Capitolo D33:
grafi poliedrali

Contenuti delle sezioni

13 pagine

D33:**0.01** Questo capitolo presenta i cosiddetti grafi poliedrali, grafi nonorientati interpretabili come rappresentazioni di scheletri di poliedri convessi.

Passando da un poliedro al suo grafo scheletro si effettua una rilevante semplificazione delle componenti della struttura specifica, ma non si perdono informazioni essenziali, in quanto dallo scheletro si possono dedurre tutte le proprietà della classe di isomorfismo del poliedro.
Questo rende i grafi poliedrali un importante strumento per lo studio dela geometria dei poliedri.

D33:a. insiemi convessi e politopi

D33:**a.01** Consideriamo lo spazio euclideo a d dimensioni $\mathbb{R}^d$. Se p e q sono suoi punti, denotiamo con $\sigma(p,q)$ il segmento chiuso che ha p e q come estremità, cioè $\sigma(p,q) = \{\lambda \in [0,1] :| \lambda p + (1-\lambda)q\}$.

Un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^d$ si dice **insieme convesso** sse per ogni coppia di suoi punti distinti p e q $\sigma(p,q) \subseteq P$. Denotiamo con **Cnvx** la collezione degli insiemi convessi e con Cnvx_m la collezione degli insiemi convessi a m dimensioni.

Si vede facilmente che l'intersezione di due insiemi convessi è ancora un insieme convesso.
Particolari insiemi convessi sono i sottospazi, gli **iperpiani**, cioè i sottospazi di dimensione $n-1$, i **semispazi**, sottoinsiemi dello spazio delimitati da un iperpiano, ed i **semisottospazi**, i sottoinsiemi dei sottospazi delimitati da loro iperpiani.
Tutti questi insiemi convessi sono illimitati.

D33:**a.02** Consideriamo quindi un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^{\times d}$ convesso. Un punto $p \in P$ è detto **punto estremo dell'insieme convesso** P sse non è punto interno di alcun segmento di P. L'insieme di tutti i punti estremi di P si denota con $Extm(P)$.

Si dice **iperpiano supporto di un insieme convesso** P un iperpiano π che interseca P e tale che tutti i punti di $P \setminus \pi$ si trovano in uno solo dei semispazi delimitati da π.

Le intersezioni tra P e suoi iperpiani supporto, nonché $\emptyset$ e P stesso, sono dette **facce-$*$ dell'insieme convesso** P.
P e $\emptyset$ sono dette **facce-$*$ improprie dell'insieme convesso** P. Se n denota la dimensione di P l'insieme vuoto si dice **faccia-(-1) dell'insieme convesso** P e P si chiama **insieme convesso faccia-n di se stesso**.
Si dicono poi **facce-k dell'insieme convesso** P le sue facce-$*$ a k dimensioni.
Le facce-0 di P sono i suoi punti estremi; le facce-1 di P sono i segmenti chiamati **spigoli dell'insieme convesso** P; le facce-$d-1$ sono sottoinsiemi dei piani supporto di P e sono chiamate **faccette dell'insieme convesso** P.
Ogni faccia-k di un poliedro contiene un certo numero finito di facce-$(k-1)$ e quindi un certo numero di facce-h per $h = 0, ..., k-1$.
Denotiamo con $Fc(P)$ l'insieme delle facce-$*$ di P e con $Fc_k(P)$ l'insieme delle sue k-facce.

D33:**a.03** Si dice **politopo** ogni insieme $P \subseteq \mathbb{R}^d$ compatto e tale che $Extm(P)$ sia un insieme limitato. I politopi di m dimensioni sono detti più precisamente **politopi-m**. Gli politopi-1 non sono altro che i segmenti. I politopi-2 sono i poligoni; il poligono con n vertici è detto n-agono e le sue faccette sono i suoi n spigoli.

I politopi-3 sono detti **poliedri**. L'insieme delle facce-ast di un poliedro comprende i suoi vertici, i suoi spigoli e le sue facce-2 bidimensionali; queste sono le sue faccette ma in genere vengono dette semplicemente le **facce del poliedro**.
Denotiamo con **Pltp** l'insieme dei politopi e con Pltp_d l'insieme dei politopi-d.

D33:**a.04** Le facce-$*$ di un politopo-m P ordinate per inclusione costituiscono un reticolo finito di rango m che si denota con $\mathsf{LattFc}(P)$.

Due politopi P e P' sono detti **politopi combinatorialmente equivalenti** o o anche **politopi isomorfi** sse esiste una corrispondenza biunivoca ϕ tra gli insiemi $Fc(P)$ ed $Fc(P')$ di tutte le loro facce-$*$ che preserva l'inclusione, ossia tale che

$$\forall F_1, F_2 \in Fc(P) \;:\; F_1 \subset F_2 \Longleftrightarrow \phi(F_1) \subset \phi(F_2) \ .$$

In questo caso si scrive $P \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Pltp} P'$ o più semplicemente, se la cosa non comporta ambiguità, $P \cong P'$. La precedente biiezione ϕ si dice **isomorfismo di politopi** tra P e P'.

Si vede facilmente che due politopi sono isomorfi sse lo sono i rispettivi reticoli.

D33:**a.05** Due politopi P e Q si dicono **politopi mutuamente duali** sse esiste una corrispondenza biunivoca η tra $Fc(P)$ ed $Fc(Q)$ che inverte l'inclusione, ossia tale che

$$\forall F_1, F_2 \in Fc(P) \;:\; F_1 \subset F_2 \Longleftrightarrow \eta(F_1) \supset \eta(F_2) \ .$$

Denoteremo con $Dual(P)$ il politopo duale di P.

Si vede facilmente che i reticoli di due politopi mutuamente duali sono anch'essi mutuamente duali.
Si osserva anche che se P_1 e P_2 sono entrambi politopi duali di uno stesso $P \in$ **Pltp**, allora sono combinatorialmente equivalenti. Un politopo isomorfo a un suo duale, e quindi isomorfo a ogni suo duale, si dice **politopo autoduale**.

D33:b. poliedri

D33:**b.01** Nel seguito tratteremo solo poliedri convessi e per brevità lasceremo sottinteso l'aggettivo convesso.
Con il termine facce-$*$ di un poliedro intendiamo la struttura costituita dal vuoto, dai suoi vertici, dai suoi spigoli, dalle sue facce e dal poliedro stesso e dalle relazioni che intercorrono tra queste entità.

Lo studio dei poliedri è molto più facile e ricco di risultati di quello dei politopi di maggiori dimensioni, anche in virtù della possibilità di visualizzarli molto più agevolmente dei politopi di dimensioni superiori a 3.

D33:**b.02** Per ogni poliedro P si può costruire facilmente un suo **poliedro duale** P^*. Come vertici di P^* si assumono dei punti b_F delle diverse facce F di P (se interessano proprietà metriche possono essere vantaggiosi i baricentri delle facce).
Di conseguenza facce di P e vertici di P^* sono in corrispondenza biunivoca.
Come spigoli di P^* si assumono i segmenti $\sigma(b_F, b_{F'})$ tali che le relative facce F ed F' si intersecano in uno spigolo comune; gli spigoli $\sigma(b_F, b_{F'})$ di P^* sono quindi in corrispondenza biunivoca con gli spigoli $F \cap F'$ di P.
Risultano in corrispondenza biunivoca anche le facce di P^* ed i vertici di P.

Si verifica facilmente la proprietà che segue.

Prop. **LattFc**(P^*), il reticolo delle facce del poliedro duale di P, è il reticolo duale di **LattFc**(P) ▮

D33:**b.03** Esempi famosi di poliedri sono i cinque **solidi platonici**, così chiamati perché sono citati per la prima volta da Platone, nel suo dialogo "Timeo".

Essi sono il **tetraedro**, l'**esaedro** o **cubo**, l'**ottaedro**, il **dodecaedro** l'**icosaedro**, dove i prefissi "tetra", "esa", "otta", "dodeca" e "icosa" caratterizzano il numero delle loro facce, risp. 4, 6, 8, 12 e 20.

Più completamente per i poliedri platonici si ha il seguente quadro:

	vertici	spigoli	facce
tetraedro	4	6	4
esaedro o cubo	8	12	6
ottaedro	6	12	8
dodecaedro	20	30	12
icosaedro	12	30	20

D33:**b.04** Osserviamo che nelle definizioni precedenti i termini al singolare possono individuare poliedri astratti, cioè classi di isomorfismo di poliedri, oppure singoli poliedri tipici rappresentanti delle suddette classi.

Come vedremo i precedenti sono sono gli unici **poliedri regolari convessi** astratti, ossia le uniche classi di poliedri nelle quali si trovano rappresentativi dotati di facce regolari, tutte congruenti tra loro, aventi ai loro vertici degli **angoloidi regolari**; questi angoloidi sono mutuamente congruenti ed hanno una unica ampiezza per gli angoli formati da coppie di loro spigoli che appartengono a una faccia del poliedro e una unica ampiezza per gli angoli diedri definiti da due facce adiacenti.

D33:**b.05** Tra i poliedri platonici si osserva poi che il tetraedro, è autoduale, il cubo e l'ottaedro formano una coppia duale, così come la costituiscono il dodecaedro e l'icosaedro.

//input pD33

D33:**b.06** La geometria elementare fornisce vari esempi di successioni di poliedri; cominciamo dalle più semplici e note.

Si dice **piramide** n**-gona** per $n = 3, 4, ...$ il poliedro costituito da un n-agono di base, un vertice principale estraneo al piano della base ed n facce triangolari ciascuna definita da un lato del poligono di base e dal vertice principale; denotiamola con Pir_n.

Si dice **prisma** n**-gono** per $n = 3, 4, ...$ il poliedro costituito da due n-agoni di base che conviene pensare congruenti, posti su piani paralleli e ottenibili l'uno dall'altro per spostamento ortogonale ai due piani, ed n facce quadrilatere, nei casi più semplici da trattare facce rettangolari, ciascuna definita da due lati corrispondenti dei due poligoni di base; denotiamolo con $Prsm_n$.

D33:**b.07** Introduciamo ora alcune operazioni che consentono di trasformare un poliedro in uno un po' più complesso o un po' più semplice.

Sopra una faccia qualsiasi con n lati di ognipoliedro si può collocare una piramide n-agona avente altezza opportunamente ridotta in modo da mantenere la convessità. A questa **aggiunta di piramide** corrisponde la operazione inversa della **eliminazione di piramide**.

Un vertice qualsiasi con n spigoli incidenti può essere eliminato intersecando il poliedro con un semispazio delimitato da un piano sufficientemente vicino al vertice stesso, tale da contenere tutti gli altri vertici del poliedro: il poliedro ottenuto presenta una faccia in più, n spigoli in più ed $n - 1$ vertici in più.
A questo **smussamento di vertice** corrisponde l'operazione inversa del **completamento di angoloide**, caso limite di aggiunta di piramide.

D33:**b.08** **Prop.** L'intersezione di due o più poliedri convessi è un poliedro convesso.

Dim.: In effetti un poliedro convesso è definibile come intersezione di un numero finito di semispazi e quindi l'intersezione di due o più poliedri è ancora esprimibile come intersezione di semispazi, cioè è un poliedro convesso ▮

D33:**b.09** Anche l'intersezione di poliedri noti consente di ottenere nuovi interessanti poliedri.
Con le operazioni precedenti si possono di definire altre successioni di poliedri.

Si dice **bipiramide** n**-gona** per $n = 3, 4, ...$ il poliedro ottenuto facendo coincidere le basi di due piramidi n-agone con basi congruenti in modo che i vertici principali si trovino nei due diversi semispazi definiti dalle basi fatte coincidere; questo poliedro si può considerare ottenuto da Pir_n per aggiunta alla sua base di un'altra piramide; denotiamola con $Bpir_n$.

Si dice **piramide su prisma** n**-gona** per $n = 3, 4, ...$ il poliedro ottenuto per aggiunta di una piramide a una base del prisma $Prsm_n$; denotiamola con Pipr_n.

Si dice **biprisma** n**-gona** per $n = 3, 4, ...$ il poliedro ottenuto facendo coincidere le basi maggiori, supposte congruenti, di due tronchi di piramide n-gonali; denotiamola con $Bprsm_n$.
Questo poliedro si può ottenere smussando il vertice della piramide di Pipr_n.

Si dice **bipiramide con prisma** n**-gona** per $n = 3, 4, ...$ il poliedro ottenuto aggiungendo alle basi di $Prsm_n$ due piramidi; denotiamola con $Piprpi_n$.

Si dice **bipiramide ruotata** n**-gona** per $n = 3, 4, ...$ il poliedro ottenuto considerando una piramide n-agona che conviene pensare retta e a base regolare, ottenendo una seconda piramide mediante riflessione della prima rispetto al piano della sua base e rotazione della sua base di π/n, avvicinando le due piramidi e intersecandole; denotiamolo con $Bpirr_n$. Osserviamo che questo poliedro ha $2\,n$ facce quadrilatere.

D33:**b.10** Si dice **tamburo a facce laterali triangolari n-gono** per $n = 3, 4, ...$ il poliedro costituito da due basi n-agonali, che conviene visualizzare regolari, poste su piani paralleli e ottenute l'una dall'altra con uno spostamento ortogonale ai due piani seguito da una rotazione di π/n, e da $2n$ facce triangolari, ciascuna individuata da uno spigolo di una base e dal vertice più vicino dell'altra base; denotiamolo con $Drmtri_n$.

Si dice **tamburo a facce laterali pentagonali n-gono** per $n = 3, 4, ...$ il poliedro costituito da due basi n-agonali che conviene immaginare regolari, poste su piani paralleli e ottenute l'una dall'altra con uno spostamento ortogonale ai due piani seguito da una rotazione di π/n, e da $2n$ facce pentagonali ciascuna formata da uno spigolo di una base e da tre vertici facenti parte di una poligonale "quasi equatoriale" formata da vertici collocati tra le due basi; denotiamolo con $Drmpnt_n$.

Si dice **tamburo a facce laterali triangolari piramidato n-gono** per $n = 3, 4, ...$ il poliedro ottenuto da $Drmtri_n$ aggiungendo una piramide n-agona su una delle due basi; denotiamolo con $Drmtrip_n$.

Si dice **tamburo a facce laterali pentagonali piramidato n-gono** per $n = 3, 4, ...$ il poliedro ottenuto da $Drmpnt_n$ aggiungendo una piramide n-agona su una delle due basi; lo denotiamo con $Drmpntp_n$.

Si dice **tamburo a facce laterali triangolari bipiramidato n-gono** per $n = 3, 4, ...$ il poliedro ottenuto da $Drmtri_n$ aggiungendo una piramide n-agona su ciascuna delle due basi; lo denoteremo con $Drmtripp_n$.

Si dice **tamburo a facce laterali pentagonali bipiramidato n-gono** per $n = 3, 4, ...$ il poliedro ottenuto da $Drmpnt_n$ aggiungendo una piramide n-agona su ciascuna delle due basi; lo denotiamo con $Drmpntpp_n$.

D33:**b.11** Per i parametri principali di questi poliedri si trova facilmente il seguente quadro:

poliedro	vertici	spigoli	facce
Pir_n	$n+1$	$2n$	$n+1$
$Prsm_n$	$2n$	$3n$	$n+2$
$Bpir_n$	$n+2$	$3n$	$2n$
Pipr$_n$	$2n+1$	$3n$	$2n+1$
$Bprsm_n$	$3n$	$5n$	$2n+2$
$Piprpi_n$	$2n+2$	$5n$	$3n$
$Bpirr_n$	$2n+2$	$4n$	$2n$
$Drmtri_n$	$2n$	$4n$	$2n+2$
$Drmpnt_n$	$4n$	$6n$	$2n+2$
$Drmtrip_n$	$2n+1$	$5n$	$3n+1$
$Drmpntp_n$	$4n+1$	$7n$	$3n+1$
$Drmtripp_n$	$2n+2$	$6n$	$4n$
$Drmpntpp_n$	$4n+2$	$8n$	$4n$

D33:**b.12** Un poliedro è detto **poliedro simpliciale** sse tutte le sue facce sono triangolari.
Esempi di poliedri simpliciali sono il tetraedro, l'ottaedro, l'icosaedro, le bipiramidi e i $Drmtripp_n$.

I poliedri platonici si riconoscono in alcune delle precedenti successioni. A questo proposito si trovano le seguenti uguaglianze tra poliedri astratti:

tetraedro (Ttd) $=$ Pir_3;

cubo (Cb) = $Prsm_4 = Bpirr_4$;

ottaedro (Otd) = $Bpir_4$;

dodecaedro (Ddd) = $Drmpnt_5$;

icosaedro (Icd) = $Drmtripp_5$.

Inoltre per ogni $n \geq 3$ sono autoduali tutte le piramidi e tutti i **Pipr**$_n$, mentre costituiscono successioni di coppie duali $Prsm_n$ e $Bpir_n$, $Piprpi_n$ e $Bprsm_n$, $Bpirr_n$ e $Drmtri_n$, $Drmpnt_n$ e $Drmtripp_n$.

D33:**b.13** Presentiamo anche altri tipi di poliedri che chiameremo **plinti** n,k-**agoni** (con $n > k$) e denotati con $Plnt_{n,k}$.
Essi sono costituiti da due poligoni di base, un n-agono e un k-agono, che conviene pensare posti su piani paralleli (la inferiore con n spigoli e la superiore con k) da k facce quadrilatere ciascuna comprendente un lato della base superiore e il lato opposto appartenente alla inferiore, e da $n-k$ facce triangolari ciascuna definita da uno dei lati della base inferiore non facente parte di un quadrilatero e da un vertice della base superiore.

Si può notare come, fissati i valori di n e k, si possono avere plinti $n.k$-agoni non isomorfi. Per esempio vi sono due plinti 5,3-agoni: quello con le due facce triangolari laterali adiacenti e quello con le due facce triangolari laterali non adiacenti.
Quindi per distinguere i vari plinti n,k-agoni bisogna aggiungere altre informazioni ad k ed n.

D33:**b.14** Osserviamo che un plinto n,k-agono è caratterizzato dalla **classe di roto-riflessione**, in breve **classe-rm**, a cui appartiene la sequenza $\langle v_1, ..., v_k \rangle$ delle valenze degli k vertici della base superiore. In effetti il fatto che il vertice i-esimo abbia valenza v_i corrisponde al fatto che in esso incidono $v_i - 3$ facce triangolari laterali.
Osserviamo che $\sum_{i=1}^{k} v_i - 3 = n-k$, numero delle facce laterali triangolari. Quindi invece della precedente classe-rm di sequenze, si può considerare la classe-rm delle sequenze di interi nonnegativi aventi somma $n-k$, oppure la classe-rm delle sequenze di interi positivi aventi somma n.
Queste ultime possono essere rappresentate dalle cosiddette **partizioni-rm** di n aventi lunghezza n, sequenze che occupano la prima posizione secondo l'ordine lessicografico noncrescente nella rispettiva classe. Queste partizioni-rm consentono di individuare univocamente le classi-rm dei plinti.
Il plinto n,k-agono, caratterizzato dalla partizione-rm $\langle V_1, ..., V_k \rangle$ di k elementi la cui somma è n, viene denotato con $Plnt_{\langle V_1,...,V_k \rangle}$.
Per esempio i quattro plinti 7-3-agoni caratterizzati dalle partizioni -rm $\langle 5,1,1 \rangle$, $\langle 4,2,1 \rangle$,$\langle 3,3,1 \rangle$ e $\langle 3,2,2 \rangle$ vengono denotati con $Plnt_{\langle 5,1,1 \rangle}$, $Plnt_{\langle 4,2,1 \rangle}$, $Plnt_{\langle 3,3,1 \rangle}$ e $Plnt_{\langle 3,2,2 \rangle}$.

D33:c. poliedri e grafi poliedrali

D33:**c.01** Come giã segnalato, lo studio dei poliedri è notevolmente facilitato dalla possibilità di porre in corrispondenza ciascuno dei poliedri astratti P con un grafo semplice sul quale si possono individuare tutte le sue proprietà combinatorie.

Si dice **scheletro del poliedro** P, e si denota con $Skl(P)$, la coppia costituita dall'insieme dei suoi vertici e dall'insieme dei suoi spigoli $Skl(P) = \langle Fc_1(P), Fc_2(P)\rangle$.

D33:**c.02** Scegliamo una faccia F del poliedro P, il piano H contenente F e i due semispazi delimitati da F, S' contenente P ed S''.
Nel semispazio S' fissiamo un piano K parallelo ad H e non intersecante P: il poliedro è quindi contenuto tra H e K.
Si considera poi un punto c contenuto nel semispazio S'' "molto vicino" al baricentro di F. La proiezione avente come centro c dello scheletro di P sul piano K risulta essere la raffigurazione piana di un grafo semplice che viene chiamato **diagramma di Schlegel del poliedro** P, basato sulla faccia F e che si denota $Schl_F(P)$.
Il grafo astratto che viene raffigurato con questo diagramma viene detto **grafo di Schlegel** e si denota $Schl(P)$. Un processo inverso porta da un $Schl(P)$ a un poliedro isomorfo a P e viene detto **realizzazione del grafo di Schlegel** $Sch(P)$ mediante il poliedro P.

//input pD33

D33:**c.03** Evidentemente il grafo $Schl(P)$ non dipende dalla scelta della faccia F. Inoltre esso non cambia trasformando un poliedro in un suo isomorfo. Esso quindi è in grado di fornire le proprietà combinatorie di ogni poliedro dal quale proviene, ovvero di ogni poliedro nel quale si realizza.

Si dice **grafo poliedrale** ogni grafo che può assumere il ruolo di grafo di Schlegel $Sch(P)$ di un poliedro P.
Lo studio dei grafi poliedrali consente di conoscere molti fatti riguardanti i poliedri; viceversa alcune proprietà di un grafo poliedrale vengono rese più chiare considerando una sua realizzazione mediante un poliedro.
È quindi proficuo approfondire i rapporti tra poliedri e grafi poliedrali.

È interessante conoscere quali condizioni rendono un grafo poliedrale.
In effetti i poliedri hanno molte applicazioni, per esempio nello studio di cristalli, di molecole e di strutture meccaniche, e taluni aspetti di questi sistemi complessi sono meglio chiariti e calcolati facendo riferimento ai grafi di Schlegel.

D33:**c.04** Ovviamente ogni grafo poliedrale G deve essere connesso e semplice e ogni suo vertice deve avere almeno grado 3, in quanto ogni vertice di un poliedro fa parte almeno di 3 delle sue facce.

I diagrammi di Schlegel di due poliedri P e P^* mutuamente duali, costituiscono una coppia di grafi duali geometrici nel senso di 21:d .
Inoltre un grafo poliedrale deve essere immergibile in una sfera ed è quindi deve essere planare. Valgono, quindi, per esso le proprietà viste in 21C. e 21D che qui richiamiamo.

Per un poliedro P con v vertici, e spigoli ed f facce si ha: $f + v - e = 2$.

Per un poliedro simpliciale con v vertici, e spigoli ed f facce, valgono le seguenti due uguaglianze: $e = 3v - 6 \qquad f = 2v - 4$.

Per un poliedro generico, invece, con v vertici, e spigoli ed f facce, valgono le seguenti due disuguaglianze: $e \leq 3v - 6 \qquad f \leq 2v - 4$.

Inoltre, in conseguenza della dualità: $e \leq 3f - 6 \qquad v \leq 2f - 4$.

D33:**c.05** La figura che segue rappresenta schematicamente nel piano (v, f) l'esistenza di poliedri. Si noti che il tetraedro, etichettato con T, è il più semplice poliedro, che i poliedri simpliciali e i loro duali, etichettati con S, sono sulla frontiera che delimita la regione e che le piramidi, etichettate con P, come tutti i poliedri autoduali, appartengono alla bisettrice del piano (v, f).

//input pD33

D33:d. caratterizzazione dei grafi poliedrali

D33:**d.01** Presentiamo ora una condizione necessaria per la poliedralità di un grafo più stringente di quelle viste in precedenza.

D33:**d.02** **Teorema** (**teorema di Balinski 1961**) Ogni grafo di Schlegel $Schl(P)$ di un poliedro P è un grafo connesso-3.

Dim.: Siano v_1 e v_2 due vertici di P e sia $G' := Schl(P) - v_1$ il sottografo del grafo di Schlegel ottenuto rimuovendo v_1. Usando il teorema di Whitney. ci proponiamo di dimostrare che G' è connesso.
Sia M l'insieme di tutte le combinazioni lineari di v_1 e v_2 e consideriamo $\mathsf{Intrn}(P)$, l'insieme dei punti interni di P.
Si distinguono due casi: (i) $M \cap \mathsf{Intrn}(P) = \emptyset$ (ii) $M \cap \mathsf{Intrn}(P) \neq \emptyset$.

Nel caso (i) si considerino la faccia $F = M \cap P$, il piano di supporto H del poliedro P tale che $H \cap P = F$ e un altro piano di supporto H' di P parallelo ad H.
Per ogni vertice v di P ci sono due possibilità: aut $v \in H'$, aut esiste un vertice v' di P, adiacente a v e più vicino ad H' di v. Ne segue che ogni vertice di P, diverso da v_1 e v_2, è connesso da un percorso in G' a un qualsiasi vertice di $H' \cap P$; dato che $H' \cap P$ è un poligono, il suo grafo è un sottografo connesso di G' e quindi G' è connesso.

Nel caso (ii) si considerino il piano di supporto H del poliedro P contenente M e almeno un vertice v_3 di P non appartenente a M e due altri piani di supporto H' e H'' di P paralleli ad H.
Argomentando come nel caso precedente, considerando prima la parte di P contenuta nella regione delimitata da H e H' e poi quella racchiusa dalla regione delimitata da H e H'', si conclude che ognuno dei corrispondenti sottografi di G' è connesso e, dato che hanno in comune il vertice v_3, il grafo G' è connesso ▮

D33:**d.03** Una caratterizzazione completa della poliedralità di un grafo è data dal seguente classico risultato.

Teorema (**teorema di Steinitz 1922**) Un grafo G è poliedrale sse è planare e connesso-3.

Dim.: Quanto visto in precedenza rende piuttosto semplice la dimostrazione che un grafo poliedrale $Skl(P)$ deve essere planare e connesso-3.
Il fatto che ogni grafo di Schlegel sia un'immersione in un piano di $Skl(P)$ assicura, infatti, la planarità; il teorema di Balinski assicura la connettività-3.

La dimostrazione che un grafo planare e connesso-3 G è realizzabile mediante un poliedro viene condotta per induzione sul numero e di spigoli di G.

L'ipotesi che G sia connesso-3 implica che $e \geq 6$; inoltre $e = 6$ sse il grafo G è un grafo completo con quattro vertici; quindi, in questo caso, G è poliedrale, poiché è il diagramma di Schlegel del tetraedro.

Consideriamo, quindi, $e \geq 7$ e svolgiamo la dimostrazione in tre fasi.

(i) Usando una "doppia enumerazione di incidenze", si mostra che ogni grafo G considerato possiede elementi di grado 3, ossia vertici di grado 3 oppure facce triangolari.

(ii) Per ogni grafo G, planare e connesso-3, e per ogni elemento di grado 3 di G si costruisce un nuovo grafo G', planare e connesso-3, tale che da una qualsiasi realizzazione di G' attraverso un poliedro P', può essere costruito un poliedro P che realizza G.
La procedura per ottenere da G il grafo G' verrà chiamata "riduzione".

(iii) Se il grafo G possiede un vertice di grado 3 incidente a una faccia triangolare, allora esiste una riduzione che lo trasforma in un grafo G' che possiede meno spigoli di G; in questo caso, quindi, per l'induzione, la dimostrazione è completa.
Se, invece, G non possiede un cosiffatto vertice, allora si dimostrerà che esiste una sequenza finita di riduzioni tale che, una volta applicata a G, il grafo G' ottenuto possiede il vertice cercato, ossia un vertice di grado 3 incidente a una faccia triangolare.

D33:**d.04** (i) Si consideri un poliedro P con $v = v(P)$ vertici, $e = e(P)$ spigoli ed $f = f(P)$ facce; inoltre denotiamo con v_k il numero dei vertici di P di valenza k e con f_k il numero delle facce di P con k spigoli.
Quindi $v = \sum_{k\geq 3} v_k$ e $f = \sum_{k\geq 3} f_k$. Contando il numero di incidenze tra spigoli e facce e tra vertici e facce, si ottengono, risp., $2\,e = \sum_{k\geq 3} k\,f_k$ e $2\,e = \sum_{k\geq 3} kv_k$.
Combinando le due equazione con l'equazione di Eulero $v - e + f = 2$ otteniamo:

$$\sum_{k\geq 3} k\,v_k + \sum_{k\geq 3} k\,f_k = 4\,e \;=\; 4\,v + 4\,f - 8 \;=\; 4\sum_{k\geq 3} v_k + \sum_{k\geq 3} f_k - 8\ .$$

Di conseguenza:

$$v_3 + f_3 \;=\; 8 + \sum_{k\geq 5}(k-4)(v_k + f_k) \geq 8\ ,$$

cioè ogni poliedro P possiede almeno otto elementi di grado 3.

Ovviamente il discorso fatto può essere applicato a ogni grafo planare connesso che non abbia vertici di grado 2; può essere quindi applicato a ogni grafo planare connesso-3.

D33:**d.05** (ii) Si consideri la riduzione, che trasforma il grafo G nel grafo G', cosí definita:

(1) vengono rimossi un vertice di grado 3 di G e gli spigoli a esso incidenti; i tre vertici a esso connessi in G vengono connessi a due a due da nuovi spigoli, se non erano già connessi in G.
I quattro possibili casi sono illustrati nella seguente figura:

//input pD33

(2) i tre spigoli di una faccia triangolare vengono rimossi ed i tre vertici vengono collegati a un nuovo vertice; se con questa azione si genera un vertice di valenza 2, lo si rimuove e i due spigoli incidenti a esso vengono unificati.
I quattro possibili casi sono presentati nella seguente figura:

//input pD33

Il grafo G' così ottenuto è anch'esso planare e connesso-3.

Sia P' il poliedro con diagramma di Schlegel G'; ci si propone di costruire il poliedro P il cui diagramma di Schlegel è G.
Nel caso delle riduzioni h_i della figura precedente, tagliando il nuovo vertice di P' con un piano appropriato, si ottiene il poliedro P; nel caso, invece, delle riduzioni k_1, k_2 e k_3, P è la copertura convessa dell'unione di P' con un appropriato punto v, ossia è l'intersezione di tutti gli insiemi convessi di $\mathbb{R}^3$ che contengono $P' \cup v$.

Il punto v si trova all'esterno della faccia di P' che corrisponde al nuovo triangolo di G' e, se la riduzione operata è k_3, si trova all'interno di tutte le altre facce di P', mentre se la riduzione operata è k_1 o k_2, il punto v si trova all'interno di tutte le altre facce eccetto una.
Infine, nel caso della riduzione k_0, il poliedro P è la copertura convessa dell'unione di P' con il punto v determinato dall'intersezione dei piani delle tre facce di P' adiacenti al nuovo triangolo, purché v sia all'esterno del nuovo triangolo.
Nel caso in cui i tre piani in questione sono paralleli o l'intersezione di questi viene a trovarsi all'interno della faccia triangolare di P', è necessario applicare a P' una trasformazione proiettiva tramite la quale il trasformato di P' soddisfa le condizioni richieste.
Quindi, in tutti i casi la realizzabilità della riduzione G' di G implica la realizzabilità di G.

D33:**d.06** (iii) Si noti che se il grafo G possiede un vertice di grado 3 incidente a una faccia triangolare a esso è possibile applicare una delle riduzioni k_i o h_i, per $i = 1, 2, 3$.

Poiché G' contiene i spigoli in meno rispetto a G se è ottenuto da G attraverso k_i o h_i, segue che la dimostrazione per induzione del teorema è completa per tutti i grafi G ai quali sono applicabili k_i o h_i, con $i = 1, 2, 3$.

Nel caso in cui, invece, al grafo G non è applicabile nessuna delle riduzioni k_i o h_i, per i=1,2,3, ossia quando G non possiede un vertice di grado 3 incidente a una faccia triangolare, si dimostra che è possibile ottenere da esso un grafo a cui alcune di queste riduzioni sono applicabili, facendo agire su G una sequenza finita di riduzioni k_0 e h_0.
Per questo scopo definiamo, a partire da G, un grafo che denotiamo $I(G)$: i suoi vertici sono associati biunivocamente agli spigoli di G; due vertici di $I(G)$ sono adiacenti sse i due spigoli di G corrispondenti hanno un vertice in comune e sono incidenti alla stessa faccia.
Chiaramente $I(G)$ è planare, connesso-3 e tetravalente; $\boldsymbol{Face}(I(G))$ è in corrispondenza biunivoca con l'unione dell'insieme delle facce di G e degli spigoli di G, $\boldsymbol{Face}(G) \cup \boldsymbol{Edg}(G)$.
Inoltre, un vertice e una faccia di G sono incidenti sse le corrispondenti facce di $I(G)$ hanno una spigolo in comune e una faccia di k vertici di $I(G)$ è in corrispondenza con una faccia di k vertici di G o con un suo nodo di grado k.

D33:**d.07** Per il seguito della dimostrazione è opportuno introdurre altre definizioni per i grafi planari.

Si dice **estensione diretta di un lato** ab **di un grafo planare** G un lato bc tale che il cammino abc separi altri due lati incidenti a b.
Un percorso $a_0a_1...a_n$ in G è detto **arco geodesico di un grafo** sse per ogni $i = 1, ..., n$ $a_{i-1}a_i$ ha $a_i\, a_{i+1}$ come estensione diretta.
Un sottografo L di un grafo planare G è detto **calotta del grafo** (*lens*) sse:
(1) L è costituito da un percorso chiuso $\mathcal{L} := a_0a_1...a_nb_0b_1...b_ma_0$, chiamato **frontiera del sottografo** L, e da tutti i vertici e spigoli di G, chiamati, risp., **vertici interni** e **spigoli interni** a $\mathcal{L}$ e contenuti in una delle componenti connesse del complemento di $\mathcal{L}$ nella sfera;
(2) $\mathcal{L}$ è formato da due archi geodesici $a_0a_1...a_nb_0$ e $b_0b_1...b_ma_0$ tali che nessuno degli spigoli interni di $\mathcal{L}$ sia incidente ai cosiddetti poli a_0 e b_0 di $\mathcal{L}$.
Una calotta si dice **calotta indecomponibile** sse non esistono calotte di G propriamente contenute in L.
Si osservi che ogni grafo G planare, connesso-3 e 4-valente possiede almeno una calotta e che il numero di facce di una calotta indecomponibile è almeno 2.

D33:**d.08** Si denoti con $g(G)$ il numero minimo di facce di una calotta indecomponibile L nel grafo $I(G)$ sopra definito.

Se $g(G) = 2$, allora G contiene una faccia triangolare incidente a un nodo di valenza 3. Si deve quindi mostrare come applicare una riduzione del tipo k_0 o h_0 a un grafo G con $g(G) > 2$ in modo da ottenere un grafo G' con $g(G') < g(G)$.

Si può dimostrare che ogni calotta indecomponibile contiene una faccia triangolare T incidente alla frontiera $\mathcal{L}$ di L.
Sia, quindi, T un triangolo in L, calotta contenuta nel grafo $I(G)$; a seconda che T corrisponda a una faccia triangolare o a un nodo di grado 3 di G, una delle due riduzioni h_0 o k_0 possono essere applicate. Se T è incidente solamente a uno dei due archi geodesici

//input pD33

che formano la frontiera di L, allora il passaggio dalla prima alla seconda figura mostra che $g(G') < g(G)$ nel caso in cui T corrisponda a una faccia triangolare di G (L giace sotto la linea L_1), mentre il passaggio opposto illustra la stessa cosa nel caso in cui T sia un nodo di grado 3 di G (L si trova sopra la linea L_1).
Se T è incidente a un polo di L, vale la stessa relazione, con la sola differenza che L in questo caso è sopra o sotto, risp., il cuneo formato dalle linee L_2 e L_3 ▮