

## Capitolo D64: Disegni a blocchi

### Contenuti delle sezioni

a. Introduzione dei disegni a blocchi p.1   b. 1-disegni p.4   c.  $t$ -disegni p.5   d. Costruzioni sui disegni p.7   e. Piani affini e piani proiettivi p.7

---

**D64:0.01** Il capitolo è dedicato all'esposizione delle prime proprietà dei disegni a blocchi. Esso inizia con una rapida introduzione delle strutture di incidenza, strutture molto generali tra le quali si riconoscono numerose specie di strutture matematiche, in particolare strutture discrete.

I disegni a blocchi sono visti come strutture di incidenza dotate di marcate proprietà di uniformità. I primi disegni introdotti sono i cosiddetti 1-disegni, configurazioni che devono ubbidire a richieste non molto stringenti.

Le richieste si fanno più esigenti per i cosiddetti  $t$ -disegni. per questi dopo aver segnalate le proprietà di base, si individuano alcune importanti sottofamiglie come disegni bilanciati, grafi fortemente regolari e sistemi di Steiner. Si introducono inoltre alcune costruzioni e relazioni piuttosto generali riguardanti i disegni.

Successivamente si discutono disegni dotati di proprietà esprimibili in termini geometrici, i piani affini ed i piani proiettivi.

### D64:a. Strutture di incidenza

**D64:a.01** Con il termine **struttura d'incidenza** si intende una terna  $D = \langle P, B, I \rangle$  con  $P$  e  $B$  insiemi disgiunti e  $I \subseteq P \times B$ . Se  $I$  è un insieme finito, numerabile o discreto (e quindi si possono considerare tali anche  $P$  e  $B$ ) si parla, risp., di struttura d'incidenza **finita**, **numerabile** e **discreta**.

Gli elementi di  $P$  si dicono **punti**, quelli di  $B$  **blocchi** e l'insieme  $I$  viene chiamato **relazione di incidenza** della  $D$ .; nel seguito useremo lettere prevalentemente minuscole per i punti e lettere maiuscole per i blocchi. Ogni coppia  $\langle p, B \rangle \in I$  si usa chiamare **flag**, mentre ogni coppia di  $P \times B \setminus I$  viene chiamata **antiflag**.

Si dice che  $p$  e  $B$  sono **incidenti** per la  $I$  sse  $\langle p, B \rangle$  è un flag; si dice che sono non incidenti sse  $\langle p, B \rangle$  è un antiflag.

Si nota subito che le strutture di incidenza sono equivalenti (criptomorfe) alle relazioni binarie fra due insiemi distinti e in particolare che le strutture di incidenza finite sono equivalenti ai digrafi bipartiti i cui archi corrispondono ai flags. Quindi si può obiettare che in questo paragrafo non si è fatto che introdurre nuovi termini per nozioni già note. In effetti si è introdotta una nomenclatura ridondante che sarà giustificata mostrando che essa consente di ottenere meglio una gamma di risultati molto ampia e con ricadute assai notevoli sia in ambito matematico che in vari campi applicativi.

**D64:a.02** La definizione di struttura d'incidenza consente che si abbiano punti che non incidono in alcun blocco e blocchi nei quali non incide alcun punto; questi punti e questi blocchi evidentemente non presentano interesse. Si dice **non-degenere** una struttura d'incidenza per la quale ogni punto incide in almeno un blocco ed ogni blocco in almeno un punto.

La definizione di struttura d'incidenza consente anche che si abbiano **blocchi ripetuti**, cioè blocchi  $B_1$  e  $B_2$  diversi per i quali  $I \cap B_1 = I \cap B_2$ . Una struttura d'incidenza non-degenere e che non presenta blocchi ripetuti si chiama **struttura d'incidenza semplice**.

Si dice **spazio di blocchi** una coppia  $\langle P, S \rangle$ , con  $P$  insieme e  $S \subseteq \mathfrak{P}(P)$ ; la terna  $\langle P, S, \in \rangle$  è una struttura d'incidenza; i suoi flags sono le coppie  $\langle p, S \rangle$  con  $S \in S$  e  $p \in S$ .

Sono dunque tipiche strutture di incidenza semplici quelle della forma  $\langle P, B, \in \rangle$ , cioè terne nelle quali l'insieme dei blocchi costituisce una copertura dell'insieme dei punti  $P$  (collezione di sottoinsiemi di  $P$  la cui unione coincide con lo stesso  $P$ ) e la relazione di incidenza è la relazione di appartenenza insiemistica.

Ogni struttura d'incidenza semplice si può ricondurre ad uno spazio di blocchi munito della relazione di appartenenza; si tratta semplicemente di sostituire ogni blocco  $B$  con l'insieme  $I \cap B$  ed  $I$  con l'appartenenza.

Anche quando si tratta una struttura d'incidenza ottenuta con una specifica costruzione può essere utile descrivere i suoi blocchi come contenitori che contengono i punti loro incidenti, ovvero può essere utile confondere ogni loro blocco con l'insieme dei punti che in esso incidono e considerare equivalenti le due relazioni  $\langle p, B \rangle \in I$  e  $p \in B$ .

**D64:a.03** Una struttura d'incidenza finita  $D$ , come ogni relazione binaria fra due insiemi finiti disgiunti, è rappresentata fedelmente da una matrice binaria: le sue righe sono associate ai punti, le sue colonne ai blocchi e viene chiamata **matrice d'incidenza** della  $D$ .

Per molte elaborazioni sopra una struttura d'incidenza finita conviene riferirsi alla matrice d'incidenza; chiameremo **peso di una linea** di una matrice binaria, e in particolare di una matrice d'incidenza finita, il numero delle sue componenti uguali ad 1.

Per discutere le strutture d'incidenza spesso è utile riferirsi ad insiemi delle forme che seguono.

$$(1) \quad \forall \bar{P} \subseteq P : \bar{P} \cap I = \{B \in B \mid (\bar{P} \ni p \mid p \in B)\}$$

$$(2) \quad \forall \bar{B} \subseteq B : I \cap \bar{B} = \{p \in P \mid (\bar{B} \ni B \mid p \in B)\},$$

**D64:a.04** Ogni multigrafo  $M$  privo di cappi fornisce una struttura di incidenza: i vertici di  $M$  rivestono il ruolo dei punti della struttura, gli spigoli di  $M$  il ruolo dei blocchi ed i flags si ottengono considerando le estremità dei diversi spigoli. La matrice di incidenza di  $M$  è matrice d'incidenza anche per la struttura. Questa struttura ha tutti i blocchi di cardinalità 2.

Si ha una struttura d'incidenza semplice sse il multigrafo è un grafo privo di cappi.

**D64:a.05** Se per una struttura d'incidenza finita semplice  $D = \langle P, I, B \rangle$   $P$  è un insieme poco esteso i cui elementi si possono identificare con segni semplici e ordinati (in particolare con cifre decimali e/o lettere) risulta comodo codificare ogni suo blocco con la stringa di tali contrassegni in un ordine crescente e codificare l'intera  $D$  con l'insieme di tali stringhe. Una tale scrittura si dice **codifica a stringhe** della  $D$ .

Due strutture d'incidenza  $D_1 = \langle P_1, I_1, B_1 \rangle$  e  $D_2 = \langle P_2, I_2, B_2 \rangle$  si dicono **isomorfe** sse esiste una  $\beta \in \{P_1 \leftrightarrow P_2\}$  tale che la sua estensione booleana  $\beta^{be}$  costituisce una biiezione di  $\{B_1 \leftrightarrow B_2\}$  per la quale  $\langle p, B \rangle \in I_1 \implies \langle \beta(p), \beta^{be}(B) \rangle \in I_2$ .

Anche per le strutture d'incidenza si ottengono risultati che riguardano strutture con punti e blocchi forniti da costruzioni specifiche e risultati più astratti che riguardano strutture dalla cui costruzione si prescinde completamente. Per le considerazioni più astratte si dovrebbe fare riferimento a classi di isomorfismo di strutture di incidenza. Come per tutte le altre specie di strutture si tende invece a identificare una tale classe di isomorfismo con una singola struttura qualificandola come “generica”.

**D64:a.06** Nel seguito ci interesseremo esclusivamente di strutture d'incidenza finite, semplici e tendenzialmente dotate di rilevanti regolarità numeriche in grado di procurare qualche tipo di simmetria.

Un primo esempio di regolarità consiste nell'avere **blocchi di ugual peso**, cioè blocchi nei quali incide lo stesso numero di punti. In questo caso la matrice d'incidenza presenta in tutte le colonne lo stesso peso. Per tale struttura si usa anche il termine **strutture d'incidenza equicardinale**.

Più precisamente, se  $v$ ,  $k$  e  $b$  sono interi positivi, si dice 0-disegno di parametri  $v$ ,  $k$  e  $b$  o equivalentemente **0- $(v, k, b)$ -disegno** una struttura d'incidenza semplice  $\langle \mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{I} \rangle$  tale che  $|\mathbf{P}| = v$ ,  $|\mathbf{B}| = b$  e per ogni  $B \in \mathbf{B}$ :  $|\mathbf{I}_B| = k$ .

La struttura di incidenza associata ad un grafo privo di cappi con  $v$  vertici ed  $s$  spigoli è quindi uno 0- $(v, 2, s)$ -disegno.

Una regolarità analoga per le strutture d'incidenza consiste nel presentare **punti di ugual peso**, cioè punti che incidono nello stesso numero di blocchi. In questo caso la matrice d'incidenza presenta lo stesso peso in tutte le righe.

**D64:a.07** La precedente analogia ci dà l'occasione di osservare che i punti ed i blocchi hanno ruoli scambiabili nella definizione di struttura d'incidenza. Diciamo **struttura di incidenza duale** o **trasposta** di una data  $\mathbf{D} = \langle \mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{I} \rangle$  la struttura  $\mathbf{D}^\top := \langle \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{I}^\top \rangle$ . Chiaramente passare da una struttura d'incidenza alla duale corrisponde allo scambiare i punti con i blocchi, ovvero a trasporre la sua matrice d'incidenza. Il passaggio alla struttura duale costituisce una involuzione nell'insieme delle strutture d'incidenza che spesso consente di presentare più chiaramente alcune loro proprietà.

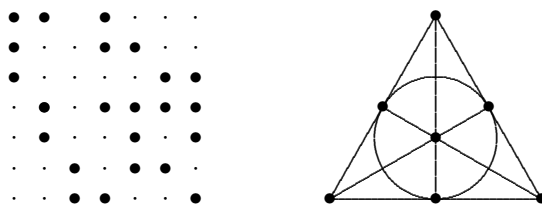
In particolare rivestono interesse strutture isomorfe alla loro trasposta, entità chiamate **strutture d'incidenza autoduali**.

**D64:a.08** Una struttura di incidenza finita è chiamata **spazio lineare finito** sse ogni duetto di suoi punti (quindi due punti distinti) incide su un unico blocco; è invece detta **spazio lineare finito parziale** sse ogni coppia di suoi punti distinti incide su al più un blocco; in questi casi i blocchi vengono chiamati anche **rette**.

Per ogni  $v$  intero positivo il grafo completo  $\mathcal{K}_v$  fornisce uno spazio lineare finito. Ogni altro grafo privo di cappi fornisce uno spazio lineare finito parziale.

**D64:a.09** Un esempio di struttura d'incidenza con forti regolarità è il cosiddetto **piano di Fano**, struttura di incidenza individuata dalla codifica a stringhe  $\{123, 145, 167, 247, 256, 346, 357\}$ .

Il piano di Fano si può definire anche con la seguente matrice d'incidenza e si può raffigurare con il seguente grafico nel quale sono evidenziati i suoi 7 punti e le sue 7 rette (anche quella raffigurata con l'aspetto di una circonferenza va considerata una retta):



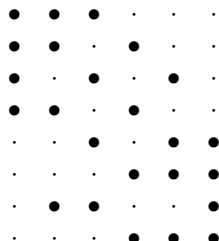
**D64:a.10** Ricordiamo che un **grafo** si dice **regolare** sse ogni suo vertice ha la stessa valenza; più specificamente se tale valenza unica è  $d$  si parla di **grafo  $d$ -regolare**.

Un **grafo** si dice invece  $(v, a, \lambda, \mu)$ -**fortemente regolare** sse ha  $v$  vertici, è  $a$ -regolare per qualche  $a \in \{1, 2, \dots, v - 2\}$  (e quindi non è vuoto e non è completo),  $\lambda$  fornisce il numero dei vertici adiacenti ad entrambi gli elementi di ciascuno dei duetti di vertici adiacenti e  $\mu$  è il numero dei vertici adiacenti ad entrambi gli elementi di ciascuno dei duetti di vertici non adiacenti.

### D64:b. 1-disegni

**D64:b.01** Si dice 1-disegno di parametri  $v, k$  e  $\lambda$  o  $1$ - $(v, k, \lambda)$ -**disegno** una struttura d'incidenza  $\langle \mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{I} \rangle$  t.c.  $|\mathbf{P}| = v$ , per ogni  $B \in \mathbf{B} : |\mathbf{I}B| = k$  e ogni  $p \in \mathbf{P}$  è incidente in esattamente  $\lambda$  blocchi. Un 1-disegno è chiamato anche **configurazione tattica**.

Un esempio di  $1$ - $(8, 4, 3)$ -disegno è individuato dalla codifica  $\{1234, 1247, 1357, 2468, 3658, 5678\}$ , ovvero dalla matrice



Osserviamo che un 1-disegno presenta sia i punti che i blocchi equicardinali e che anche il duale di un 1-disegno è un 1-disegno.

**D64:b.02** Il termine disegno deriva dallo studio statistico dei piani di esperimenti (in inglese *designs*). Un disegno come il precedente potrebbe costituire lo schema scelto per effettuare sperimentazioni su  $v = 8$  varietà di sementi (i punti) in  $b = 6$  tipi di terreni (i blocchi), in modo che ogni semente sia provata in un ugual numero  $\lambda = 3$  di terreni. Con un tal piano di esperimenti si può confidare, su base statistica, di ottenere valutazioni equilibrate sulle sementi in esame, evitando, con comprensibili vantaggi economici e pratici, di provare ogni varietà di sementi in ogni terreno.

**D64:b.03** Ogni  $1$ - $(v, k, \lambda)$ -disegno corrisponde ad una partizione dell'insieme  $\mathbf{P}$  (avente cardinalità  $v$ ) mediante sottoinsiemi di cardinalità  $k$ ; evidentemente si hanno  $1$ - $(v, k, \lambda)$ -disegni solo se  $k$  divide  $v$ .

È anche evidente che i parametri interi  $v, k$  e  $\lambda$ , nonché il numero dei blocchi  $b := |\mathbf{B}|$ , non possono essere scelti arbitrariamente. Vediamo a quali vincoli devono sottostare.

Il numero dei flags di un  $1$ - $(v, k, \lambda)$ -disegno è dato da  $v \cdot \lambda$ , cioè dal numero dei punti per il numero dei blocchi in cui ogni punto incide. Tale numero si ottiene anche dall'espressione  $b \cdot k$ , numero dei blocchi

per il numero dei punti incidenti in ogni blocco. Quindi  $v \cdot \lambda = b \cdot k$  e da questa si deduce che  $k$  deve essere un divisore di  $v \lambda$ , cioè  $k \mid v \lambda$ .

Inoltre il numero dei blocchi non può superare il numero dei  $k$ -sottoinsiemi di  $\mathbf{P}$ , cioè  $\binom{v}{k}$ . Queste due condizioni necessarie perché si possa avere un 1-disegno, sono anche sufficienti.

**D64:b.04 Prop.** Esistono 1- $(v, k, \lambda)$ -disegni sse  $k \mid v \lambda$  e  $\frac{v \lambda}{k} \leq \binom{v}{k}$ .

**Dim.:** Occorre dimostrare che per ogni scelta di interi positivi  $v, k$  e  $\lambda$  soddisfacente le precedenti richieste si può individuare un 1- $(v, k, \lambda)$ -disegno. Equivalentemente si tratta di dimostrare che si può costruire una matrice binaria di profilo  $v \times b$  con righe di peso  $\lambda$  e colonne di peso  $k$ . Ovviamente si può costruire facilmente una matrice binaria con le righe dello stesso peso, senza preoccuparsi se essa ha colonne con pesi diversi; denotiamo con  $k_i$  il numero delle entrate uguali a 1 che essa presenta nella colonna  $i \in [k]$ . Se una tale matrice ha colonne con pesi diversi, alcuni  $k_i$  devono essere inferiori ed altri superiori a  $k$ , in modo che sia  $\sum_{i=1}^b k_i = b k$ , ovvero  $\sum_{i=1}^b (k - k_i) = 0$ . Lo scostamento dalla uniformità

delle colonne può ragionevolmente essere misurato dal numero  $\sum_{i=1}^v |k - k_i|$ . Questo indicatore di non uniformità deve essere un intero non negativo pari.

Dimostriamo che il suddetto indicatore può essere diminuito di 2 in 2 fino ad annullarsi attuando una serie di scambi di uno zero con un uno sulla stessa riga. Per semplicità di visualizzazione supponiamo di avere la prima colonna con  $k_1$  uni nelle prime righe e la seconda con  $k_2$  nelle ultime posizioni, essendo  $k_1 < k < k_2$ . Scambiando le componenti delle caselle  $\langle k_1 + 1, 1 \rangle$  e  $\langle k_1 + 1, 2 \rangle$  sulla stessa riga, evidentemente si mantiene l'ugual peso delle righe, e si diminuisce di 2 l'indicatore di non uniformità. Questi scambi possono essere effettuati su tutte le coppie di colonne  $\langle i, j \rangle$  con  $k_i < k < k_j$  fino ad arrivare all'ugual peso delle colonne, cioè fino ad avere una matrice binaria che rappresenta un 1- $(v, k, \lambda)$ -disegno ■

**D64:b.05** Osserviamo la seguente equivalenza fra disuguaglianze:

$$(1) \quad \lambda \leq \frac{k}{v} \binom{v}{k} = \frac{k}{v} \frac{v \dots (v - k + 1)}{1 \dots k} \iff \lambda \leq \binom{v - 1}{k - 1}.$$

La seconda di queste relazioni esprime il fatto che per ottenere un blocco  $B$  del quale fa parte un certo punto  $\bar{p}$ , si devono aggiungere a questo altri  $k - 1$  punti i quali devono essere scelti in  $\mathbf{P} \setminus \{\bar{p}\}$ , cioè in un insieme di  $v - 1$  elementi; quindi ogni punto non può incidere in più di  $\binom{v - 1}{k - 1}$  blocchi.

### D64:c. t-disegni

**D64:c.01** La nozione di 1-disegno può essere rafforzata richiedendo che per un dato  $t \in \mathbb{P}$  non solo i singoli punti, ma tutti i sottoinsiemi di  $t$  punti, con  $t = 2$  oppure  $t = 3, \dots$  compaiano contemporaneamente in uno stesso numero di blocchi.

Più precisamente, se  $t, v, k$  e  $\lambda$  sono interi positivi, diciamo  $t$ - $(v, k, \lambda)$ -disegno, o disegno avente sequenza di parametri  $t - (v, k, \lambda)$ , una struttura d'incidenza  $\langle \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{I} \rangle$  per la quale:

$$(1) \quad |\mathbf{P}| = v;$$

(2)  $\forall B \in \mathbf{B} : |\mathbf{I}_B| = k$ ;

(3) i punti di ogni  $t$ -sottoinsieme di  $\mathbf{P}$  sono simultaneamente incidenti in  $\lambda$  blocchi.

Una struttura  $\langle \mathbf{P}, \mathbf{S}, \in \rangle$  è un  $t$ - $(v, k, \lambda)$ -disegno sse  $\mathbf{S}$  è formato solo da  $k$ -insiemi e ogni  $t$ -sottoinsieme di  $\mathbf{P}$  è contenuto esattamente in  $\lambda$  di tali  $k$ -insiemi.

Quando non si specificano i parametri  $v, k$  e  $\lambda$  viene chiamato semplicemente  $t$ -disegno.

**D64:c.02** Si verifica che il piano di Fano è un 2-disegno.

Il secondo degli 1-disegni presentati non è invece un 2-disegno, in quanto si vede che  $\{1, 2\}$  compare in due blocchi mentre  $\{1, 5\}$  solo in uno.

**D64:c.03** Un 3-(8,4,1)-disegno  $\mathbf{D}_c$  è dato dalla seguente matrice d'incidenza:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \bullet \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \bullet \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet & \bullet
 \end{array}$$

In effetti si può verificare che tutti gli  $\binom{8}{3} = 56$  3-sottoinsiemi dell'insieme di punti  $\{1, 2, \dots, 8\}$  si trovano in uno e un sol blocco. Viceversa  $\{1, 2, 3, 4\}$  appartiene ad un blocco, mentre  $\{1, 2, 3, 5\}$  non appartiene ad alcun blocco e quindi non si tratta di un 4-disegno. Si trova invece che  $\mathbf{D}_c$  è un  $t$ -disegno per  $t = 0, 1, 2$  e  $3$ , in sintonia con il teorema che segue.

**D64:c.04 Teorema** Siano  $t, v, k, \lambda_t \in \mathbb{P}$  e tali da soddisfare :b.04; ogni  $t, v, k, \lambda_t$ -disegno è anche un  $s, v, k, \lambda_s$ -disegno per ogni intero naturale  $s$  minore di  $t$  e per opportuni  $\lambda_s$ .

**Dim.:** Consideriamo un  $t$ - $(v, k, \lambda_t)$ -disegno  $\mathbf{D}$  e dimostriamo che esso è anche un  $t - 1$ -disegno. Sia  $Q$  un qualsiasi  $(t - 1)$ -sottoinsieme di  $\mathbf{P}$  ed esaminiamo l'insieme di flags

$$K_Q = \{ \langle p, B \rangle \in \mathbf{P} \times \mathbf{B} \mid p \notin Q \wedge Q \cup p \subseteq B \} .$$

Il primo membro di queste coppie  $p$  può scegliersi in  $\mathbf{P} \setminus Q$ , cioè in  $v - (t - 1)$  modi; il secondo membro  $B$ , fissato  $p$ , dovendo contenere il  $t$ -sottoinsieme  $Q \cup p$  di  $\mathbf{P}$ , può scegliersi in  $\lambda_t$  modi, in quanto blocco di  $\mathbf{D}$ . Quindi  $|K_Q| = (v - (t - 1))\lambda_t$ .

Scriviamo ora  $\lambda_Q$  il numero di blocchi in  $\mathbf{B}$  che contengono  $Q$   $B \in \mathbf{B}$  contenenti  $Q$ . Fissato un tale blocco  $B$ , si può trovare un punto  $p$  t.c. sia  $\langle p, B \rangle \in K_Q$  scegliendolo ad arbitrio in  $B \setminus Q$ , cioè in  $k - (t - 1)$  modi: quindi  $|K_Q| = \lambda_Q(k - (t - 1))$ .

Uguagliando le due espressioni per  $|K_Q|$  si trova  $\lambda_Q = \frac{v - (t - 1)}{k - (t - 1)}\lambda_t$  e si osserva che questa cardinalità non dipende dalla scelta di  $Q$  in  $\mathfrak{P}_{t-1}(\mathbf{P})$ .

Si può dunque concludere che  $\mathbf{D}$  è un  $(t - 1)$ - $\left(v, k, \frac{v - (t - 1)}{k - (t - 1)}\lambda_t\right)$ -disegno ■

**D64:c.05** In particolare si ha che il precedente  $\mathbf{D}_c$  è un 2-(8,4,3)-disegno ed un 1-(8,4,7)-disegno. Osserviamo anche che il discorso precedente vale anche per  $t = 1$ , pensando che  $\lambda_0$  fornisce il numero di blocchi contenenti il 0-sottoinsieme di  $\mathbf{P}$ , il vuoto, cioè fornisce il numero dei blocchi del disegno  $b = \frac{v}{k}\lambda_1$ .

**D64:c.06** Sia  $\mathbf{D}$  un  $t$ - $(v, k, \lambda_t)$ -disegno ed  $s = 0, 1, 2, \dots, t - 1$ .

**(1) Prop.:**  $D_0$  è anche un  $s$ - $(v, k, \lambda_t)$ -disegno con  $\lambda_s = \lambda_t \frac{(v-s) \cdot (t-s)}{(k-s) \cdot (t-s)}$ .

**Dim.:** Si ottiene applicando ripetutamente la  $\lambda_{t-1} = \frac{v-(t-1)}{k-(t-1)} \lambda_t$  ■

**(2) Prop.:**  $(k-s) \cdot (t-s)$  divide  $\lambda_t(v-s) \cdot (t-s)$ .

**Dim.:** Discende dalla (a) per l'esigenza che  $\lambda_s$  sia un intero positivo ■

**D64:c.07** Occorre segnalare che la sequenza di relazioni di divisibilità espressa da (a) è condizione necessaria ma non sufficiente per  $t \geq 2$ .

Osserviamo anche che  $\lambda_1(k-1) = \lambda_2(v-1)$ .

Ad esempio si dimostra che esiste un 5-(12,6,1)-disegno e che esso è anche un 4-(12,6,4)-disegno, un 3-(12,6,12)-disegno, un 2-(12,6,30)-disegno, un 1-(12,6,66)-disegno ed il numero dei suoi blocchi è  $b = \lambda_0 = 132$ .

**D64:c.08** Si parla di **disegno bilanciato a coppie** nel caso di struttura d'incidenza t.c. per ogni coppia di punti distinti è sempre  $\lambda$  il numero di blocchi nei quali incidono simultaneamente entrambi i punti. Si tratta dunque di 2-disegni nei quali non si chiede che i blocchi abbiano ugual peso.

Un disegno è detto **banale** sse i punti di ogni  $k$ -sottoinsieme di  $P$  sono simultaneamente incidenti ad un blocco, cioè se ha la forma  $\langle P, \mathfrak{P}(P), \in \rangle$ .

Un 2-disegno non banale è detto **disegno a blocchi bilanciato incompleto** o, con sigla inglese, **BIBD**.

**D64:c.09** Un  $t$ - $(v, k, 1)$ -disegno con  $t \geq 2$  è chiamato **sistema di Steiner** o  $S(t, k, v)$ -disegno.

Per gli  $S(2, k, v)$ -disegni due punti determinano un solo blocco; quindi essi sono spazi lineari finiti ed i loro blocchi si possono chiamare rette.

## D64:d. Costruzioni sui disegni

D64: d.01 . . . .

## D64:e. Piani affini e piani proiettivi

**D64:e.01** Consideriamo il numero primo  $p$ , una sua potenza  $q = p^r$  ed il campo  $\mathbb{F}_q$ .

Diciamo **punto del piano affine** su  $\mathbb{F}_q$  ogni coppia  $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ . Diciamo **retta del piano affine** su  $\mathbb{F}_q$  determinata da  $a, b, c \in \mathbb{F}_q$  con  $\langle a, b \rangle \neq \langle 0, 0 \rangle$ , l'insieme di punti

$$Line(a, b, c) := \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{F}_q^2 \mid ax + by = c \}.$$

Si osserva subito che  $\forall k \in \mathbb{F}_q \setminus \langle 0, 0 \rangle : Line(a, b, c) = Line(ka, kb, kc)$ .

Denotiamo con  $L(\mathbb{F}_q)$  l'insieme delle rette del piano affine.

Diciamo **piano affine** su  $\mathbb{F}_q$  la struttura d'incidenza  $\langle \mathbb{F}_q^2, L(\mathbb{F}_q), \in \rangle$ .

**D64:e.02** Il piano affine su  $\mathbb{F}_q$  è un  $2$ - $(q^2, q, 1)$ -disegno.

**Dim.:** Evidentemente i punti della struttura d'incidenza  $D := \langle \mathbb{F}_q^2, L(\mathbb{F}_q), \in \rangle$ , cioè gli elementi di  $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ , sono  $q^2$ .

Mostriamo poi che in ogni  $Line(a, b, c)$  vi sono  $q$  punti, cioè che ogni equazione  $ax + by = c$  ha esattamente  $q$  soluzioni. In effetti se  $b \neq 0$  per i punti della retta si ha  $y = b^{-1}(c - ax)$  con  $x$  scegliibile arbitrariamente in  $\mathbb{F}_q$ ; se  $b = 0$  deve essere  $a \neq 0$  e quindi  $x = a^{-1}c$ , cioè la retta è costituita dai punti  $\langle a^{-1}c, y \rangle$  con  $y$  scegliibile arbitrariamente in  $\mathbb{F}_q$ ; in ogni caso si hanno  $q$  punti in ogni retta.

Occorre infine provare che, scelti arbitrariamente due punti distinti  $p_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$  e  $p_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$ , vi è una sola retta che contiene entrambi e precisamente che si tratta di  $R = Line(y_1 - y_2, x_2 - x_1, x_2y_1 - x_1y_2)$ . Che la retta di equazione  $(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = x_2y_1 - x_1y_2$  contenga  $p_1$  e  $p_2$  lo si verifica per semplice sostituzione; supponiamo ora che le coordinate di questi punti soddisfino l'equazione  $ax + by = c$  e mostriamo che essa individua la stessa retta. Dall'equazione seguono  $ax_1 + by_1 = c$  e  $ax_2 + by_2 = c$ , cioè  $a(x_2 - x_1) = b(y_1 - y_2)$ . Se  $x_1 \neq x_2$  questa porta ad  $a = k(y_1 - y_2)$  con  $k = (x_2 - x_1)^{-1}b$  e quindi  $b = k(x_2 - x_1)$  e  $c = k(x_1y_1 - x_1y_2)$ , cioè alla retta  $R$ . Se viceversa  $x_1 = x_2$ , deve essere  $y_1 \neq y_2$  e si avrebbe  $b = 0$  e  $c = ax_1$  e quindi la soluzione  $x = x_1$ , cioè ancora la  $R$  ■

**D64:e.03** Per il 2-disegno costituito dal piano affine le formule della sezione :a. dicono che il numero di rette concorrenti in un punto è  $\lambda_1 = \frac{v-1}{k-1} \lambda_2 = \frac{q^2-1}{q-1} 1 = q+1$  ed il numero complessivo delle rette (i blocchi)  $DSb = \lambda_0 = \frac{v}{k} \lambda_1 = \frac{q^2}{q} (q+1) = q(q+1)$ .

**D64:e.04** In particolare per il piano affine su  $\mathbb{Z}_2$ , chiamati i punti  $a = \langle 0, 0 \rangle$ ,  $b = \langle 0, 1 \rangle$ ,  $c = \langle 1, 0 \rangle$ ,  $d = \langle 1, 1 \rangle$ , si hanno le rette  $\overline{ab}$ ,  $\overline{cd}$ ,  $\overline{ac}$ ,  $\overline{bd}$ ,  $\overline{ad}$  e  $\overline{bc}$ .

Per il piano affine su  $\mathbb{Z}_3$ , denotati  $a, b, \dots, i$  i punti relativi alle coppie di valori in  $\mathbb{Z}_3$  considerate in ordine lessicografico, si hanno le  $3 \cdot 4 = 12$  rette  $L_1 = \overline{abc}$ ,  $L_2 = \overline{def}$ ,  $L_3 = \overline{ghi}$ ,  $L_4 = \overline{adg}$ ,  $L_5 = \overline{beh}$ ,  $L_6 = \overline{cfi}$ ,  $L_7 = \overline{aei}$ ,  $L_8 = \overline{bfg}$ ,  $L_9 = \overline{cdh}$ ,  $L_{10} = \overline{afh}$ ,  $L_{11} = \overline{bdi}$  e  $L_{12} = \overline{ceg}$ .

**D64:e.05** I piani affini sono disegni nei quali punti e rette hanno ruoli non completamente simmetrici. In effetti il numero  $q^2$  dei punti è diverso dal numero  $q(q+1)$  delle rette e il numero  $q+1$  di rette concorrenti in un punto differisce dal numero  $q$  di punti che giacciono su una retta.

Un'altra dissimmetria si riscontra anche in relazione alla nozione di parallelismo.

Due rette del piano affine su  $\mathbb{F}_q$ ,  $Line(a, b, c)$  e  $Line(a', b', c')$  si dicono **parallele** sse  $ab' = a'b$ . Si osservi che questa relazione non dipende dalla scelta dei parametri in una espressione come  $Line(a, b, c)$ , in quanto passando alla equivalente  $Line(ka, kb, kc)$  per  $k \neq 0$ , la validità o la non validità della  $ab' = a'b$  rimane invariata.

**D64:e.06** La relazione di parallelismo si può considerare riflessiva ed è evidentemente simmetrica e transitiva, cioè è una equivalenza. Decidiamo ora quali equazioni assumere come rappresentative delle diverse classi di parallelismo. Per queste possiamo limitarci alle equazioni della forma  $ax + by = 0$ ; infatti ogni retta data da  $ax + by = c$  è parallela alla precedente. Tra le equazioni  $ax + by = 0$  con  $a \neq 0$ , tutte equivalenti tra di loro, possiamo limitarci a quelle della forma  $x + my = 0$ : in una del tipo precedente basta assumere  $m = a^{-1}b$ . Tra le equazioni equivalenti della forma  $by = 0$  scegliamo  $y = 0$ . Abbiamo quindi  $q+1$  classi di parallelismo individuate dalle  $x + my = 0$  per  $m = 0, \dots, q-1$  e dalla  $y = 0$ .

Osserviamo anche che le rette di ciascuna classe inducono una partizione dell'insieme dei punti: si tratta di una partizione con  $q+1$  classi ciascuna delle quali formata da  $q$  punti.

**D64:e.07** Procediamo ora ad ampliare il piano affine aggiungendogli alcuni enti da considerare nuovi punti ed un ente da considerare nuova retta. Questo ampliamento è fortemente analogo al processo



con il quale, nella geometria degli spazi continui si estende il piano usuale nel piano proiettivo con punti e retta all'infinito ed in effetti, come vedremo, anch'esso porta ad una struttura (ora si tratta di un disegno) avente proprietà di simmetria superiori a quelle della corrispondente affine.

A ciascuna delle  $q$  classi di parallelismo individuate da  $x + my = 0$  associamo una entità chiamata **punto all'infinito** o **direzione** denotata con  $\omega_m$  ed alla classe di  $y = 0$  un ulteriore punto all'infinito indicato con  $\omega_\infty$ ; queste entità diventano punti di una struttura di incidenza chiedendo che incidano nelle rette cui sono associati. I punti e le rette del piano affine, per distinguerli da quelli aggiunti, vengono qualificati come **finiti**.

Si aggiunge poi la **retta all'infinito**  $L_\infty$  come blocco incidente in tutti e soli i  $q + 1$  punti all'infinito. La nuova struttura di incidenza viene detta **piano proiettivo** su  $\mathbb{F}_q$  e denotata  $PP_q$ .

**D64:e.08 Prop.** Il piano proiettivo  $PP_q$  è un  $2-(q^2 + q + 1, q + 1, 1)$ -disegno autoduale.

**Dim.:** Abbiamo visto che  $PP_q$  possiede  $q^2 + q + 1$  punti e altrettanti blocchi, le sue rette; inoltre ogni retta contiene  $q + 1$  punti e ogni punto appartiene a  $q + 1$  rette.

Dimostriamo ora che due punti scelti arbitrariamente appartengono ad una sola retta.

Abbiamo già visto che  $\langle x_1, y_1 \rangle$  e  $\langle x_2, y_2 \rangle$  possono appartenere solo alla retta finita  $Line(y_1 - y_2, x_2 - x_1, x_2y_1 - x_1y_2)$ .

Se uno di questi punti è  $\langle x_1, y_1 \rangle$  finito ed il secondo è  $\omega_m$ , allora possono appartenere solo a  $Line(1, m, x_1 + my_1)$ ; se il secondo è  $\omega_\infty$  possono appartenere solo alla retta  $y = y_1$ .

Se entrambi i punti sono all'infinito possono appartenere solo alla retta all'infinito  $L - \infty$ .

Chiariamo l'unico punto che due rette scelte arbitrariamente hanno in comune.

Se le rette non sono parallele e soddisfano alle equazioni  $ax + by = c$  e  $a'x + b'y = c'$  (con  $ab' \neq a'b$ ), hanno in comune solo  $\langle (a'b - ab')^{-1}(a'c - ac'), (a'b - ab')^{-1}(b'c - bc') \rangle$ .

Se le rette sono parallele ed hanno la forma  $x + fy = c$  ed  $x + fy = c'$  hanno in comune solo  $\omega_m$ ; se hanno la forma  $y = c$  ed  $y = c'$  hanno in comune solo  $\omega_\infty$ .

Una retta della forma  $x + fy = c$  e la  $L_\infty$  hanno in comune solo  $\omega_m$ ; la retta  $y = c$  e la  $L_\infty$  hanno in comune solo  $\omega_\infty$  ■

**D64:e.09** Osserviamo che le formule che consentono di ricavare i parametri  $r = \lambda_1$  e  $b = \lambda_0$  sono in accordo con la autodualità:

$$r = \lambda_1 = \frac{v-1}{k-1} \lambda_2 = \frac{q^2+q}{q} = q+1 \qquad b = \lambda_0 = \frac{v}{k} \lambda_1 = \frac{q^2+q+1}{q+1} (q+1) = q^2+q+1.$$

**D64:e.10** Dei piani proiettivi su  $\mathbb{Z}_2$  ed  $\mathbb{Z}_3$  conviene dare le seguenti raffigurazioni:

DSGN .64:.1

Il piano di Fano è un  $2-(7, 3, 1)$ -disegno ed un sistema di Steiner.