutte le permutazioni costruiscono un quadrato antimagico: anche se non rimane alcuna somma uguale all'originale, potrebbero apparire somme ripetute nel procedere. In B_1 non è prodotto alcun quadrato antimagico dalle permutazioni V, W e Y, anzi V non produce alcun quadrato antimagico in nessun B_i.

Quando i modelli di orientazione sono ruotati di 180° l'uno dall'altro, come in B_1B_3, B_2B_4, B_5B_7 e B_6B_8 si producono quadrati antimagici complementari. Solo uno di ogni coppia complementare è riportato qui sotto nell'identificazione dei 20 quadrati antimagici prodotti dal modello B. Per quanto riguarda l'orientazione del modello che ha operato sul quadrato magico, essa può essere identificata dalle cifre che nel quadrato antimagico occupano la stessa posizione che avevano nel quadrato magico originale.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 6 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 9 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 6 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 9 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 9 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 8 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 7 & 9 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 6 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 1 \end{array}$$

Poichè il modello B lascia la riga centrale o la colonna centrale inalterata, ognuno di questi quadrati antimagici ha la cifra 5 al centro. L'ultimo quadrato è particolarmente interessante poichè le sue somme sono 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 22, cioè 7 delle 8 somme sono numeri consecutivi.

D68:f.09 Consideriamo adesso il modello C:

$$\begin{matrix} M & N & 0 \\ 0 & P & 0 \\ Q & 0 & 0 \end{matrix}$$

In esso l'applicazione delle permutazioni X e Z lasciano le somme della riga e della diagonale, che hanno l'elemento superiore destro in comune, inalterate e, quindi, uguali. Anche le permutazioni U, V, W e Y falliscono nella costruzione di un quadrato antimagico.

D68:f.10 Nel modello D, invece

$$\begin{matrix} M & N & 0 \\ 0 & P & Q \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

l'applicazione delle permutazioni X e Z fallisce nel produrre un quadrato antimagico in ognuna delle orientazioni. Come con il modello B, si producono quadrati antimagici complementari attravesro quei modelli ruotati 180° l'uno dall'altro. Qui sotto sono riportati i rappresentanti delle 8 coppie complementari risultanti dal modello D:

$$\begin{matrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \\ 4 & 9 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 7 & 6 \\ 3 & 8 & 5 \\ 4 & 9 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 5 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 7 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 9 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 5 & 8 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 8 & 7 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 8 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 8 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{matrix}$$

D68:f.11 Passiamo quindi al modello E: esso fallisce nel produrre un quadrato antimagico sia quando sono applicate le permutazioni X e Z, sia partendo da E_2 ed E_4 e applicando un qualsiasi operatore. Come in B e in D i quadrati antimagici costruiti sono suddivisi in coppie di quadrati complementari delle quali un membro è riportato qui sotto:

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 8 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 4 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 9 & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 8 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 9 & 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 7 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 4 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \\ 7 & 9 & 8 \end{matrix}$$

Come nei quadrati costruiti a partire da B, tutti questi hanno la cifra 5 al centro.

D68:f.12 Per quanto riguarda il modello A

$$\begin{matrix} M & N & P \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

essendo simmetrico, può essere applicato a un quadrato magico solo in 4 orientazioni. Delle permutazioni, solo X fallisce nella costruzione di un quadrato antimagico. I quadrati formati da orientazioni ruotate di 180° sono complementari e uno di ogni coppia di quadrati complementari è riportato qui sotto:

$$\begin{matrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 6 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 5 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 8 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \end{matrix}$$

Le somme del quarto quadrato sono 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 23, un altro caso in cui 7 delle 8 somme sono interi consecutivi.

Nei modelli F e G, gli altri due modelli simmetrici, X e Z scambiano solo una riga e una colonna e lasciano le somme uguali. Le altre 4 permutazioni non producono un quadrato antimagico con nessuna delle 4 orientazioni.

D68:g. Cubi magici

D68:g.01 La nozione di quadrato magico si generalizza a 3 e più dimensioni. Per **cubo magico** di ordine n si intende un cubo $n \times n \times n$ con componenti intere non tutte uguali in cui tutte le righe, tutte le colonne, tutti i pilastri e le quattro diagonali spaziali hanno la stessa somma. Se Q denota un tale cubo, la suddetta somma è chiamata **totale magico** di Q e denotata $\text{tot}(Q)$.
Si dice **cubo magico normale** un cubo magico avente come componenti gli interi, tutti diversi da 1 a n^3, e conseguentemente totale magico $1 + 2 + \cdots + n^3 = \dfrac{n(n^3+1)}{2}$.
Si dice invece **cubo magico perfetto**, in breve c.m.p., un cubo magico normale nel quale, oltre ai $3n^2 + 4$ insiemi suddetti, anche tutte le $6n$ diagonali dei $3n$ strati che vi si individuano hanno come somma il totale magico.

D68:g.02 Il primo c.m.p. è stato scoperto dall'inglese A. H. Frost nel 1866. Si tratta di un cubo di ordine 7 con codominio (342] e somma magica 1204. Successivamente fu trovato da Frankenstein un c.m.p. di ordine 8 e verso la fine dell'800 furono scoperti c.m.b. degli ordini 7, 8, 9 11, e 12. Le conoscenze sui cubi magici hanno potuto ampliarsi solo grazie ad impegnativi esperimenti con il computer a partire dagli anni 1970.
Si è trovato che non esistono cubi magici perfetti di ordine 2, 3 e 4 e a lungo ci si è chiesto se esistono cubi magici perfetti di ordine 5 e 6.
Nel settembre 2003 il tedesco Trump ha scoperto un cubo magico perfetto di ordine 6 e nel novembre Trump ed il francese Boyer hanno scoperto un cubo magico perfetto di ordine 5.
Tali strutture sono presentate nella pagina
`http://mathworld.wolfram.com/news/2003-11-18/magiccube/`

D68:g.03 Si dice **cubo bimagico** un cubo magico per il quale anche il corrispondente cubo delle componenti quadrate è magico. Si dice **cubo trimagico** un cubo bimagico per il quale anche il corrispondente cubo delle componenti al cubo è magico. Analogamente si definiscono i **cubi quadrimagici** ed in generale i **cubi multimagici**. Per i cubi delle potenze naturalmente non si può richiedere che siano normali.
Nel settembre 2003 Boyer ha trovato un cubo magico di ordine 8192 che si trova essere bimagico, trimagico e quadrimagico.

D68:g.04 Vengono studiati anche **ipercubi magici**, strutture di più di 3 dimensioni. Nel 1999 J. Hendricks ha scoperto un ipercubo magico perfetto di 4 dimensioni e di ordine 16 (avente come somma magica 524296).