1

Capitolo D64
disegni a blocchi

Contenuti delle sezioni

12 pagine

D640.01 Il capitolo è dedicato alla presentazione delle prime proprietà dei disegni a blocchi. Esso inizia con una rapida introduzione delle strutture di incidenza, strutture molto generali tra le quali si riconoscono numerose specie di strutture matematiche, in particolare di strutture discrete.

I disegni a blocchi sono visti come strutture di incidenza dotate di marcate proprietà di uniformità. I primi disegni introdotti sono quelli che chiamiamo disegni-1, configurazioni che devono ubbidire a richieste non molto stringenti.

Le richieste si fanno più esigenti per i cosiddetti disegni-t. per questi dopo aver segnalate le proprietà di base, si individuano alcune importanti sottofamiglie come i disegni bilanciati, i grafi fortemente regolari e i sistemi di Steiner.
Si introducono inoltre alcune costruzioni e relazioni piuttosto generali riguardanti i disegni.

Successivamente si discutono disegni dotati di proprietà esprimibili in termini geometrici, i piani affini e i piani proiettivi.

D64 a. strutture di incidenza

D64a.01 Con il termine **struttura d'incidenza** si intende una terna $\boldsymbol{D} = \langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{I} \rangle$ con $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{B}$ insiemi disgiunti e $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{B}$.
Se $\boldsymbol{I}$ è un insieme finito, numerabile o discreto (e quindi si possono considerare tali anche $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{B}$) si parla, risp., di **struttura d'incidenza finita**, di **struttura d'incidenza numerabile** e di struttura d'incidenza discreta.

Denotiamo con **Incd** l'insieme delle strutture di incidenza, con **IncdF** l'insieme delle strutture di incidenza finite e con **IncdN** l'insieme delle strutture di incidenza numerabili.

In genere gli elementi di $\boldsymbol{P}$ si dicono **punti**, quelli di $\boldsymbol{B}$ **blocchi** e l'insieme $\boldsymbol{I}$ viene chiamato **relazione di incidenza** della $\boldsymbol{D}$.

Nel seguito useremo prevalentemente lettere minuscole per i punti e lettere maiuscole per i blocchi.
Ogni coppia $\langle p, B \rangle \in \boldsymbol{I}$ viene spesso chiamata **flag**, mentre ogni coppia di $\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{I}$ viene chiamata **antiflag**.

Si dice che p e B sono **incidenti** per la $\boldsymbol{I}$ sse $\langle p, B \rangle$ è un flag; si dice che sono non incidenti sse $\langle p, B \rangle$ è un antiflag.

Evidentemente le strutture di incidenza sono equivalenti (criptomorfe) alle relazioni binarie tra due insiemi distinti e in particolare che le strutture di incidenza finite sono equivalenti ai digrafi bipartiti i cui archi corrispondono ai flags.
Quindi si può obiettare che in questo paragrafo non si è fatto che introdurre nuovi termini per nozioni già note.

In effetti si è introdotta una nomenclatura ridondante che però sarà giustificata mostrando che essa consente di esprimere meglio una gamma di risultati molto ampia e con ricadute assai notevoli, sia in ambito matematico che in vari campi applicativi.

D64a.02 La definizione di struttura d'incidenza consente che si abbiano punti che non incidono in alcun blocco e blocchi nei quali non incide alcun punto; questi punti e questi blocchi evidentemente non presentano interesse diretto.
Si dice **struttura d'incidenza nondegenere** una struttura d'incidenza per la quale ogni punto incide in almeno un blocco e ogni blocco incide in almeno un punto.

La definizione di struttura d'incidenza consente anche che si abbiano **blocchi ripetuti**, cioè blocchi B_1 e B_2 introdotti come diversi ma incidenti sugli stessi punti, ossia per i quali $\boldsymbol{I}_{\mathrm{R}} B_1 = \boldsymbol{I}_{\mathrm{R}} B_2$.
Una struttura d'incidenza nondegenere e che non presenta blocchi ripetuti si chiama **struttura d'incidenza semplice**.
Le strutture d'incidenza non semplici presentano scarso interesse per considerazioni generali: possono intervenire solo come risultati di trasformazioni e possono essere ridotte a strutture semplici.

Si dice **spazio di blocchi** una coppia $\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{S} \rangle$, con $\boldsymbol{P}$ insieme e $\boldsymbol{S} \subseteq \mathfrak{P}(\boldsymbol{P})$.
La terna $\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{S}, \in \rangle$ è una struttura d'incidenza; i suoi flags sono le coppie $\langle p, S \rangle$ con $S \in \boldsymbol{S}$ e $p \in S$.

Sono dunque tipiche strutture di incidenza semplici quelle della forma $\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \in \rangle$, cioè terne nelle quali l'insieme dei blocchi costituisce una copertura dell'insieme dei punti $\boldsymbol{P}$ (ossia una collezione di sottoinsiemi di $\boldsymbol{P}$ la cui unione coincide con lo stesso $\boldsymbol{P}$) e la relazione di incidenza è la relazione di appartenenza della teoria degli insiemi.

Ogni struttura d'incidenza semplice si può ricondurre a uno spazio di blocchi munito della relazione di appartenenza; si tratta semplicemente di sostituire ogni blocco B con l'insieme $\boldsymbol{I}_{\mathsf{R}} B$ ed $\boldsymbol{I}$ con la relazione di appartenenza.

Anche quando si tratta una struttura d'incidenza ottenuta con una specifica costruzione può essere utile descrivere i suoi blocchi come contenitori che contengono i punti loro incidenti, ovvero può essere utile confondere ogni loro blocco con l'insieme dei punti che in esso incidono e considerare equivalenti le due relazioni $\langle p, B\rangle \in \boldsymbol{I}$ e $p \in B$.

D64a.03 Una struttura d'incidenza finita $\boldsymbol{D}$, come ogni relazione binaria tra due insiemi finiti disgiunti, è rappresentata fedelmente da una matrice binaria: la matrice le cui righe sono associate ai punti, le cui colonne ai blocchi e che viene chiamata **matrice d'incidenza** della struttura $\boldsymbol{D}$.

Per molte elaborazioni sopra una struttura d'incidenza finita conviene riferirsi alla matrice d'incidenza; chiameremo **peso di una linea** di una matrice binaria (finita), e in particolare di una riga di matrice d'incidenza (finita), il numero delle sue componenti uguali ad 1.

Per discutere una struttura d'incidenza $\boldsymbol{D} = \langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{I}\rangle \in$ **Incd** spesso è utile riferirsi ad insiemi delle forme che seguono.

$$\forall \overline{P} \subseteq \boldsymbol{P} \;:\; \overline{P}\,{}_{\mathsf{Я}}\boldsymbol{I} \;=\; \{B \in \boldsymbol{B} \rrbracket (\overline{P} \ni p \rrbracket p \in B)\} \tag{1}$$

$$\forall \overline{B} \subseteq \boldsymbol{B} \;:\; \boldsymbol{I}_{\mathsf{R}}\overline{B} \;=\; \{p \in \boldsymbol{P} \rrbracket (\overline{B} \ni B \rrbracket p \in B)\}\ , \tag{2}$$

D64a.04 Ogni multigrafo M privo di cappi fornisce una struttura di incidenza: i vertici di M rivestono il ruolo dei punti della struttura, gli spigoli di M il ruolo dei blocchi e i flags si ottengono considerando le estremità dei diversi spigoli.

La matrice di incidenza del multigrafo M è matrice d'incidenza anche per la sua struttura di incidenza.
Questa struttura ha tutti i blocchi aventi cardinale 2 o 1.
Si ha una struttura d'incidenza semplice sse il multigrafo è un grafo privo di cappi, cioè sse tutti i suoi spigoli sono duetti.

D64a.05 Se per una struttura d'incidenza finita semplice $\boldsymbol{D} = \langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{B}\rangle$ $\boldsymbol{P}$ è un insieme poco esteso i cui elementi si possono identificare con segni semplici e ordinati (in particolare con cifre decimali e/o lettere), risulta comodo codificare ogni suo blocco con la stringa di tali contrassegni in un ordine crescente e codificare l'intera $\boldsymbol{D}$ con l'insieme di tali stringhe.
Una tale scrittura la diciamo **codifica a stringhe** della struttura $\boldsymbol{D}$.

Due strutture d'incidenza $\boldsymbol{D}_1 = \langle \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{B}_1\rangle$ e $\boldsymbol{D}_2 = \langle \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{B}_2\rangle$ si dicono **strutture d'incidenza isomorfe** sse esiste una $\beta \in \lceil P_1 \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright \boldsymbol{P}_2 \rceil$ tale che la sua estensione booleana β^{be} costituisce una biiezione di $\lceil \boldsymbol{B}_1 \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright \boldsymbol{B}_2 \rceil$ per la quale

$$\langle p, B\rangle \in \boldsymbol{I}_1 \implies \langle \beta(p), \beta^{be}(B)\rangle \in \boldsymbol{I}_2\ .$$

Anche per le strutture d'incidenza si ottengono sia risultati che riguardano strutture con punti e blocchi forniti da costruzioni specifiche che risultati più astratti che riguardano strutture dalla cui costruzione si prescinde completamente.

Per le considerazioni più astratte si dovrebbe fare riferimento a classi di isomorfismo di strutture di incidenza.

Come quando si trattano molte altre specie di strutture, si tende tuttavia a identificare una tale classe di isomorfismo con una singola struttura che la rappresenta individuandola solo con il fatto di essere sua rappresentativa e qualificandola come "generica".

D64a.06 Nel seguito ci interesseremo esclusivamente di strutture d'incidenza finite, semplici e tendenzialmente dotate di rilevanti regolarità esprimibili numericamente e conseguentemente dotate di qualche tipo di simmetria.

Un primo esempio di regolarità consiste nell'avere **blocchi di ugual peso**, cioè blocchi in ciascuno dei quali incide lo stesso numero di punti.
In questo caso la matrice d'incidenza presenta in tutte le colonne lo stesso peso. Per tale struttura si usa anche il termine strutture d'incidenza equicardinale.

Più dettagliatamente, se v, k e b sono interi positivi, si dice disegno-0 di parametri v, k e b, o concisamente **disegno-0**-(v,k,b) una struttura d'incidenza semplice $\langle\, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{I} \rangle$ tale che $|\boldsymbol{P}| = v$, $|\boldsymbol{B}| = b$ e per ogni $B \in \boldsymbol{B} :\ |\boldsymbol{I}_{\mathsf{R}} B| = k$.

La struttura di incidenza associata a un grafo privo di cappi con v vertici ed s spigoli è quindi un disegno-0-$(v, 2, s)$.

Una regolarità analoga per le strutture d'incidenza consiste nel presentare **punti di ugual peso**, cioè punti che incidono nello stesso numero di blocchi. In questo caso la matrice d'incidenza presenta lo stesso peso in tutte le righe.

D64a.07 La precedente analogia fornisce l'occasione di osservare che i punti e i blocchi hanno ruoli scambiabili nella definizione di struttura d'incidenza.
Diciamo **struttura di incidenza duale** o **struttura di incidenza trasposta** di una data $\boldsymbol{D} = \langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{I} \rangle$ la struttura $\boldsymbol{D}^{\mathsf{T}} := \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{I}^{\mathsf{T}} \rangle$.

Chiaramente passare da una struttura d'incidenza alla duale corrisponde allo scambiare i punti con i blocchi, ovvero a trasporre la sua matrice d'incidenza.
Il passaggio alla struttura duale costituisce una involuzione nell'insieme delle strutture d'incidenza **Incd** (e anche in **IncdF** e in **IncdN**) che spesso consente di presentare più chiaramente alcune loro proprietà.

Questa involuzione, corrispondente alla involuzione per trasposizione delle matrici e viene quichiamata **dualità-T**.

In particolare, come per ogni altra involuzione, rivestono interesse strutture isomorfe alla loro trasposta, entità chiamate **strutture d'incidenza autoduali-T**.

D64a.08 Una struttura di incidenza finita è chiamata **spazio lineare finito** sse ogni duetto di suoi punti, e quindi ogni coppia di suoi punti distinti, incide su un unico blocco.

Si parla invece di **spazio lineare finito parziale** nel caso di una struttura di incidenza tale che ogni coppia di suoi punti distinti incide su al più un blocco.

Per queste strutture i blocchi vengono chiamati anche **rette**.

Per ogni v intero positivo il grafo completo $\mathcal{K}_v$ fornisce uno spazio lineare finito.
Ogni altro grafo privo di cappi fornisce invece uno spazio lineare finito parziale.

D64a.09 Un esempio di struttura d'incidenza con forti regolarità è il cosiddetto **piano di Fano**, struttura di incidenza individuata dalla codifica a stringhe $\{123, 145, 167, 247, 256, 346, 357\}$ e dalla matrice binaria che presentiamo come matrice dei segni "." e $\bullet$, che per la loro maggiore evidenza sostituiscono, risp., il bit 0 e il bit 1.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & 123 & 145 & 167 & 247 & 256 & 346 & 357 \\
1 & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2 & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot \\
3 & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet \\
4 & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\
5 & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet \\
6 & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot \\
7 & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet
\end{array} .$$

Il piano di Fano si può raffigurare con il seguente grafico nel quale sono evidenziati i suoi 7 punti e le sue 7 rette (anche quella raffigurata con l'aspetto di una circonferenza va considerata una retta):

//input pD64a09

D64a.10 Ricordiamo che un grafo si dice **grafo regolare** sse ogni suo vertice ha la stessa valenza; più specificamente se tale valenza unica è a si parla di **grafo regolare**-a.
Un grafo si dice invece **grafo fortemente regolare**-(v, a, λ, μ) sse presenta v vertici, è regolare-a per qualche $a \in \{1, 2, ..., v-2\}$ (e quindi non è vuoto e non è completo), λ fornisce il numero dei vertici adiacenti a entrambi gli elementi di ciascuno dei duetti di vertici adiacenti e μ è il numero dei vertici adiacenti a entrambi gli elementi di ciascuno dei duetti di vertici non adiacenti.

D64 b. disegni-1

D64b.01 Si dice disegno-1 di parametri v, k e λ o concisamente **disegno-1**-(v,k,λ) una struttura d'incidenza $\langle\, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{I} \rangle$ tale che $|\boldsymbol{P}| = v$, per ogni $B \in \boldsymbol{B} : |\boldsymbol{I}_{\mathrm{R}} B| = k$ e ogni $p \in \boldsymbol{P}$ è incidente in esattamente λ blocchi.
Un tale disegno-1 è chiamato anche configurazione tattica.

Un esempio di disegno-1-$(8,4,3)$ che identifichiamo con $\boldsymbol{D}_a$ è individuato dalla codifica $\{1234, 1247, 1357, 2468, 3568, 5678\}$, ovvero dalla matrice binaria

$$\begin{array}{cccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \\
\bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\
\bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\
\bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \bullet \\
\cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \bullet \\
\cdot & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet \\
\cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}$$

Osserviamo che un disegno-1 presenta sia i punti che i blocchi di uguale peso e che anche il duale di un disegno-1 è un disegno-1.

Denotiamo con **Dsgn**-$1_{v,b,k,\lambda}$ l'insieme dei disegni-1-v,k,λ che presentano b blocchi.

Si osserva che il duale di un disegno in **Dsgn** $- 1_{v,b,k,\lambda}$ appartiene a **Dsgn** $- 1_{b,v,\lambda,k}$.

D64b.02 Il termine disegno deriva dallo studio statistico dei piani di esperimenti (in inglese *designs*). Un disegno come $\boldsymbol{D}_a$ potrebbe costituire lo schema adottato per effettuare sperimentazioni su $v = 8$ varietà di sementi (i punti) in $b = 6$ tipi di terreni (i blocchi), in modo che ogni semente sia provata in un ugual numero $\lambda = 3$ di terreni.
Con un tal piano di esperimenti si può confidare, su base statistica, di ottenere valutazioni equilibrate sulle sementi in esame, evitando, con evidenti vantaggi economici e pratici, di provare ciascuna delle varietà di sementi in ciascuno dei terreni disponibili.

D64b.03 Ogni disegno-1-(v,k,λ) corrisponde a una collezione di sottoinsiemi aventi cardinale k dell'insieme $\boldsymbol{P}$ (avente cardinale v).

È anche evidente che i parametri interi v, k e λ, nonché il numero dei blocchi $b := |\boldsymbol{B}|$, non possono essere scelti in modo del tutto arbitrario. Vediamo a quali vincoli devono sottostare.

Il numero dei flags di un disegno-1-(v,k,λ) è dato da $v \cdot \lambda$, cioè dal numero dei punti per il numero dei blocchi in cui ogni punto incide. Tale numero si ottiene anche dal prodotto $b \cdot k$, del numero dei blocchi per il numero dei punti incidenti in ogni blocco.
Quindi deve essere $v \cdot \lambda = b \cdot k$ e da questa si deduce che k deve essere un divisore di $v\,\lambda$, cioè $k \mid v\,\lambda$.

Inoltre il numero dei blocchi non può superare il numero dei sottoinsiemi-k di $\boldsymbol{P}$, cioè $\binom{v}{k}$.

D64b.04 Le due condizioni sono necessarie perché si possa avere un disegno-1; inoltre esse sono condizioni sufficienti.

Prop. Esistono disegni-1-(v,k,λ) sse $k \mid v\,\lambda$ e $b := \dfrac{v\,\lambda}{k} \le \binom{v}{k}$.

Dim.: Occorre dimostrare che per ogni scelta di interi positivi v, k e λ soddisfacente le precedenti richieste si può individuare un disegno-1-(v,k,λ).

Equivalentemente si tratta di dimostrare che si può costruire una matrice binaria di profilo $v \times b$ con righe di peso λ e colonne di peso k.
Ovviamente si può costruire facilmente una matrice binaria con le righe dello stesso peso, senza preoccuparsi se essa ha colonne con pesi diversi; denotiamo con k_i il numero delle entrate uguali a 1 che essa presenta nella colonna $i \in (k]$.
Se una tale matrice ha colonne con pesi diversi, alcuni k_i devono essere inferiori e altri superiori a k, in modo che sia $\sum_{i=1}^{b} k_i = b\,k$, ovvero $\sum_{i=1}^{b}(k-k_i)=0$.
Lo scostamento dalla uniformità delle colonne può ragionevolmente essere valutato dal numero $\sum_{i=1}^{v}|k-k_i|$.
Questa valutazione di nonuniformità deve essere un intero naturale pari.

Dimostriamo che la suddetta valutazione può essere diminuita di 2 in 2 fino ad annullarsi attuando una serie di scambi di uno zero con un uno sulla stessa riga. Per semplicità di visualizzazione supponiamo di avere la prima colonna con k_1 uni nelle prime righe e la seconda con k_2 nelle ultime posizioni, essendo $k_1 < k < k_2$.
Scambiando le componenti delle caselle $\langle k_1+1, 1\rangle$ e $\langle k_1+1, 2\rangle$ sulla stessa riga, evidentemente si mantiene l'ugual peso delle righe e si diminuisce di 2 la valutazione di nonuniformità.
Questi scambi possono essere effettuati su tutte le coppie di colonne $\langle i, j\rangle$ con $k_i < k < k_j$ fino ad arrivare all'ugual peso delle colonne, cioè fino ad avere una matrice binaria che rappresenta un disegno-1-(v, k, λ) ▮

D64b.05 Osserviamo la seguente equivalenza tra disuguaglianze:

$$(1) \qquad \lambda \leq \frac{k}{v}\binom{v}{k} \;=\; \frac{k}{v}\,\frac{v...(v-k+1)}{1...k} \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda \leq \binom{v-1}{k-1} \,.$$

La seconda di queste relazioni esprime il fatto che per ottenere un blocco B del quale fa parte un certo punto $\overline{p}$, si devono aggiungere a questo altri $k-1$ punti i quali devono essere scelti in $\boldsymbol{P} \setminus \{\overline{p}\}$, cioè in un insieme di $v-1$ elementi; quindi ogni punto non può incidere in più di $\binom{v-1}{k-1}$ blocchi.

D64 c. disegni-t

D64c.01 La nozione di disegno-1 può essere generalizzata richiedendo che per un dato $t \in \mathbb{P}$ non solo ciascuno dei singoli punti, ma ciascuno dei sottoinsiemi di t punti compaia contemporaneamente in uno stesso numero di blocchi.

Più precisamente, se t, v, k e λ sono interi positivi, diciamo **disegno**-t-(v,k,λ), o disegno avente come sequenza di parametri $t-(v,k,\lambda)$, una struttura d'incidenza $\langle\, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{I} \rangle$ per la quale:

(1) $|\boldsymbol{P}| = v$;
(2) $\forall B \in \boldsymbol{B}\ :\ \ |\boldsymbol{I}_{\mathrm{R}} B| = k$;
(3) i punti di ciascuno dei sottoinsiemi-t di $\boldsymbol{P}$ sono simultaneamente incidenti in λ blocchi.

Una struttura $\langle \boldsymbol{P}, \boldsymbol{S}, \in\rangle \in$ **Incd** è un disegno-t-(v,k,λ) sse $\boldsymbol{S}$ è formato solo da insiemi-k e ogni sottoinsieme-t di $\boldsymbol{P}$ è contenuto esattamente in λ di tali insiemi-k.
Quando non si specificano i parametri v, k e λ viene chiamato semplicemente "disegno-t.

D64c.02 Si verifica che il piano di Fano è un disegno-2.
Il secondo dei disegni-1 presentati non è invece un disegno-2, in quanto si vede che $\{1,2\}$ compare in due blocchi mentre $\{1,5\}$ solo in uno.

D64c.03 Un disegno-3-(8,4,1) $\boldsymbol{D}_c$ è definito dalla seguente matrice d'incidenza:

$$\begin{matrix}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot \\
\bullet & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot \\
\bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet \\
\cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet \\
\cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \bullet \\
\cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet
\end{matrix} \ .$$

In effetti si può verificare che tutti gli $\binom{8}{3} = 56$ sottoinsiemi-3 dell'insieme di punti $\{1,2,...,8\}$ si trovano in uno e un solo blocco.
Viceversa $\{1,2,3,4\}$ appartiene a un blocco, mentre $\{1,2,3,5\}$ non appartiene ad alcun blocco e quindi non si tratta di un disegno-4.
Si trova invece che $\boldsymbol{D}_c$ è un disegno-t per $t = 0,1,2$ e 3, in sintonia con il teorema che segue.

D64c.04 **Teorema** Siano $t, v, k, \lambda_t \in \mathbb{P}$ e tali da soddisfare b04; ogni disegno-t, v, k, λ_t è anche un disegno-s, v, k, λ_s per ogni intero naturale s minore di t e per opportuni λ_s.

Dim.: Consideriamo un disegno-t-(v,k,λ_t) $\boldsymbol{D}$ e dimostriamo che esso è anche un disegno-$t-1$.
Sia Q un qualsiasi sottoinsieme-$(t-1)$ di $\boldsymbol{P}$ ed esaminiamo l'insieme di flags

$$K_Q = \{\langle p, B\rangle \in \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{B} \ \rceil\!\rceil\ \ p \notin Q \ \wedge\ Q \dot{\cup} p \subseteq B\} \ .$$

Il primo membro di queste coppie p può scegliersi in $\boldsymbol{P} \setminus Q$, cioè in $v-(t-1)$ modi; fissato p, il secondo membro B, dovendo contenere il sottoinsieme-t $Q \dot{\cup} p$ di $\boldsymbol{P}$, può scegliersi in λ_t modi, in quanto blocco di $\boldsymbol{D}$.
Quindi $|K_Q| = (v-(t-1))\,\lambda_t$.
Denotiamo ora con λ_Q il numero dei blocchi in $\boldsymbol{B}$ che contengono Q.
Fissato un tale blocco B, si può trovare un punto p tale che sia $\langle p, B\rangle \in K_q$ scegliendolo ad arbitrio in $B \setminus Q$, cioè in $k-(t-1)$ modi: quindi $|K_Q| = \lambda_Q\,(k-(t-1))$.

Uguagliando le due espressioni per $|K_Q|$ si trova $\lambda_Q = \dfrac{v-(t-1)}{k-(t-1}\,\lambda_t$ e si osserva che questo numero non dipende dalla scelta di Q in $\mathfrak{P}_{t-1}(\boldsymbol{P})$.
Si può dunque concludere che $\boldsymbol{D}$ è un disegno-$(t-1)-\left(v,k,\dfrac{v-(t-1)}{k-(t-1)}\,\lambda_t\right)$ ▮

D64c.05 In particolare si ha che il precedente $\boldsymbol{D}_c$ è un disegno-2-(8,4,3) ed un disegno-1-(8,4,7).

Osserviamo anche che la argomentazione precedente vale anche per $t=1$, pensando che λ_0 fornisce il numero di blocchi contenenti il sottoinsieme-0 di $\boldsymbol{P}$, il vuoto, cioè fornisce il numero dei blocchi del disegno $b=\dfrac{v}{k}\,\lambda_1$.

D64c.06 Sia $\boldsymbol{D}$ un disegno-t-(v,k,λ_t) e sia $s=0,1,2,...,t-1$.

(1) Prop.: $\boldsymbol{D}_0$ è anche un disegno-s-(v,k,λ_t) con

(a) $\quad \lambda_s \;:=\; \lambda_t\dfrac{(v-s)\cdot(t-s)}{(k-s)\cdot(t-s)}$.

Dim.: Si ottiene applicando ripetutamente la $\lambda_{t-1} \;=\; \dfrac{v-(t-1)}{k-(t-1)}\,\lambda_t$ ▮

(2) Prop.: $(k-s)\cdot(t-s)$ divide $\lambda_t(v-s)\cdot(t-s)$.

Dim.: Discende dalla (a) per l'esigenza che λ_s sia un intero positivo ▮

D64c.07 Occorre segnalare che la sequenza di relazioni di divisibilità espressa da (a) è condizione necessaria ma non sufficiente per $t\geq 2$.

Osserviamo anche che $\lambda_1\,(k-1)=\lambda_2\,(v-1)$.

Per esempio si dimostra che esiste un disegno-5-(12,6,1) e che esso è anche un disegno-4-(12,6,4), un disegno-3-(12,6,12), un disegno-2-(12,6,30), un disegno-1-(12,6,66) e il numero dei suoi blocchi è $b=\lambda_0=132$.

D64c.08 Viene chiamato **disegno bilanciato a coppie** una struttura d'incidenza tale che per ogni duetto di punti (distinti) è sempre λ il numero di blocchi nei quali incidono simultaneamente entrambi i punti. Si tratta dunque di disegni-2 nei quali non si chiede che i blocchi abbiano ugual peso.

Un disegno è detto **disegno banale** sse i punti di ogni sottoinsieme-k di $\boldsymbol{P}$ sono simultaneamente incidenti a un blocco, cioè se ha la forma $\langle \boldsymbol{P},\mathfrak{P}(\boldsymbol{P}),\in\rangle$.

Un disegno-2 non banale è detto **disegno a blocchi bilanciato incompleto** o, con termine inglese, un balanced incomplete block design o concisamente, un **BIBD**.

D64c.09 Un disegno-t-$(v,k,1)$ con $t\geq 2$ è chiamato **sistema di Steiner** o **disegno**-$S(t,k,v)$.
Per i disegni-$S(2,k,v)$ due punti determinano un solo blocco; quindi essi sono spazi lineari finiti e i loro blocchi si possono chiamare rette.

D64 e. piani affini e piani proiettivi

D64e.01 Consideriamo il numero primo p, una sua potenza $q = p^r$ ed il campo $\mathbb{F}_q$.

Diciamo **punto del piano affine** su $\mathbb{F}_q$ ogni coppia $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$.

Diciamo **retta del piano affine** su $\mathbb{F}_q$ determinata dai parametri $a, b, c \in \mathbb{F}_q$ con $\langle a, b\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$, l'insieme di punti

$$\mathsf{Line}(a, b, c) \ := \ \{\langle x, y\rangle \in {\mathbb{F}_q}^2 \,¶\, ax + bx = c\}.$$

Si osserva subito che $\forall k \in \mathbb{F}_q \setminus \langle 0, 0\rangle$: $\mathsf{Line}(a, b, c) = \mathsf{Line}(ka, kb, kc)$.
Denotiamo con $\boldsymbol{L}(\mathbb{F}_q)$ l'insieme delle rette del piano affine.
Diciamo **piano affine** su $\mathbb{F}_q$ la struttura d'incidenza $\langle {\mathbb{F}_q}^2, \boldsymbol{L}(\mathbb{F}_q), \in \rangle$.

D64e.02 Il piano affine su $\mathbb{F}_q$ è un disegno-2-$(q^2, q, 1)$.

Dim.: Evidentemente i punti della struttura d'incidenza $\boldsymbol{D} := \langle {\mathbb{F}_q}^2, \boldsymbol{L}(\mathbb{F}_q), \in\rangle$, cioè gli elementi di $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$, sono q^2.

Mostriamo poi che in ogni $\mathsf{Line}(a, b, c)$ si trovano q punti, cioè che ogni equazione $a\,x + b\,y = c$ ha esattamente q soluzioni.
In effetti se $b \neq 0$ per i punti della retta si ha $y = b^{-1}(c - ax)$ con x selezionabile arbitrariamente in $\mathbb{F}_q$; se invece $b = 0$ deve essere $a \neq 0$ e quindi $x = a^{-1}c$, cioè si ha la retta costituita dai punti $\langle a^{-1}c, y\rangle$ con y selezionabile arbitrariamente in $\mathbb{F}_q$; in ogni caso si hanno q punti in ogni retta.

Occorre infine provare che, scelti arbitrariamente due punti distinti $p_1 = \langle x_1, y_1\rangle$ e $p_2 = \langle x_2, y_2\rangle$, vi è una sola retta che li contiene entrambi: precisamente si tratta di $R = \mathsf{Line}(y_1 - y_2, x_2 - x_1, x_2y_1 - x_1y_2)$.
Che la retta di equazione $(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = x_2y_1 - x_1y_2$ contenga p_1 e p_2 lo si verifica per semplice sostituzione; supponiamo ora che le coordinate di questi punti soddisfino l'equazione $ax + by = c$ e mostriamo che essa individua la stessa retta.
Dall'equazione seguono $ax_1 + by_1 = c$ e $ax_2 + by_2 = c$, cioè $a(x_2 - x_1) = b(y_1 - y_2)$.
Se $x_1 \neq x_2$ questa porta ad $a = k(y_1 - y_2)$ con $k = (x_2 - x_1)^{-1}b$ e quindi a $b = k(x_2 - x_1)$ e $c = k(x_1y_1 - x_1y_2)$, cioè alla retta R.
Se viceversa $x_1 = x_2$, deve essere $y_1 \neq y_2$ e si avrebbe $b = 0$ e $c = ax_1$ e quindi la soluzione $x = x_1$, cioè ancora la R ▮

D64e.03 Per il disegno-2 costituito dal piano affine le formule numeriche della sezione :a dicono che il numero di rette concorrenti in un punto è $\lambda_1 = \dfrac{v-1}{k-1}\lambda_2 = \dfrac{q^2-1}{q-1}1 = q+1$ e che il numero complessivo delle rette (cioè dei i blocchi) è

$$b = \lambda_0 = \frac{v}{k}\lambda_1 = \frac{q^2}{q}(q+1) = q(q+1) \ .$$

D64e.04 In particolare per il piano affine su $\mathbb{Z}_2$, chiamati i punti $a = \langle 0, 0\rangle$, $b = \langle 0, 1\rangle$, $c = \langle 1, 0\rangle$, $d = \langle 1, 1\rangle$, si hanno le rette $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ac}$, $\overline{bd}$, $\overline{ad}$ e $\overline{bc}$.

Per il piano affine su $\mathbb{Z}_3$, denotati a, b, ..., i i 9 punti relativi alle coppie di valori in $\mathbb{Z}_3$ considerate in ordine lessicografico, si hanno le $3 \cdot 4 = 12$ rette $L_1 = \overline{abc}$, $L_2 = \overline{def}$, $L_3 = \overline{ghi}$, $L_4 = \overline{adg}$, $L_5 = \overline{beh}$, $L_6 = \overline{cfi}$, $L_7 = \overline{aei}$, $L_8 = \overline{bfg}$, $L_9 = \overline{cdh}$, $L_{10} = \overline{afh}$, $L_{11} = \overline{bdi}$ e $L_{12} = \overline{ceg}$.

D64e.05 I piani affini sono disegni nei quali punti e rette hanno ruoli non completamente simmetrici. In effetti il numero q^2 dei punti è diverso dal numero $q(q+1)$ delle rette e il numero $q+1$ di rette concorrenti in un punto differisce dal numero q di punti che giacciono su una retta.

Un'altra dissimmetria si riscontra anche in relazione alla nozione di parallelismo.
Due rette del piano affine su $\mathbb{F}_q$, $\mathsf{Line}(a,b,c)$ e $\mathsf{Line}(a',b',c')$ si dicono **rette parallele** sse $a\,b' = a'\,b$.
Si osserva che questa relazione non dipende dalla scelta dei parametri in una espressione come $\mathsf{Line}(a,b,c)$, in quanto passando alla equivalente $\mathsf{Line}(ka,kb,kc)$ per ogni $k \neq 0$, la validità o la non validità della $a\,b' = a'\,b$ rimane invariata.

D64e.06 La relazione di parallelismo si può considerare riflessiva ed è evidentemente simmetrica e transitiva, cioè è una equivalenza.

Si può decidere quali equazioni assumere come rappresentative delle diverse classi di parallelismo.
Per queste possiamo limitarci alle equazioni della forma $ax + by = 0$; infatti ogni retta data da $ax + by = c$ è parallela alla precedente.
Tra le equazioni $ax + by = 0$ con $a \neq 0$, tutte equivalenti tra di loro, possiamo limitarci a quelle della forma $x + my = 0$: in una del tipo precedente basta assumere $m = a^{-1}b$.
Tra le equazioni equivalenti della forma $by = 0$ scegliamo $y = 0$.
Abbiamo quindi $q + 1$ classi di parallelismo individuate dalle $x + my = 0$ per $m = 0, ..., q - 1$ e dalla $y = 0$.

Osserviamo anche che le rette di ciascuna classe inducono una partizione dell'insieme dei punti: si tratta di una partizione con $q + 1$ classi ciascuna delle quali formata da q punti.

D64e.07 Procediamo ora ad ampliare il piano affine aggiungendogli alcuni oggetti da considerare nuovi punti e un oggetto da considerare nuova retta.
Questo ampliamento è fortemente analogo al processo con il quale, nella geometria degli spazi continui si estende il piano usuale nel piano proiettivo con punti e retta all'infinito; in effetti, come vedremo, anche questo ampliamento porta a una struttura (ora si tratta di un disegno) avente proprietà di simmetria superiori a quelle della corrispondente affine.

A ciascuna delle q classi di parallelismo individuate da $x+my = 0$ associamo una entità chiamata **punto all'infinito** o direzione denotata con ω_m e alla classe di $y = 0$ un ulteriore punto all'infinito denotato con ω_∞; queste entità hanno il ruolo di punti di una struttura di incidenza chiedendo che incidano nelle rette cui sono associati. I punti e le rette del piano affine, per distinguerli da quelli aggiunti, vengono qualificati come **finiti**.

Si aggiunge poi la **retta all'infinito** L_∞ con il ruolo die blocco incidente in tutti e soli i $q + 1$ punti all'infinito.
La nuova struttura di incidenza viene detta **piano proiettivo** su $\mathbb{F}_q$ e viene denotata con $\boldsymbol{PP}_q$.

D64e.08 **Prop.** Il piano proiettivo $\boldsymbol{PP}_q$ è un disegno-2-$(q^2 + q + 1, q + 1, 1)$ autoduale.

Dim.: Abbiamo visto che $\boldsymbol{PP}_q$ possiede $q^2 + q + 1$ punti e altrettanti blocchi, le sue rette; inoltre ogni retta contiene $q + 1$ punti e ogni punto appartiene a $q + 1$ rette.
Dimostriamo ora che due suoi punti scelti arbitrariamente appartengono a una sola retta.

Abbiamo già visto che $\langle x_1, y_1\rangle$ e $\langle x_2, y_2\rangle$ possono appartenere solo alla retta finita $Line(y_1 - y_2, x_2 - x_1, x_2y_1 - x_1y_2)$.
Se uno di questi punti è $\langle x_1, y_1\rangle$ finito e il secondo è ω_m, allora possono appartenere solo a $Line(1, m, x_1 + my_1)$; se il secondo è ω_∞ possono appartenere solo alla retta $y = y_1$.
Se entrambi i punti sono all'infinito possono appartenere solo alla retta all'infinito $L - \infty$.

Precisiamo l'unico punto che due rette scelte arbitrariamente hanno in comune.

Se le rette non sono parallele e soddisfano alle equazioni $ax + bx = c$ e $a'x + b'y = c'$ (con $ab' \neq a'b$), hanno in comune solo $\big\langle (a'b - ab')^{-1}(a'c - ac'), (a'b - ab')^{-1}(b'c - bc') \big\rangle$.
Se le rette sono parallele ed hanno la forma $x + fy = c$ ed $x + fy = c'$ hanno in comune solo ω_m; se invece hanno la forma $y = c$ ed $y = c'$ hanno in comune solo ω_∞.
Una retta della forma $x + fy = c$ e la L_∞ hanno in comune solo ω_m; la retta $y = c$ e la L_∞ hanno in comune solo ω_∞ ∎

D64e.09 Osserviamo che le formule che consentono di ricavare i parametri $r = \lambda_1$ e $b = \lambda_0$ sono in accordo con la autodualità:

$$r = \lambda_1 = \frac{v-1}{k-1}\lambda_2 = \frac{q^2+q}{q} = q+1 \qquad b = \lambda_0 = \frac{v}{k}\lambda_1 = \frac{q^2+q+1}{q+1}(q+1) = q^2+q+1.$$

D64e.10 Dei piani proiettivi su $\mathbb{Z}_2$ ed $\mathbb{Z}_3$ conviene dare le seguenti raffigurazioni:

//input pD64e10

Il piano di Fano è un disegno-2-$(7,3,1)$ e un sistema di Steiner.