Capitolo D47:
Inversione di Möbius-Rota

Contenuti delle sezioni

D47:0.01 In questo capitolo vengono presentate le basi di una delle teorie combinatorie più efficaci ed eleganti, nata con la pubblicazione da parte di G.-C. Rota di un lavoro che ha contribuito, forse più di ogni altro, a dare impulso allo sviluppo della moderna teoria combinatoria [Rota 1964].
In questo lavoro viene data una ampia generalizzazione del principio di inclusione ed esclusione, cioè di quello che fino agli anni '60 era stato uno degli strumenti più efficaci per risolvere i problemi enumerativi.
Questo principio fornisce una formula di inversione semplice da enunciare ma spesso tutt'altro che facile da applicare. Con il lavoro di Rota esso può essere riferito al reticolo booleano e riceve un sostanziale chiarimento. In generale risulta chiaro come la soluzione di una grande varietà di problemi enumerativi si possa ricondurre alla inversione di certe sommatorie di oggetti associati ai nodi di un insieme ordinato.

D47:0.02 Questa inversione generalizza, non solo il principio di inclusione ed esclusione, ma anche la classica inversione introdotta da Möbius nella teoria dei numeri relativamente alla divisibilità fra interi e l'inversione di matrici triangolari viste come funzioni del quadrato cartesiano di quel particolare insieme ordinato che è $\mathbb{N}$. Da questo punto di vista il metodo di inversione di Rota generalizza il calcolo alle differenze finite, cioè l'analogo discreto del metodo della quadratura per la soluzione di problemi differenziali.

D47:a. Algebra di incidenza

D47:a.01 Sia $\mathcal{P} = \langle P, \preceq\rangle$ un poset localmente finito e K un campo di caratteristica 0, ad esempio il campo dei numeri reali o dei complessi. Le funzioni del genere $\{p \times P \longmapsto K\}$ le chiameremo anche funzioni -PPf Consideriamo il seguente insieme di funzioni bivariate

$$A_K(\mathcal{P}) := \{f : P \times P \to K \;\P\; x \not\preceq y \Longrightarrow f(x,y) = 0\}.$$

Tali funzioni le chiameremo **funzioni -PPf a scalino sul poset** o, più concisamente **funzione -PPfS**.

Definendo come al solito la somma di due funzioni $f, g \in A_K(P)$ e il prodotto della f per lo scalare $r \in K$:

$$(f+g)(x,y) := f(x,y) + g(x,y) \qquad (r \cdot f)(x,y) := r \cdot f(x,y),$$

si arriva allo spazio vettoriale su K $\mathcal{A}_K(\mathcal{P})$ Il vettore zero di questo spazio, $\vec{0}_{P\times P}$, nel seguito si denoterà anche concisamente con $\vec{0}$.

D47:a.02 Presentiamo subito alcune funzioni -PPS del suddetto insieme che si rivelano di grande utilità per vari problemi enumerativi.

$$\delta_{\mathcal{P}}(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{sse } x = y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \textit{funzione } -PPfS \textit{ delta di Krönecker}$$

$$\zeta_{\mathcal{P}}(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{sse } x \preceq y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \textit{funzione } -PPfS \textit{ zeta di Riemann}$$

$$\eta_{\mathcal{P}}(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{sse } x \prec y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \textit{funzione } -PPfS \textit{ catena}$$

$$\kappa_{\mathcal{P}}(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{sse } x \cdot y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \textit{funzione } -PPfS \textit{ copertura}$$

$$\lambda_{\mathcal{P}}(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{sse } x \preceq_I y \text{ o } x \cdot y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \textit{funzione } -PPfS \textit{ lambda}$$

D47:a.03 Osserviamo che $\zeta_{\mathcal{P}} = \delta_{\mathcal{P}} + \eta_{\mathcal{P}}$ e che $\lambda_{\mathcal{P}} = \delta_{\mathcal{P}} + \kappa_{\mathcal{P}}$.
Si nota poi che la funzione di Riemann è la funzione indicatrice della relazione $\preceq$ e le rimanenti si possono considerare funzioni indicatrici associate ad essa. Quindi queste funzioni e quelle costruite su di esse non cambiano passando a un poset isomorfo a $\mathcal{P}$.

D47:a.04 Prop. Tutte le precedenti funzioni -PPS , passando dal poset $\mathcal{P}$ al suo duale $\mathcal{P}^\star$, assumono i valori relativi allo scambio dei due argomenti:

$$\forall\ char'130 = \delta, \zeta, \eta, \kappa, \lambda\ \wedge\ x, y \in P : \quad char'130_{\mathcal{P}^\star}(x,y) = char'130_{\mathcal{P}}(y,x)$$

D47:a.05 Prop. Tutte le precedenti funzioni -PPS, passando dal poset $\mathcal{P}$ ad un suo intevallo vengono semplicemente ristrette:

$$\forall\ char'130 = \delta, \zeta, \eta, \kappa, \lambda\ \wedge\ a \preceq x \preceq y \preceq b \in P : \quad char'130_{[a,b]}(x,y) = char'130_{\mathcal{P}}(y,x)$$

D47:a.06 Prop. Consideriamo i due posets $\mathcal{P} = \langle P, \preceq \rangle$ e $\mathcal{Q} = \langle Q, \sqsubseteq \rangle$ ed il loro prodotto diretto $\mathcal{R} := \mathcal{P} \times \mathcal{Q} = \langle P \times Q, \preceq \times \sqsubseteq \rangle$.

$$\forall\ char'130 = \delta, \zeta, \eta, \kappa, \lambda\ \wedge\ char'130_{\mathcal{R}}(\langle x, u\rangle, \langle y, v\rangle) = char'130_{\mathcal{P}}(x,y) \cdot char'130_{\mathcal{Q}}(u,v),$$

D47:a.07 Definiamo il **prodotto di convoluzione** o, semplicemente, la **convoluzione** di f e $g \in A_K(\mathcal{P})$ come:

$$(f * g)(x,y) := \sum_{x \preceq \dot{z} \preceq y} f(x,z) \cdot g(z,y),$$

Dato che ogni intervallo di $\mathcal{P}$ è finito, la precedente somma è finita e il secondo membro dalla precedente relazione fornisce sempre un valore per il primo membro.
Osserviamo anche che la precedente somma si può considerare estesa a tutte le x, y-catene -cr di lunghezza 2, cioè a tutte le catene con ripetizioni con nodo iniziale x e nodo finale y di lunghezza 2.

D47:a.08 Si constata facilmente che la funzione $\delta_{\mathcal{P}}$ è unità a sinistra e a destra per la convoluzione e che questo prodotto è distributivo a sinistra e a destra rispetto alla combinazione lineare di funzioni, cioè:

$(r_1 \cdot f_1 + r_2 \cdot f_2) * g = (r_1 \cdot f_1) * g + (r_2 \cdot f_2) * g = r_1 \cdot f_1 * g + r_2 \cdot f_2 * g$
$f * (s_1 \cdot g_1 + s_2 \cdot g_2) = f * (s_1 \cdot g_1) + f * (s_2 \cdot g_2) = f * s_1 \cdot g_1 * g + f * s_2 \cdot g_2$

Si verifica anche che la convoluzione è una operazione associativa, cioè:

$$\forall f, g, h \in A_K : f * (g * h) = (f * g) * h$$

Infatti entrambi i membri, valutati per x e y, portano ad una somma estesa a tutte le x, y-catene–cr di lunghezza 3.

D47:a.09 Per ogni intero positivo k ed ogni $f \in A_K(P)$, operando per induzione su k, si definisce la potenza k-esima f^k e si trova che

$$f^k(x, y) = \sum_{x=\dot{z}_1 \preceq \dots \preceq \dot{z}_k = y} f(x, z_1) f(z_1, z_2) \dots f(z_{k-1}, y),$$

La somma precedente è estesa a tutte le x, y-catene–cr di lunghezza k di $\mathcal{P}$. Si definisce poi $f^0 := \delta\mathcal{P}$.

D47:a.10 Si può quindi concludere con l'enunciato che segue.

Prop. L'insieme $A_K(\mathcal{P})$ munito delle operazioni di addizione, moltiplicazione per uno scalare in K e convoluzione è un'algebra unitale.
Tale algebra è chiamata **algebra di incidenza** del poset $\mathcal{P}$ sul campo K, viene denotata $\mathcal{A}_K(\mathcal{P})$; suoi elementi sono detti **funzioni di incidenza** del poset $\mathcal{P}$ sul campo K.

D47:a.11 Nel caso in cui $\mathcal{P}$ sia $\langle\{1, ..., n\}, \leq\rangle$ le funzioni di incidenza sono matrici triangolari superiori ed il prodotto di convoluzione è l'usuale prodotto di matrici righe per colonne. Questo prodotto può definirsi anche per matrici triangolari superiori di profilo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ed $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e corrisponde risp. al prodotto di convoluzione per l'algebra di incidenza dei posets $\langle\mathbb{N}, \leq\rangle$ e $\langle\mathbb{Z}, \leq\rangle$.

Questo modello matriciale può essere preso in considerazione per ogni poset localmente finito. Infatti per ciascuno di tali posets si può individuare una sequenzializzazione degli elementi; questi quindi possono essere individuati da interi consecutivi. Un poset finito di n elementi può essere immerso in $\langle\{1, ..., n\}, \leq\rangle$, i posets illimitati in $\langle\mathbb{N}, \leq\rangle$, nel duale $\langle\{..., -1, 0\}, \leq\rangle)$ oppure in $\langle\mathbb{Z}, \leq\rangle$. Alle funzioni di incidenza ancora corrispondono matrici triangolari superiori le quali ora tendenzialmente contengono un elevato numero di zeri: ogni casella nulla nella matrice della funzione di Riemann deve essere nulla.

D47:a.12 Le seguenti relazioni sono immediate conseguenze delle definizioni.

$${\zeta_P}^n = \sum_{i=0}^{n} {\eta_P}^i$$
$${\eta_P}^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} {\zeta_P}^i$$
$${\lambda_P}^n = \sum_{i=0}^{n} {\kappa_P}^i$$
$${\kappa_P}^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} {\lambda_P}^i.$$

D47:a.13 Le funzioni di incidenza appena definite danno informazioni circa gli intervalli di un generico poset $\mathcal{P}$.

Prop. $\forall x, y \in P$:
(a) ${\zeta_{\mathcal{P}}}^2(x,y) = |[x,y]|$
(b) $(\kappa_{\mathcal{P}} * \zeta_{\mathcal{P}})(x,y) = \#\{\text{atomi in } [x,y]\}$
(c) $(\zeta_{\mathcal{P}} * \kappa_{\mathcal{P}})(x,y) = \#\{\text{coatomi in } [x,y]\}$

D47:a.14 Prop. $\forall x, y \in P$:
(a) ${\eta_{\mathcal{P}}}^k(x,y) = \#\{x, y - \text{catene di lunghezza } k\}$
(b) ${\kappa_{\mathcal{P}}}^k(x,y) = \#\{x, y - \text{catene massimali di lunghezza } k\}$
(c) ${\zeta_{\mathcal{P}}}^k(x,y) = \#\{x, y - \text{catene con ripetizioni di lunghezza } k\}$
(d) ${\lambda_{\mathcal{P}}}^k(x,y) = \#\{x, y - \text{catene massimali con ripetizioni di lunghezza } k\}$
(e) $\displaystyle\sum_{k=0,1,\ldots} {\eta_{\mathcal{P}}}^k(x,y) = (2\delta_{\mathcal{P}} - \zeta_{\mathcal{P}})^{-1}(x,y) = \#\{x, y - \text{catene}\}$.
(f) $\displaystyle\sum_{k=0,1,\ldots} {\kappa_{\mathcal{P}}}^k(x,y) = (2\delta_{\mathcal{P}} - \lambda_{\mathcal{P}})^{-1}(x,y) = \#\{x, y - \text{catene massimali}\}$.

D47:b. Funzione di Möbius

D47:b.01 Chiamiamo **funzioni aritmetiche** di $\mathcal{P}$ le funzioni $f \in A_K(\mathcal{P})$ t.c. $\forall x \in X \,\dot{:}\, f(x,x) \neq 0$; denotiamo con $Artm_K(\mathcal{P})$ il loro insieme. Sono funzioni aritmetiche $\delta_{\mathcal{P}}$, $\zeta_{\mathcal{P}}$ e $\lambda_{\mathcal{P}}$.

D47:b.02 Prop. Gli elementi $f \in A_K(P)$ che possiedono un unico inverso rispetto alla convoluzione f^{-1} sono tutte e sole le funzioni aritmetiche. I valori di un tale inverso $f^{-1}(x,y)$ per x fissato ed y variabile si ottengono progressivamente con le seguenti espressioni:

$f^{-1}(x,x) = \dfrac{1}{f(x,x)}$,

$\forall y > x : f^{-1}(x,y) = \dfrac{1}{f(y,y)} \left(- \displaystyle\sum_{x \preceq \dot{z} \prec y} f^{-1}(x,z) f(z,y) \right)$.

Infatti dalle precedenti espressioni si ricava facilmente che
$(f^{-1} \star f)(x,x) = (f \star f^{-1})(x,x) = 1$, $x \prec y \implies (f^{-1} \star f)(x,y) = \displaystyle\sum_{x \preceq \dot{u} \prec y} f^{-1}(x,u) f(u,y) + f^{-1}(x,y) f(y,y) = 0$ ▮

D47:b.03 Una $n \in A_K(\mathcal{P})$ si dice **funzione -PPf nilpotente** sse per ogni $x, y \in P$ si trova un intero positivo k t.c. $n^k(x,y) = \vec{0}$.

Prop. Una $n \in A_K(\mathcal{P})$ è nilpotente sse $\forall x \in P :\ n(x,x) = 0$.

Dim.: ... ▮

D47:b.04 Prop. Sia $n \in A_K(\mathcal{P})$ nilpotente; $(\delta_P + n)^{-1} = \sum_{h=0,1,\ldots} (-1)^h n^k$.
Evidentemente $(\delta_P + n)^{-1}$ è una funzione aritmetica. ... ▮

D47:b.05 Dato che la funzione $\zeta_{\mathcal{P}}$ è invertibile, risulta lecito definire un'altra funzione di $A_K(\mathcal{P})$

$$\mu_{\mathcal{P}} := {\zeta_{\mathcal{P}}}^{-1} \qquad \textit{funzione di Möbius}$$

I valori della funzione di Möbius per un x fissato si possono calcolare progressivamente con le seguenti espressioni che particolarizzano quelle per la costruzione del generico elemento inverso:

$\mu_{\mathcal{P}}(x,x) = 1$

$\forall y \succ x: \quad \mu_{\mathcal{P}}(x,y) = -\sum_{x \preceq \dot{z} \prec y} \mu_{\mathcal{P}}(x,z).$

Si trova inoltre $\forall x,y \in P : \mu_{\mathcal{P}}(x,y) = -\sum_{x \prec \dot{z} \preceq y} \mu_{\mathcal{P}}(z,y)$

D47:b.06 Prop. $x \prec_I y \implies \mu_{\mathcal{P}}(x,y) = -1$.

D47:b.07 Prop. $\mu_{\mathcal{P}} = \delta_{\mathcal{P}} - \mu_{\mathcal{P}} * \eta_{\mathcal{P}} = \delta_{\mathcal{P}} - \eta_{\mathcal{P}} * \mu_{\mathcal{P}}$.

D47:b.08 Prop. Passando al poset duale i valori della funzione di Möbius si ottengono scambiando i due argomenti: $\mu_{\mathcal{P}^\partial}(x,y) = \mu_{\mathcal{P}}(y,x)$.

D47:b.09 Prop. Passando da un poset ad un suo intervallo la funzione di Möbius viene semplicemente ridotta: $a \preceq x \preceq y \preceq b \Longrightarrow \mu_{[a,b}(x,y) = \mu_{\mathcal{P}}(x,y)$.

D47:b.10 Prop. Consideriamo i due posets $\mathcal{P} = \langle P, \preceq\rangle$ e $\mathcal{Q} = \langle Q, \sqsubseteq\rangle$ ed il loro prodotto diretto $\mathcal{R} := \mathcal{P} \times \mathcal{Q} = \langle P \times Q, \preceq \times \sqsubseteq\rangle$. $\mu_{\mathcal{R}}(\langle x,u\rangle, \langle y,v\rangle) = \mu_{\mathcal{P}}(x,y) \cdot \mu_{\mathcal{Q}}(u,v)$.

D47:c. Funzioni di incidenza dei posets di base

D47:c.01 Cominciamo con la catena $\mathcal{C}(n) \cong \{0 < 1 < ... < n\}$. Le catene–cr $0 \preceq z_1 \preceq ... \preceq z_n = n$ bicorrispondono alle stringhe monotone $z_1 z_2 ... z_{k-1}$ di lunghezza $k-1$ su $\{0,1,...,n\}$. Le catene senza ripetizioni $0 < z_1 < ... < z_k = n$ bicorrispondono ai $(k-1)$-sottoinsiemi di $\{1,...,n-1\}$; in virtù della relazione $n = z_1 + (z_2 - z_1) + ... + (n - z_{k-1})$, esse bicorrispondono anche alle partizioni ordinate dell'intero n di lunghezza k.

Da queste considerazioni segue:

$\eta_{\mathcal{C}(n)}{}^k(0,n) = \binom{n-1}{k-1}$

$\zeta_{\mathcal{C}(n)}{}^k(0,n) = \binom{(n+1)+(k-1)-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$

$\kappa_{\mathcal{C}(n)}{}^k(0,n) = \delta_{n,k}$

$\lambda_{\mathcal{C}(n)}{}^k(0,n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \kappa_{\mathcal{C}(n)}(0,n) = \binom{k}{n}$.

D47:c.02 Passiamo ora al reticolo booleano $\mathcal{B}(S)$ di un insieme $S \in \mathsf{Set}_n$; Astraendo dal particolare S esso può denotarsi $\mathcal{B}(n)$. Le $\emptyset, S$-catene $\emptyset < A_1 < ... < A_k = S$ bicorrispondono alle partizioni ordinate in k sottoinsiemi di S, $S = A_1 \dot\cup A_2 \setminus A_1 \dot\cup ... \dot\cup S \setminus A_{k-1}$. Ne consegue:

$\eta_{\mathcal{B}(n)}{}^k(\emptyset, S) = k! \cdot S_{n,k}$

$\zeta_{\mathcal{B}(n)}{}^k(\emptyset, S) = \sum_{i=0}^{k} [k]_i \cdot S_{n,i} = k^n$

$\kappa_{\mathcal{B}(n)}{}^k(\emptyset, S) = \delta_{n,k} k!$

$\lambda_{\mathcal{B}(n)}{}^k(\emptyset, S) = \sum_{i=0}^{k} [k]_i \cdot \delta_{n,i} = [k]_n$

D47:c.03 Calcoliamo ora le funzione di Möbius per alcuni reticoli basilari.

$\mu_{\mathcal{C}(n)}(0,0) = 1, \qquad \mu_{\mathcal{C}(n)}(0,1) = -1, \qquad \forall k = 2,3,... : \ \mu_{\mathcal{C}(n)}(0,k) = 0.$

$$\mu_{\mathcal{C}(n)^t}\left(0^t, \langle k_1, ..., k_t\rangle\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } k_1 = k_2 = ... = k_t = 0 \\ (-1)^s & \text{se } s \text{ dei } k_i \text{ sono 1 ed i restanti 0} \\ 0 & \text{se } k_i \geq 2 \text{ per almenoun } i. \end{cases}$$

Quindi, per il reticolo delle divisibilità $\mathcal{D}$, se $l, m \in \mathbb{P}$:

$$\mu_{\mathcal{D}}(l,m) = \begin{cases} 1 & \text{se } l = m \\ (-1)^s & \text{se } \dfrac{m}{l} = p_1 p_2 ... p_s \text{ con } p_i \neq p_j, p_i \text{ primi} \\ 0 & \text{se } \dfrac{m}{l} = r^2 t \neq 1. \end{cases}$$

D47:c.04 La funzione di Möbius classica $\overline{\mu} : \mathbb{P} \longmapsto \mathbb{Z}$ è definita da

$$\overline{\mu}(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^s & \text{se } n = p_1 p_2 ... p_s \text{ con } p_i \neq p_j, p_i \text{ primi} \\ 0 & \text{se } n = r^2 t > 1. \end{cases}$$

Quindi abbiamo

$$\forall l, m \in \mathbb{P} \ ]\!\!] \ l|m : \ \mu_{\mathcal{D}}(l,m) = \overline{\mu}\left(\frac{m}{l}\right).$$

D47:c.05 Consideriamo ora l'algebra di Boole $\mathcal{B}(S)$ di $S \in \textsf{Set}_n$, ovvero $\mathcal{B}(n)$. Dato che $\mathcal{B}(n)$ è il reticolo potenza diretta n-esima del reticolo $\mathcal{C}(1)$, da (b) si deduce

$$\mu_{\mathcal{B}(n)}(\emptyset, S) = (-1)^n$$

In generale,

$$\forall A \subseteq B \subseteq S : \ \mu_{\mathcal{B}(n)}(A,B) = (-1)^{|B-A|}$$

D47:d. Definizione dell'inversione di Möbius-Rota

D47:d.01 Introduciamo due operatori che trasformano una funzione sul poset P a valori scalari $f : P \to K$ in una dello stesso tipo:

$$(S_{\preceq} f)(x) := \sum_{y \preceq x} f(y) \qquad\qquad (S_{\succeq} f)(x) := \sum_{y \succeq x} f(y)$$

Essi sono chiamati, risp., **operatore somma inferiore** e **operatore somma superiore**.

D47:d.02 Lemma: Siano $f, g, h \in A_K(P)$ e h sia invertibile. Allora

$$g = f * h \iff f = g * h^{-1} \qquad\qquad g = h * f \iff f = h^{-1} * g.$$

D47:d.03 Teorema sull'inversione di Möbius: Sia P un poset localmente finito, K un campo di carateristica 0 e $f, g \in \{P \longmapsto K\}$.

(a) **Inversione da sotto**. Se tutti gli ideali principali di P sono finiti:

$$\forall x \in P: \ g(x) = \sum_{\dot{y} \preceq x} f(y) \quad \iff \quad \forall x \in P: \ f(x) = \sum_{\dot{y} \preceq x} g(y) \mu_P(y, x).$$

(b) **Inversione da sopra**. Se tutti gli ideali principali di P sono finiti:

$$\forall x \in P: \ s(x) = \sum_{\dot{y} \preceq x} r(y) \quad \iff \quad \forall x \in P: \ r(x) = \sum_{\dot{y} \succeq x} \mu_P(x, y) s(y).$$

D47:d.04 Sia $\mathcal{P}$ un poset finito dotato di zero $\underline{0}$ e unità $\underline{1}$ e di funzione rango rnk. Si dice **polinomio caratteristico** di $\mathcal{P}$:

$$\chi_{\mathcal{P}}(x) := \sum_{a \in P} \mu_{\mathcal{P}}(\underline{0}, a) \cdot x^{\mathrm{rnk}(\underline{1}) - \mathrm{rnk}(a)}.$$

Associamo ora ad ogni livello di $\mathcal{P}$ due numeri:

$$\forall k = 0, 1, ..., \mathrm{rnk}(\underline{1}) : \ w_k := \sum_{\mathrm{rnk}(\dot{a}) = k} \mu_P(\underline{0}, a) \qquad W_k := \# a \in P \mathbin{]\!\!|} \mathrm{rnk}(a) = k$$

Il primo di essi è uguale al coefficiente di $x^{\mathrm{rnk}(\underline{1}) - k}$ del polinomio caratteristico e viene chiamato **k-esimo numero di livello del primo tipo** di $\mathcal{P}$; W_k esprime la cardinalità del k-esimo livello di $\mathcal{P}$ e viene detto **k-esimo numero di livello del secondo tipo** di $\mathcal{P}$.

D47:d.05 Il polinomio caratteristico dà utili informazioni circa il comportamento di $\mu_{\mathcal{P}}$ sui vari livelli del poset.
Si trova subito che $\chi_{\mathcal{P}}(x)$ è di grado $\mathrm{rnk}(P)$ e che $w_0 = 1$, $w_{\mathrm{rnk}(P)} = \mu_{\mathcal{P}}(\underline{0}, \underline{1})$.

Vediamo quali valori assumono le precedenti funzioni per i reticoli basilari.

D47:d.06

(1) Prop.: $\chi_{\mathcal{C}(n)}(x) = x^{n-1}(x-1)$; $w_0 = 1$, $w_1 = -1$ e $\forall k = 2, ..., n : \ w_k = 0$; $W_k = ...$

(2) Prop.: $\chi_{\mathcal{B}(n)}(x) = (x-1)^n$; $w_k = (-1)^k \binom{n}{k}$; $W_k = \binom{n}{k}$; $\mu(\mathcal{B}(n)) = (-1)^n$.

(3) Prop.: $\chi_{\mathcal{L}(n,q)}(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - q^i)$; $w_k = (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q$; $W_k = \binom{n}{k}_q$;
$\mu_{\mathcal{L}(n,q)}(0^n, \mathcal{L}(n,q)) = (-1)^n q \binom{n}{2}$.

(4) Prop.: $\chi_{\mathcal{P}(n)}(x) = [x-1]_{n-1}$; $w_k = s_{n,n-k}$;
$W_k = S_{n,n-k}$; $\mu_{\mathcal{P}(n)}(\underline{0}, \underline{1}) = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

D47:d.07 Consideriamo ora una **successione regolare di posets**, cioè una successione $\mathbf{L} = \{L_n : n = 0, 1, 2, ...\}$ di posets ciascuno dotato di zero, di unità e di funzione rango rnk_n t.c. per ogni n sia

$\mathrm{rnk}_n(L_n) = n$ e t.c. per tutti gli interi k ed n, tutti gli intervalli di L_n di corango k siano isomorfi a L_k.
Se scriviamo $w_{n,k} := w_k(L_n)$, $W_{n,k} := (L_n)$ e poniamo $w_{0,0} := W_{0,0} := 1$ e $w_{n,k} = W_{n,k} = 0$ per $n < k$, possiamo considerare le matrici -NN triangolari $[w_{n,n-k}]$ e $[W_{n,n-k}]$; esse sono dette **matrici numeriche della $\mathbf{L}$**.

D47:d.08 Prop. Le due matrici numeriche di una successione regolare sono mutuamente inverse:

$$\forall n, s \in \mathbb{N} : \sum_{k \geq 0} W_{n,n-k} \cdot w_{k,k-s} \;=\; \sum_{k \geq 0} w_{n,n-k} \cdot W_{k,k-s} = \delta_{n,s}.$$

D47:d.09 Coroll.:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \chi_{L_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} w_{n,n-k} x^k \ , \quad x^n = \sum_{k=0}^{n} W_{n,n-k} \chi_{L_k}(x) \ .$$

D47:e. Calcolo di funzioni di Möbius

D47:e.01 Intendiamo ora sviluppare metodi di una certa generalità per il calcolo delle funzioni di Möbius considerando coppie di posets $\mathcal{P} = \langle P, \preceq \rangle$ ed $\mathcal{L} = \langle L, \sqsubseteq \rangle$ che siano collegati da una funzione che rispetta gli ordinamenti e cercando qualche utile relazione tra le rispettive funzioni di Möbius $\mu_{\mathcal{P}}$ e $\mu_{\mathcal{L}}$. Quando una delle funzioni di Möbius, la $\mu_{\mathcal{P}}$, è conosciuta, si cerca di calcolare la funzione sconosciuta $\mu_{\mathcal{L}}$ per mezzo della precedente e della funzione di collegamento di $\mathcal{P}$ ed $\mathcal{L}$.
Ad esempio studieremo un reticolo geometrico finito $\mathcal{L}$, l'algebra booleana dei sottoinsiemi di $\mathcal{L}$ $\mathcal{P} = \mathcal{B}(S)$, con $S = \mathfrak{P}(L)$, e l'operatore chiusura $A \in P \to \bar{A} \in L$ come funzione di collegamento: in questo caso è conosciuta $\mu_{\mathcal{P}}$ e si vuole ricavare $\mu_{\mathcal{L}}$

D47:e.02 Preliminarmente generalizziamo la nozione di operatore chiusura dalle algebre booleane a posets arbitrari.

Sia $\mathcal{P}$ un poset; ricordiamo che una endofunzione $H : P \to P$ va chiamata **funzione di chiusura** su $\mathcal{P}$ sse:
(a) $\forall x \in P : \ x \preceq H(x)$ (ampliamento)
(b) $\forall x, y \in P : \ x \preceq y \Longrightarrow H(x) \preceq H(y)$ (monotonia)
(c) $\forall x \in P : \ H(H(x)) = H(x)$ (idempotenza).

Chiameremo **chiuso** per H un elemento a sse $H(a) = a$. L'insieme $Q := H(P)$ degli elementi chiusi è chiamato **quoziente** di $\mathcal{P}$ relativo alla chiusura H e si scrive $Q = \mathcal{P}/H$.

D47:e.03 Prop. Sia $\mathcal{P}$ un reticolo. Ogni quoziente Q di $\mathcal{P}$ è un reticolo completo e l'operazione infimo in Q coincide con l'infimo in $\mathcal{P}$.

D47:e.04 Teorema Rota, 19??. Sia $\mathcal{P}$ un poset localmente finito, H una chiusura su $\mathcal{P}$ con quoziente $Q := \mathcal{P}/H$.

$$\forall x, y \in P : \qquad \sum_{z \in P \;\|\; H(z) = H(y)} \mu_P(x, z) = \begin{cases} \mu_Q(H(x), H(y)) & \text{se } x = H(x) \\ 0 & \text{se } x \prec H(x). \end{cases}$$

D47:e.05 Prop. Sia S un insieme di n elementi, H una chiusura su $\mathcal{B}(S)$ con $H(\emptyset) = \emptyset$, $Q := \mathcal{B}(S)/H$ ed r_k denoti il numero di k-sottoinsiemi A di S t.c. $H(A) = S$:

$$\sum_{k=0,\ldots,n} (-1)^k r_k = \mu_Q(\emptyset, S).$$

Come esempio si consideri un reticolo finito $\mathcal{P}$, di estremi $zrul$ e $\underline{1}$, e l'insieme $S := P \setminus \{\underline{0}\}$. La funzione $H = \lceil \emptyset \mapsto \emptyset \rceil \ \dot{\cup} \ \lceil A \in \mathfrak{P}_{ne}(S) \mapsto \{a \in S \mid a \preceq \sup(A)\} \rceil$
è una chiusura su $\mathcal{B}(S)$ con quoziente $\mathcal{B}(S)/H \cong \mathcal{P}$. Quindi si ottiene:

$$\mu_P(\underline{0}, \underline{1}) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k r_k,$$

dove $r_k := \#\{A \subseteq P - \{0\} \mid |A| = k \ \wedge \ \sup(A) = \underline{1}\}$.

D47:e.06 Prop. Sia P un poset finito di estremi $\underline{0}$ e $\underline{1}$, e sia H una chiusura su P con quoziente $Q := P/H$:

$$|\{z \in P \mid H(z) = \underline{1}\}| = \sum_{x \in P} |[\underline{0}, x]| \cdot \mu_Q(x, \underline{1}),$$

D47:e.07 Prop. Sia S un insieme finito, H una chiusura su $\mathcal{B}(S)$ con $H(\emptyset) = \emptyset$ e $Q := \mathcal{B}(S)/H$ il relativo quoziente. Se r_k denota il numero di k-sottoinsiemi A di S t.c. $H(A) = S$:

$$\sum_{k \geq 0} r_k = \sum_{A \subseteq S} 2^{|A|} \mu_Q(A, S).$$

D47:e.08 Prop. Sia P un reticolo finito di estremi $\underline{0}$ e $\underline{1}$. Se $\underline{0}$ non è l'infimo di suoi coatomi o se $\underline{1}$ non è il supremo di suoi atomi:

$$\mu_P(\underline{0}, \underline{1}) = 0$$

D47:e.09 Prop. (Crapo) Sia $\mathcal{P}$ un reticolo finito di estremi $\underline{0}$ e $\underline{1}$. Per ogni $a \in P$ denotiamo con $a^\perp$ l'insieme dei complementi di a.

$$\forall a \in P : \ \mu_P(\underline{0}, \underline{1}) = \sum_{w,z \in a^\perp} \mu_P(\underline{0}, w) \zeta_P(w, z) \mu_P(z, \underline{1}).$$

Abbiamo ora un buon quadro per le funzioni di Möbius dei reticoli.

D47:e.10 Coroll.: Sia $\mathcal{P}$ un reticolo finito di estremi $\underline{0}$ e $\underline{1}$.

(a) $\mathcal{P}$ non è complementato $\Longrightarrow \mu_P(\underline{0}, \underline{1}) = 0$.

(b) $\mathcal{P}$ è modulare $\Longrightarrow \forall a \in P : \ \mu_P(\underline{0}, \underline{1}) = \mu_P(\underline{0}, a) \sum_{z \in a^\perp} \mu_P(\underline{0}, z)$.

(c) $\mathcal{P}$ è semimodulare $\Longrightarrow$
per tutti gli elementi modulari $a \in P$: $\mu_P(\underline{0}, \underline{1}) = \mu_P(\underline{0}, a) \sum_{z \in a^\perp} \mu_P(\underline{0}, z)$.

(d) $\mathcal{P}$ è geometrico $\Longrightarrow \mu_{\mathcal{P}}(\underline{0}, \underline{1}) \neq 0$, e $\mu_{\mathcal{P}}(\underline{0}, \underline{1}) > 0$
sse $\mathrm{rnk}(P)$ è pari e $\mu_{\mathcal{P}}(\underline{0}, \underline{1}) < 0$ sse $\mathrm{rnk}(P)$ è dispari.

D47:e.11 Consideriamo ora due posets $\mathcal{P} = \langle P, \preceq \rangle$ e $\mathcal{Q} = \langle Q, \sqsubseteq \rangle$. Una coppia $\langle \sigma, \tau \rangle$ di funzioni $\sigma : P \to Q$ e $\tau : Q \to P$ è chiamata una *connessione di Galois* tra $\mathcal{P}$ ed $\mathcal{Q}$ sse

(a) σ e τ sono antitone,

(b) $\forall x \in P : \ \tau(\sigma(x) \succeq x$,

(c) $\forall u \in Q : \ \sigma(\tau(u) \sqsubseteq u$.

D47:e.12 Lemma: Per ogni connessione di Galois $\langle\sigma,\tau\rangle$ si ha $\sigma\circ\tau\circ\sigma=\sigma$ e $\tau\circ\sigma\circ\tau=\tau$.

D47:e.13 Prop. Sia $\langle\sigma,\tau\rangle$ una connessione di Galois tra i posets P ed Q.
(a) $\sigma\circ\tau$ è funzione di chiusura su P e $\tau\circ\sigma$ lo è su Q.
(b) $P/(\sigma\circ\tau)=\tau(Q)$, cioè, il quoziente di P relativo a $\sigma\circ\tau$ è l'immagine $\tau(Q)$.
(c) $Q/(\tau\circ\sigma)=\sigma(P)$ (proposizione duale).
(d) $P/(\sigma\circ\tau)$ e $Q/(\tau\circ\sigma)$ sono antisomorfi rispetto alle applicazioni mutuamente inverse σ e τ.

D47:e.14 Una funzione $\sigma:P\to Q$ è chiamata una **funzione di Galois** per $\mathcal{P}$ ed $\mathcal{Q}$ sse esiste una funzione $\sigma^+:Q\to P$ t.c.
(a) σ e σ^+ sono monotone;
(b) $\forall x\in P:\ \sigma^+(\sigma(x))\succeq x$;
(c) $\forall u\in Q:\ \sigma(\sigma^+(u))\sqsubseteq u$.

D47:e.15 Coroll.: Sia $\sigma:P\to Q$ una funzione di Galois. Allora
(a) $\sigma\circ\sigma^+$ è una chiusura su $\mathcal{P}$; $\sigma^+\circ\sigma$ è una chiusura su $\mathcal{Q}$;
(b) $\mathcal{P}/(\sigma\circ\sigma^+)=\sigma^+(Q)$; $\mathcal{Q}/(\sigma^+\circ\sigma)=\sigma(P)$.
(c) $\mathcal{P}/(\sigma\circ\sigma^+)\cong\mathcal{Q}/(\sigma^+\circ\sigma)$.

D47:e.16 Teorema (Rota) Sia $\langle\sigma,\tau\rangle$ una connessione di Galois tra i posets $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ localmente finiti, e sia $R:=\mathcal{P}/(\sigma\circ\tau)$.

$$\forall x\in P,v\in Q:\quad \sum_{z\in P\ \P\ \sigma(z)=v}\mu_P(x,z)=\sum_{u\in Q\ \P\ \tau(u)=x}\mu_Q(v,u)=\mu_R(x,\tau(v)).$$

D47:e.17 Prop. Sia $\sigma:P\to Q$ una funzione di Galois.

$$\forall x\in P,v\in Q:\quad \sum_{z\in P\ \P\ \sigma(z)=v}\mu_P(x,z)=\sum_{u\in Q\ \P\ \sigma^+(u)=x}\mu_Q(u,v)=\mu_R(x,\sigma^+(v)).$$

Consideriamo un reticolo finito L di estremi $\underline{0}$ e $\underline{1}$. Un suo sottoinsieme M è chiamato un suo **taglio-cancellato inferiore** sse $\underline{0}\notin M$ e $M\prec u$ per ogni $u\notin M\dot\cup\underline{0}$. Dualmente un sottoinsieme N di L è chiamato un suo **taglio-cancellato superiore** sse $\underline{1}\notin N$ e $v\prec N$ per ogni $v\notin M\dot\cup\underline{1}$.
Un sottoinsieme M è chiamato **taglio-cancellato** di L sse $\underline{0},\underline{1}\notin M$ e per ogni $u\notin M$ più precisamente se $u\prec M$ o $M\prec u$, ogni catena massimale contiene il minimo elemento di M.

D47:e.18 Teorema primo teorema del taglio-cancellato (Rota) Sia L un reticolo finito di estremi $\underline{0}$ ed $\underline{1}$, M un suo taglio (-cancellato inferiore (superiore) ed r_k il numero di k-sottoinsiemi $A\subseteq M$ t.c. $\sup(A)=\underline{1}$ ($\inf(A)=\underline{0}$). Allora

$$\mu_L(\underline{0},\underline{1})=\sum_{k\geq 0}(-1)^k r_k.$$

Chiaramente ogni taglio-cancellato inferiore contiene l'insieme **Atom**(L) degli atomi di L e, dualmente, ogni taglio-cancellato superiore contiene l'insieme $Coat(L)$ dei coatomi.

D47:e.19 Prop. Sia L un reticolo finito con A insieme degli atomi e C dei coatomi. Se r_k denota il numero dei k-sottoinsiemi A di S t.c. $\sup(A)=\underline{1}$ oppure il numero di k-insiemi $A\subseteq C$ t.c. $\inf(A)=\underline{0}$, allora:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\underline{0},\underline{1})=\sum_{k\geq 0}(-1)^k r_k,$$

D47:e.20 **Prop.** Sia $\mathcal{L}$ un reticolo finito, $M \subseteq L$ e r_k il numero dei k-insiemi $A \subseteq M$ con $\inf(A) = \underline{0}$, $\sup(A) = \underline{1}$. Allora

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k r_k = \sum_{u,v \in L \,\rceil\, [u,v] \cap M = \emptyset} \mu_L(\underline{0}, u) \zeta_L(u,v) \mu_L(v, \underline{0}) - \mu(\underline{0}, \underline{1}),$$

D47:e.21 **Teorema** **secondo teorema del taglio-cancellato di Rota** Sia $\mathcal{L}$ un reticolo finito, M un taglio-cancellato di L e r_k il numero di k-insiemi $A \subseteq M$ t.c. $\inf(A) = \underline{0}$, $\sup(A) = \underline{1}$. Allora

$$\mu_{\mathcal{L}}(\underline{0}, \underline{1}) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k r_k .$$

D47:f. Polinomio caratteristico

D47:f.01 Ricordiamo che si dice poset che soddisfa la **condizione catenaria -JD** ossia la condizione catenaria di Jordan-Holder, un poset tale che ...

Consideriamo dunque un poset $\mathcal{P}$ che soddisfi la condizione catenaria -JD, un campo K di caratteristica 0 e l'algebra $\mathbb{A}_{K[x]}(\mathcal{P})$ sull'anello dei polinomi $K[x]$. Sia $\rho \in \mathbb{A}\ (\mathcal{P})$ la funzione lunghezza di intervallo, data da $\rho_{\mathcal{P}}(a,b) := [a,b]^{\vdash\dashv}$ per $a \preceq b \in P$, e definiamo il polinomio $\overline{\rho}_{\mathcal{P}} \in \mathbb{A}\ (\mathcal{P})$ come

$$\overline{\rho}_{\mathcal{P}}(a,b) := x^{\rho_{\mathcal{P}}(a,b)},$$

Chiaramente

$$\forall a \preceq b \preceq c \in P : \ \overline{\rho}_{\mathcal{P}}(a,c) = \overline{\rho}_{\mathcal{P}}(a,b) \cdot \overline{\rho}_{\mathcal{P}}(b,c)$$

D47:f.02 Per un poset $\mathcal{P}$ che soddisfa la condizione catenaria -JD si definisce come **funzione caratteristica**:

$$\text{char}_{\mathcal{P}}(x) := \mu_{\mathcal{P}} * \overline{\rho}_{\mathcal{P}} \in \mathbb{A}_{K[x]}(\mathcal{P}).$$

Per questa definizione e per quella del polinomio caratteristico

$$\chi_{\mathcal{P}}(x) := \sum_{a \in P} \mu_{\mathcal{P}}(\underline{0}, a) \cdot x^{\text{rnk}(\underline{1}) - \text{rnk}(a)}$$

vediamo che per un poset finito dotato di estremi $zrul$ ed $\underline{1}$ e di funzione rango, si ha:

$$\text{char}_P(x) = \chi_P(x),$$

D47:f.03 **Teorema** Sia $\mathcal{P}$ un poset finito dotato di estremi $\underline{0}$ e $\underline{1}$ e di funzione rango rnk. Se si ha una fattorizzazione $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, allora

$$\chi_{\mathcal{P}}(x) = \chi_{\mathcal{P}_1}(x) \cdot \chi_{\mathcal{P}_2}(x).$$

Come esempio consideriamo $\mathcal{P} := \prod_{i=1}^t \mathcal{C}(k_i)$. Abbiamo

$$\chi_{\mathcal{P}}(x) = \prod_{i=1}^t \chi_{\mathcal{C}(k_i)}(x) = \prod_{i=1}^t (x^{k_i} - x^{k_i - 1}) = x^{\text{rnk}(P) - t}(x-1)^t$$

e in particolare,

$$\chi_{\mathcal{B}(n)}(x) = (x-1)^n.$$

D47:f.04 Teorema Stanley 19?? Sia $\mathcal{P}$ un reticolo finito con la funzione rango rnk e sia $a \in P$ un suo elemento modulare. Allora

$$\chi_{\mathcal{P}}(x) = \chi_{[\underline{0},a]}(x) \cdot \sum_{z \in P \,\rceil\, z \wedge a = \underline{0}} \mu_{\mathcal{P}}(\underline{0}, z) \cdot x^{\mathrm{rnk}(\underline{1}) - \mathrm{rnk}(a) - \mathrm{rnk}(z)}.$$

D47:g. Algebra di Möbius-Rota

D47:g.01 Sia P un poset localmente finito con $\underline{0}$ e K un campo di caratteristica 0. Riguardiamo P come una base di uno spazio vettoriale $\mathsf{Vect}(P)$ su K, definendo $\mathsf{Vect}(P)$ come l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite di elementi di P con coefficienti in K e l'addizione sulle coordinate e la moltiplicazione scalare. Per distinguere meglio tra P le basi di $\mathsf{Vect}(P)$, denotiamo con ϵ_p gli elementi della base di $V(P)$ corrispondenti ai diversi $p \in P$. Quindi $\mathsf{Vect}(P)$ è l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi ϵ_P

$$\mathsf{Vect}(P) = \left\{ F \in \mathfrak{P}_F(P), \langle p \in F | a_p \rangle \in \mathsf{Seq}_K : \sum_{p \in F} a_p \epsilon_p \right\}.$$

$\mathsf{Vect}(P)$ è chiamato lo **spazio dei vettori liberi** su K generato da P. Per $p \in P$ definiamo l'elemento do $\mathsf{Vect}(P)$

$$\iota_p := \sum_{q \preceq p} \epsilon_q.$$

D47:g.02 Prop. Sia μ_P la funzione di Möbius di P. Allora

$$\epsilon_p = \sum_{q \in P} \mu_P(q,p) \iota_q.$$

Si trova inoltre che gli ι_p sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathsf{Vect}(P)$.

D47:g.03 Supponiamo ora che P sia un reticolo finito. Per $p \in P$ definiamo l'elemento di $\mathsf{Vect}(P)$

$$\kappa_p := \sum_{q \in P \,\rceil\, q \vee p = \underline{1}} \epsilon_q.$$

D47:g.04 Consideriamo un reticolo finito P e un $p \in P$.

(1) Prop.: $\kappa_p = \sum_{q \in P \,\rceil\, q \succeq p} \mu_P(q, \underline{1}) \iota_q$.

(2) Prop.: $\mu_P(p, \underline{1}) \iota_p = \sum_{q \in P \,\rceil\, q \succeq p} \mu_P(p,q) \kappa_q$.

(3) Prop.: $\forall p \in P : \ \mu_P(p, \underline{1}) \neq 0 \Longrightarrow \forall p \in P : \ \{\kappa_p : p \in P\}$ è una base di $\mathsf{Vect}(P)$ con $\epsilon_p = \sum_{t \in P} \nu(p,t)\kappa + t(p \in P)$ dove $\nu(p,t) := \sum_{q \in P \,\rceil\, q \preceq p \wedge t} \mu_P(q,p)\mu_P(q,t)/\mu_P(q,\underline{1})$.

D47:g.05 Dal fatto che $\{p \in P | \kappa_p\}$ è una base, si deducono due interessanti risultati sul numero di livello di un reticolo geometrico.

Prop. (Dowling-Wilson, 19??) Sia P un reticolo finito t.c. $\forall p \in P :\ \mu(p, \underline{1}) \neq 0$. Allora esiste una permutazione $\phi : P \to P$ t.c.

$$\forall p \in P :\ p \vee \phi(p) = \underline{1}.$$

D47:g.06 Teorema (Dowling-Wilson, 19??) Sia P un reticolo geometrico finito di rango n e $\{W_k : k = 0, ..., n\}$ la sequenza dei suoi numeri di livello di P.

$$\forall k = 0, ..., n :\ W_0 + W_1 + ... + W_k \preceq W_n + W_{n-1} + ... + W_{n-k}.$$

D47:g.07 Diamo ora una importante definizione dovuta a Solomon. Sia P un poset localmente finito con $\underline{0}$ e sia **Vect**(P) il relativo spazio dei vettori liberi su un campo K di caratteristica 0. Si dice **algebra di Möbius** di P e si scrive $\mathbf{M\ddot{o}b}_K(P)$, lo spazio vettoriale **Vect**(P) su K munito del prodotto definito sulle coordinate come segue:

$$\text{se } \alpha = \sum_{p \in P} a_p \epsilon_p \ \text{ e } \ \beta = \sum_{p \in P} b_p \epsilon_p \quad \text{allora} \quad \alpha \odot \beta := \sum_{p \in P} (a_p b_p) \cdot \epsilon_p.$$

D47:g.08 Un importante risultato è fornito dall'enunciato che segue.

Teorema (Greene, 19??) Sia P un poset finito con $\underline{1}$ e sia a un suo elemento per il quale esiste il massimale $a \vee p$ per ogni $p \in P$. In $\mathbf{M\ddot{o}b}_K(P)$ vale la seguente identità:

$$\sum_{p \in P} \mu(p, \underline{1}) = \sum_{q \in P \, \P \, q \succeq a} \mu_P(q, \underline{1}) q \odot \sum_{r \in P \, \P \, r \vee a = \underline{1}} \mu_P(r, \underline{1}) r.$$

D47:h. Anello di valutazione

D47:h.01 Ora generalizziamo il principio di inclusione ed esclusione dall'algebra booleana ad un arbitrario reticolo distributivo. Introduciamo la nozione di una valutazione e descriviamo le valutazioni di un reticolo distributivo nell'insieme di una nuova struttura algebrica chiamata anello di valutazione.

Sia P un reticolo e $\langle G, \dot{+} \rangle$ un gruppo abeliano. Una funzione $w : P \to G$ è chiamata **valutazione** di P in G sse

$$\forall a, b \in P :\ w(a \wedge b) \dot{+} w(a \vee b) = w(a) \dot{+} w(b).$$

D47:h.02 Denotiamo con $\mathcal{M}(P)$ il sottospazio di **Vect**(P) generato da tutti gli elementi in **Vect**(P) della forma $a \wedge b \dot{+} a \vee b - a - b$.

Lo spazio vettoriale $\mathcal{W}(P) =$ **Vect**$(P)/\mathcal{M}(P)$ è chiamato **modulo di valutazione** di P relativo al gruppo abeliano $\langle G, \dot{+} \rangle$.

D47:h.03 Prop. Sia P un reticolo e $\langle G, \dot{+} \rangle$ un gruppo abeliano. L'iniezione canonica $i : p \to \mathcal{W}(P)$ data da $i(P) := P + \mathcal{M}(P)$ è una valutazione di P in $\mathcal{W}(P)$.

D47:h.04 Prop. Se P è un reticolo distibutivo localmente finito dotato di $\underline{0}$. $\mathcal{M}(P)$ è un ideale di $\mathbf{M\ddot{o}b}(P)$.

D47:h.05 Sia P un reticolo distibutivo localmente finito dotato di $\underline{0}$. $\mathcal{W}(P) = \mathbf{Möb}(P)/\mathcal{M}(P)$ è chiamato **anello di valutazione** di P.

D47:h.06 Prop. (Rota, 19??) Sia P un reticolo distributivo localmente finito dotato di $\underline{0}$ e $p_1, ..., p_t \in P$. In $\mathcal{W}(P)$ otteniamo

$$\bigvee_{i=1}^{t} p_i = \sum_{i=1}^{t} p_i - \sum_{i<j}^{t} (p_i \wedge p_j) \pm \cdots + (-1)^{t-1}(p_1 \wedge \cdots \wedge p_t).$$

Equivalentemente, per $q \geq \bigvee_{i=1}^{t} p_i$ otteniamo in $W(P)$

$$\prod_{i=1}^{t}(q - p_i) = q - \bigvee_{i=1}^{t} p_i.$$

D47:h.07 Il teorema seguente dà una completa descrizione di tutte le valutazioni di un reticolo distributivo.

Teorema (Davis-Rota 19??) Sia L un reticolo distibutivo localmente finito dotato di $\underline{0}$ e sia $P(L)$ il poset dei suoi elementi irriducibili, incluso $\underline{0}$.

(a) $\mathcal{W}(L) \cong \mathbf{Möb}(P(L))$ per l'isomorfismo $\phi := \lceil p \in P \mapsto p + \mathcal{M})L) \rceil \in \{\mathbf{Möb}(P(L)) \to \mathcal{W}(L)\}$.

(b) In $\mathcal{W}(L)$, ovvero nel modulo $M(L)$:

(b$_1$) $\{\epsilon_p : p \in P(L)\}$ è una base ortogonale idempotente;

(b$_2$) $\forall q \in L: \ q = \sum_{p \in P(L) \mid p \preceq q} \epsilon_p$;

(b$_3$) $\forall p \in P(L): \ \epsilon_p = \sum_{r \in P(L)} \mu_{P(L)}(r,p) r$;

(b_4) $\forall q \in L: \ q = \sum_{r,p \in P(L) \mid p \preceq q} \mu_{P(L)}(r,p) r$.

D47:h.08 Vogliamo esprimere la caratteristica di un reticolo distributivo localmente finito L dotato di $\underline{0}$ usando la funzione di Möbiusdel poset dei suoi elementi irriducibili.

Prop. (Rota, 19??): Sia L un reticolo distributivo localmente finito dotato di $\underline{0}$ e $P(L)$ il poset degli elementi irriducibili di L. La caratteristica χ_L di L è data da

$$\chi(0) = 0$$
$$\chi(a) = -\sum_{p \in P(L), 0 \neq p \preceq a} \mu_{P(L)}(0,p) \qquad (0 \neq a \in L).$$

D47:h.09 Prop. Sia L un reticolo distributivo localmente finito e dotato di $\underline{0}$; sia $P(L)$ il poset degli elementi irriducibili di L incluso $\underline{0}$. Per $a \in L$ scriviamo $J(a) := \{p \in P(L) \mid p \preceq a\}$ e definiamo il poset $J'(a) := J(a) \cup \{\hat{a}\}$ dall'insieme dei $p \preceq \hat{a}$ per ogni $p \in J(a)$. Allora otteniamo

$$\forall a \in L: \ \chi(a) = \mu_{J'(a)}(0, \hat{a}) + 1.$$

D47:h.10 Possiamo ora ottenere dalla fdM un buon risultato per la caratteristica.

Coroll.: Sia L un reticolo distributivo localmente finito dotato di $\underline{0}$ e $a \in L$.

(a) Se r_k denota il numero totale dei k-sottoinsiemi ordinati $\{p_1, ..., p_k\} \subseteq P(L)$ con $0 \prec p_1 \prec p_2 \cdot \prec p_k \preceq a$, allora

$$\chi_L(a) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} r_k.$$

(b) Sia $P(a)$ l'insieme degli elementi massimali irriducibili $\preceq a$, e s_k il numero dei $k-$insiemi $\{q_1, ..., q_k\} \subseteq P(a)$ con $\bigwedge_{i=1}^{k} q_i = \underline{0}$. Allora

$$\chi_L(a) = \sum_{k \preceq 1} (-1)^k s_k + 1.$$