Capitolo D32:
grafi e connettività

Contenuti delle sezioni

8 pagine

D32:**0.01** Questo capitolo presenta la proprietà della connettività dei grafi nonorientati, esaminando soprattutto sui cosiddetti grafi connessi-3.

D32:a. connettività per vertici e per spigoli

D32:**a.01** La **connettività di un grafo nonorientato**, più precisamente la connettività per vertici, è data dal numero minimo di vertici del grafo la cui rimozione lo disconnette, cioè porta a un grafo nonconnesso o al grafo nodo. Questo parametro del grafo G si denota con $cnty(G)$.

Chiaramente la connettività di un grafo è 0 sse esso è non connesso, mentre la connettività di un grafo connesso è 1 sse esso presenta almeno un vertice di taglio. In particolare è 1 la connettività degli alberi con 2 o più nodi.

Consideriamo il grafo completo $\mathcal{K}_v$: rimuovendo un qualsiasi sottoinsieme costituito da $h \leq v-2$ suoi vertici si ottiene $\mathcal{K}_{v-h}$ e quindi esso non può essere disconnesso; con la rimozione di $v-1$ vertici si ottiene invece il grafo banale; se ne deduce che $cnty(\mathcal{K}_v) = v-1$.

D32:**a.02** Si dice **connettività per spigoli di un grafo** G, e si denota con $ecnty(G)$, il minimo numero di spigoli la cui rimozione dà un grafo non connesso o il grafo nodo.

Evidentemente un grafo ha connettività per spigoli 0 sse è non connesso, mentre ha connettività per spigoli 1 sse è dotato esattamente di un ponte.

Nelle questioni di connettività i cappi e gli spigoli paralleli non hanno alcuna influenza; quindi è opportuno limitarsi a studiare la connettività per spigoli dei grafi semplici.

D32:**a.03** Connettività, connettività per spigoli e grado minimo sono collegati da una disuguaglianza.

Teorema (**teorema di Whitney, 1932**) Per ogni grafo G semplice si ha:

$$cnty(G) \leq ecnty(G) \leq mindeg(G) \ .$$

Dim.: " $ecnty(G) \leq mindeg(G)$ "
Se G è privo di spigoli, allora $ecnty(G) = mindeg(G) = 0$.
In caso contrario si ottiene un grafo sicuramente non connesso rimuovendo tutti gli spigoli incidenti al vertice di valenza minima.
In entrambi i casi $ecnty(G) \leq mindeg(G)$.

" $cnty(G) \leq ecnty(G)$ " Consideriamo tre casi.
Se il grafo G è non connesso o banale, allora $cnty(G) = ecnty(G) = 0$.
Se G è connesso ed ha un ponte x, allora $ecnty(G) = 1$; in questo caso $cnty(G) = 1$ poiché: o il grafo G possiede un vertice di taglio incidente a x, oppure G è $\mathcal{K}_2$.
Infine, si supponga $ecnty(G) \geq 2$ e si consideri un insieme R di $ecnty(G)$ spigoli la cui rimozione porta alla sconnessione; la rimozione di $ecnty(G)-1$ spigoli scelti in R conduce a un grafo che possiede un ponte $x = pq$. Per ognuno di questi $ecnty(G)-1$ spigoli, si scelga un vertice incidente diverso da p e da q; la rimozione di questi vertici rimuove certamente gli $ecnty(G)-1$ spigoli e in genere ne rimuove altri.
Se il grafo ottenuto non è connesso, allora $cnty(G) < ecnty(G)$; altrimenti, essendo x un ponte, o la rimozione di p o quella di q porta a un grafo non connesso o al grafo banale; in entrambi i casi $cnty(G) \leq ecnty(G)$ ▮

D32:**a.04** Un grafo G si dice **connesso-k** o connesso-k per vertici sse $cnty(G) \geq k$; si dice invece **connesso-k per spigoli** sse $ecnty(G) \geq k$.
Si osservi che un grafo G non banale è connesso-1 sse è connesso, mentre è connesso-2 sse è un blocco diverso da $\mathcal{K}_2$.

Si noti che, se $k < j$, un grafo connesso-k è sicuramente connesso-j e che un grafo connesso-k per spigoli è sicuramente connesso-j per spigoli.

D32:b. caratterizzazione dei grafi connessi-3

D32:**b.01** Affrontiamo in questo paragrafo la questione piuttosto impegnativa della caratterizzazione dei grafi connessi-k e, in particolare quella, dei grafi connessi-3.

D32:**b.02** **Teorema** (**teorema di Whitney, 1933**) Un grafo G è connesso-k sse è connesso ciascuno dei sottografi di G ottenuto mediante la rimozione di $k-1$ vertici scelti in tutti i possibili modi.

D32:**b.03** Si introducono ora le nozioni di separazione e di contrazione.

Si dice **separazione-k di un grafo** $G = \langle V, E\rangle$ una tripartizione dei suoi vertici $V = V_a \dot\cup V_c \dot\cup V_b$ con $|V_c| \leq k$ la quale, definiti $V' := V_a \dot\cup V_c$ e $V'' := V_b \dot\cup V_c$, induce la bipartizione dei suoi spigoli $E = E' \dot\cup E''$, ove $E' := E \cap V' \times_s V'$ ed $E'' := E \cap V'' \times_s V''$.
V_c si dice **insieme dei vertici del grafo pro separazione-k** ed il duetto $\{G', G''\} = \{\langle V', E'\rangle\ ,\ \langle V'', E''\rangle, \}$ è chiamato **separatore-k per il grafo** G.

Un grafo G si dice **grafo separato-k** sse possiede una separazione-k.
Si noti che, se $k < j$, un grafo separato-k è sicuramente separato-j.
Un grafo è separato-k sse è dato dall'unione di due suoi sottografi $G' = \langle V', E'\rangle$ e $G'' = \langle V'', E''\rangle$ tali che:

(1) $E' \cap E'' = \emptyset$;

(2) $|V' \cap V''| \leq k$;

(3) $V' \setminus V'' \neq \emptyset$ e $V'' \setminus V' \neq \emptyset$.

D32:**b.04** **Prop.** Un grafo non è separato-$k-1$ sse è connesso-k.

D32:**b.05** Si dice **contrazione di un multigrafo** G relativa ad un suo spigolo $s = pq$, e la si denota con $G \setminus s = Cntr(G, s)$, il multigrafo ottenuto da $G - s$ "contraendo" i vertici p e q, ossia rimpiazzando p e q con un unico vertice r, e richiedendo che ogni spigolo incidente in p o in q in $G - s$ sia incidente in r.

Si osservi che per alcuni grafi G, $Cntr(G \setminus s)$ può contenere coppie di spigoli paralleli, una estremità delle quali è lo spigolo ottenuto per contrazione e quindi può essere un multigrafo. Se G è semplice anche $Cntr(G, s)$ è privo di cappi.

Uno spigolo s di un grafo G semplice e connesso-3 è detto **spigolo essenziale** sse né $G - s$ né $Cntr(G, s)$ sono semplici e connessi-3.

D32:**b.06** **Prop.** Si considerino un grafo G con $v \geq 4$ vertici e un suo spigolo s.
Se $G-s$ non è connesso-3, allora $G-s$ possiede un separatore-2 proprio $\{G' = \langle V', E'\rangle, G'' = \langle V'', E''\rangle\}$ tale che:

(a) $|V' \cap V''| = 2$;

(b) $s \in V' \setminus V'' \times V'' \setminus V'$.

Dim.: Il grafo $G - s$ possiede, per ipotesi un separatore-2 proprio $\{G', G''\} = \{\langle V', E'\rangle\ ,\ \langle V'', E''\rangle\}$.
Sia G'_0 il sottografo ottenuto aggiungendo a G' lo spigolo s e i suoi estremi p e q. Se i vertici p e q appartengono entrambi a V', allora $\{G'_0, G''\}$ è un separatore-2 di G, contrariamente alle ipotesi.
Ripetendo il discorso con V' e V'' scambiati, si vede che i vertici p e q non possono appartenere entrambi a V''. Questo prova il punto (b).

Se $|V' \cap V''| < 2$ segue che o $\{G'_0, G''\}$ è un separatore-2 di G, oppure $V'' \setminus V'$ possiede solo un vertice; dato che la prima alternativa è contraria alle ipotesi, segue che $|V' \setminus V''| = 1$ e che $|V'' \setminus V'| = 1$.
Quindi $|V| = |V' \setminus V''| + |V'' \setminus V'| + |V' \cap V''| \leq 3$, contrariamente alle ipotesi. Segue la proprietà (a) ▮

D32:**b.07** **Prop.** Sia $G = \langle V, E\rangle$ un grafo connesso-3 con $v \geq 4$ vertici. Allora tutti i suoi vertici hanno valenza maggiore o uguale a 3.

Dim.: Si supponga, per assurdo, che in V si trovi p tale che $deg(p) \leq 2$. Sia $G' = \langle V', E'\rangle$ il sottografo di G definito da p, dagli spigoli incidentia p e dai vertici incidenti a questi ultimi; sia inoltre $G'' = \langle V'', E''\rangle$ il sottografo di G relativo $V'' = V \setminus \{p\}$ e $E'' = E \setminus E'$.
Si vede che $|V' \cap V''| \leq deg(p) \leq 2$; inoltre $v \geq 4$ e $|V'| \leq deg(p) + 1 \leq 3$.
Quindi $\{G', G''\}$ è un separatore-2 di G, contrariamente alle ipotesi ▮

D32:**b.08** **Prop.** Ogni ruota è un grafo connesso-3.

Dim.: L'asserto è evidente per $Wl_3 = \mathcal{K}_4$.
Consideriamo la ruota $W = \langle E, V\rangle$, di ordine $v + 1 > 4$, dove:
$E = \{c, p_0 = p_v, ..., p_{v-1}\}$,
$V = \{r_0 = cp_0, ..., r_{v-1} = cp_{v-1}, s_0 = p_0p_1, s_1 = p_1, p_2, ..., s_{v-1} = p_{v-1}p_0\}$.

//input pD32

e dimostriamo che non è possibile tripartire i suoi vertici in modo da ottenere una separazione-2.

Non possono essere vertici comuni due vertici adiacenti, in quanto lo spigolo che li collega apparterrebbe a entrambi i sottografi separatori-2. Quindi il centro non può essere vertice comune. Ma questo implica che tutti i raggi stanno in un sottografo separatore-2
e quindi nessun vertice può appartenere solo all'altro sottografo separatore-2 ▮

D32:**b.09** **Prop.** In una ruota ogni spigolo è essenziale.

Dim.: Si utilizzino le notazioni introdotte nella dimostrazione precedente. In $Wl_v - s_i$ e $Wl_v - r_i$ si trova il vertice p_i di valenza 2; quindi questi grafi non sono connessi-3.
In $Cntr(G, s_i)$ e in $Cntr(G, r_i)$ esistono due coppie di spigoli paralleli, risp., $\{r_i, r_{i+1}\}$ e $\{s_i, r_{i+1}\}$; quindi i grafi in questione non sono semplici ▮

D32:**b.10** Per **sottotriangolo di un grafo** G si intende il sottografo formato da tre spigoli distinti s, t e u di G tali che esistono tre vertici p, q, e r di G tali che $s = p\,q$, $t = q\,r$ e $u = p\,r$.
Per **sottotriade di un grafo** G si intende il sottografo formato da tre spigoli distinti s, t ed u di G tali che esiste un vertice p di G che è incidente solo ad s, t ed u. Il vertice p è detto **vertice centro della sottotriade**.

Si consideri il sottografo $G' = \langle V', E'\rangle$ di un grafo $G = \langle V, E\rangle$.
Si dice **vertice di attaccamento del sottografo** G' nel grafo G un vertice $p \in V'$ incidente a uno spigolo $s \in E \setminus E'$.
Denotiamo con $Attc(G, G')$ l'insieme dei vertici di attaccamento di G' in G.

D32:**b.11** Consideriamo un grafo $G = \langle V, E\rangle$ e un suo sottografo $G' = \langle V', E'\rangle$.
Se $Attc(G, G')| < |V'| < |V|$, allora G' è un membro di un separatore-$|Attc(G, G')|$ di G.

Si osservi ora che, dati due sottografi $G' = \langle V', E'\rangle$ e $G'' = \langle V'', E''\rangle$ di G, per ogni $p \in Attc(G, G' \cap G'')$, o accade che $p \in Attc(G, G') \cap V''$, o si ha $p \in Attc(G, G'') \cap V'$.

D32:**b.12** **Prop.** Sia G un grafo connesso-3, con $v \geq 4$ vertici, e s un suo spigolo essenziale. Allora s appartiene o a un sottotriangolo o a una sottotriade di G.

D32:**b.13** **Prop.** Sia G un grafo connesso-3 con $v \geq 4$ vertici; sia $\{s, t, u\}$ un sottotriangolo di G tale che $s = pq$ e $t = qr$ siano essenziali. Allora s appartiene a una sottotriade di G.

D32:**b.14** **Prop.** Sia G un grafo connesso-3 con $v \geq 4$ vertici. Sia $\{s, t, u\}$ una sottotriade di G tale che $s = pq$ e $t = qr$ siano essenziali. Allora s appartiene a una sottotriangolo di G.

D32:**b.15** **Teorema** (**teorema di Tutte, 1961**) Sia $G = \langle V, E\rangle$ un grafo semplice e connesso-3 con $v \geq 4$ vertici e in cui ogni spigolo è essenziale. G è una ruota.

Dim.: Consideriamo gli spigoli di G $r_0 := cp_0$, $r_1 := cp_1$ ed $s_0 := p_0p_1$.

Dalla proposizione b12 e b14 si deduce che r_0 appartiene al sottotriangolo di G $\{r_0, s_0, r_1\}$, mentre dalla proposizione b13 si ricava che s_0 appartiene a una sottotriade.
Supponendo che p_1 sia il centro della sottotriade, possiamo denotare la sottotriade con $\{s_0, r_1, s_1\}$.
Sia p_2 l'altro vertice incidente a s_1; dato che G è semplice, p_2 è distinto da c, p_1 e p_2. Applicando ancora la proposizione b14, si deduce che s_1 appartiene a un sottotriangolo che può essere scritto come $\{r_1, s_1, r_2\}$ o come $\{s_0, s_1, r_2\}$.
È possibile, comunque, adattare la notazione scambiando, se necessario, s_0 con r_1 e, senza perdere di generalità, denotando il sottotriangolo in questione con $\{r_1, s_1, r_2\}$.
Quindi i due estremi di r_2 sono c e p_2, e r_2 è distinto da s_0, s_1, r_0 e r_1.

//input pD32

Si supponga che $deg(c) = 3$ in G e sia $G' = \langle V', E'\rangle$ il sottografo di G definito dagli spigoli s_0, s_1, r_0, r_1 e r_2 e dai vertici a essi incidenti.
Poiché p_1 è il centro della sottotriade $\{s_0, r_1, s_1\}$, G' possiede al più due vertici di attaccamento, p_0 e p_2.
D'altra parte, per la proposizione b07, G possiede un altro spigolo incidente a p_0 e, poiché per ipotesi G è semplice e connesso-3, G deve essere formato da G' aggiungendo lo spigolo $s_2 = p_0p_2$; quindi G è una ruota di ordine 3.
Si supponga ora che $deg(c) \geq 4$ in G. Si può affermare che, per $j \geq 2$, esiste un sottografo $G'_j = \langle V'_j, E'_j\rangle$ di G tale che:

(1) $E'_j = \{r_0, r_1, ..., r_j, s_0, s_1, ..., s_{j-1}\}$,

(2) $V'_j = \{c, p_0, p_1, ..., p_j\}$,

(3) gli estremi di r_i siano c e p_i e quelli di s_i siano p_i e p_{i+1},

(4) i $2j + 1$ spigoli elencati al punto (1) e i $j + 1$ vertici elecati al punto (2) siano distinti,

(5) $deg(p_i) = 3$, per $i = 1, ..., j - 1$, in G e $deg(c) \geq 4$ in G.

(6) j ha il più grande valore coerentemente con le condizione date sopra.

Dalla proposizione b13 segue che r_j appartiene a una sottotriade, il cui centro è p_j. Possiamo scrivere la sottotriade come $\{s_{j-1}, r_j, s_j\}$, dove $s_j = p_jp_{j+1}$, per i punti (3) e (4), è distinto da tutti gli spigoli elencati al punto (1). Essendo il grafo G semplice, il vertice p_{j+1} è distinto dal vertice c, e dai punti (3) e (5) segue che p_{j+1} è distinto anche dai vertici p_i, per $i = 1, ..., j$.

Si supponga, per assurdo, che $p_{j+1} \neq p_0$. Lo spigolo s_j, per la proposizione b13, appartiene a un sottotriangolo; G possiede un spigolo $r_{j+1} = cp_{j+1}$ distinto da s_j e da tutti gli spigoli elencati al punto (1).
Con l'aggiunta al sottografo G'_j di s_j, p_{j+1} e r_{j+1} si è arrivati ad avere un sottografo G'_{j+1} che soddisfa le ipotesi (1), (2), (3), (4) e (5) sostituendo j con $j+1$.
Ma Tutto ciò è in contrasto con il punto (6) e quindi $p_{j+1} = p_0$.
Aggiungendo lo spigolo s_j al sottografo G'_j, si ottiene una ruota Wl_{j+1} di ordine $j+1$. Dai punti (3) e (5) segue che i soli vertici di attaccamento di Wl_{j+1} sono p_j e p_0 e quindi, per la proposizione b11, l'insieme dei vertici di Wl_{j+1} coincide con V. Poiché G è semplice e c e p_0 sono già collegati dallo spigolo r_0, segue che $G = Wl_{j+1}$ ▮

D32:**b.16** Si supponga di essere in possesso dell'elenco completo L_e di tutti i grafi con e spigoli, non isomorfi tra loro, semplici e connessi-3. Ci si pone il problema di determinare l'elenco completo L_{e+1} di tutti i grafi con $e+1$ spigoli, non isomorfi tra loro, semplici e connessi-3.

Si consideri un grafo $G \in L_{e+1}$. Dal teorema di Tutte appena enunciato, si deduce che il grafo G o è una ruota di ordine $\frac{1}{2}(e+1)$ oppure possiede uno spigolo s non essenziale.
Il primo caso si presenta solo se e è dispari ed $e > 3$. Ovviamente due ruote dello stesso ordine sono isomorfe.
Nel secondo caso o $G - s \in L_e$ oppure $Cntr(G,s) \in L_e$. Quindi se il grafo G non è una ruota, esso può essere derivato da alcuni suoi sottografi $G' = \langle V', E' \rangle \in L_e$ per mezzo di una delle due seguenti operazioni:
(i) aggiungendo a G' un nuovo spigolo s i cui estremi sono due elementi distinti di V' non collegati in G'.
(ii) "tagliando" un vertice p di G' incidente a quattro o più spigoli in due vertici p_1 e p_2, e aggiungendo il nuovo spigolo $s = p_1p_2$.

//input pD32

La seconda operazione è meglio definita nel seguente modo: gli spigoli incidenti con p sono assegnati a due classi disgiunte P_1 e P_2 tali che $|P_1| \geq 2 \leq |P_2|$. Il vertice p è sostituito da due nuovi vertici p_1 e p_2 e i loro spigoli incidenti sono, risp., gli elementi di P_1 e P_2
Infine si aggiunge il nuovo spigolo s che collega p_1 a p_2. La necessità della condizione $|P_1| \geq 2 \leq |P_2|$ segue dalla b07.

D32:**b.17** **Prop.** Siano G un grafo e $G' = \langle V', E' \rangle \in L_e$ un suo sottografo. Se G è derivato da G' attraverso l'operazione (i), allora $G \in L_{e+1}$.

Dim.: Ovviamente G è semplice. Se per assurdo G non fosse connesso, si considerino i sottografi $G'_1 = \langle V'_1, E'_1 \rangle$ e $G'_2 = \langle V'_2, E'_2 \rangle$ di G tali che $\{G'_1, G'_2\}$ sia un separatore-2 di G. Assumendo che $s \in E'_1$, allora $\{G'_1 - s, G'_2\}$ è un separatore-2 di G', cosa che è assurda ▮

D32:**b.18** **Prop.** Siano G un grafo e $G' = \langle V', E' \rangle \in L_e$ un suo sottografo. Se G è derivato da G' attraverso l'operazione (ii), allora $G \in L_{e+1}$.

Dim.: Ovviamente G è semplice. Se per assurdo G non fosse connesso, si considerino i sottografi $G'_1 = \langle V'_1, E'_1 \rangle$ e $G'_2 = \langle V'_2, E'_2 \rangle$ di G tali che $\{G'_1, G'_2\}$ sia un separatore-2 di G. Assumendo che $s \in E'_1$, siano $G'_{1,1} = \langle V'_{1,1}, E'_{1,1} \rangle$ e $G'_{2,1} = \langle V'_{2,1}, E'_{2,1} \rangle$ i sottografi di G' definiti dagli spigoli di $E'_1 \setminus \{s\}$ e E'_2 risp., e dai loro vertici.

Dalla proposizione b07 si ricava che $G' = G'_{1,1} \cup G'_{2,1}$. Se $G'_{1,1}$ possiede un vertice che non appartiene a $V'_{2,1}$, allora $\{G'_{1,1}, G'_{2,1}\}$ è un separatore-2 di G', contrariamente alle ipotesi.
Quindi $V'_{1,1} \subseteq V'_{2,1}$. Questo può accadere solo se lo spigolo s ha un estremo $p \in V'_1 \cap V'_2$ e l'altro estremo $q \in V'_1 \setminus V'_2$ ed è l'unico elemento di $V'_1 \setminus V'_2$. Sotto queste condizioni segue, grazie alla condizione $|P_1| \geq 2 \leq |P_2|$ della operazione (ii), che p_2 è collegato da tre spigoli di E'_1 a tre vertici distinti di $V'_1 \cap V'_2$, fatto contrario alla definizione di G'_1 ∎

Si osservi che l'unico elemento di L_3 è $\mathcal{K}_3$, L_4 e L_5 sono vuoti e che l'unico elemento di L_6 è $\mathcal{K}_4$. Inoltre L_7 è vuoto, L_8 è costituito solo dalla ruota Wl_5, mentre L_9 e L_{10} sono costituiti, risp., da tre e quattro grafi, illustrati nella seguente figura.

//input pD32