1

Capitolo D47
inversione di Moebius-Rota

Contenuti delle sezioni

20 pagine

D470.01 In questo capitolo vengono presentate le basi di una teoria combinatoria efficace ed elegante, nata in seguito alla pubblicazione da parte di Gian-Carlo Rota di un lavoro che ha fornito un notevole impulso allo sviluppo delle odierne teorie combinatorie [*Rota 1964*].

In questo lavoro è stata proposta una ampia generalizzazione del principio di inclusione ed esclusione, cioè di quello che fino agli anni 1960 era stato uno degli strumenti più efficaci per risolvere i problemi enumerativi.

Questo principio fornisce una formula di inversione semplice da enunciare ma spesso tutt'altro che facile da applicare. Con il lavoro di Rota il principio viene riferito al reticolo booleano di un insieme finito e riceve un sostanziale chiarimento.

La generalizzazione accennata ha fatto capire che la soluzione di una grande varietà di problemi enumerativi si può ricondurre alla inversione di certe sommatorie di oggetti associati ai nodi di certi insiemi parzialmente ordinati.

D470.02 La inversione che viene presentata in queste pagine generalizza, oltre al principio di inclusione ed esclusione, anche la classica inversione introdotta da Moebius nella teoria dei numeri in collegamento con la divisibilità tra interi e l'inversione di matrici triangolari viste come funzioni del quadrato cartesiano di quei particolari insiemi ordinati che sono gli intervalli di numeri interi.

Secondo questo punto di vista il metodo di inversione di Rota generalizza il calcolo alle differenze finite, cioè l'analogo discreto del metodo della quadratura, il più classico dei procedimenti che consentono di risolvere problemi differenziali.

D47 a. algebra di incidenza

D47a.01 Sia $\mathsf{P} = \langle P, \preceq \rangle$ un poset localmente finito e $\mathtt{K} = \langle K, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1 \rangle$ un campo di caratteristica 0; in particolare interessano i campi dei razionali, dei reali e dei complessi.
Nel seguito useremo scritture come x, y, z_i per gli elementi di P e denoteremo con r, r_1, r_2, s, s_i gli elementi di K.

Ci interessano le funzioni bivariate del genere $\lceil P \times P \longmapsto K \rceil$ che chiameremo anche **funzioni-PPtF**.

In particolare ci interessa l'insieme di funzioni

$$\mathsf{FPPtFS}[\mathsf{P}, \mathtt{K}] \;:=\; \left\{ f \in: \lceil P \times P \longmapsto K \rceil \;\; \P \;\; x \not\preceq y \Longrightarrow f(x,y) = 0 \right\} .$$

Una tale funzione la chiamiamo funzione-PPtF a scalino o, più concisamente **funzione-PPtFS**.

Definendo come al solito la somma di due funzioni $f, g \in \mathsf{FPPtFS}[\mathsf{P}, \mathtt{K}]$ e il prodotto della f per lo scalare $r \in K$:

$$(f + g)(x,y) \;:=\; f(x,y) + g(x,y) \qquad\qquad (r \cdot f)(x,y) \;:=\; r \cdot f(x,y) \;,$$

all'insieme $\mathsf{FPPtFS}[\mathsf{P}, \mathtt{K}]$ si attribuisce la struttura di spazio vettoriale su $\mathtt{K}$.

Per i vettori di questo spazio useremo notazioni come $\vec{v}$ e in particolare per il vettore zero scriviamo

$$\vec{0} \;:=\; \lceil \langle p, q \rangle \in P \times P \;\upharpoonright\!\!\!\!\upharpoonright\; 0 \rceil \;.$$

D47a.02 Introduciamo alcune funzioni associate a un poset P del genere $\lceil P \times P \longmapsto\!\!\!\triangleright \{0, 1\} \rceil$ che chiamiamo **funzioni-PPtB** e che si rivelano di grande utilità.

$$\delta_{\mathsf{P}}(x,y) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{sse } x = y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \textbf{funzione-PPtB delta di Kronecker}$$

$$\zeta_{\mathsf{P}}(x,y) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{sse } x \preceq y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \textbf{funzione-PPtB zeta di Riemann}$$

$$\eta_{\mathsf{P}}(x,y) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{sse } x \prec y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \textbf{funzione-PPtB catena}$$

$$\kappa_{\mathsf{P}}(x,y) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{sse } x \prec_{\mathtt{I}} y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \textbf{funzione-PPtB copertura}$$

$$\lambda_{\mathsf{P}}(x,y) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{sse } x \prec_{\mathtt{I}} y \;\vee\; x = y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \textbf{funzione-PPtB lambda}$$

D47a.03 Osserviamo che $\zeta_{\mathsf{P}} = \delta_{\mathsf{P}} + \eta_{\mathsf{P}}$ e che $\lambda_{\mathsf{P}} = \delta_{\mathsf{P}} + \kappa_{\mathsf{P}}$.
Osserviamo anche che queste funzioni e quelle costruite a partire da esse non cambiano passando a un poset isomorfo a P.
Si nota anche che queste funzioni si possono considerare funzioni indicatrici di definiti sottoinsiemi di $P \times P$ collegati alla relazione di ordinamento parziale: "=", $\preceq$, $\prec$, $\preceq_I$ e $\preceq_I \vee =$.
Quindi queste funzioni e quelle costruite su di esse non cambiano passando a un poset isomorfo a P, ossia come si dice, sono "funzioni con carattere intrinseco".

D47a.04 Prop. Tutte le precedenti funzioni-PPtB , passando dal poset P al suo duale $\mathsf{P}^{\leftarrow}$, assumono i valori determinati dallo scambio dei due argomenti:

$$\forall\, \mathsf{Ч} = \delta, \zeta, \eta, \kappa, \lambda \;\wedge\; x, y \in P \;\; : \;\; \mathsf{Ч}_{\mathsf{P}^{\leftarrow}}(x,y) \;=\; \mathsf{Ч}_{\mathsf{P}}(y,x) \;.$$

D47a.05 Prop. Tutte le precedenti funzioni-PPtB, passando dal poset P a un suo intevallo vengono semplicemente sottoposte alla restrizione del dominio:

$$\forall\ \mathsf{Ч} = \delta, \zeta, \eta, \kappa, \lambda\ \wedge\ a \preceq x \preceq y \preceq b \in P\ :\ \mathsf{Ч}_{[a,b]}(x,y) = \mathsf{Ч}_{\mathsf{P}}(y,x)\ .$$

D47a.06 Prop. Consideriamo i due posets $\mathsf{P} = \langle P, \preceq\rangle$ e $\mathcal{Q} = \langle Q, \sqsubseteq\rangle$ e il loro prodotto diretto $\mathcal{R} := \mathsf{P} \times \mathcal{Q} = \big\langle P \times Q, \preceq \times \sqsubseteq\big\rangle$.

$$\forall\ \mathsf{Ч} = \delta, \zeta, \eta, \kappa, \lambda\ :\ \mathsf{Ч}_{\mathcal{R}}(\langle x,u\rangle, \langle y,v\rangle)\ =\ \mathsf{Ч}_{\mathsf{P}}(x,y) \cdot \mathsf{Ч}_{\mathcal{Q}}(u,v),$$

D47a.07 Definiamo il **prodotto di convoluzione** o, semplicemente, la **convoluzione** delle funzioni f e $g \in \mathsf{FPPtFS}[\mathsf{P},\mathtt{K}]$ come:

$$(f * g)(x,y)\ :=\ \sum_{x \preceq \dot{z} \preceq y} f(x,z) \cdot g(z,y)\ .$$

Dato che ogni intervallo di P è finito, la precedente somma è finita e il secondo membro dalla precedente uguaglianza fornisce sempre un valore per il primo membro.

Osserviamo anche che la precedente somma si può considerare estesa a tutte le catene-cr-x, y di lunghezza 2, cioè a tutte le catene con ripetizioni con nodo iniziale x e nodo finale y aventi lunghezza 2.

D47a.08 Si constata facilmente che la funzione δ_{P} è unità a sinistra e a destra per la convoluzione e che questo prodotto è distributivo a sinistra e a destra rispetto alla combinazione lineare di funzioni, cioè:

$$\begin{gathered}\forall\ r_1, r_2, s_1, s_2 \in K\ ,\ f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in \mathsf{FPPtFS}[\mathtt{K},\mathtt{K}]\quad :\\ (r_1 \cdot f_1 + r_2 \cdot f_2) * g = (r_1 \cdot f_1) * g + (r_2 \cdot f_2) * g = r_1 \cdot f_1 * g + r_2 \cdot f_2 * g\\ f * (s_1 \cdot g_1 + s_2 \cdot g_2) = f * (s_1 \cdot g_1) + f * (s_2 \cdot g_2) = f * s_1 \cdot g_1 * g + f * s_2 \cdot g_2\quad .\end{gathered}$$

Si verifica anche che la convoluzione è una operazione associativa, cioè:

$$\forall f, g, h \in \mathsf{FPPtFS}_{\mathsf{K}}\ :\ f * (g * h) = (f * g) * h$$

Infatti entrambi i membri, valutati per x e y, portano a una somma estesa a tutte le catene-cr-x, y di lunghezza 3.

D47a.09 Per ogni intero naturale k si definiscono le potenze k-esime di ogni funzione $f \in \mathsf{FPPtFS}[\mathsf{P},\mathtt{K}]$:
$f^0 := \delta_{\mathsf{P}}\quad ,\quad f^1 := f\quad ,$
$f^k(x,y)\ :=\ \sum_{x=\dot{z}_1 \preceq \ldots \preceq \dot{z}_k = y} f(x,z_1) f(z_1,z_2)\ \ldots\ f(z_{k-1},y)$, dove si chiede che la somma si estenda a tutte le catene-cr-x, y di lunghezza k di P.

D47a.10 Si può quindi concludere con l'enunciato che segue.

Prop. L'insieme $\mathsf{FPPtFS}[\mathsf{P},\mathtt{K}]$ munito delle operazioni di addizione, di moltiplicazione per uno scalare in $\mathtt{K}$ e di convoluzione è un'algebra unifera.

Tale algebra è chiamata **algebra di incidenza del poset** P sul campo $\mathtt{K}$, viene denotata $\mathbf{Aoi}[\mathsf{P},\mathtt{K}]$; i suoi elementi sono detti **funzioni di incidenza del poset** P sul campo $\mathtt{K}$.

D47a.11 Nel caso in cui P sia $\big\langle \{1, ..., n\}, \le\big\rangle$ le funzioni di incidenza sono matrici triangolari superiori e il prodotto di convoluzione è l'usuale prodotto di matrici righe per colonne.

Questo prodotto può definirsi anche per matrici triangolari superiori di profilo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ed $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e corrisponde risp. al prodotto di convoluzione per l'algebra di incidenza dei posets $\langle \mathbb{N}, \le\rangle$ e $\langle \mathbb{Z}, \le\rangle$.

Questo modello matriciale può essere preso in considerazione per ogni poset localmente finito. Infatti per ciascuno di tali posets si può individuare una sequenzializzazione degli elementi; questi quindi possono essere individuati dagli interi (consecutivi) costituenti un intervallo.
Un poset finito di n elementi può essere immerso in $\langle\{1, ..., n\}, \leq\rangle$ con un n opporftuno.
I posets localmente finiti illimitati possono essere immersi in $\langle\mathbb{N}, \leq\rangle$, nel duale $\langle\{..., -2, -1, 0\}, \leq\rangle)$ oppure in $\langle\mathbb{Z}, \leq\rangle$.
Alle funzioni di incidenza di questi posets ancora corrispondono matrici triangolari superiori le quali ora tendenzialmente contengono un elevato numero di zeri: ogni casella che è nulla per la matrice della funzione di Riemann deve essere nulla per tutte le funzioni di incidenza.

D47a.12 Le seguenti relazioni sono immediate conseguenze delle definizioni.

$$\begin{aligned}
{\zeta_{\mathsf{P}}}^n &= \sum_{i=0}^{n} {\eta_{\mathsf{P}}}^i \\
{\eta_{\mathsf{P}}}^n &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} {\zeta_{\mathsf{P}}}^i \\
{\lambda_{\mathsf{P}}}^n &= \sum_{i=0}^{n} {\kappa_{\mathsf{P}}}^i \\
{\kappa_{\mathsf{P}}}^n &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} {\lambda_{\mathsf{P}}}^i \ .
\end{aligned}$$

D47a.13 Le funzioni di incidenza appena definite forniscono interessanti informazioni circa gli intervalli di un generico poset P.

Qui l'intervallo di P avente come estremi x e y lo denotiamo semplicemente con $[x, y]$.
Denotiamo inoltre con $Atom(\mathsf{P})$ l'insieme degli atomi di P, con $Atom[x, y]$ l'insieme degli atomi appartenente all'intervallo $[x, y]$; e con $Coatom(\mathsf{P})$ l'insieme dei suoi coatomi e con . con $Coatom[x, y]$ l'insieme dei coatomi appartenenti all'intervallo $[x, y]$.

Per i vari tipi di catene che si trovano nel poset P adottiamo le notazioni che seguono.
$Chn[x, y]$:= insieme delle catene nell'intervallo $[x, y]$;
$Chn_k[x, y]$:= insieme delle catene nell'intervallo $[x, y]$ aventi lunghezza k;
$ChnMxl_k[x, y]$:= insieme delle catene massimali nell'intervallo $[x, y]$ aventi lunghezza k;
$ChnRep_k[x, y]$:= insieme delle catene con ripetizioni nell'intervallo $[x, y]$ aventi lunghezza k;
$ChnMxlRep_k[x, y]$:= insieme delle catene massimali e con ripetizioni nell'intervallo $[x, y]$ di lunghezza k;

Prop. $\forall x, y \in P$:
(a) ${\zeta_{\mathsf{P}}}^2(x, y) = |[x, y]|$
(b) $(\kappa_{\mathsf{P}} * \zeta_{\mathsf{P}})(x, y) = |Atom[x, y]|$
(c) $(\zeta_{\mathsf{P}} * \kappa_{\mathsf{P}})(x, y) = |Coatom[x, y]|$

D47a.14 **Prop.** $\forall x, y \in P$:
(a) ${\eta_{\mathsf{P}}}^k(x, y) = |Chn_k[x, y]|$
(b) ${\kappa_{\mathsf{P}}}^k(x, y) = |ChnMxl_k[x, y]|$
(c) ${\zeta_{\mathsf{P}}}^k(x, y) = |ChnRep_k[x, y]|$
(d) ${\lambda_{\mathsf{P}}}^k(x, y) = |ChnMxlRep_k[x, y]|$

(e) $\displaystyle\sum_{k=0,1,\dots} {\eta_{\mathsf{P}}}^k(x,y) \;=\; (2\delta_{\mathsf{P}} - \zeta_{\mathsf{P}})^{\leftarrow}(x,y)\,| \;=\; Chn[x,y]|$

(f) $\displaystyle\sum_{k=0,1,\dots} {\kappa_{\mathsf{P}}}^k(x,y) \;=\; (2\delta_{\mathsf{P}} - \lambda_{\mathsf{P}})^{\leftarrow}(x,y) \;=\; |ChnMxl[x,y]|$

D47 b. funzione di Moebius

D47b.01 Chiamiamo **funzioni aritmetiche del poset** P le funzioni $f \in \mathsf{FPPtFS}[\mathsf{P},\mathtt{K}]$ tali che $\forall x \in P \,:\, f(x,x) \neq 0$; denotiamo il loro insieme con $Artm_[\mathsf{P},\mathtt{K}]$.
Sono funzioni aritmetiche δ_P, ζ_P e λ_P.

D47b.02 **Prop.** Gli elementi $f \in \mathsf{FPPtFS}[\mathsf{P},\mathtt{K}]$ che possiedono un unico inverso f^{-1} rispetto alla convoluzione sono tutte e sole le funzioni aritmetiche.
I valori di un tale elemento inverso $f^{-1}(x,y)$ per x fissato ed y variabile si ottengono progressivamente con le seguenti assegnazioni:

$$f^{-1}(x,x) \;:=\; \frac{1}{f(x,x)} \;,$$

$$\forall y \succ x \;\,:\;\, f^{-1}(x,y) \;:=\; \frac{1}{f(y,y)}\left(-\sum_{x \preceq \dot z \prec y} f^{-1}(x,z)f(z,y)\right) \;.$$

Infatti dalle precedenti espressioni si ricava facilmente che

$$(f^{-1} * f)(x,x) = (f * f{-}1)(x,x) = 1 \;\;,$$

$$x \prec y \;\Longrightarrow\; (f^{-1} * f)(x,y) \;=\; \sum_{x \preceq \dot u \prec y} \;\;,$$

$$f^{-1}(x,u)f(u,y) + f^{-1}(x,y) * f(y,y) \;=\; 0 \;\blacksquare$$

D47b.03 Una funzione $\nu \in \mathsf{FPPtFS}[\mathsf{P},\mathtt{K}]$ si dice **funzione-PPtFS nilpotente** sse per ogni $x,y \in P$ si trova un intero positivo k tale che $\nu^k(x,y) \;=\; \vec{0}$.

Prop. Una $n \in \mathsf{FPPtFS}[\mathsf{P},\mathtt{K}]$ è nilpotente sse $\forall x \in P \;:\; \nu(x,x) = 0$. ▮

D47b.04 **Prop.** Sia $\nu \in \mathsf{FPPtFS}[\mathsf{P},\mathtt{K}]$ nilpotente; $(\delta_\mathsf{P} + \nu)^{-1} = \sum_{h=0,1,\ldots} (-1)^h \nu^k$.

Evidentemente $(\delta_\mathsf{P} + \nu)^{-1}$ è una funzione aritmetica e si può calcolare la sua funzione inversa. ... ▮

D47b.05 Dato che la funzione ζ_P è invertibile, risulta lecito definire un'altra funzione di $\mathsf{FPPtFS}[\mathsf{P},\mathtt{K}]$

$$\overline{\mu}_\mathsf{P} \;:=\; {\zeta_\mathsf{P}}^{-1} \qquad \textbf{funzione di Moebius del poset } \mathsf{P} \;.$$

Nel seguito abbrevieremo spesso "funzione di Moebius" con fdM.

I valori della fdM per un x fissato si possono calcolare progressivamente con le seguenti espressioni che particolarizzano quelle per la costruzione del generico elemento inverso:

$$\overline{\mu}_\mathsf{P}(x,x) = 1$$

$$\forall y \succ x \;\,:\;\, \overline{\mu}_\mathsf{P}(x,y) \;:=\; -\sum_{x \preceq \dot z \prec y} \overline{\mu}_\mathsf{P}(x,z) \;.$$

Si trova inoltre $\qquad \forall x,y \in P \;:\; \mu_\mathsf{P}(x,y) = -\sum_{x \prec \dot z \preceq y} \overline{\mu}_\mathsf{P}(z,y)$

D47b.06 **Prop.** $x \prec_\mathtt{I} y \;\Longrightarrow\; \overline{\mu}_\mathsf{P}(x,y) \;=\; -1$.

D47b.07 **Prop.** $\overline{\mu}_\mathsf{P} \;=\; \delta_\mathsf{P} - \overline{\mu}_\mathsf{P} * \eta_\mathsf{P} \;=\; \delta_\mathsf{P} - \eta_\mathsf{P} * \overline{\mu}_\mathsf{P}$.

D47b.08 **Prop.** Passando al poset duale i valori della fdM si ottengono scambiando i due argomenti: $\overline{\mu}_{\mathsf{P}^{\leftarrow}}(x,y) = \overline{\mu}_\mathsf{P}(y,x)$.

D47b.09 **Prop.** Passando da un poset a un suo intervallo la fdM subisce semplicemente la riduzione del proprio dominio:

$$a \preceq x \preceq y \preceq b \implies \overline{\mu}_{[a,b]}(x,y) \;=\; \overline{\mu}_{\mathsf{P}}(x,y)\ .$$

D47b.10 **Prop.** Consideriamo i due posets $\mathsf{P} = \langle P, \preceq\rangle$ e $\mathcal{Q} = \big\langle Q, \sqsubseteq \big\rangle$ e il loro prodotto diretto $\mathcal{R} := \mathsf{P} \times \mathcal{Q} = \big\langle P \times Q\ ,\ \preceq \times \sqsubseteq \big\rangle$. $\overline{\mu}_{\mathcal{R}}(\langle x,u\rangle, \langle y,v\rangle) \;=\; \overline{\mu}_{\mathsf{P}}(x,y) \cdot \overline{\mu}_{\mathcal{Q}}(u,v)$.

D47 c. funzioni di incidenza dei posets di base

D47c.01 Per ogni $n \in \mathbb{P}$ definiamo poset della catena di altezza n :

$$\mathcal{C}_n \;:=\; \big\langle \{0,1,2,...,n\}, \leq \big\rangle \;.$$

Conveniamo di individuare un tale poset anche con la scrittura:

$$\mathcal{C}(n) \;:=\; \{0 < 1 < 2 \cdots < n\} \;.$$

Ne consegue che la corrispondente algebra di incidenza sui razionali si denota con $\mathsf{Aoi}[\mathcal{C}_n, \mathbb{Q}]$.

Osserviamo che le catene-rep $0 \preceq z_1 \preceq ... \preceq z_n = n$ sono in biiezione con le stringhe di lunghezza $k-1$ su $\{0,1,...,n\}$ "monotone" aventi la forma $z_1 z_2 ... z_{k-1}$.

Le catene senza ripetizioni $0 < z_1 < ... < z_k = n$ a loro volta sono in biiezione con i *sottoinsiemi*$-(k-1)$ di $\{1,...,n-1\}$; in virtù della relazione $n = z_1 + (z_2 - z_1) + ... + (n - z_{k-1})$, esse sono in biiezione anche con le partizioni ordinate dell'intero n di lunghezza k.

Da queste considerazioni seguono le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
{\eta_{\mathcal{C}(n)}}^k(0,n) &= \binom{n-1}{k-1} \\
{\zeta_{\mathcal{C}(n)}}^k(0,n) &= \binom{(n+1)+(k-1)-1}{k-1} \;=\; \binom{n+k-1}{n} \\
{\kappa_{\mathcal{C}(n)}}^k(0,n) &= \delta_{n,k} \\
{\lambda_{\mathcal{C}(n)}}^k(0,n) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \kappa_{\mathcal{C}(n)}(0,n) \;=\; \binom{k}{n}.
\end{aligned}$$

D47c.02 Passiamo ora al poset costituito dal reticolo booleano $\mathfrak{P}(S)$ relativo a ciascun insieme $S \in \mathbf{Set}_n$ che, astraendo dal particolare S possiamo denotare con $\mathcal{B}(n)$.
Alle sue catene-$\emptyset, S$ diamo la forma $\big\langle \emptyset \subset A_1 subset \cdots \subset A_k = S \big\rangle$ e si osserva che sono in biiezione con le partizioni ordinate in k sottoinsiemi di S, $S = A_1 \dot\cup (A_2 \setminus A_1) \dot\cup \cdots \dot\cup (S \setminus A_{k-1})$. Ne conseguono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
{\eta_{\mathcal{B}(n)}}^k(\emptyset,S) &= k! \cdot S_{n,k} \\
{\zeta_{\mathcal{B}(n)}}^k(\emptyset,S) &= \sum_{i=0}^{k} [k]_i \cdot S_{n,i} = k^n \\
{\kappa_{\mathcal{B}(n)}}^k(\emptyset,S) &= \delta_{n,k}\, k! \\
{\lambda_{\mathcal{B}(n)}}^k(\emptyset,S) &= \sum_{i=0}^{k} [k]_i \cdot \delta_{n,i} \;=\; [k]_n
\end{aligned}$$

D47c.03 Calcoliamo le fdM per alcuni reticoli basilari cominciando dalle catene.

$\mu_{\mathsf{C}(n)}(0,0) = 1, \qquad \mu_{\mathcal{C}(n)}(0,1) = -1 \quad , \quad \forall k = 2,3,... \;:\; \mu_{\mathcal{C}(n)}(0,k) = 0.$

$$\mu_{\mathcal{C}(n)^{t}}\big(0^t, \langle k_1, ..., k_t \rangle\big) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{sse } k_1 = k_2 = ... = k_t = 0 \\ (-1)^s & \text{sse } s \text{ dei } k_i \text{ sono 1 ed i restanti 0} \\ 0 & \text{sse } k_i \geq 2 \text{ per almeno un } i. \end{cases}$$

Passando al reticolo delle divisibilità $\mathcal{D}$, scelti $l, m \in \mathbb{P}$:

$$\mu_{\mathcal{D}}(l,m) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{sse } l=m \\ (-1)^s & \text{sse } \dfrac{m}{l} = p_1p_2...p_s \text{ con } p_i \neq p_j, p_i \text{ primi} \\ 0 & \text{sse } \dfrac{m}{l} = r^2t \neq 1. \end{cases}$$

D47c.04 Prendiamo in considerazione la fdM originale definita come

$$\underline{\mu}_n \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{sse } n=1 \\ (-1)^s & \text{sse } \quad n = p_1p_2...p_s \quad \text{con} \quad p_i \neq p_j, p_i \text{ primi} \\ 0 & \text{sse } n = r^2t > 1. \end{cases}$$

Chiaramente $\underline{\mu}_n \in \lceil \mathbb{P} \longmapsto \mathbb{Z} \rceil$.
Inoltre abbiamo

$$\forall\, l,m \in \mathbb{P} \;]\; l \preceq_: m \;\;:\;\; \underline{\mu}_{l,m} \;=\; \overline{\mu}\left(\frac{m}{l}\right) \;.$$

D47c.05 Consideriamo l'algebra di Boole $\mathfrak{P}(S)$ sopra l'insieme $S \in \mathbf{Set}_n$, la corrispondente algebra di incidenza $\mathcal{B}(n)$ e la relativa funzione di Moebius che chiamiamo **funzione di Moebius classica** per la quale scriviamo $\underline{\mu}_n \;:=\; \overline{\mu}_{\mathcal{B}(n)}$. Dato che $\mathfrak{P}(n)$ è il reticolo potenza diretta n-esima del reticolo $\mathcal{C}(1)$, da (b) si deduce

$$\overline{\mu}_{\mathcal{B}(n)}(\emptyset, S) \;=\; (-1)^n$$

In generale,

$$\forall A \subseteq B \subseteq S \;\;:\;\; \underline{\mu}_n(A,B) \;=\; (-1)^{|B-A|}$$

D47 d. inversione di Moebius-Rota [1]

D47d.01 Introduciamo due operatori che trasformano una funzione f sul poset $\mathsf{P} = \langle P, \preceq \rangle$ a valori in K (in particolare razionali o reali), cioè una $f \in \lceil P \longmapsto K \rceil$ in una funzione dello stesso genere:

$$(S_{\preceq} f)(x) \ := \ \sum_{\dot{y} \preceq x} f(y) \qquad\qquad (S_{\succeq} f)(x) \ := \ \sum_{\dot{y} \succeq x} f(y)$$

Essi sono chiamati, risp., **operatore somma inferiore** e **operatore somma superiore**.

D47d.02 **Lemma**: Siano $f, g, h \in \mathbf{Aoi}[\mathsf{P}, \mathtt{K}]$ e h sia invertibile. Allora

$$g = f * h \iff f = g * h^{-1} \qquad , \qquad g = h * f \iff f = h^{-1} * g \blacksquare$$

D47d.03 **Teorema teorema sull'inversione di Moebius**
Sia P un poset localmente finito, $\mathtt{K}$ un campo di caratteristica 0 e $f, g \in \lceil P \longmapsto K \rceil$.

(a) **inversione da sotto** Se tutti gli ideali principali di P sono finiti:

$$\forall x \in P \ : \ g(x) = \sum_{\dot{y} \preceq x} f(y) \iff \forall x \in P \ : \ f(x) = \sum_{\dot{y} \preceq x} g(y)\, \mu_{\mathsf{P}}(y, x) \blacksquare$$

(b) **inversione da sopra** Se tutti gli ideali principali di P sono finiti:

$$\forall x \in P \ : \ s(x) = \sum_{\dot{y} \preceq x} r(y) \iff \forall x \in P \ : \ r(x) = \sum_{\dot{y} \succeq x} \mu_{\mathsf{P}}(x, y)\, s(y) \blacksquare$$

D47d.04 Sia P un poset finito dotato di zero $\underline{0}$ e unità $\underline{1}$ e dotato di funzione rango rnk. Si dice **polinomio caratteristico del poset** P:

$$\chi_{\mathsf{P}}(x) \ := \ \sum_{a \in P} \mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, a) \cdot x^{\text{rnk}(\underline{1}) - \text{rnk}(a)}.$$

Associamo ora a ogni livello$k$ di P le due sequenze di numeri:

$$\forall k = 0, 1, ..., \text{rnk}(\underline{1}) \ : \ w_k \ := \sum_{\text{rnk}(\dot{a}) = k} \mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, a) \qquad W_k \ := \ |\{a \in P \mid \text{rnk}(a) = k\}|$$

Il primo di essi è uguale al coefficiente di $x^{\text{rnk}(\underline{1}) - k}$ del polinomio caratteristico e viene chiamato **k-esimo numero di livello del primo tipo del poset** P; W_k esprime il cardinale del k-esimo livello di P e viene detto **k-esimo numero di livello del secondo tipo del poset** P.

D47d.05 Il polinomio caratteristico dà utili informazioni circa il comportamento di μ_{P} sui vari livelli del poset.
Si trova subito che $\chi_{\mathsf{P}}(x)$ è di grado $\text{rnk}(P)$, che $w_0 = 1$ e che $w_{\text{rnk}(P)} = \mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, \underline{1})$.

Vediamo quali valori assumono le precedenti funzioni per i reticoli basilari.

D47d.06

(1) Prop.: $\chi_{\mathcal{C}(n)}(x) \ = \ x^{n-1}(x-1)$, $w_0 = 1$, $w_1 = -1$ e $\forall k = 2, ..., n \ : \ w_k = 0$; $W_k = ...$ $\blacksquare$

(2) Prop.: $\chi_{\mathcal{B}(n)}(x) = (x-1)^n$; $w_k = (-1)^k \binom{n}{k}$; $W_k = \binom{n}{k}$; $\mu(\mathfrak{P}(n)) = (-1)^n$ $\blacksquare$

(3) Prop.: $\chi_{\mathcal{L}(n,q)}(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x - q^i)$; $w_k = (-1)^k\, q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q$; $W_k = \binom{n}{k}_q$;
$\mu_{\mathcal{L}(n,q)}(0^n, \mathcal{L}(n,q)) = (-1)^n q \binom{n}{2}$ ▮

(4) Prop.: $\chi_{\mathsf{P}(n)}(x) = [x-1]_{n-1}$; $w_k = s_{n,n-k}$; $W_k = S_{n,n-k}$; $\mu_{\mathsf{P}(n)}(\underline{0}, \underline{1}) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ ▮

D47d.07 Si dice **successione regolare di posets** una successione $\mathbf{L} = \langle n = 0,1,2,... :| L_n \rangle$ di posets ciascuno dotato di zero, di unità e di funzione rango rnk_n tale che per ogni n sia $\text{rnk}_n(L_n) = n$ e tale che per tutti gli interi k ed n, tutti gli intervalli di L_n di corango k siano isomorfi a L_k.

Se scriviamo $w_{n,k} := w_k(L_n)$, $W_{n,k} := (L_n)$ e poniamo $w_{0,0} := W_{0,0} := 1$ e $w_{n,k} = W_{n,k} = 0$ per $n < k$, possiamo considerare le matrici-NN triangolari $[w_{n,n-k}]$ e $[W_{n,n-k}]$; esse sono dette **matrici numeriche della successione di posets $\mathbf{L}$**.

D47d.08 **Prop.** Le due matrici numeriche di una successione regolare sono mutuamente inverse:

$$\forall n, s \in \mathbb{N} \; : \; \sum_{k \geq 0} W_{n,n-k} \cdot w_{k,k-s} \; = \; \sum_{k \geq 0} w_{n,n-k} \cdot W_{k,k-s} \; = \; \delta_{n,s} \blacksquare$$

D47d.09 **Coroll.:**

$$\forall n \in \mathbb{N} \; : \; \chi_{L_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} w_{n,n-k} \cdot x^k \; , \;\; x^n = \sum_{k=0}^{n} W_{n,n-k} \cdot \chi_{L_k}(x) \blacksquare$$

D47 e. calcolo di funzioni di Moebius

D47e.01 Intendiamo ora sviluppare metodi di una certa generalità per il calcolo delle funzioni di Moebius considerando coppie di posets $\mathsf{P} = \langle P, \preceq\rangle$ ed $\mathcal{L} = \langle L, \sqsubseteq\rangle$ che siano collegati da una funzione che rispetta gli ordinamenti e cercando qualche utile relazione tra le rispettive funzioni di Moebius μ_{P} e $\mu_{\mathcal{L}}$.
Quando una delle funzioni di Moebius, prendiamo la μ_{P}, è conosciuta, si cerca di calcolare la funzione sconosciuta $\mu_{\mathcal{L}}$ per mezzo della precedente e di qualche funzione di collegamento di P ed $\mathcal{L}$.
Per esempio studieremo un reticolo geometrico finito $\mathcal{L}$, l'algebra booleana dei sottoinsiemi di $\mathcal{L}$ $\mathsf{P} = \mathfrak{P}(S)$, con $S = \mathfrak{P}(L)$, e l'operatore chiusura $A \in \lceil P \longmapsto \bar{A} \in L \rceil$ come funzione di collegamento: in questo caso è conosciuta μ_{P} e si vuole ricavare $\mu_{\mathcal{L}}$

D47e.02 Preliminarmente generalizziamo la nozione di operatore chiusura dalle algebre booleane a posets arbitrari che denotiamo con $\mathsf{P} = \langle P, \preceq\rangle$.

Ricordiamo che una endofunzione $H \in \lceil P \longmapsto P \rceil$ viene chiamata **funzione di chiusura sul poset** P sse:
(a) $\forall x \in P \;:\; x \preceq H(x)$ (ampliamento)
(b) $\forall x, y \in P \;:\; x \preceq y \Longrightarrow H(x) \preceq H(y)$ (monotonia)
(c) $\forall x \in P \;:\; H(H(x)) = H(x)$ (idempotenza).

Chiameremo **elemento di poset chiuso** per la chiusura H un elemento a sse $H(a) = a$. L'insieme $Q := H(P)$ degli elementi chiusi è chiamato **quoziente del poset** P **indotto dalla chiusura** H e si scrive P/H .

D47e.03 **Prop.** Sia P un reticolo. Ogni quoziente Q di P è un reticolo completo e l'operazione infimo in Q coincide con l'infimo in P.

D47e.04 **Teorema** (**teorema di Rota 19??**)
Sia P un poset localmente finito, H una chiusura su P con quoziente $\mathcal{Q} := \mathsf{P}/H$.

$$\forall x, y \in P \;:\; \sum_{z \in P \,\mid\, H(z) = H(y)} \mu_{\mathsf{P}}(x, z) \;=\; \begin{cases} \mu_{\mathcal{Q}}(H(x), H(y)) & \text{sse } x = H(x) \\ 0 & \text{sse } x \prec H(x) \end{cases} .$$

D47e.05 **Prop.** Sia S un insieme di n elementi, H una chiusura su $\mathfrak{P}(S)$ con $H(\emptyset) = \emptyset$, $Q := \mathfrak{P}(S)/H$ ed r_k denoti il numero di k-sottoinsiemi A di S tali che $H(A) = S$. Allora

$$\sum_{k=0,\ldots,n} (-1)^k r_k \;=\; \mu_Q(\emptyset, S) \;.$$

Come esempio si consideri un reticolo finito P, di estremi $\underline{0}$ e $\underline{1}$, e l'insieme $S := P \setminus \{\underline{0}\}$. La funzione

$$H = \lceil \emptyset \mapsto \emptyset \rceil \;\dot{\cup}\; \lceil A \in \mathfrak{P}_{ne}(S) \;\mapsto\; \{a \in S \mid a \preceq \sup(A)\} \rceil$$

è una chiusura su $\mathfrak{P}(S)$ con quoziente $\mathcal{B}(S)/H \cong \mathsf{P}$. Quindi si ottiene:

$$\mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, \underline{1}) \;=\; \sum_{k \geq 0} (-1)^k\, r_k \;,$$

dove $r_k \;:=\; |\{A \subseteq P - \{0\} \mid |A| = k \;\wedge\; \sup(A) = \underline{1}\}|$.

D47e.06 **Prop.** Sia P un poset finito di estremi $\underline{0}$ e $\underline{1}$, e sia H una chiusura su P con quoziente $Q := P/H$. Allora:

$$|\{z \in P \mid H(z) = \underline{1}\}| \;=\; \sum_{x \in P} |[\underline{0}, x]| \cdot \mu_{\mathcal{Q}}(x, \underline{1}) \;.$$

D47e.07 **Prop.** Sia S un insieme finito, H una chiusura su $\mathfrak{P}(S)$ con $H(\emptyset) = \emptyset$ e $Q := \mathcal{B}(S)/H$ il relativo quoziente. Se r_k denota il numero di k-sottoinsiemi A di S tali che $H(A) = S$, si ha:

$$\sum_{k \geq 0} r_k = \sum_{A \subseteq S} 2^{|A|} \, \mu_{\mathcal{Q}}(A, S) \ .$$

D47e.08 **Prop.** Sia P un reticolo finito di estremi $\underline{0}$ e $\underline{1}$. Se $\underline{0}$ non è l'infimo di suoi coatomi o se $\underline{1}$ non è il supremo di suoi atomi, allora:

$$\mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, \underline{1}) = 0 \ \ .$$

D47e.09 **Prop.** (**teorema di Crapo**) Sia P un reticolo finito di estremi $\underline{0}$ e $\underline{1}$. Per ogni $a \in P$ denotiamo con $a^{\perp}$ l'insieme dei complementi di a.

$$\forall a \in P \ : \ \mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, \underline{1}) \ = \sum_{w,z \in a^{\perp}} \mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, w) \, \zeta_{\mathsf{P}}(w, z) \, \mu_{\mathsf{P}}(z, \underline{1}) \ \ .$$

Abbiamo ora un buon quadro per le funzioni di Moebius dei reticoli.

D47e.10 **Coroll.**: Sia P un reticolo finito avente come estremi $\underline{0}$ e $\underline{1}$.

(a) P non è complementato $\implies$ $\mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, \underline{1}) = 0$.

(b) P è modulare $\implies$ $\forall a \in P \ : \ \mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, \underline{1}) \ = \ \mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, a) \sum_{z \in a^{\perp}} \mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, z)$.

(c) P è semimodulare $\implies$
per tutti gli elementi modulari $a \in P \ : \ \mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, \underline{1}) \ = \ \mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, a) \sum_{z \in a^{\perp}} \mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, z)$.

(d) P è geometrico $\implies$ $\mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, \underline{1}) \neq 0$ e $\mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, \underline{1}) \begin{cases} > 0 & \text{sse } \operatorname{rnk}(\mathsf{P}) \text{ pari} \\ < 0 & \text{sse } \operatorname{rnk}(\mathsf{P}) \text{ dispari} \end{cases}$.

D47e.11 Consideriamo due posets $\mathsf{P} = \langle P, \preceq \rangle$ e $\mathcal{Q} = \langle Q, \sqsubseteq \rangle$ e conveniamo di usare notazioni della forma x_i per gli elementi di P e notazioni della forma u_j per gli elementi di Q.

Rricordiamo che una coppia $\langle \sigma, \tau \rangle$ di funzioni $\sigma \in \lceil P \longmapsto Q \rceil$ e $\tau \in \lceil Q \longmapsto P \rceil$ costituisce una **connessione di Galois tra due posets** P ed $\mathcal{Q}$ sse

(a) σ e τ sono antitone, ossia $x_1 \preceq x_2 \Longrightarrow \sigma(x_1) \sqsupseteq \sigma(x_2)$ e $u_1 \sqsubseteq u_2 \Longrightarrow \tau(u_1) \succeq \tau(u_2)$
(b) $\forall x \in P \ : \ \tau(\sigma(x) \succeq x$,
(c) $\forall u \in Q \ : \ \sigma(\tau(u) \sqsubseteq u$.

D47e.12 **Lemma**: Per ogni connessione di Galois $\langle \sigma, \tau \rangle$ si ha

$$\sigma \circ \tau \circ \sigma = \sigma \quad \text{e} \quad \tau \circ \sigma \circ \tau = \tau \ .$$

D47e.13 **Prop.** Sia $\langle \sigma, \tau \rangle$ una connessione di Galois tra i posets P e $\mathcal{Q}$.

(a) $\tau \circ_{rl} \sigma$ è funzione di chiusura su P e $\sigma \circ_{rl} \tau$ è funzione di chiusura su $\mathcal{Q}$.
(b) $P/(\tau \circ_{rl} \sigma) = \tau(Q)$, cioè, il quoziente di P relativo a $\tau \circ_{lr} \sigma$ è l'immagine $\tau(Q)$.
(c) $Q/(\sigma \circ_{rl} \tau) = \sigma(P)$ (proposizione duale della (b)).
(d) $P/(\tau \circ_{rl} \sigma)$ e $Q/(\sigma \circ_{rl} \tau)$ sono antiisomorfi rispetto alle applicazioni mutuamente inverse σ e τ.

D47e.14 Una funzione $\sigma \in \lceil P \longmapsto Q \rceil$ è chiamata una **funzione di Galois per due posets** P ed $\mathcal{Q}$ sse esiste una funzione $\sigma^{+} \in \lceil Q \longmapsto P \rceil$ tale che

(a) σ e σ^+ sono monotone;
(b) $\forall x \in P \;:\; \sigma^+(\sigma(x)) \succeq x$;
(c) $\forall u \in Q \;:\; \sigma(\sigma^+(u)) \sqsubseteq u$.

D47e.15 **Coroll.**: Sia $\sigma \in \lceil P \longmapsto Q \rceil$ una funzione di Galois. Allora
(a) $\sigma^+ \circ_{rl} \sigma$ è una chiusura su P e $\sigma \circ_{rl} \sigma^+$ è una chiusura su $\mathcal{Q}$;
(b) $\mathsf{P}/(\sigma^+ \circ_{rl} \sigma) = \sigma^+(Q)$ e $\mathcal{Q}/(\sigma \circ_{rl} \sigma^+) = \sigma(P)$.
(c) $\mathsf{P}/(\sigma^+ \circ_{rl} \sigma) \;\cong\; \mathcal{Q}/(\sigma \circ_{rl} \sigma^+)$.

D47e.16 **Teorema** (**teorema di Rota**)
Sia $\langle\sigma,\tau\rangle$ una connessione di Galois tra i posets P e $\mathcal{Q}$ localmente finiti, e sia $R := \mathsf{P}/(\tau \circ_{rl} \sigma)$.

$$\forall x \in P, v \in Q \;:\; \sum_{z\in P \;\vert\!\vert\; \sigma(z)=v} \mu_{\mathsf{P}}(x,z) \;=\; \sum_{u\in Q \;\vert\!\vert\; \tau(u)=x} \mu_Q(v,u) = \mu_R(x,\tau(v)).$$

D47e.17 **Prop.** Sia $\sigma \in \lceil P \longmapsto Q \rceil$ una funzione di Galois.

$$\forall x \in P, v \in Q \;:\; \sum_{z\in P \;\vert\!\vert\; \sigma(z)=v} \mu_{\mathsf{P}}(x,z) \;=\; \sum_{u\in Q \;\vert\!\vert\; \sigma^+(u)=x} \mu_Q(u,v) \;=\; \mu_R(x,\sigma^+(v)).$$

Consideriamo un reticolo finito $\mathcal{L} = \langle L, ...\rangle$ avente come estremi $\underline{0}$ e $\underline{1}$.
Un suo sottoinsieme M è chiamato suo **taglio-cancellato inferiore del reticolo** sse $\underline{0} \notin M$ e $M \prec u$ per ogni $u \notin M \dot{\cup} \underline{0}$.
Dualmente-UD un sottoinsieme N di L è chiamato un **taglio-cancellato superiore del reticolo** sse $\underline{1} \notin N$ e $v \prec N$ per ogni $v \notin M \dot{\cup} \underline{1}$.
Un sottoinsieme M è chiamato **taglio-cancellato** di L sse $\underline{0}, \underline{1} \notin M$ e per ogni $u \notin M$ più precisamente se $u \prec M$ o $M \prec u$, ogni catena massimale contiene il minimo elemento di M.

D47e.18 **Teorema** (**primo teorema del taglio-cancellato di Rota**)
Sia $\mathcal{L}$ un reticolo finito avente come estremi $\underline{0}$ ed $\underline{1}$, M un suo taglio (-cancellato inferiore (superiore) ed r_k il numero di k-sottoinsiemi $A \subseteq M$ tali che $\sup(A) = \underline{1}$ ($\inf(A) = \underline{0}$). Allora

$$\mu_L(\underline{0},\underline{1}) \;=\; \sum_{k\geq 0} (-1)^k r_k.$$

Chiaramente ogni taglio-cancellato inferiore contiene l'insieme **Atom**($\mathcal{L}$) degli atomi di $\mathcal{L}$ e, dualmente-UD, ogni taglio-cancellato superiore contiene l'insieme **Coatom**($\mathcal{L}$) dei coatomi.

D47e.19 **Prop.** Sia $\mathcal{L}$ un reticolo finito con A insieme dei suoi atomi e C dei dei suoi coatomi.
Se r_k denota il numero dei k-sottoinsiemi A di S tali che $\sup(A) = \underline{1}$ oppure il numero degli insiemi$k$ $A \subseteq C$ tali che $\inf(A) = \underline{0}$; allora:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\underline{0},\underline{1}) \;=\; \sum_{k\geq 0} (-1)^k\, r_k \;.$$

D47e.20 **Prop.** Sia $\mathcal{L}$ un reticolo finito, $M \subseteq L$ e r_k il numero degli insiemi-k $A \subseteq M$ con $\inf(A) = \underline{0}$ e $\sup(A) = \underline{1}$. Allora

$$\sum_{k\geq 0} (-1)^k\, r_k \;=\; \sum_{u,v\in L \;\vert\!\vert\; [u,v]\cap M=\emptyset} \mu_L(\underline{0},u)\, \zeta_{\mathcal{L}}(u,v)\, \mu_{\mathcal{L}}(v,\underline{0}) - \mu(\underline{0},\underline{1}) \;.$$

D47e.21 Teorema (secondo teorema del taglio-cancellato di Rota)
Sia $\mathcal{L}$ un reticolo finito, M un taglio-cancellato di L e r_k il numero di insiemi-k $A \subseteq M$ tali che $\inf(A) = \underline{0}$ e $\sup(A) = \underline{1}$. Allora

$$\mu_{\mathcal{L}}(\underline{0}, \underline{1}) \;=\; \sum_{k \geq 0} (-1)^k \, r_k \; .$$

D47 f. polinomio caratteristico

D47f.01 Ricordiamo che si dice **poset che soddisfa la condizione catenaria-JD** un poset tale che ...

Consideriamo dunque un poset P che soddisfi la condizione catenaria-JD, un campo $\mathtt{K}$ di caratteristica 0 e l'algebra $\mathbf{Aoi}_{K[x]}(\mathsf{P})$ sull'anello dei polinomi $K[x]$. Sia $\rho \in \mathbb{A}\ (\mathsf{P})$ la funzione lunghezza di intervallo, data da $\rho_{\mathsf{P}}(a,b) := [a,b]^{\vdash\dashv}$ per $a \preceq b \in P$, e definiamo il polinomio $\overline{\rho}_{\mathsf{P}} \in \mathbf{Aoi}(\mathsf{P})$ come

$$\overline{\rho}_{\mathsf{P}}(a,b) := x^{\rho_{\mathsf{P}}(a,b)},$$

Chiaramente

$$\forall a \preceq b \preceq c \in P \;\colon\; \overline{\rho}_{\mathsf{P}}(a,c) = \overline{\rho}_{\mathsf{P}}(a,b) \cdot \overline{\rho}_{\mathsf{P}}(b,c) \;.$$

D47f.02 Per un poset P che soddisfa la condizione catenaria-JD si definisce come **funzione caratteristica del poset**:

$$\mathrm{char}_{\mathsf{P}}(x) := \mu_{\mathsf{P}} * \overline{\rho}_{\mathsf{P}} \in \mathbf{Aoi}_{K[x]}(\mathsf{P}).$$

Per questa definizione e per quella del polinomio caratteristico

$$\chi_{\mathsf{P}}(x) := \sum_{a \in P} \mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, a) \cdot x^{\mathrm{rnk}(\underline{1}) - \mathrm{rnk}(a)}$$

vediamo che per un poset finito dotato di estremi $\underline{0}$ ed $\underline{1}$ e di funzione rango, si ha:

$$\mathrm{char}_{\mathsf{P}}(x) = \chi_{\mathsf{P}}(x),$$

D47f.03 **Teorema** Sia P un poset finito dotato di estremi $\underline{0}$ e $\underline{1}$ e di funzione rango rnk. Se si ha una fattorizzazione $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$, allora

$$\chi_{\mathsf{P}}(x) = \chi_{\mathsf{P}_1}(x) \cdot \chi_{\mathsf{P}_2}(x) \;.$$

Come esempio consideriamo $\mathsf{P} := \prod_{i=1}^{t} \mathcal{C}(k_i)$. Abbiamo

$$\chi_{\mathsf{P}}(x) = \prod_{i=1}^{t} \chi_{\mathcal{C}(k_i)}(x) = \prod_{i=1}^{t} (x^{k_i} - x^{k_i - 1}) = x^{\mathrm{rnk}(P) - t}\,(x-1)^t \;.$$

Di conseguenza

$$\chi_{\mathfrak{P}(n)}(x) = (x-1)^n \;.$$

D47f.04 **Teorema (teorema di Stanley 19??)**
Sia P un reticolo finito con la funzione rango rnk e sia $a \in P$ un suo elemento modulare. Allora

$$\chi_{\mathsf{P}}(x) = \chi_{[\underline{0},a]}(x) \cdot \sum_{z \in P \;\urcorner\!\!\urcorner\; z \wedge a = \underline{0}} \mu_{\mathsf{P}}(\underline{0}, z) \cdot x^{\mathrm{rnk}(\underline{1}) - \mathrm{rnk}(a) - \mathrm{rnk}(z)}.$$

D47 g. algebra di Moebius-Rota

D47g.01 Sia P un poset localmente finito con minimo $\underline{0}$ e sia K un campo di caratteristica 0. Riguardiamo P come una base di uno spazio vettoriale $\mathsf{Vect}(P)$ su K, definendo $\mathsf{Vect}(P)$ come l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite di elementi di P con coefficienti in K munito dell'addizione sulle coordinate e della moltiplicazione 9scalare) per elementi di K.

Per distinguere meglio tra P le basi di $\mathsf{Vect}(P)$, denotiamo con ϵ_p gli elementi della base di $\mathsf{Vect}(P)$ corrispondenti ai diversi $p \in P$. Quindi lo spazio $\mathsf{Vect}(P)$ è l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi ϵ_P

$$\mathsf{Vect}(P) = \left\{ F \in \mathfrak{P}_F(P), \langle p \in F :| \, a_p \rangle \in \mathsf{Seq}_K \,\vdots\, \sum_{p \in F} a_p \, \epsilon_p \right\} .$$

$\mathsf{Vect}(P)$ è chiamato lo **spazio dei vettori liberi sul campo** K generato da P.
Per ogni $p \in P$ definiamo l'elemento di $\mathsf{Vect}(P)$

$$\iota_p \ := \ \sum_{q \preceq p} \epsilon_q .$$

D47g.02 Prop. Sia μ_P la fdM del poset P. Vale l'uguaglianza

$$\epsilon_\mathsf{P} \ = \ \sum_{q \in P} \mu_\mathsf{P}(q,p) \, \iota_q \ .$$

Si trova inoltre che gli ι_p sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathsf{Vect}(P)$.

D47g.03 Supponiamo che P sia un reticolo finito. Per $p \in P$ definiamo l'elemento di $\mathsf{Vect}(P)$

$$\kappa_p \ := \ \sum_{q \in P \;\S\; q \vee p = \underline{1}} \epsilon_q .$$

D47g.04 Consideriamo un reticolo finito P e un $p \in P$.

(1) Prop.: $\kappa_p \ = \ \sum_{q \in P \;\S\; q \succeq p} \mu_\mathsf{P}(q, \underline{1}) \, \iota_q$.

(2) Prop.: $\mu_\mathsf{P}(p, \underline{1}) \, \iota_p \ = \ \sum_{q \in P \;\S\; q \succeq p} \mu_\mathsf{P}(p,q) \, \kappa_q$.

(3) Prop.: $\forall p \in P \ : \ \mu_\mathsf{P}(p, \underline{1}) \neq 0 \ \Longrightarrow \ \forall p \in P : \{p \in P :| \, \kappa_p\}$ è una base di $\mathsf{Vect}(P)$ con $\epsilon_p \ = \ \sum_{t \in P} \nu(p,t) \, \kappa + t(p \in P)$ dove $\nu(p,t) \ := \ \sum_{q \in P \;\S\; q \preceq p \wedge t} \mu_\mathsf{P}(q,p) \, \mu_\mathsf{P}(q,t) / \mu_\mathsf{P}(q, \underline{1})$.

D47g.05 Dal fatto che $\{p \in P :| \, \kappa_p\}$ è una base, si deducono due interessanti risultati sul numero di livelli di un reticolo geometrico.

Prop. (**teorema di Dowling-Wilson 19??**) Sia P un reticolo finito tale che $\forall p \in P : \mu(p, \underline{1}) \neq 0$. Allora esiste una permutazione $\phi \in \lceil P \twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow P \rceil$ tale che

$$\forall p \in P : \ p \vee \phi(p) = \underline{1} \ .$$

D47g.06 Teorema (**teorema di Dowling-Wilson 19??**)

Sia P un reticolo geometrico finito di rango n e sia $\langle k = 0, ..., n :| W_k\}$ la sequenza dei suoi numeri di livello di P .

$$\forall k = 0, ..., n \ \colon \ W_0 + W_1 + ... + W_k \preceq W_n + W_{n-1} + ... + W_{n-k}.$$

D47g.07 Diamo ora una importante definizione dovuta a Solomon. Sia P un poset localmente finito con minimo $\underline{0}$ e sia **Vect**(P) il relativo spazio dei vettori liberi su un campo $\mathtt{K}$ di caratteristica 0.
Si dice **algebra di Moebius del poset** P e si denota con $\mathbf{Moeb}_{\mathsf{K}}(\mathsf{P})$, lo spazio vettoriale **Vect**(P) su $\mathtt{K}$ munito del prodotto definito sulle coordinate come segue:

$$\text{se} \ \ \alpha = \sum_{p \in P} a_p \, \epsilon_p \ \ \text{e} \ \ \beta = \sum_{p \in P} b_p \, \epsilon_p, \quad \text{allora} \quad \alpha \odot \beta \ := \ \sum_{p \in P} (a_p \, b_p) \cdot \epsilon_p.$$

D47g.08 Un importante risultato è fornito dall'enunciato che segue.

Teorema (**teorema di Green**) Sia P un poset finito con massimo $\underline{1}$ e sia a un suo elemento per il quale esiste il massimale $a \vee p$ per ogni $p \in P$. In $\mathbf{Moeb}_K(P)$ vale la seguente identità:

$$\sum_{p \in P} \mu(p, \underline{1}) \ = \ \sum_{q \in P \ \rrbracket \ q \succeq a} \mu_{\mathsf{P}}(q, \underline{1}) q \ \ \odot \ \ \sum_{r \in P \ \rrbracket \ r \vee a = \underline{1}} \mu_{\mathsf{P}}(r, \underline{1}) r \ .$$

D47 h. anello di valutazione

D47h.01 Ci proponiamo ora di generalizzare il principio di inclusione ed esclusione concernente l'algebra booleana ad una proprietà che riguarda un arbitrario reticolo distributivo.

Introduciamo inoltre una nozione di valutazione da applicare agli elementi di un reticolo distributivo e con valori nel terreno di una nuova struttura algebrica chiamata anello di valutazione.

Consideriamo un reticolo $\mathsf{P} = \langle P, \wedge, \vee \rangle$ e un gruppo abeliano $\boldsymbol{G} = \langle G, \dot{+}, -, \mathbf{0} \rangle$.
Una funzione $w \in \lceil P \longmapsto G \rceil$ è chiamata **valutazione del reticolo** P mediante il gruppo $\boldsymbol{G}$ sse

$$\forall a, b \in P \;\; : \;\; w(a \wedge b) \dot{+} w(a \vee b) = w(a) \dot{+} w(b).$$

D47h.02 Denotiamo con $\mathcal{M}(P)$ il sottospazio di $\mathsf{Vect}(P)$ generato da tutti gli elementi in $\mathsf{Vect}(P)$ della forma $a \wedge b \dot{+} a \vee b - a - b$.

Lo spazio vettoriale $\mathcal{W}(P) := \mathsf{Vect}(P)/\mathcal{M}(P)$ è chiamato **modulo di valutazione del poset** P fornito dal gruppo abeliano $\langle G, \dot{+} \rangle$.

D47h.03 Prop. In relazione al reticolo P e al gruppo abeliano $\boldsymbol{B}$ definiamo l'iniezione canonica $i \in lyP \longmapsto \mathcal{W}(P) \rceil$ data da $i(P) := P + \mathcal{M}(P)$.
Essa è una valutazione di P in $\mathcal{W}(P)$.

D47h.04 Prop. Se P è un reticolo distributivo localmente finito dotato di minimo $\underline{0}$, allora $\mathcal{M}(P)$ è un ideale di $\mathbf{Moeb}(\mathsf{P})$.

D47h.05 Nelle suddette circostanze $\mathcal{W}(P) = \mathbf{Moeb}(P)/\mathcal{M}(P)$ viene chiamato **anello di valutazione del poset** P.

D47h.06 Prop. (**teorema di Rota 19??**) Sia P un reticolo distributivo localmente finito dotato di minimo $\underline{0}$ e consideriamo $p_1, ..., p_t \in P$. In $\mathcal{W}(P)$ abbiamo

$$\bigvee_{i=1}^{t} p_i \;=\; \sum_{i=1}^{t} p_i - \sum_{j=i+1}^{t} (p_i \wedge p_j) + \cdots + (-1)^{t-1}(p_1 \wedge \cdots \wedge p_t) \;.$$

Equivalentemente, per $q \geq \bigvee_{i=1}^{t} p_i$ otteniamo in $W(P)$

$$\prod_{i=1}^{t} (q - p_i) \;=\; q - \bigvee_{i=1}^{t} p_i \;.$$

D47h.07 Il teorema seguente dà una completa descrizione di tutte le valutazioni di un reticolo distributivo.

Teorema teorema di Davis-Rota 19??)
Sia $\mathcal{L} = \langle L, ... \rangle$ un reticolo distributivo localmente finito dotato di minimo $\underline{0}$ e sia $P(L)$ il poset dei suoi elementi irriducibili, incluso $\underline{0}$.

(a) $\mathcal{W}(L) \cong \mathbf{Moeb}(P(L))$ in seguito all'isomorfismo

$$\phi := \left\lceil p \in P \not\mapsto p + \mathcal{M} \right\rceil \in \left\lceil \mathbf{Moeb}(P(L)) \longmapsto \mathcal{W}(L) \right\rceil \;.$$

(b) In $\mathcal{W}(L)$, ovvero nel modulo $M(L)$:

(b$_1$) $\{p \in P(L) :| \epsilon_p\}$ è una base ortogonale di idempotenti ;

(b$_2$) $\forall q \in L \ \vdots \ q \ = \sum_{p \in P(L) \; ⁆ \; p \preceq q} \epsilon_p$;

(b$_3$) $\forall p \in P(L) \ \vdots \ \epsilon_p \ = \sum_{r \in P(L)} \mu_{P(L)}(r,p)\, r$;

(b$_4$) $\forall q \in L \ \vdots \ q \ = \sum_{r,p \in P(L) \; ⁆ \; p \preceq q} \mu_{P(L)}(r,p)\, r.$

D47h.08 Vogliamo esprimere la caratteristica di un reticolo distributivo localmente finito L dotato di minimo $\underline{0}$ usando la fdM del poset dei suoi elementi irriducibili.

Prop. (**teorema di Rota 19??**) Sia $\mathcal{L}$ un reticolo distributivo localmente finito dotato di minimo $\underline{0}$ e $\mathsf{P}(L)$ il poset degli elementi irriducibili di $\mathcal{L}$. La caratteristica $\chi_{\mathcal{L}}$ di $\mathcal{L}$ è data da

$$\chi_{\mathcal{L}}(0) \ = \ 0$$
$$\chi_{\mathcal{L}}(a) \ = \ -\sum_{p \in P(L), 0 \neq p \preceq a} \mu_{\mathsf{P}(L)}(0,p) \qquad (\text{ con } 0 \neq a \in L) \ \cdot$$

D47h.09 **Prop.** Sia $\mathcal{L}$ un reticolo distributivo localmente finito e dotato di minimo $\underline{0}$ e sia $P(L)$ il poset degli elementi irriducibili di L, incluso $\underline{0}$. Per $a \in L$ poniamo $J(a) := \{p \in P(L) \; ⁆ \; p \preceq a\}$ e definiamo il poset $J'(a) := J(a) \cup \{\hat{a}\}$ dall'insieme dei $p \preceq \hat{a}$ per ogni $p \in J(a)$. Allora otteniamo

$$\forall a \in L \ \vdots \ \chi(a) \ = \ \mu_{J'(a)}(0,\hat{a}) + 1 \ .$$

D47h.10 Possiamo ora ottenere dalla fdM una utile espressione per la caratteristica.

Coroll.: Sia $\mathcal{L}$ un reticolo distributivo localmente finito dotato di minimo $\underline{0}$ e sia $a \in L$.

(a) Se r_k denota il numero totale delle sequenze $\langle p_1, ..., p_k \rangle$ di elementi di $P(L)$ tali che $0 \prec p_1 \prec p_2 \cdots \prec p_k \preceq a$, allora

$$\chi_L(a) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} r_k \ .$$

(b) Sia $P(a)$ denota l'insieme degli elementi massimali irriducibili m tali che $m \preceq a$ ed s_k denoti il numero

degli insiemi $\{q_1, ..., q_k\} \subseteq P(a)$ con $\bigwedge_{i=1}^k q_i = \underline{0}$. Allora

$$\chi_{\mathcal{L}}(a) \ = \ \sum_{k \preceq 1} (-1)^k \, s_k + 1 \ .$$