# Capitolo D35:
# grafi e gruppi

## Contenuti delle sezioni



14 pagine

D35:**0.01** Questo capitolo riprende la nozione di gruppo di permutazioni per applicarla alle permutazioni dei nodi dei grafi nonorientati che mantengono la relazione do adiacenza.

## D35:a. gruppi di permutazioni

D35:**a.01** Consideriamo un insieme $X$ e un insieme $A$ di permutazioni di $X$, cioè di funzioni biunivoche di $X$ su se stesso. Un tale insieme di trasformazioni $A$ si dice **gruppo di permutazioni** sse sono soddisfatte le seguenti proprietà:

- L'identità di $X$, cioè la trasformazione che porta ogni elemento di $X$ in se stesso, fa parte di $A$.
- L'inversa di ogni trasformazione in $A$ appartiene ancora a $A$.
- Componendo due permutazioni appartenenti a $A$ si ottiene un'altra permutazione facente parte di $A$ (chiusura del gruppo di permutazioni).

Consideriamo un gruppo di permutazioni $G$ che agiscono sull'insieme $X$; si dice**ordine del gruppo di permutazioni** il cardinale del suo terreno $|G|$, mentre $|X|$ si dice **grado del gruppo di permutazioni**.

Si verifica facilmente che la totalità delle permutazioni di un insieme $X$ soddisfa le richieste di gruppo. Il gruppo così formato si dice **gruppo simmetrico** di $X$ e si denota con $\mathsf{Sym}_X$.
Nel caso $X$ sia un insieme finito con cardinale $n$, il gruppo simmetrico $\mathsf{Sym}_X$ presenta grado $n$ e ordine $|\mathsf{Sym}_X| = n!$.

D35:**a.02** I gruppi di permutazioni rivestono notevole importanza all'interno e all'esterno della matematica, per vari motivi.

Innanzi tutto, come ha mostrato Arthur Cayley e come mostreremo tra poco, tutti i gruppi possono essere ricondotti a gruppi di permutazioni. Accade poi che un gran numero di problemi matematici, fisici, chimici,... si possono ricondurre a fatti riguardanti gruppi di permutazioni.
Questi gruppi, inoltre, attualmente si possono manipolare efficacemente con il computer.

Noi tratteremo i gruppi di permutazioni di insiemi finiti e studieremo alcuni particolari gruppi di permutazioni di insiemi numerabili.

D35:**a.03** Due elementi $x$ e $y$ di $X$ sono detti **elementi similari** sse esiste una permutazione $\alpha \in A$ tale che $\alpha(x) = y$.
La relazione di similarità è una relazione di equivalenza su $X$ e le classi di equivalenza sono dette **orbite del gruppo** $A$.

D35:**a.04** Vediamo come si possono rappresentare le permutazioni di un insieme finito che possiamo supporre sia

$$[n) = \{0, 1, 2, ..., n-1\} .$$

Una permutazione, essendo un'endofunzione, si può esprimere nella forma:

$$\left\downarrow \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{n-1} \end{matrix} \right\downarrow$$

Sottintendendo la prima riga, questa notazione si può semplificare nella:

$$_p(p_0, p_1, \dots, p_{n-1}) .$$

L'identità $_p(0, 1, 2, \dots, n-1)$ la denoteremo anche semplicemente con $\mathtt{E}_n$.

D35:**a.05** Una permutazione si può raffigurare con un digrafo permutativo.

//input pD35a05

Tutti i digrafi permutativi presentano una o più componenti connesse costituite da circuiti (eventualmente cappi).
Una permutazione rappresentata da un grafo permutativo costituito da una sola componente connessa, cioè da un circuito, viene detta **permutazione ciclica** o **permutazione circolare**.
Una tale permutazione è individuata da una scrittura come:

$$ {}_c(i_0, i_1, ..., i_{s-1}), $$

Tale scrittura significa che l'elemento $i_0$ viene trasformato in $i_1$, $i_1$ in $i_2$,... , $i_{s-2}$ in $i_{s-1}$ ed $i_{s-1}$ in $i_0$.
Il numero degli interi coinvolti, $s$ nel caso precedente, si dice **lunghezza della permutazione ciclica**.

Quindi ogni permutazione si può esprimere come prodotto di permutazioni cicliche su parti disgiunte di $[n]$.
Per esempio la permutazione ${}_p(1,4,3,2,0,5)$ si può esprimere come prodotto di:

$$ {}_p(1,4,2,3,0,5) \circ {}_p(0,1,3,2,4,6) \circ \mathtt{E}_n \ = \ {}_c(0,1,4){}_c(2,3) \ . $$

Con questa notazione è più chiara l'individuazione degli elementi dei gruppi di permutazioni.

Per esempio le permutazioni costituenti $\mathsf{Sym}_3$ sono:

$$ \mathtt{E}_3 \ , \ {}_c(0,1) \ , \ {}_c(0,2) \ , \ {}_c(1,2) \ , \ {}_c(0,1,2) \ \text{ e } \ {}_c(0,2,1) \ . $$

D35:**a.06** Particolari permutazioni circolari sono quelle di lunghezza 2, come ${}_c(i,j)$ che vengono dette **scambi** o **trasposizioni**.
Ogni permutazione ciclica si può esprimere come prodotto di scambi: infatti si verifica facilmente che:

$$ {}_c(i_0, i_1, i_2, ..., i_{s-1}) \ = \ {}_c(i_0, i_1){}_c(i_0, i_2) ... {}_c(i_0 \ i_{s-1}), $$

//input pD35a06

Possiamo quindi affermare che ogni permutazione si può esprimere come prodotto di scambi.

## D35:b. gruppi astratti

D35:**b.01** La nozione di gruppo e quella associata di simmetria rivestono grande importanza nella matematica, in molte scienze e in molte attività computazionali.

Mentre per considerazioni generali si prendono in considerazione gruppi di permutazioni relative a insiemi dei quali si trascura la struttura, per affrontare molti problemi si devono esaminare permutazioni riguardanti insiemi dotati di struttura, soprattutto quando questa si può esprimere in termini geometrici o comunque visualizzabili.

Accanto alla nozione di gruppo di permutazioni si deve considerare quella di gruppo astratto. Ad essa si può pervenire attraverso la nozione di isomorfismo di gruppi di permutazioni.

D35:**b.02** Due gruppi di permutazioni $A$ e $B$ si dicono **gruppi isomorfi** sse esiste una biiezione $\phi \in \lceil A \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright B \rceil$, detta **isomorfismo tra i gruppi** $A$ e $B$, tale che $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in A \;\; : \;\; \phi(\alpha_1\alpha_2) = \phi(\alpha_1)\,\phi(\alpha_2)$. In tal caso si scrive $A \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Grp} B$ o, più semplicemente, se non si temono ambiguità, $A \cong B$ .

D35:**b.03** Un primo semplice esempio di un tale isomorfismo riguarda due gruppi simmetrici relativi a due insiemi $X_1$ ed $X_2$ con lo stesso numero $n$ di elementi.

Una qualsiasi corrispondenza biunivoca tra $X_1$ ed $X_2$ trasforma una permutazione di $X_1$ in una permutazione di $X_2$ e si verifica che questa trasformazione è un isomorfismo.

Sostanzialmente la suddetta corrispondenza biunivoca non fa che cambiare i nomi degli oggetti su cui agiscono le permutazioni. L'isomorfismo di questi due gruppi simmetrici dice che "sostanzialmente", cioè potendo prescindere dagli identificatori degli oggetti sottoposti alle trasformazioni, i due grppi hanno lo stesso comportamento.

Le caratterizzazioni essenziali di un gruppo simmetrico sono legate solo al numero di elementi sui quali agiscono le trasformazioni. Si parla quindi di gruppo simmetrico su $n$ elementi e lo si può denotare con la sctittura generica $\mathsf{Sym}_n$.
Di solito conviene stabilire che questo gruppo agisce sugli interi 0, 1, 2, ..., $n-1$ (o sugli interi 1, 2, 3, ..., $n$) e i suoi elementi si esprimono con permutazioni di queste comunissime entità.

Il gruppo $\mathsf{Sym}_n$ costituisce una certa astrazione dei gruppi simmetrici su insiemi finiti $X$ specificabili come meglio conviene.

Evidentemente si stanno semplificando espressioni che dovrebbero fare riferimento a "classi di isomorfismo di gruppi simmetrici".

D35:**b.04** La spinta all'astrazione può portare più oltre.

Si dice **gruppo** ogni sistema $\langle A, \star, ^{-1}, u \rangle$, dove $A$ è un certo insieme chiamato terreno del gruppo e $\star$ è un'operazione binaria tra i suoi elementi che soddisfa le seguenti proprietà:
– $A$ contiene un elemento unità $u$ tale che per ogn $\alpha$ di $A$: $\alpha \star u \;=\; u \star \alpha = \alpha$;
– $A$ contiene, insieme a ogni elemento $\alpha$, un elemento detto inverso dell'elemento $\alpha$ e denotato con $\alpha^{-1}$, tale che $\alpha \star \alpha^{-1} \;=\; \alpha^{-1} \star \alpha = u$;
– vale la proprietà associativa per $\star$: per ogni $\alpha, \beta, \gamma$ di $A$: $(\alpha \star \beta) \star \gamma \;=\; \alpha \star (\beta \star \gamma)$.

Si può facilmente verificare che i gruppi di trasformazioni precedenti muniti dell'operazione binaria di composizione tra trasformazioni ricadono sotto la definizione generale di gruppo.

D35:**b.05** Per studiare un gruppo $A$ in generale si prende in considerazione la sua **tavola di moltiplicazione** o **tavola di Cayley**.

Questa è la matrice del genere $\lceil A \times A \longmapsto A \rceil$ che per ogni $\alpha, \beta \in A$ fornisce il prodotto $\alpha \star \beta$.

Per esempio la tavola di Cayley del gruppo $\mathsf{Sym}_3$, previa una evidente semplificazione della scrittura delle permutazioni cicliche, è data da:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} E_3 & (0\ 1) & (0\ 2) & (1\ 2) & (0\ 1\ 2) & (0\ 2\ 1) \end{array} \\ \begin{array}{c} E_3 \\ (0\ 1) \\ (0\ 2) \\ (1\ 2) \\ (0\ 1\ 2) \\ (0\ 2\ 1) \end{array} & \begin{pmatrix} E_3 & (0\ 1) & (0\ 2) & (1\ 2) & (0\ 1\ 2) & (0\ 2\ 1) \\ (0\ 1) & E_3 & (0\ 1\ 2) & (0\ 2\ 1) & (0\ 2) & (1\ 2) \\ (0\ 2) & (0\ 2\ 1) & E_3 & (0\ 1\ 2) & (1\ 2) & (0\ 1) \\ (1\ 2) & (0\ 1\ 2) & (0\ 2\ 1) & E_3 & (0\ 1) & (0\ 2) \\ (0\ 1\ 2) & (1\ 2) & (0\ 1) & (0\ 2) & (0\ 2\ 1) & E_3 \\ (0\ 2\ 1) & (0\ 2) & (1\ 2) & (0\ 1) & E_3 & (0\ 1\ 2) \end{pmatrix} \end{array}$$

D35:**b.06** Come si è detto, esempi importanti di gruppi riguardano le trasformazioni di configurazioni geometriche che le lasciano invariate.

Consideriamo per esempio le seguenti trasformazioni che lasciano invariato il triangolo regolare avente il centro nell'origine e un vertice sull'asse verticale:

$\mathsf{E}$: identità, trasformazione che non cambia nulla;
$a$: riflessione rispetto all'asse verticale del triangolo;
$b$: riflessione rispetto all'asse che passa per il vertice inferiore sinistro;
$c$: riflessione rispetto all'asse che passa per il vertice inferiore destro;
$r_{120}$: rotazione oraria di 120° con centro nel centro del triangolo;
$r_{240}$: rotazione oraria di 240° con centro nel centro del triangolo.

Evidentemente componendo due di queste trasformazioni si ottiene un'altra trasformazione che lascia invariato il triangolo: più dettagliatamente si ha la seguente tavola di composizione:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} e & a & b & c & r_{120} & r_{240} \end{array} \\ \begin{array}{c} e \\ a \\ b \\ c \\ r_{120} \\ r_{240} \end{array} & \begin{pmatrix} e & a & b & c & r_{120} & r_{240} \\ a & e & r_{240} & r_{120} & b & c \\ b & r_{120} & e & r_{240} & a & c \\ c & r_{120} & r_{120} & e & b & a \\ r_{120} & b & c & a & r_{240} & e \\ r_{240} & c & a & b & e & r_{120} \end{pmatrix} \end{array}$$

Il gruppo individuato viene detto **gruppo del triangolo**.

Da esempi come questo si vede come la nozione di gruppo di simmetria è motivata dall'opportunità di ridurre all'essenziale le nozioni concernenti configurazioni simmetriche che si trovano nella stessa matematica (configurazioni discrete, equazioni, funzioni speciali, ...), nelle scienze (sistemi subatomici, atomici, molecolari, biochimici, fiori, piante, ...) e nell'arte (configurazioni arcaiche, motivi ornamentali classici, arte araba, idee rinascimentali, artefatti barocchi, Escher, ... ).

Ora si può osservare che il gruppo del triangolo è isomorfo a $\mathsf{Sym}_3$.
Le simmetrie di questi due diversi oggetti sono quindi governate dallo stesso gruppo astratto.

È importante osservare come questo fatto consenta ulteriori rilevanti economie di pensiero.

D35:**b.07** Un chiaro esempio di economia di pensiero realizzabile con il controllo della simmetria è dato da funzioni numeriche pari $e(x)$, cioè da funzioni tali che $e(-x) = e(x)$, e da funzioni dispari $o(x)$, cioè da funzioni tali che $o(-x) = -o(x)$.

Queste funzioni si possono studiare limitandosi ai valori $x \geq 0$, in quanto le proprietà relative a $x < 0$ si ricavano in modo automatico ed economico dalle precedenti.

## D35:c. sottogruppi di permutazioni

D35:**c.01** Introduciamo ora alcuni importanti gruppi di permutazioni come sottogruppi di gruppi simmetrici.

Il gruppo di permutazioni su un insieme $X$ costituito dalla sola identità di $X$ viene detto **gruppo identico su** $X$. Tale gruppo di ordine 1 viene denotato con $\boldsymbol{Id}_X$.

Il gruppo di tutte le permutazioni pari di un insieme finito $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ viene detto **gruppo alternante** di $X$. Tale gruppo evidentemente ha ordine $\frac{n!}{2}$ e viene denotato con $\mathrm{A}lt_X$.

D35:**c.02** Il gruppo di permutazioni sull'insieme $X$ generato dalla permutazione ciclica $C = {}_c(x_1, ..., x_k)$ viene detto **gruppo ciclico**. Tale gruppo ha ordine $k$ e viene denotato con $\mathrm{C}yg_C$.

D35:**c.03** Il gruppo di permutazioni su un insieme totalmente ordinato $C = \big\langle x_1, ..., x_k \big\rangle$ generato dalla permutazione cicli ${}_c(x_1, x_2, ..., x_k)$ e dalla involuzione $(x_1 x_p) \circ (x_2 x_{p-1}) \circ ...$, viene detto **gruppo diedrale** di $C$. Tale gruppo ha ordine $2\,k$ e viene denotato con $\mathrm{D}ih_C$.

D35:**c.04** Altri gruppi di permutazioni di un insieme $X$ sono costituiti da tutte le permutazioni che trasformano gli elementi di un certo sottoinsieme $X_1 \subseteq X$ in altri elementi di $X_1$, cioè che lasciano stabile $X_1$.
Infatti, evidentemente, ogni elemento di $X \setminus X_1$ viene trasformato in un altro elemento di questo insieme; quindi queste permutazioni rispettano la partizione di $X$ in $X_1$ e nel suo complementare. È poi evidente che applicando due trasformazioni che rispettano la bipartizione $X = X_1 \dot\cup X_2$ si rispetta ancora questa partizione.

D35:**c.05** Altri gruppi di permutazioni su $X$ sono costituiti dalle permutazioni che lasciano fissi alcuni elementi di $X$; se denotiamo con $F$ l'insieme di questi punti fissi per tutte le trasformazioni considerate si ha un gruppo che non differisce sostanzialmente da $\mathsf{Sym}_{X \setminus F}$.

D35:**c.06** Un modo di fare che consente di individuare una grande varietà di sottogruppi di gruppo $\mathsf{Sym}_X$ consiste nel restringersi alle permutazioni che non modificano qualche costruzione che si basa esclusivamente sull'insieme $X$. Infatti se si considerano due permutazioni che lasciano invariata la suddetta costruzione anche la loro composizione, l'inversa di ciascuna delle due trasformazioni e l'identità non la modificano.

Tra queste costruzioni le più semplici sono le funzioni definite su $X$ e tra queste le funzioni che rendono alcuni punti singolarmente distinguibili e quelle che distinguono gli elementi appartenenti ai diversi insiemi costituenti una partizione di $X$.
Due dei precedenti gruppi di permutazioni sono stati individuati con procedimenti di questo genere.

D35:**c.07** Un tipo di costruzione su un insieme $X$ che consente di individuare sottogruppi di $\mathsf{Sym}_X$ di grande interesse è quella consistente nel determinare un grafo avente $X$ come insieme dei vertici.

Si dice **automorfismo di un grafo** $G$ un isomorfismo di $G$ in se stesso.; quindi un automorfismo $\alpha$ di $G = \langle V, E \rangle$ è una permutazione di $V$ che preserva la relazione di adiacenza dai vertici.
Ovviamente l'automorfismo $\alpha$ di un grafo $G$ manda ogni vertice in un vertice dello stesso grado.
Dato che un qualsiasi automorfismo seguito da un altro automorfismo è ancora un automorfismo, gli automorfismi di un grafo $G = \langle V, E \rangle$ formano un gruppo detto **gruppo degli automorfismi del grafo** $G$, denotato con $\mathrm{Aut}(G)$.

Il gruppo degli automorfismi di un grafo $G = \langle V, E\rangle$ induce un altro gruppo, quello che agisce sull'insieme degli spigoli $E$ di $G$; esso viene detto **gruppo degli automorfismi sugli spigoli del grafo** $G$, e viene denotato con $\mathrm{Aut}_e(G)$,

## D35:d. operazioni sui gruppi di permutazioni

D35:**d.01** Definiamo ora alcune operazioni che a partire da gruppi di permutazioni producono altri gruppi della stessa natura.

Siano $A$ e $B$ due gruppi di permutazioni che agiscono, risp., sugli insiemi $X$ e $Y$ , e siano $v = |X|$ e $v' = |Y|$.

Come **somma dei gruppi** di $A$ e $B$ si definisce il gruppo di permutazioni denotato con $A + B$ che agisce su $X \dot\cup Y$ e i cui elementi sono tutte le coppie ordinate di permutazioni $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, che denotiamo con $\alpha + \beta$.
Ogni elemento $z \in X \dot\cup Y$ è trasformato da $\alpha + \beta$ nel modo seguente:

$$(\alpha + \beta)(z) \;=\; \begin{cases} \alpha(z) & \text{se } z \in X \\ \beta(z) & \text{se } z \in Y. \end{cases}$$

D35:**d.02** Per **prodotto dei gruppi** $A$ e $B$ si intende il gruppo di permutazioni che scriviamo $A \times B$ che agisce su $X \times Y$ e i cui elementi corrispondono alle coppie ordinate di permutazioni $\alpha \in A$ $\beta \in B$, coppie che denotiamo con $\alpha \times \beta$, applicate all'elemento $\langle x, y\rangle \in X \times Y$ forniscono

$$(\alpha \times \beta)\langle x, y\rangle = \langle \alpha(x), \beta(y)\rangle.$$

D35:**d.03** Si dice **composizione dei gruppi** $A$ con $B$ il gruppo di permutazioni che agisce su $X \times Y$ e che si denota con $A[B]$ .
Per ogni permutazione $\alpha \in A$ e per ogni successione $\langle \beta_1, \beta_2, ..., \beta_v\rangle$ costituita da $v$ permutazioni di $B$, non necessariamente distinte, esiste un'unica permutazione in $A[B]$, scritta $(\alpha; \beta_1, \beta_2, ..., \beta_v)$ tale che per ogni $\big\langle x_i, y_i\big\rangle \in X \times Y$ si ha che:

$$(\alpha; \beta_1, \beta_2, ..., \beta_v)\big\langle x_i, y_i\big\rangle = \big\langle \alpha(x_i), \beta_i(y_i)\big\rangle \ .$$

D35:**d.04** Si dice **potenza del gruppo** $B$ **elevato al gruppo** $A$ il gruppo di permutazioni denotato $B^A$ che agisce su $Y^X$, ossia sull'insieme di tutte le funzioni da $X$ in $Y$. Per ogni coppia di permutazioni $\alpha \in A$ e $\beta \in B$ definiamo come permutazione $\beta^\alpha$ la funzione appartenente a $B^A$ definita chiedendo che ad una qualsiasi funzione $f \in Y^X$ associa la funzione per la quale

$$(\beta^\alpha(f)) \;:=\; \ulcorner x \in X \mapsto \beta(f(\alpha(x))) \urcorner \ .$$

D35:**d.05** Le operazioni tra gruppi di permutazioni appena introdotte non sono del tutto differenti.

**Prop.** I tre gruppi di permutazioni $A + B$, $A \times B$ e $B^A$ sono isomorfi.

D35:**d.06** **Prop.** Dato un grafo $G = \langle V, E\rangle$, con $v$ vertici, il suo gruppo di automorfismi $\mathrm{Aut}(G)$ è $\mathsf{Sym}_v$ sse $G = \mathcal{K}_v$ o $G = \overline{\mathcal{K}}_v$.

D35:**d.07** **Prop.** Un grafo $G$ e il suo complementare hanno lo stesso gruppo di automorfismi, ossia $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Aut}(\overline{G})$ .

D35:**d.08** Per ogni grafo $G$ denotiamo con $n \cdot G$ il grafo costituito da $n$ sue copie disgiunte.

**Prop.** Dato un grafo $G$ connesso, allora $\mathrm{Aut}(n \cdot G) = Sym_n[\mathrm{Aut}(G)]$.

D35:**d.09** Veniamo a qualche risultato sulla simmetria nei grafi ottenibile da proprietà dei gruppi di automorfismi.

Due vertici $p$ e $q$ di un grafo $G$ sono detti **vertici similari** sse esiste un automorfismo $\alpha \in \text{Aut}(G) \rVert \alpha(p) = q$ .
Si dice **vertice fisso di un grafo** $G$ un suo vertice che non è similare ad alcun altro vertice di $G$.
Due spigoli $s_1 = p_1q_1$ e $s_2 = p_2q_2$ di un grafo $G$ sono detti **spigoli similari** sse esiste un automorfismo $\alpha \in \text{Aut}(G) \rVert \alpha(p_1, q_1) = p_2q_2$.

D35:**d.10** Si considerino d'ora in avanti solo grafi $G$ privi di vertici isolati.

Un grafo $G$ si dice **grafo vertice-simmetrico** sse ogni coppia di suoi vertici è similare.

Si dice invece **grafo spigolo-simmetrico** sse ogni coppia di suoi spigoli è similare.

$G$ si dice **grafo simmetrico** sse è sia vertice-simmetricochee spigol-simmetrico.

D35:**d.11** Si osserva che dato un grafo $G = \langle V, E \rangle$ e un suo automorfismo $\alpha \in \text{Aut}(G)$, per ogni vertice $p \in V$ si ha che $G - p \cong G - \alpha(p)$. Quindi se due vertici $p$ e $q$ sono similari segue che $G - p \cong G - q$.

Il viceversa non è vero. Per convincersene si osservi la seguente figura che ne mostra un controesempio:

//input pD35d11

I due sottografi $G - p$ e $G - q$ sono isomorfi, ma i due vertici $p$ e $q$ non sono similari.

D35:**d.12** Chiamiamo **grado di uno spigolo** $s = pq$ di un grafo $G$ il duetto di interi $\{d_1, d_2\}$, dove $d_1 = deg(p)$ e $d_2 = deg(q)$.

Un grafo $G$ è detto **grafo spigolo-regolare** sse tutti i suoi spigoli hanno lo stesso grado.

Per esempio i grafo bipartito completo $\mathcal{K}_{2,3}$, rappresentato in figura, è spigolo-simmetrico, non è vertice-simmetrico ed è spigolo-regolare di grado (2,3).

//input pD35d12

D35:**d.13 Teorema** Ogni grafo $G$ spigolo-simmetrico privo di punti isolati è un grafo vertice-simmetrico oppure è un grafo bipartito.

**Dim.**: Si consideri un grafo $G = \langle V, E \rangle$ spigolo-simmetrico privo di punti isolati con $e$ spigoli.
Per ogni spigolo $s = p_1\, p_2$ esistono almeno $e$ automorfismi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_e$ di $G$ che portano lo spigolo $s$ in tutti gli spigoli di $G$.
Prendiamo in considerazione gli insiemi di vertici $V_1 := \{\alpha_1(p_1), ..., \alpha_e(p_1)\}$ e $V_2 := \{\alpha_1(p_2), ..., \alpha_e(p_2)\}$.
Poiché $G$ non ha punti isolati, allora $V = V_1 \cup V_2$.

Distinguiamo i due casi:

(1) $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

(2) $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$

Nel caso (1) si considerino due vertici $p_1, q_1 \in V_1$. Se essi sono adiacenti e se $t$ è lo spigolo che li collega, allora esiste un automorfismo $\alpha$ di $G$ tale che $\alpha(s) = t$.
Questo implica che uno di questi due vertici è in $V_1$, mentre l'altro è in $V_2$, contrariamente a ciò che si era ipotizzato. Quindi $V_1$ e $V_2$ costituiscono una partizione di $V$ tale che ogni spigolo di $G$ collega due vertici dello stesso insieme; ne segue che $G$ è un grafo bipartito.

Nel caso (2) si considerino due vertici $p, q \in V$ e un vertice $p_1 \in V_1$.

Se $p$ e $q$ appartengono allo stesso insieme, per esempio a $V_1$, allora esistono due automorfismi $\alpha$ e $\beta$ di $G$ con $\alpha(p_1) = p$ e $\beta(p_1) = q$. Di conseguenza $\beta\alpha^{-1}(p) = q$ e quindi due punti qualsiasi dello stesso sottoinsieme sono similari.
Se, invece, $p \in V_1$ e $q \in V_2$, si consideri un $\overline{p} \in V_1 \cap V_2$. Poiché tale vertice è similare sia a $p$ che a $q$, allora $p$ e $q$ sono similari. Ne segue che il grafo $G$ è vertice-simmetrico ▮

D35:**d.14** **Coroll.**: Se un grafo $G$ è spigolo-simmetrico e il grado di ogni spigolo è $(d_1, d_2)$, con $d_1 \neq d_2$, allora il grafo $G$ è bipartito.

D35:**d.15** **Coroll.**: Se un grafo $G$ privo di vertici isolati, è spigolo-simmetrico, ha il numero dei vertici dispari e il grado di ogni spigolo è $(d_1, d_2)$, con $d_1 = d_2$, allora il grafo $G$ è vertice-simmetrico.

D35:**d.16** **Coroll.**: Se un grafo $G$ è spigolo-simmetrico, ha il numero dei vertici $v$ dispari ed è regolare di grado $d \geq v$, allora il grafo $G$ è vertice-simmetrico.

## D35:e. valore economico e psicologico delle simmetrie

D35:**e.01** Individuare le simmetrie di una qualsiasi struttura spesso consente rilevanti economie di pensiero; questo è importante in particolre per i grafi nonorientati entità utilizzate per molte configurazioni più elaborate utilizzate per modellizzare situazioni di elevato interesse pratico.

Si abbia da studiare un grafo complesso e si siano trovate, operando a livello astratto,sopra caratteristiche specifiche o anche con analisi empiricheo, proprietà relative a un nodo o a un raggruppamento di nodi.
La conoscenza delle simmetrie consente di estendere queste proprietà a tanti altri nodi e di raggruppare i nodi ottenibili mediante gli automorfismi noti.
Più sono gli automorfismi, cioè più è simmetrico un grafo, maggiore è l'economia realizzabile.

D35:**e.02** A questo punto si può azzardare un'interpretazione della gradevolezza che le persone trovano negli oggetti, nelle costruzioni o nei paesaggi dotati di simmetrie, in genere giudicati eleganti e pregevoli.

Molte persone riconoscono le simmetrie anche a livello istintivo e tendono a rafforzare queste loro impressioni manifestandole ad altri e giungendo a una elevata condivisione.
Si giunge quindi, anche se poco consciamente, a giudicare che un oggetto simmetrico $S$ può essere controllato più facilmente e con maggiore soddisfazione sicurezza di un oggetto privo di simmetrie e regolarità; un tale oggetto esso può essere memorizzato attraverso dati di base relativamente poco estesi e possono essere riconosciuti o intuiti meccanismi relativamente semplici che consentono di ricostruirlo interamente a partire dai suddetti dati.
Questi dati di base possono riguardare sottoinsiemi dell'oggetto contenenti insiemi ragguardevoli dei rappresentativi delle orbite dei suoi automorfismi.

Considerazioni analoghe si possono proporre per le costruzioni e i paesaggi dotati di simmetrie di rilievo.
Quindi spesso una persona, e ancor più un gruppo di persone con idee condivise, trova appagamento e sicurezza nella sensazione, più o meno conscia, di essere in grado di conoscere e dominare l'oggetto simmetrico con una certa facilità.

D35:**e.03** Si può azzardare anche una spiegazione delle sensazioni di noia e stucchevolezza che, all'opposto, spesso emergono di fronte ad artefatti troppo simmetrici, eccessivamente regolari e ripetitivi.

In molti casi può accadere che una persona percepisca un tale oggetto come troppo facile da conoscere e tale che la sua conoscenza e il suo controllo siano di poco valore.
In lui possono quindi prevalere la sensazione di inutilità dell'oggetto e il disinteresse o anche il fastidio nei confronti della sua osservazione, della sua memorizzazione e della attenzione che gli si potrebbe dedicare.

## D35:f. automorfismi di un grafo

D35:**f.01** Un **automorfismo di un grafo** $G :=: \langle Q, E\rangle$ è una permutazione del terreno $Q$ che pone in corrispondenza biunivoca gli spigoli di $E$, cioè che comporta una permutazione di $E$.
Da quanto visto in precedenza, in un automorfismo vengono a essere associati nodi aventi caratteristiche sostanziali uguali: nodi con uguale valenza, nodi dotati (o meno) di cappio, nodi isolati, nodi appartenenti a percorsi e circuiti con uguali caratteristiche, ... .

D35:**f.02** Si dice **grafo regolare** un grafo nonorientato nel quale tutti i nodi hanno la stessa valenza; molti grafi visti in precedenza sono grafi regolari.
Dato che in un isomorfismo e in un automorfismo si mantiene la valenza di ogni nodo, sono tendenzialmente più numerosi gli automorfismi tra grafi regolari di quelli che riguardano grafi non regolari.

D35:**f.03** Cinque grafi regolari di grande interesse sono quelli presentati nella figura seguente. Questi grafi sono in grado di dare talune caratteristiche essenziali dei cosiddetti **poliedri platonici**.
Questi sono i cinque poliedri regolari, poliedri convessi dotati di facce costituite da poligoni regolari equivalenti; nell'ordine di presentazione essi sono il cubo, il dodecaedro, il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro.
I grafi qui raffigurati si possono ottenere proiettando gli spigoli dei suddetti solidi da un punto $P$ della sfera nella quale ciascuno di essi può essere inscritto sul piano tangente alla sfera nel punto diametralmente opposto e successivamente rendendo opportunamente regolari vertici e spigoli.

//input pD35f03

//input pD35f03B

D35:**f.04** Un grafo che presenta molti automorfismi si dice **grafo che presenta elevate caratteristiche di simmetria**.
Questa dizione è in accordo con il significato che si dà tradizionalmente al termine simmetria e ne costituisce la giustificazione matematica.
L'insieme degli automorfismi di un grafo costituisce un buon punto di partenza per giustificare l'importanza della nozione di gruppo.

D35:**f.05** Se si hanno due automorfismi $\alpha$ e $\beta$ di un grafo $G :=: \langle Q, E\rangle$, la composizione delle due applicazioni $\alpha \circ \beta$ è anch'essa un automorfismo. Infatti il fatto che sia $\alpha_1$ che $\alpha_2$ pongano in corrispondenza biunivoca gli spigoli, implica che anche la loro composizione abbia questa proprietà.
Si osserva poi che anche la corrispondenza inversa della $\alpha$ (che sicuramente esiste in quanto $\alpha$ è una biiezione) è un automorfismo.
Infine si verifica che la identità su $Q$, cioè la corrispondenza biunivoca che a ogni nodo di $G$ associa se stesso, è un automorfismo.
Possiamo quindi affermare che gli automorfismi di un grafo muniti dell'operazione di composizione costituiscono un gruppo di permutazioni: esso è chiamato **gruppo di simmetria del grafo** $G$.

D35:**f.06** Queste considerazioni forniscono una ricca sorgente di gruppi: tracciare un grafo è piuttosto semplice e il gruppo di un grafo dotato di una buona regolarità ha molti più elementi di quanti sono i nodi del grafo stesso. Accade quindi che attraverso disegni piuttosto semplici si possono individuare gruppi assai elaborati.

## D35:g. sottografi e omomorfismi

D35:**g.01** Introduciamo ora per i grafi altre due nozioni di grande importanza, quelle di sottostruttura e di omomorfismo.
Consideriamo un grafo $G_1 = \langle Q_1, E_1 \rangle$ e $Q_2 \subset Q_1$; si dice **sottografo indotto dalla restrizion dei nodi** da $Q_1$ a $Q_2$ il grafo $\langle Q_2, E_2 \rangle$ ove $E_2$ comprende solo gli spigoli di $E_1$ che sono costituiti da soli nodi di $Q_2$.
Per esempio il sottodigrafo di:

//input pD35g01

indotto dalla restrizione dell'insieme dei nodi a $\{0, 1, 4, 5, 6\}$ è:

//input pD35g01B

D35:**g.02** Consideriamo due grafi $G_1 = \langle Q_1, E_1 \rangle$ e $G_2 = \langle Q_2, E_2 \rangle$. Si dice **omomorfismo del grafo $G_1$ su $G_2$** la corrispondenza $\omega$ di $Q_1$ su $Q_2$ tale che gli spigoli di $E_2$ si ottengono applicando $\omega$ agli spigoli di $G_1$.

Un omomorfismo tra i grafi:

//input pD35g02

è dato da:

$$\left\downarrow \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & d & a \end{matrix} \right\downarrow$$

Le due nozioni introdotte consentono di chiarire varie situazioni nelle quali un grafo viene semplificato in un altro.

//input pD35g02B

//input pD35g02C