Capitolo D63:
Quadrati latini

Contenuti delle sezioni

D63:0.01 Il capitolo è dedicato all'esposizione delle prime proprietà dei quadrati latini.
Nella prima parte, dopo le definizioni basilari, si espongono le proprietà di simmetria del loro insieme, si sottolineano i collegamenti fra le corrispondenti classi di simmetria e si espone la loro caratterizzazione mediante la loro biparità.
Nella seconda parte si introduce l'ortogonalità fra quadrati latini e si presenta il problema

D63:a. Introduzione dei quadrati latini

D63:a.01 Sia n un intero positivo maggiore o uguale a 2 ed X un insieme finito.
Si dice **quadrato latino di ordine** n su X una matrice quadrata $n \times n$ le cui entrate costituiscono X t.c. ogni elemento di X compare precisamente una volta in ogni sua riga ed in ogni sua colonna.
Chiaramente ogni $x \in X$ deve comparire in n caselle della matrice e quindi X deve avere $n^2/n = n$ elementi.

Tre esempi di quadrati latini (termine che qui abbrevieremo con q.l.) aventi ordini 4, 4 e 6 sono:

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{matrix}$$

D63:a.02 Evidentemente la matrice trasposta di un quadrato latino è ancora un quadrato latino. In effetti nella definizione dei quadrati latini le righe e le colonne hanno ruoli scambiabili.
Dunque la trasposizione delle matrici di quadrati latini è un'involuzione; si possono quindi distinguere quadrati latini simmetrici e quadrati latini costituenti duetti scambiabili per trasposizione. Dei tre quadrati latini presentati in precedenza solo il primo è simmetrico.

Un quadrato latino di ordine n su X si può considerare ottenuto affiancando n permutazioni di X disposte a formare n colonne e si può considerare ottenuto sovrapponendo n permutazioni di X disposte a formare n righe.

Individuare un quadrato latino di ordine n su un insieme X di n elementi corrisponde ad individuare una n-upla di permutazioni di X t.c., leggendo le loro componenti in una qualsiasi delle loro n successive posizioni, si ottiene un'altra permutazione di X.
Questo è l'aspetto combinatorio dello studio dei quadrati latini: per esso, chiaramente, non conta l'individualità degli elementi dell'insieme X. Dunque quando non si è condizionati da esigenze applicative ci si può limitare a studiare quadrati latini con entrate più opportune.

D63:a.03 Chiamiamo **quadrato latino canonico di ordine** n un quadrato latino $n \times n$ avente righe, colonne ed entrate individuate dagli interi 0, 1, ..., $n-1$.
Nel seguito studieremo prevalentemente quadrati latini canonici e, salvo avviso contrario, riterremo implicito l'attributo canonico di tali quadrati.
Denoteremo con **Ql** la collezione dei quadrati latini (canonici) e con $\mathbf{Ql}^{(n)}$ la collezione di quelli di ordine n. Inoltre ci serviremo delle scritture $[n) := \{0, 1, ..., n-1\}$, della $\boldsymbol{Id}^{(n)}$ per la permutazione identità dell'intervallo $[n)$; il generico quadrato latino di ordine n sarà indicato con $L = [i, j = 0, ..., n-1 \mid L_{i,j}]$.

D63:a.04 Non è difficile elencare tutti i quadrati latini degli ordini 2 e 3.

$$(1)\qquad \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$$(2)\qquad \begin{array}{cccc}
\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \\ \\
\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \\ \\
\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} & \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} & \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}
\end{array}$$

Tra i quadrati latini di ordine 4 limitiamoci a presentare i seguenti

$$(3)\qquad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} .$$

Al crescere dell'ordine n la generazione di tutti i quadrati latini si fa subito estremamente onerosa: si trova in particolare che i numeri dei quadrati latini degli ordini 4, 5, 6 e 7 sono, risp., 576, 161 280, 812 851 200 e 61 479 419 904 000.

D63:a.05 In effetti i quadrati latini, come molte altre configurazioni discrete, non si sanno tenere bene sotto controllo e a tutt'oggi il loro insieme costituisce una popolazione vasta e poco nota. Come in parte vedremo, tra i quadrati latini di un certo ordine se ne trovano sottoinsiemi relativamente piccoli che si possono controllare relativamente bene; la maggioranza invece sfugge alle classificazioni e alle possibilità di manipolazione efficiente. In molte situazioni risulta utile esaminare e manipolare configurazioni discrete come i q.l mediante il computer, cioè empiricamente.

In particolare non si conosce una formula per il numero dei quadrati latini dei diversi ordini. Sono note solo le cardinalità relative agli ordini fino a 11; queste sono state ottenute con procedimenti specifici, facendo uso del computer e di gruppi di simmetrie (v. le successioni [[OEIS]] A002860 ed A000315).

Definiamo anche i **rettangoli latini**, matrici di profilo $n \times k$ che in ogni riga e in ogni colonna presentano componenti non ripetute appartenenti ad un insieme di $\max(n, k)$ elementi.

D63:a.06 Una ragione della ridotta controllabilità dei quadrati latini risiede nella impossibilità di stabilire collegamenti semplici e sistematici fra i quadrati latini di un certo ordine n e quelli degli ordini successivi come $n + 1$ ed $n + 2$, come accade invece per strutture come le permutazioni e le partizioni. In effetti, se diciamo **sottoquadrato latino** di un q.l. una sottomatrice che sia un q.l., vale l'enunciato che segue.

(1) Prop.: In un quadrato latino di ordine n non si trova alcun quadrato latino di ordine superiore ad $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Dim.: La cosa si dimostra per assurdo. Si può supporre per semplicità di notazioni, che un quadrato latino L canonico di ordine n L possegga un sottoquadrato latino di ordine k che occupa le sue prime k righe e le sue prime k colonne, con $k > \frac{n}{2}$ e che esso inoltre abbia come entrate gli interi 0, 1, ..., $k - 1$. La supposizione è lecita in quanto ogni coppia formata da un quadrato latino di ordine n e da un suo sottoquadrato latino di ordine k si può ricondurre alla precedente mediante permutazioni di righe, colonne ed entrate.

Nel rettangolo R costituito dalle righe di L con indici k, $k + 1$, ... ed $n - 1$ e dalle prime k colonne si possono trovare solo gli $n-k$ interi k, $k+1$, ... ed $n-1$. Dato che $k > \frac{n}{2}$ implica $k > n-k$, nelle righe di R si devono avere interi ripetuti e quindi il rettangolo R non può far parte di un quadrato latino ▮

D63:a.07 Accade invece che in molti quadrati latini si trovano sottoquadrati latini di ordine piccolo. In genere sono numerosi i sottoquadrati latini di ordine 2: queste sottomatrici sono dette **intercalati**. Nel primo quadrato latino presentato tutte le sottomatrici di ordine 2 sono intercalati. Nel quadrato latino 6×6 dato in precedenza si riconoscono 7 intercalati, tutti contenenti due 0.

Osserviamo che la presenza di un intercalato I in un quadrato latino consente di individuare subito un altro quadrato: quello ottenuto scambiando le due entrate di I. Ad es. il terzo dei precedenti 4 q.l. di ordine 4 si ottiene dal secondo modificando l'intercalato delle ultime righe e delle ultime colonna.

Più in generale da un quadrato latino di ordine n nel quale si trova un sottoquadrato latino di ordine k (minore di $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$) si possono ricavare facilmente altri quadrati latini trasformando il sottoquadrato in un qualsiasi altro sottoquadrato di ordine k ed ai $|\mathbf{Ql}^{(k)}|$ sottoquadrati diversi corrispondono altrettanti quadrati latini di ordine n.

D63:a.08 Si possono inoltre costruire facilmente nuovi quadrati latini canonici affiancando e sovrapponendo quadrati latini dello stesso ordine k, con l'accorgimento di aumentare di opportuni multipli di k tutte le entrate di alcuni quadrati. Consideriamo ad es. i primi quattro quadrati latini di ordine 3 ed accostiamoli in modo da formare la prima delle matrici 6×6 sottoindicate. Evidentemente abbiamo ripetizioni sistematiche in tutte le linee. Queste ripetizioni si eliminano aumentando di 3 tutte le componenti del secondo e del terzo quadrato 3×3 (seconda delle matrici sottoindicate), oppure tutte le componenti del primo e del quarto quadrato (terza matrice).

0	1	2	0	1	2	0	1	2	3	4	5	3	4	5	0	1	2
1	2	0	2	0	1	1	2	0	5	3	4	4	5	3	2	0	1
2	0	1	1	2	0	2	0	1	4	5	3	5	3	4	1	2	0
0	2	1	0	2	1	3	5	4	0	2	1	0	2	1	3	5	4
1	0	2	2	1	0	4	3	5	2	1	0	1	0	2	5	4	3
2	1	0	1	0	2	5	4	3	1	0	2	2	1	0	4	3	5

D63:a.09 In generale, per r e k interi qualsiasi superiori ad 1, si ottiene un nuovo quadrato latino a partire da un quadrato latino guida L di ordine r, e da r^2 quadrati latini $M^{(p,q)}$ di ordine k, non necessariamente diversi tra di loro; questi quadrati si dispongono a formare un quadrato $rk \times rk$ e successivamente si aumentano tutte le componenti di $M^{(p,q)}$ di $k \cdot L_{p,q}$, multiplo della componente del quadrato guida corrispondente alla "macroposizione" del quadrato di ordine k in esame. Il quadrato latino così ottenuto si può chiamare **assemblaggio latino guidato da L dei quadrati latini** $M^{(p,q)}$.

Alcuni esempi di assemblaggi latini guidati da quadrati di ordine 3 utilizzanti quadrati di ordine 2 sono i seguenti:

0	1	3	2	4	5	0	1	4	5	3	2	4	5	2	3	1	0
1	0	2	3	5	4	1	0	5	4	2	3	5	4	3	2	0	1
2	3	4	5	1	0	2	3	1	0	4	5	0	1	5	4	2	3
3	2	5	4	0	1	3	2	0	1	5	4	1	0	4	5	3	2
5	4	0	1	3	2	4	5	3	2	0	1	2	3	1	0	5	4
4	5	1	0	2	3	5	4	2	3	1	0	3	2	0	1	4	5

Permutando righe e colonne dei q.l. assemblati si ottengono altri q.l. ricchi di sottoquadrati latini riguardanti righe e colonne non consecutive.

D63:a.10 Eserc. Mostrare che i 4 q.l. di ordine 4 presentati in precedenza sono gli unici che presentano $\boldsymbol{Id}^{(4)}$ sia nella prima riga che nella prima colonna.

D63:a.11 Eserc. Mostrare che se un q.l. di ordine pari $2k$ possiede un sottoquadrato latino di ordine k, allora è ottenibile come assemblaggio latino.

D63:a.12 Eserc. Trovare una espressione per un q.l. di ordine n qualsiasi che comprenda i primi quadrati degli ordini 2, 3 e 4 dati in precedenza.

D63:a.13 Eserc. Mostrare che assemblando q.l. degli ordini 2 e 3 si possono ottenere 47616 q.l. di ordine 6.

D63:b. Simmetrie dei quadrati latini

D63:b.01 Nello studio di configurazioni combinatorie numerose e non facili da controllare come i quadrati latini risulta molto utile individuare le loro proprietà di simmetria.

Abbiamo già visto la simmetria di $\mathbf{Ql}^{(n)}$ relativa alla trasposizione.
Altre trasformazioni che portano quadrati latini in quadrati latini sono le permutazioni delle righe e le permutazioni delle colonne. Più precisamente ciascuna di queste azioni è una biiezione di $\mathbf{Ql}^{(n)}$; infatti applicando una permutazione di $[n)$ diversa dalla identità, alle righe [risp. colonne] di un quadrato latino, ciascuna delle sue colonne [righe] viene modificata.

D63:b.02 Inoltre applicando alle righe di un quadrato latino $L \in \mathbf{Ql}^{(n)}$ le $n!$ permutazioni di $[n)$ si ottengono $n!$ quadrati di $\mathbf{Ql}^{(n)}$ diversi: infatti due di questi quadrati devono presentare, ad es., la prima colonna diversa perché ottenuta dalla permutazione nella prima colonna della L applicando due permutazioni diverse.
Simmetricamente, applicando alle colonna di un quadrato latino in $\mathbf{Ql}^{(n)}$ le $n!$ permutazioni di $[n)$ si ottengono $n!$ quadrati di $\mathbf{Ql}^{(n)}$ diversi.

Se π è una permutazione di $[n)$, denoteremo, risp., con $\mathcal{R}_\pi$, con $\mathcal{C}_\pi$ e con $\mathcal{E}_\pi$ le trasformazioni consistenti nel sottoporre a π risp. le righe, le colonne e le entrate di un q.l.: si definiscono cioè:

$\mathcal{R}_\pi(L) := [i,j \in [n) \;:|\; L_{\pi^{-1}(i),j}] \quad , \quad \mathcal{C}_\pi(L) := [i,j \in [n) \;:|\; L_{i,\pi^{-1}(j)}] \quad , \quad \mathcal{E}_\pi(L) := [i,j \in [n) \;:|\; \pi(L_{i,j})]$ ▮

D63:b.03 Vogliamo ora estendere significativamente le simmetrie precedenti facendo riferimento ai gruppi di trasformazioni dei $\mathbf{Ql}^{(n)}$.

In precedenza abbiamo individuato quattro gruppi di trasformazioni di $\mathbf{Ql}^{(n)}$. Il primo è costituito dalla identità $I_n := \boldsymbol{Id}(\mathbf{Ql}^{(n)})$ e dalla trasposizione che denoteremo $X_{\mathcal{R},\mathcal{C}}$ per segnalare che sono stati scambiati i ruoli delle righe e delle colonne. Il secondo è formato dalle permutazioni delle righe e lo denoteremo con $\mathcal{R}_{\mathrm{Sym}_n}$; il terzo $\mathcal{C}_{\mathrm{Sym}_n}$ dalle permutazioni delle colonne; il quarto $\mathcal{E}_{\mathrm{Sym}_n}$ dalle permutazioni delle entrate.
Ciascuno di questi gruppi, come per tutti i gruppi di trasformazioni, determina una partizione dell'insieme $\mathbf{Ql}^{(n)}$ su cui opera, ovvero una relazione di equivalenza ed i relativi blocchi, cioè i sottoinsiemi invarianti per le trasformazioni, ossia le orbite dei gruppi.
Come si è già notato, le classi di simmetria per trasposizione sono i singoletti dei q.l. simmetrici e le coppie di q.l. diversi ma ottenibili l'uno dall'altro per trasposizione. Ciascuna delle classi di simmetria per i gruppi $\mathcal{R}_{\mathrm{Sym}_n}$, $\mathcal{C}_{\mathrm{Sym}_n}$ ed $\mathcal{E}_{\mathrm{Sym}_n}$ sono invece tutte costituite da $n!$ q.l..

D63:b.04 Nella definizione di quadrato latino intervengono tre entità, le righe, le colonne e le entrate. Questa constatazione suggerisce di individuare una completa simmetria di ruoli per le tre entità che allarghi quella riguardante righe e colonne. In effetti attraverso una versione tridimensionale dei q.l. si descrive agevolmente una tele simmetria.

Diciamo **cubo latino** di ordine n ogni schieramento tridimensionale binario $H = [i,j,k \in [n) \mid H_{i,j,k}]$ t.c.:

$\forall i,j \in [n)$ esiste esattamente un $k \in [n)$ t.c. $H_{i,j,k} = 1$
$\forall i,k \in [n)$ esiste esattamente un $j \in [n)$ t.c. $H_{i,j,k} = 1$
$\forall j,k \in [n)$ esiste esattamente un $i \in [n)$ t.c. $H_{i,j,k} = 1$.

I cubi latini non sono semplici da trattare concretamente. Accade però che le loro simmetrie si individuano molto chiaramente. Innanzi tutto si osserva che nella definizione le loro tre dimensioni, ovvero le posizioni 1, 2 e 3 dei loro indici intervengono in modo completamente simmetrico. Quindi sottoponendo un cubo latino ad una qualsiasi delle 6 permutazioni delle posizioni degli indici si ottiene ancora un cubo latino.

D63:b.05 Visivamente un cubo latino si pensa come una opportuna disposizione di zeri ed uni nei punti aventi coordinate intere 0, 1, ..., $n-1$ dello spazio a tre dimensioni riguardanti le tre posizioni degli indici. Denotiamo con x_1, x_2 ed x_3 le relative variabili, con Ox_1, Ox_2 ed Ox_3 i rispettivi assi (cioè le rette caratterizzate, risp., dalle equazioni $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = x_3 = 0$ e $x_1 = x_2 = 0$) e con $O_{x_1x_2}$, $O_{x_2x_3}$,

$O_{x_3x_1}$ i rispettivi piani caratterizzabili con le equazioni $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$. Le sei permutazioni delle posizioni degli indici si interpretano come segue:

$\boldsymbol{Id}_{\{1,2,3\}}$	identità del cubo;
$(1,2)$	riflessione rispetto al piano $x_1 = x_2$;
$(1,3)$	riflessione rispetto al piano $x_1 = x_3$;
$(2,3)$	riflessione rispetto al piano $x_2 = x_3$;
$(1,2,3)$	rotazione di 120° intorno alla retta $x_1 = x_2 = x_3$ che manda l'asse Ox_1 nell'Ox_2, Ox_2 in Ox_3 ed Ox_3 in Ox_1;
$(1,3,2)$	rotazione inversa della precedente.

Si è quindi individuato un gruppo di simmetria per l'insieme dei cubi latini il quale è isomorfo a $\mathrm{S}ym_3$. Questo gruppo viene detto **gruppo di parastrofia**.

D63:b.06 Osserviamo che le n matrici binarie ottenute considerando i diversi valori per il primo indice $i = 0, 1, ..., n-1$ sono matrici permutative $n \times n$; analogamente si ottengono n matrici di questo genere fissando i valori per il secondo e per il terzo indice.

Un cubo latino di ordine n si può quindi considerare ottenuto accostando n matrici permutative traslate secondo una qualsiasi delle tre direzioni x_h in modo da presentare esattamente un valore 1 in ciascuna delle n^2 linee parallele all'asse di traslazione.

D63:b.07 Si vede poi facilmente che sottoponendo ad una permutazione qualsiasi una delle tre n-uple di matrici accostate si ottiene ancora un cubo latino.
Si è quindi individuato un secondo gruppo di simmetria per l'insieme dei cubi latini; questo gruppo viene detto **gruppo di isotopia**.
Si vede anche che le permutazioni di matrici permutative applicate nelle tre direzioni commutano tra di loro. Quindi il gruppo di isotopia dei cubi latini di ordine n è isomorfo al prodotto diretto $\mathrm{S}ym_n \times \mathrm{S}ym_n \times \mathrm{S}ym_n$.

Il gruppo di simmetria dell'insieme dei cubi latini generato dalle parastrofie e dalle isotopie può chiamarsi **gruppo di parastrofia-isotopia**.

D63:b.08 Procediamo ora a porre in corrispondenza biiettiva cubi latini e quadrati latini.

Sia H un cubo latino; dice **mappa sul piano** Ox_1x_2 di H la seguente matrice $n \times n$:

$$[i, j \in [n) \;:|\; k \;\P\; H_{i,j,k} = 1],$$

Accanto alla precedente si possono considerare le 5 matrici ottenute considerando le altre 5 coppie ordinate di dimensioni per H, cioè le mappe sui piani Ox_2x_1, Ox_1x_3, Ox_3x_1, Ox_2x_3 ed Ox_3x_2.

$$[j, i \in [n) \;:|\; k \;\P\; H_{i,j,k} = 1],$$

$$[i, k \in [n) \;:|\; j \;\P\; H_{i,j,k} = 1],$$

$$[k, i \in [n) \;:|\; j \;\P\; H_{i,j,k} = 1],$$

$$[j, k \in [n) \;:|\; i \;\P\; H_{i,j,k} = 1],$$

$$[k, j \in [n) \;:|\; i \;\P\; H_{i,j,k} = 1],$$

D63:b.09 Le costruzioni precedenti si possono ricondurre facilmente alla prima. La seconda si ottiene anche come mappa sul piano Ox_1x_2 del cubo latino ottenuto da H scambiando gli indici delle posizioni 1 e 2, ovvero scambiando le sue dimensioni 1 e 2. La terza si ottiene come mappa sul piano Ox_1x_2 del cubo latino ottenuto da H scambiando gli indici delle posizioni 2 e 3, La quarta si ottiene come mappa sul piano Ox_1x_2 del cubo latino ottenuto da H con la rotazione di $120°$ intorno all'asse $x_1 = x_2 = x_3$. La quinta si ottiene come mappa sul piano Ox_1x_2 del cubo latino ottenuto da H con la rotazione inversa della precedente.

Si possono allora dimostrare facilmente i fatti che seguono e che consentono di collegare cubi latini e quadrati latini.

D63:b.10 (1) Prop.: Le mappe di un cubo latino di ordine n sono q.l. canonici $n \times n$.

(2) Prop.: Il passaggio da un cubo latino a ciascuna delle sue 6 mappe è una biiezione.

(3) Prop.: Per un cubo latino invariante per riflessione rispetto al piano $x_1 = x_2$ come mappa rispetto al piano Ox_1x_2 si ha un q.l. simmetrico ▮

(4) Prop.: Per un cubo latino invariante per riflessione rispetto al piano $x_1 = x_3$ come mappa rispetto al piano Ox_1x_2 si ha un q.l. invariante rispetto allo scambio dei ruoli tra righe ed entrate ▮

(5) Prop.: Per un cubo latino invariante per riflessione rispetto al piano $x_2 = x_3$ come mappa rispetto al piano Ox_1x_2 si ha un q.l. invariante rispetto allo scambio dei ruoli tra colonne ed entrate ▮

D63:b.11 Denotiamo con $X_{\mathcal{R},\mathcal{E}}$ e con $X_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$, risp., le due trasformazioni di q.l. che scambiano i ruoli, risp., di righe ed entrate e di colonne ed entrate.
Introduciamo poi $X_{\mathcal{R},\mathcal{C},\mathcal{E}} := X_{\mathcal{C},\mathcal{E}} \circ X_{\mathcal{R},\mathcal{C}}$ ed $X_{\mathcal{E},\mathcal{C},\mathcal{R}} := X_{\mathcal{R},\mathcal{E}} \circ X_{\mathcal{R},\mathcal{C}}$. L'insieme formato dall'identità I_n, $X_{\mathcal{R},\mathcal{C}}$, $X_{\mathcal{R},\mathcal{E}}$, $X_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$, $X_{\mathcal{R},\mathcal{C},\mathcal{E}}$ ed $X_{\mathcal{E},\mathcal{C},\mathcal{R}}$ viene detto **gruppo di parastrofia** di Qln. Le relative orbite in $\mathbf{Ql}^{(n)}$ sono dette **classi di parastrofia** di q.l.

D63:b.12 (1) Prop.: Il q.l. $X_{\mathcal{R},\mathcal{E}}(L)$ si ottiene da L sostituendo ciascuna delle sue colonne con la sequenza di interi relativa alla permutazione inversa ▮

(2) Prop.: Il q.l. $X_{\mathcal{C},\mathcal{E}}(L)$ si ottiene da L sostituendo ciascuna delle sue righe con la sequenza di interi relativa alla permutazione inversa ▮

(3) Prop.: Il q.l. $X_{\mathcal{R},\mathcal{C},\mathcal{E}}(L)$ si ottiene da L sostituendo ciascuna delle sue righe con la sequenza di interi relativa alla permutazione inversa e quindi effettuando la trasposizione della matrice ottenuta ▮

(4) Prop.: Il q.l. $X_{\mathcal{E},\mathcal{C},\mathcal{R}}(L)$ si ottiene da L sostituendo ciascuna delle sue colonne con la sequenza di interi relativa alla permutazione inversa e quindi effettuando la trasposizione della matrice ottenuta ▮

(5) Prop.: Il passaggio dai cubi latini di ordine n alle loro mappe su uno dei sei piani Ox_dx_e è un isomorfismo fra gruppi di parastrofia dei cubi latini di ordine n e di $\mathbf{Ql}^{(n)}$ ▮

(6) Prop.: Il gruppo di parastrofia ridotto ai q.l. di una classe di parastrofia è omomorfo di $\mathrm{S}ym_3$. Conseguentemente le classi di parastrofia dei q.l. sono costituite da 6, 3, 2 o un elemento ▮

D63:b.13 Prop. Sottoporre un quadrato latino ad una permutazione ρ delle righe seguita da una permutazione κ delle colonne e da una permutazione η delle entrate equivale a sottoporlo alle tre permutazioni in un qualsiasi altro ordine.
In effetti con tutte le sei possibili trasformazioni si porta $L = [i, j \in [n) \mid L_{i,j}]$ nel quadrato latino $[i, j \in [n) \mid \eta(L_{\rho(i),\kappa(j)})]$ ▮

D63:c. Quadrati latini standard e quasigruppi

D63:c.01 Tra i quadrati latini ottenibili da L applicando permutazioni delle righe se ne trova esattamente uno che presenta nella prima colonna la sequenza crescente $\langle 0, 1, ..., n-1\rangle$, ovvero che presenta nella colonna etichettata da 0 la permutazione identica di $[n)$, $\boldsymbol{Id}^{(n)}$ Questo quadrato latino si ottiene applicando alle righe la permutazione inversa delle permutazione costituente la prima colonna della L. Simmetricamente, tra i quadrati latini ottenibili permutando le colonne di L se ne trova esattamente uno che presenta nella riga etichettata da 0 la permutazione identica di $[n)$.

D63:c.02 Definiamo come **quadrato latino standard di ordine** n ogni quadrato latino canonico di ordine n il quale presenta nella prima riga e nella prima colonna la permutazione identica $\langle 0, 1, ..., n-1\rangle$. Denotiamo con $\mathbf{QlS}^{(n)}$ l'insieme di queste matrici ad entrate intere.

Si può ora osservare che un quadrato latino $L = [i, j \in [n) :| L_{i,j}]$. si può ricondurre a un quadrato standard prima sottoponendo le sue colonne alla permutazione inversa di quella costituente la sua prima riga, $\langle j \in [n) :| L_{0,j}\rangle$ e quindi sottoponendo le righe del nuovo quadrato alla permutazione che trasforma la prima colonna nella $\boldsymbol{Id}^{(n)}$ (senza modificare la sua prima riga).

A questo punto siamo portati ad introdurre la equivalenza E_{scr} tra quadrati latini di $\mathbf{Ql}^{(n)}$ trasformabili l'uno nell'altro mediante una generica permutazione delle sue colonne (seguita da) ..... di righe e di colonne.

D63:c.03 Prop. Ogni classe di equivalenza di E_{prc} è costituita da $n! \cdot (n-1)!$ quadrati latini e tra questi esattamente uno è standard.

Per quanto detto sopra ogni classe di $\mathbf{Ql}^{(n)}/E_{prc}$ contiene almeno un quadrato standard. Mediante permutazioni di righe e di colonne un quadrato standard L non può essere trasformato in un diverso quadrato standard: infatti una tale trasformazione si potrebbe ottenere con una permutazione delle righe seguita da una permutazione delle colonne. Con la prima di queste trasformazioni si deve trasformare una colonna di L nella identità $\boldsymbol{Id}^{(n)}$.

. . . . . ▮

D63:c.04 Prop. Se QlS_n indica il numero dei quadrati latini standard, si conoscono solo i seguenti valori

n	2	3	4	5	6	7	8	9
QlS_n	1	1	4	56	9408	16 942 080	535 281 401 856	377 597 570 964 258 816

n	10	11
QlS_n	7 580 721 483 160 132 811 489 280	5 363 937 773 277 371 298 119 673 540 771 840

D63:c.05 Per quanto riguarda le espressioni per il numero dei quadrati latini Ql_n di un qualsiasi ordine n, si conoscono solo le seguenti espressioni per valori inferiori e valori superiori:

$$\frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}} \leq Ql_n \leq \prod_{k=1}^{n} (k!)^{n/k} .$$

D63:d. Biparità dei quadrati latini

D63:d.01 Ad ogni riga e ad ogni colonna dei quadrati latini sopra un insieme X risulta associata la parità della permutazione corrispondente. I due vettori delle parità delle righe e delle colonne non sono molto sostanziali, in quanto ogni permutazione delle righe e/o delle colonne li trasforma.
Accade invece che il prodotto delle parità delle righe e il prodotto delle parità delle colonne sono invarianti per queste trasformazioni ed anche per ogni permutazione delle entrate, ossia sono invarianti per parastrofia.
Ogni classe di parastrofia di q.l. è quindi caratterizzata dalla coppia delle parità sulle righe e sulle colonne. Tale coppia viene detta **biparità** del quadrato latino.
Evidentemente la trasposizione dei q.l. scambia i due componenti della biparità.

D63:d.02 Si possono quindi individuare per ogni ordine n 4 insiemi di q.l.
È poi evidente che i q.l. $+-$ e i q.l. $-+$ sono in biiezione ed hanno la stessa cardinalità.
Si dimostra poi facilmente che per n dispari le quattro classi di q.l. di ordine n sono in biiezione ed hanno le stesse cardinalità.
Accade invece che per n pari il numero di q.l. $++$ ed il numero di q.l. $--$ sono diversi.

D63:e. Quadrati latini dei gruppi

D63:e.01

D63:f. I rompicapo Sudoku e KenKen

D63:f.01 Il [[Sudoku]] è un rompicapo di origine giapponese che ha conosciuto una diffusione mondiale e una vasta popolarità a partire dal 2005.

Al solutore viene proposta una matrice 9×9 che in un certo numero k di caselle presenta un intero dell'intervallo $I_9 := \{1, 2, 3, ..., 9\}$ e che ha vuote le restanti $81 - k$. Nella matrice si distinguono le 9 sottomatrici di ordine 3 ottenute dall'intersezione di una delle tre terne di righe consegutive con una delle tre terne di colonne consecutive; nel seguito della sezione queste sottomatrici saranno dette regioni.

Al solutore viene richiesto di procedere a riempire ciascuna delle caselle vuote con un intero di I_9 in modo di ottenere un quadrato latini di ordine 9 tale che in ciascuna delle 9 regioni compaiano tutti gli interi di I_9 (ovviamente ciascuno una volta sola).

In quadrati latini 9×9 che soddisfano questa proprietà saranno detti **quadrati sudoku**.

D63:f.02 Dunque il rompicapo Sudoku riguarda il completamento di un quadrato sudoku incompleto. La soluzione va ottenuta considerando quali possibili interi di I_9 si possono via via aggiungere al quadrato sudoku incompleto rispettando i vincoli della non ripetizione delle entrate in ciascuna delle 9 righe, in ciascuna delle 9 colonne e in ciascuna delle 9 regioni.

In particolare si cercano caselle nelle quali le entrate presenti ed i vincoli conducono ad una sola possibile entrata concessa. In genere si devono anche considerare quadrati incompleti nei quali alcune caselle contengono indicazioni di 2 o più entrate consentite dalle considerazioni sui vincoli che le influenzano; buona parte del lavoro per la soluzione consiste nella progressiva eliminazione delle possibilità consentite fino a giungere a determinazioni univoche per le entrate di date caselle.

La soluzione quindi richiede di sviluppare, tendenzialmente procedendo in modo ordinato e organico, considerazioni sulle possibili scelte. Per queste occorre evidentemente effettuare analisi critiche su diverse configurazioni e queste richiedono di seguire logiche piuttosto stringenti. Se si azzardassero tentativi non supportati dalla logica si potrebbero incontrare situazioni erronee che sarebbe troppo complicato cercare di correggere.

Si tratta quindi di un gioco che richiede l'applicazione di considerazioni matematiche riguardanti configurazioni combinatorie (non riguardanti situazioni numeriche, i 9 interi usati per le entrate sono solo degli identificatori di 9 stati per le 81 caselle).

D63:f.03 I quadrati sudoku incompleti proponibili come istanze del rompicapo devono essere tali da condurre ad uno e un solo quadrato sudoku completo. Non sono considerati proponibili né quadrati sudoku incompleti che non conducono ad alcun quadrato sudoku completo (rompicapo non risolvibili), né quadrati incompleti che possono condurre a più soluzioni (questi sono considerati ambigui).

Dato un quadrato incompleto proponibile, salvo poche eccezioni, si ha la possibilità di giungere alla soluzione (unica) attraverso diversi procedimenti inquadrabili in diverse strategie. Ad esempio accade di poter scegliere se sistemare per prima una certa riga, oppure un'altra, oppure una colonna, oppure una data entrata.

In linea di massima i quadrati incompleti con poche entrate (ad esempio 20) comportano soluzioni più laboriose di quelli con molte entrate (ad esempio 35). Tuttavia questa corrispondenza non è assoluta: può contare molto anche la disposizione delle entrate proposte. Si possono individuare coppie di quadrati incompleti tali che il meno popolato consente soluzioni attraverso processi meno impegnativi di quelli che permettono di risolvere il più popolato.

D63:f.04 È interessante individuare le simmetrie dei quadrati sudoku. Evidentemente la trasposizione e ogni permutazione delle entrate trasformano un quadrato sudoku in un altro quadrato sudoku. Tra le permutazione delle righe sono ammesse solo quelle che trasformano ciascuna delle tre terne $\langle 0,1,2\rangle$, $\langle 3,4,5\rangle$, $\langle 678\rangle$, in un'altra di tali terne o in una sua permutazione. Stessa considerazione per le permutazione delle colonne.

D63:f.05 Acceniamo anche al più recente **rompicapo [[KenKen]]** definito dal giapponese Tetsuya Miyamoto e proposto nel 2005. Al solutore viene proposto una matrice $n \times n$, con n che può assumere un valore intero maggiore o uguale a 3 (non più necessariamente uguale a 9) e che ancora deve essere completata fino ad ottenere un quadrato latino. Nella matrice proposta non si ha alcuna entrata, ma viene segnata una partizione delle sue caselle in parti che costituiscono dei poliòmini e che vengono accompagnate da una coppia costituita da un intero positivo e da un segno di operazione numerica. Con tale coppia si chiede che effettuata l'operazione segnalata sopra le entrate del poliomino si otterrà come risultato l'intero segnalato. In ciascun poliomino si possono avere entrate ripetute, mentre si chiede che ciascuna riga e ciascuna colonna contengano una permutazione di I_n.

Anche la soluzione di questo rompicapo richiede di procedere sopra ipotesi sulle entrate che devono essere sottoposte a controlli sistematici.

D63:g. Sistemi di quadrati latini ortogonali

D63:g.01 Nel 1780 Eulero si pose il cosiddetto **problema dei 36 ufficiali**. Si tratta di stabilire se si possono disporre 36 ufficiali di 6 gradi diversi ed appartenenti a 6 reggimenti diversi (nessune t.c. c a formare uno schieramento quadrato, 6×6, in modo che in ogni linea siano rappresentati tutti i gradi e tutti i reggimenti.
Eulero rappresentò ogni schieramento con un cosiddetto **quadrato greco-latino**; in generale una tale configurazione di ordine n è una matrice $n \times n$ in ciascuna casella della quale si trova una coppia costituita da una delle prime n lettere greche e di una delle prime n lettere latine, con la condizione che in ogni linea ogni lettera greca ed ogni lettera latina compaia esattamente una volta.
Una tale configurazione equivale ad una coppia di quadrati latini, il primo ottenuto limitandosi alle lettere greche, il secondo alle latine. Per inciso segnaliamo che da questa decomposizione deriva lo stesso termine di quadrato latino.

D63:g.02 Definiamo dunque **duetto di quadrati latini mutuamente ortogonali**, in sigla MOLS, una coppia di quadrati latini dello stesso ordine n, L ed M t.c. la collezione delle coppie delle entrate relative alle varie posizioni copra tutte le n^2 posibilità: $\{r, c \in (n) \mid \langle L_{r,c}, M_{r,c} \rangle\} = (n) \times (n)$.

Il problema posto da Eulero e la sua congettura relativa all'impossibilità di trovare una coppia di MOLS di ordine 6, costituirono un tema ampiamente dibattuto. Nel 1900 Gaston Tarry è riuscito a dimostrare la non esistenza di una coppia di MOLS di ordine 6. Nel 1943 Henry Mann ha mostrato come costruire una coppia di MOLS per ogni ordine che non fosse il doppio di un numero dispari. Finalmente nel 1960 Bose, Shirkhande e Parker hanno mostrato che il problema degli n^2 ufficiali è irrisolvibile solo per $n = 6$.

`Le varie componenti di questo testo sono accessibili in http://www.mi.imati.cnr.it/∼alberto`