1

Capitolo D37
tornei e cammini hamiltoniani

Contenuti delle sezioni

3 pagine

D370.01 In questo capitolo vengono presentate alcune delle proprietà dei digrafi collegate alla presenza entro di essi di due particolari tipi di configurazioni, i tornei e i cammini hamiltoniani.

D37 a. tornei

D37a.01 Si dice **torneo un digrafo** privo di cappi (e quasifortemente connesso) tale che per ogni duetto di nodi presenta uno e un solo arco.

La figura che segue presenta le classi di isomorfismo dei tornei di ordine 2, 3 e 4.

//input p

I due tornei su tre nodi sono chiamati, risp., **tripla transitiva** e **tripla ciclica**.

Si può affermare che un torneo è un digrafo completo minimale, oppure che un torneo è un digrafo completo privo di cappi e di circuiti di lunghezza 2.

Il nome torneo deriva dal fatto che un tale digrafo di ordine n rappresenta il complesso dei risultati di un torneo che coinvolge n concorrenti (individui o squadre) ciascuno dei quali deve affrontare una e una sola volta ciascuno degli $n-1$ rimanenti in scontri che prevedono solo la vittoria di uno dei due contendenti (e non ammettono il pareggio).
In un torneo ogni nodo rappresenta un concorrente e un arco $\langle q,p\rangle$ segnala che lo scontro tra i concorrenti q e p è stato vinto da q.

Denotiamo con $\mathsf{DgrfTrn}_n$ l'insieme dei tornei di n nodi.

D37a.02 **(1) Prop.**: Ogni sottodigrafo di un torneo è un torneo.

Dim.: Le proprietà che caratterizzano un torneo rimangono quando si elimina un suo nodo e per ripetizione, rimangono quando si elimina un qualsiasi insieme dei suoi nodi ▮

Dato un torneo di ordine n, cioè di n nodi, l'eliminazione di $k=1,2,...,n-1$ dei suoi nodi porta a un torneo di $n-k$ nodi.
(2) Prop.: (**teorema di Redei**) Ogni torneo possiede un cammino hamiltoniano.

Dim.: Si procede per induzione, cominciando a verificare sulla figura precedente che ogni torneo di ordine 2, 3 o 4 gode della proprietà.
Quindi si ipotizza che la proprietà sia vera per ogni torneo di n nodi e si procede a esaminare un generico torneo T di $n+1$ nodi ed uno qualsiasi dei suoi nodi q_0.
Nel torneo $T\setminus\{q_0$ si trova un cammino spanning che scriviamo $C:=:\big\langle q_1,q_2,...,q_n\big\rangle$.
Si danno due casi: aut $\big\langle q_0,q_1\big\rangle\in\mathsf{Arc}(T)$, aut $\big\langle q_1,q_0\big\rangle\in\mathsf{Arc}(T)$.
Nel primo caso il cammino cercato è $\big\langle q_0,q_1,q_2,...,q_n\big\rangle$.
Nel secondo aut q_0 ha perso con tutti gli altri n nodi e quindi il cammino cercato è $\big\langle q_1,q_2,...,q_n,q_0\big\rangle$i, aut si trova scorrendo C un primo nodo q_i che rappresenta un nodo sconfitto da q_0 e in tal sottocaso q_{i-1} ha battuto q_0 e il cammino cercato è $\big\langle q_1,...q_{i-1},q_0,q_i,...,q_n\big\rangle$ ▮

(3) Prop.: Per ogni torneo di n nodi e ogni insieme di k dei suoi nodi si trova un cammino hamiltoniano che tocca tali nodi.

Dim.: Segue subito da (2) e da (1) ▮

D37a.03 Il numero degli archi di un torneo di n nodi è evidentemente uguale al numero dei duetti di suoi nodi, cioè $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Consideriamo il torneo $T=\big\langle(\mathrm{n}\,\mathbf{]}\ ,\ U\big\rangle$. Si dice **punteggio del nodo** i o score del nodo i il numero degli archi uscenti da i, cioè il suo grado uscente $degout(i)$.

Tale numero per un evento torneo rappresenta il numero dei concorrenti che i ha battuto.

Si dice **sequenza dei punteggi del torneo** T la sequenza dei punteggi dei suoi nodi,

$$\langle degout(1), ..., degout(n)\rangle \ .$$

Può essere interessante sapere se una sequenza di n interi nonnegativi possono costituire la sequenza dei punteggi di un torneo di $\mathsf{DgrfTrn}_n$.

(1) Prop.: Una sequenza $\sigma = \langle s_1, s_2, ..., s_n\rangle$ di interi nonnegativi è la sequenza dei punteggi di un torneo T sse valgono le due condizioni

$$\text{(a)} \quad \sum_{i=1}^{n} s_i = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{(b)} \quad \forall k = 1, 2, ..., n-1 \ : \ \sum_{i=1}^{k} s_i \geq \frac{k(k-1)}{2} \ .$$

Dim.: "$\Longrightarrow$" : Se σ è una sequenza di punteggi la somma in (a) fornisce il numero degli archi di T, numero dato da $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Per ottenere le condizioni (b) basta osservare che ogni sottoinsieme di k nodi di T definisce un sottotorneo per il quale la somma dei punteggi vale $\dfrac{k(k-1)}{2}$ e che $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} s_i$ deve fornire un valore non inferiore, in quanto si possono avere altri archi che vanno da uno dei nodi del sottoinsieme a un nodo estraneo al sottoinsieme.

"$\Longleftarrow$" : Discende dalla esistenza di una sottoarborescenza spanning di un digrafo sse esso è quasifortemente connesso ▮