Capitolo D31:
grafi planari e dualità

Contenuti delle sezioni

13 pagine

D31:**0.01** Questo capitolo presenta le proprietà di planarità dei grafi nonorientati, le loro raffigurazioni planari e la relazione di dualità che li riguarda.

D31:a. immergibilità e planarità

D31:**a.01** In questo capitolo prenderemo in considerazione, introducendole solo in modo intuitivo, le **superfici bilaterali**, ovvero le superfici nello spazio tridimensionale che sono connesse e che, come il piano, la sfera e il toro, presentano due facciate e non risulta possibile passare con continuità da una all'altra come accade per i nastri di Moebius.

Per l'insieme di queste superfici si considerano classi di equivalenza costituite da superfici trasformabili l'una nell'altra mediante deformazioni continue.
Tra queste classi interessano soprattutto la classe del piano, la classe della sfera, le classi dei piani dotati di manici e le classi delle sfere dotate di manici.
Accade in particolare che la classe del toro coincide con quella della sfera dotata di un manico.

D31:**a.02** Si ottiene un **tracciamento di un multigrafo** G sopra una superficie bilaterale S facendo corrispondere ai diversi nodi di G punti diversi della superficie e a ogni lato di G una linea su S che colleghi le sue estremità.

Si dice **immersione di un grafo** G in S un suo tracciamento u S tale che a nodi diversi corrispondono punti diversi di S e ogni linea costituente la traccia di un lato oltre ai due punti di S corrispondenti ai suoi vertici, non tocchi alcun altro punto delle tracce degli altri lati: due linee associate a due lati di G possano intersecarsi solo in una o due estremità comuni.

Un multigrafo G si dice **multigrafo immergibile** nella superficie S sse si può individuare una sua immersione di G in S.

Le immersioni di un grafo in una superficie interessano, soprattutto, a meno delle cosiddette **deformazioni ammissibili**, cioè delle deformazioni continue della superficie che non modificano le posizioni relative dei punti e dei segmenti che raffigurano, risp., i nodi e i lati del grafo.

Presentano interesse le classi di equivalenza relative alle deformazioni ammissibili delle immersioni di un grafo.

D31:**a.03** L'interesse maggiore lo presentano le immersioni planari, cioè le immersioni nel piano, e quelle sulla sfera, che come vedremo tra breve sono collegabili algoritmicamente alle precedenti.

Un grafo nonorientato è detto **grafo planare** sse può essere immerso nel piano. In breve una immersione nel piano di un tale grafo è una sua raffigurazione nella quale i lati non si incrociano.

Spesso una immersione nel piano di un grafo planare considerata a meno di deformazioni ammissibili viene chiamata sbrigativamente **grafo sul piano**.

Sono ovviamente planari tutti gli alberi e i vari grafi che abbiamo concretamente presentato mediante immersioni nel piano (cicli, ruote, scale, prismi, griglie, ...).

D31:**a.04** Un grafo può avere immersioni (nel piano o in altra superficie) piuttosto diverse. Si osservino a es. le immersioni mostrate nella seguente figura.

//input pD31a04

D31:**a.05** Non tutti i grafi sono planari; i due grafi più ridotti che risultano non planari sono i due cosiddetti **grafi di Kuratowski**: $\mathcal{K}_5$ e $\mathcal{K}_{3,3}$.

//input pD31a05

I grafi planari costituiscono una classe di grafi di particolare importanza, sia in ambito matematico che in vari campi applicativi.

Per esempio sono schematizzabili mediante grafi planari i circuiti che si possono costruire collocando su piastre di materiale isolante piste di stagno o di altro materiale conduttore.

È importante delimitare in modo preciso i confini della collezione dei grafi planari.
Si pone quindi il cosiddetto **problema della planarità dei grafi**, cioè il problema di individuare procedimenti che consentano di stabilire se un grafo è planare o meno.
Come vedremo questo problema si può trattare piuttosto efficacemente.

D31:**a.06** Lo studio delle immersioni di un grafo non connesso, evidentemente, si riduce allo studio delle immersioni delle sue diverse componenti connesse.
Inoltre alla questione se un grafo sia immergibile in una data superficie, e in particolare al problema della sua planarità, la presenza di cappi, di spigoli paralleli, di vertici pendenti e di vertici di grado 2 non comporta difficoltà.
Quindi per semplificare i discorsi si può presumere che i suddetti elementi siano assenti.
In altri termini, se si richiede la immersione piana di una struttura grafica, può essere opportuno semplificarla eliminando i suddetti elementi, cercare una immersione piana per il grafo ottenuto e infine completare il tracciamento collocando in posizioni facilmente individuabili gli elementi aggiuntivi.

Quindi si potrebbero porre le questioni di immergibilità solo per grafi connessi, semplici e privi di nodi pendenti (e quindi non aciclici).

Vedremo però che il problema della planarità viene meglio affrontato mediante costruzioni che conviene definire per generici multigrafi connessi.

D31:**a.07** Le immersioni piane dei multigrafi planari si possono collegare naturalmente alle loro immersioni sferiche e viceversa mediante le cosiddette **proiezioni stereografiche**.

//input pD31a07

Data una immersione piana si appoggia sul piano una sfera (il cui diametro, nella pratica, conviene sia poco diverso da quello della immersione data) in modo che il punto di contatto non tocchi punti e segmenti della immersione stessa. Si considera poi il punto della sfera diametralmente opposto al punto di contatto. Assumendo questo come centro di proiezione, dall'immersione piana si ricava l'immersione sferica del grafo.

Per la trasformazione inversa si tratta semplicemente di appoggiare alla sfera contenente la immersione data un piano preoccupandosi che il punto di contatto non faccia parte dell'insieme dei punti costituenti l'immersione stessa.
Si ha quindi la conclusione che segue.

D31:**a.08** **Prop.** Un grafo è planare sse è immergibile in una sfera ▮

Un grafo non planare può sempre venire immerso in una sfera munita di un opportuno insieme di manici.

Infatti si può procedere a tracciare nel piano (o sopra una sfera) quanti più lati si riesce. Ogni lato che non si è riusciti a tracciare può essere collocato su un manico inserito sulla superficie in due posizioni vicine ai punti relativi alle sue estremità.

Per esempio è abbastanza semplice vedere come i grafi di Kuratowski si possono immergere in un toro, ovvero in una sfera munita di un manico.

//input pD31a08

Naturalmente interessa il minimo numero di manici necessari per avere una immersione del grafo; tale parametro si dice **genere del grafo**.

D31:b. facce di un grafo planare e formula di Euler

D31:**b.01** Una immersione piana di un grafo planare G ripartisce il piano privato dei punti costituente la raffigurazione stessa in insiemi connessi chiamati **regioni del grafo nel piano** o **facce del grafo nel piano**. Di queste regioni una è illimitata, le restanti sono limitate.

Mediante una proiezione stereografica alle regioni piane vengono a corrispondere biunivocamente regioni sferiche; queste ovviamente sono tutte limitate.
La regione sferica corrispondente alla regione piana illimitata è quella che contiene il centro della proiezione.
Osserviamo che le immersioni sferiche presentano le facce di un grafo planare in maniera "meno distorta" delle immersioni piane.

Ad una immersione su una sfera di un grafo planare, attraverso le proiezioni stereografiche da centri appartenenti alle diverse regioni, si ottengono immersioni piane in ciascuna delle quali la regione illimitata proviene da una particolare regione.
Può quindi accadere che due di queste immersioni piane non siano ottenibili l'una dall'altra mediante deformazioni ammissibili del piano.

Nel seguito abbrevieremo una espressione come "immersione di un grafo nel piano" con il termine più sbrigativo grafo sul piano; similmente può essere utile il termine sbrigativo grafo sulla superficie.

D31:**b.02** Consideriamo ora una immersione piana o sferica P di un grafo planare $G = \langle V, E\rangle$ e una sua faccia F. Si dice **spigolo incidente nella faccia** F ogni elemento di E adiacente ad F, cioè contenuto nella chiusura della faccia F.
Per **frontiera della faccia** F si intende l'insieme degli spigoli di G incidenti in F.

Chiaramente la frontiera di una faccia F contiene uno e un solo ciclo (dato che si escludono i casi di grafi sconnessi e aciclici); tale ciclo si dice ciclo facciale, o **maglia del grafo nel piano**.
In generale una frontiera, oltre al ciclo facciale, può contenere spigoli costituenti una foresta.

//input pD31b02

D31:**b.03** Veniamo ora a uno dei primi rilevanti risultati della teoria dei grafi, la formula di Eulero.

Teorema (**teorema di Eulero 1752**) Per un grafo planare connesso con v vertici, e spigoli ed f facce vale l'uguaglianza

$$f + v - e \;=\; 2.$$

Dim.: Consideriamo dapprima i cicli con v vertici: essi presentano v spigoli e 2 facce, la limitata e l'illimitata, e quindi per essi la formula vale.

Supponiamo poi induttivamente che la formula valga per ogni grafo planare semplice e privo di nodi pendenti con f facce e verifichiamo che vale per ogni grafo G' dello stesso tipo ma con $f + 1$ facce.
Esso si può considerare ottenuto da un grafo G dello stesso tipo per aggiunta di k spigoli che chiudono un nuovo ciclo costituito anche da spigoli del ciclo esterno di G; questo nuovo ciclo delimita una nuova faccia.
Quindi G' possiede $v' = v + k - 1$ vertici, $e' = e + k$ spigoli ed $f' = f + 1$ facce e per esso sinha $f' + v' - e' = f + 1 + v + k - 1 - e - k = f + v - e = 2$.

Un grafo planare connesso generico si può considerare formato da un grafo del tipo precedente per successive aggiunte di spigoli pendenti; queste operazioni consistono nell'aumentare di 1 il numero dei vertici e il numero degli spigoli, senza aumentare il numero delle facce. La formula di Eulero vale quindi anche per essi ∎

D31:**b.04** Osserviamo che la formula di Eulero vale anche in presenza di cappi e di spigoli paralleli: infatti sia l'aggiunta di un cappio che l'aggiunta di uno spigolo parallelo aumentano di 1 il numero degli spigoli e il numero delle facce e non cambiano il numero dei vertici.

D31:**b.05** Una formula leggermente diversa dalla formula precedente vale per i multigrafi costituiti da più componenti connesse.

Coroll.: Per un multigrafo planare con v vertici, e spigoli, f facce e c componenti connesse si ha

$$f + v - e - c = 1.$$

Dim.: La formula precedente si riduce alla formula di Eulero nel caso di multigrafo connesso, con $c = 1$.

Supponiamo induttivamente che la formula valga per un multigrafo planare con i parametri precedenti G e dimostriamola per uno con $c+1$ componenti connesse G''. Questo multigrafo si può ottenere accostando al precedente un multigrafo planare connesso G' con v' vertici, e' spigoli ed f' facce per il quale $f' + v' - e' = 2$.
Il multigrafo grafo ha quindi $v'' = v + v'$ vertici, $e'' = e + e'$ spigoli, $f'' = f + f' - 1$ facce (la faccia illimitata rimane solo una) e $c'' = c + 1$ componenti connesse: per esso quindi $f'' + v'' - e'' - c'' = f + f' + v + v' - e - e' - 1 - c - 1 = (f + v - e - c) + (f' + v' - e') - 2 = 1$ ∎

D31:**b.06** Dalla formula di Eulero si ricavano facilmente varie importanti conseguenze.

Per una immersione piana di un multigrafo planare definiamo **grado di una faccia del grafo nel piano** F e scriviamo $deg(F)$, il numero degli spigoli della sua frontiera, convenendo di contare due volte gli spigoli che sono degli istmi. Per esempio il multigrafo seguente ha 18 spigoli, quattro facce limitate aventi gradi risp. 4, 3, 2 ed 1 e la faccia illimitata di grado 16.

//input pD31b06

D31:**b.07** **Prop.** Per un multigrafo connesso con e spigoli e avente come facce $F_1, ..., F_f$ si ha:

$$\sum_{h=1}^{f} deg(F_h) \; = \; 2e \; .$$

Dim.: In effetti nel calcolo della sommatoria a primo membro ogni spigolo viene contato due volte, o perché sulla frontiera di due facce limitate, o perché ponte all'interno di una faccia limitata o illimitata ∎

D31:**b.08** **(P) Coroll.**: er un grafo planare semplice con $v \geq 3$ vertici ed e spigoli si ha:

$$e \leq 3v - 6 \; .$$

Dim.: Ciascuna delle facce, che chiamiamo ancora $F_1, ..., F_f$, presenta grado maggiore o uguale a 3: quindi

$$\sum_{h=1}^{f} deg(F_h) \geq 3f \; .$$

Per la proposizione precedente $2e \geq 3f$, ovvero $f \leq \frac{2}{3}e$; la formula di Eulero fornisce allora $v-e+\frac{2}{3}e \geq 2$ e da questa l'asserto ▮

D31:**b.09** **Prop.** Per un grafo planare semplice con $v \geq 3$ vertici ed f facce si ha:

$$f \leq 2\,v - 4\ .$$

Dim.: Dal teorema di Eulero e dal corollario in **b08** si ha che:

$$v + f \;=\; e + 2 \leq 2 + 3\,v - 6.$$

Quindi $f \leq 3\,v - 4 - v$ ▮

Si osservi che nelle due precedenti disequazioni vale il segno uguale sse tutte le facce del grafo planare considerato sono triangolari, come si dimostra facilmente per induzione.

D31:**b.10** **Coroll.**: $\mathcal{K}_5$ non è planare.

Dim.: Questo grafo ha $v = 5$ vertici ed $e = 10$ spigoli e quindi non soddisfa la disuguaglianza del corollario precedente ▮

D31:**b.11** **Coroll.**: $\mathcal{K}_{3,3}$ non è planare.

Dim.: Questo grafo ha $v = 6$ vertici ed $e = 9$ spigoli e quindi se fosse planare, per la formula di Eulero avrebbe $f = e - v + 2 = 5$ facce. Dato che $\mathcal{K}_{3,3}$ ha circuiti di lunghezza almeno uguale a 4, il grado di ogni faccia di una ipotetica immersione piana sarebbe almeno 4; quindi sarebbe $2e \geq 4f$, ovvero $f \leq e/2$, e quindi $f \leq 4$, in contraddizione con quanto ricavato dalla formula di Eulero ▮

D31:**b.12** **Coroll.**: In un grafo planare semplice almeno un vertice ha grado minore o uguale a 5.

Dim.: Consideriamo il grafo G con v vertici ed e spigoli. Se ogni vertice avesse grado maggiore di 5, a causa della proposizione iniziale sarebbe $2\,e \geq 6\,v$, ossia $e \geq 3\,v$, in contrasto con la disuguaglianza precedente $e \leq 3\,v - 6$▮

Si dicono **spigoli in serie di un grafo** due spigoli pr e rq, ove r è un suo vertice di grado 2 e $p \neq q$.

D31:**b.13** Si dice **grafo regolare-vf** ogni grafo planare regolare e tale che ,,,b12 -vf presenta non solo i suoi vertici, ma anche le sue facce dello stesso grado.

Osserviamo che un tale grafo non può presentare cappi (a meno che si riduca a un solo vertice munito di cappio) e non può presentare nodi pendenti (se non si riduce a $\mathcal{K}_2$).

Sono grafi regolari-vf i cicli di ordine arbitrario (ossia i poligoni) e i multigrafi con 2 vertici e grado arbitrario.

Sono regolari-vf anche i cinque grafi platonici, cioè i grafi del tetraedro, del cubo, dell'ottaedro, del dodecaedro e dell'icosaedro:

//input pD31b13

D31:**b.14** **Prop.** I soli grafi regolari-vf sono i poligoni, i multigrafi con due vertici ed i grafi platonici.

Dim.: Un grafo regolare-vf è caratterizzato da 5 parametri non indipendenti: il numero v dei suoi vertici, il numero e dei suoi spigoli, il numero f delle sue facce, il grado D_v dei suoi vertici e il grado D_f delle sue facce.

Questi parametri devono soddisfano la formula di Eulero e le relazioni riguardanti le somme dei gradi:

$$(1)\ \ f + v - e = 2\ , \qquad (2)\ \ v\,D_v = 2\,e\ , \qquad (3)\ \ f\,D_f = 2\,e\ .$$

Si tratta di stabilire che le sole scelte di parametri compatibili con queste uguaglianze individuano soltanto i grafi dell'enunciato.

È intuitivo che $D_v = 2$ comporti che il grafo sia un ciclo e che questo possa avere ordine arbitrario v.
In termini quantitativi:

$$D_v = 2 \wedge (2) \implies e = v;\ (1) \implies f = 2;\ (3) \implies D_f = v\ .$$

Similmente $D_f = 2$ implica che si tratta di multigrafo a due vertici il quale può avere un numero arbitrario e di spigoli.
In termini quantitativi:

$$D_f = 2 \wedge (3) \implies e = f\ \ ;\ \ (1) \implies v = 2\ \ ;\ \ (2) \implies D_v = e\ .$$

Consideriamo $D_v = 3$; $(2) \implies e = \frac{3}{2}v$ ed $(1) \implies f - \frac{1}{2}v = 2$; $(3) \implies \left(\frac{6}{D_f} - 1\right)\frac{v}{2} = 2$.
Questa implica $\frac{6}{D_f} - 1 > 0$, cioè $D_f < 6$; quindi possiamo considerare solo $D_f = 3, 4, 5$.

Se $D_v = 3$ e $D_f = 3$, allora $e = \frac{3}{2}v = \frac{3}{2}f$; la (1) diventa $v - \frac{3}{2}v + v = 2$, quindi $v = f = 4$ ed $e = 6$; si ha quindi il grafo del tetraedro.
Se $D_v = 3$ e $D_f = 4$, allora $e = \frac{3}{2}v = 2\,f$; la (1) diventa $v - \frac{3}{2}v + \frac{3}{4}v = 2$, quindi $v = 8$, $f = 6$ ed $e = 12$; si ha dunque il grafo del cubo.
Se $D_v = 3$ e $D_f = 5$, allora $e = \frac{3}{2}v = \frac{5}{2}f$; la (1) diventa $v - \frac{3}{2}v + \frac{3}{5}v = 2$, quindi $v = 20$, $f = 12$ ed $e = 30$; si ha dunque il grafo del dodecaedro.

Consideriamo $D_v = 4$; $(2) \implies e = 2\,v$ ed $(1) \implies f - v = 2$; $(3) \implies \left(\frac{4}{D_f} - 1\right)v = 2$; questa implica $\frac{4}{D_f} - 1 > 0$, cioè $D_f < 4$; quindi possiamo considerare solo $D_f = 3$.
In tal caso $(3) \implies f = \frac{4}{3}v$ e (1) $v - 2\,v + \frac{4}{3}v = 2$, cioè $v = 6$, $f = 8$ ed $e = 12$; si ha dunque il grafo dell'ottaedro.

Consideriamo $D_v = 5$; $(2) \implies e = \frac{5}{2}v$ ed $(1) \implies f - \frac{3}{2}v = 2$; $(3) \implies \left(\frac{5}{D_f} - \frac{3}{2}\right)v = 2$; questa implica $\frac{5}{D_f} - \frac{3}{2} > 0$, cioè $D_f < \frac{10}{3}$; quindi possiamo considerare solo $D_f = 3$. In tal caso (3) $\implies f = \frac{5}{3}v$ e (1) $v - \frac{5}{2}v + \frac{5}{3}v = 2$, cioè $v = 12$, $f = 20$ ed $e = 30$; si ha dunque il grafo dell'icosaedro
▮

D31:c. caratterizzazione della planarità

D31:**c.01** Si dice **estensione in serie di un grafo** sopra uno spigolo $p\,q$ l'aggiunta ai suoi vertici di un nuovo elemento r ed il rimpiazzamento di $p\,q$ con gli spigoli in serie $p\,r$ e $r\,q$.

Se $p\,r$ e $r\,q$ costituiscono un duetto di spigoli in serie (ed r ha grado 2), si dice **contrazione in serie di un grafo** relativa a tale duetto la sostituzione dei due spigoli con $p\,q$.

La seguente figura mostra un grafo ottenuto da $\mathcal{K}_{3,3}$ mediante successive estensioni in serie.

//input pD31c01

D31:**c.02** Due grafi si dicono **grafi omeomorfi** sse sono isomorfi oppure si possono rendere isomorfi attraverso una sequenza di estensioni e contrazioni in serie.

Chiaramente il grafo omeomorfo di un grafo planare è anch'esso planare. Infatti le estensioni e le contrazioni in serie non modificano il carattere planare o meno.
Dato che l'omeomorfismo tra grafi è evidentemente una equivalenza, si può anche dire che ciascuna delle classi di omeomorfismo tra grafi è interamente contenuta nella classe dei grafi planari o in quella dei grafi nonplanari; in altri termini le classi di omeomorfismo costituiscono una partizione della classe dei grafi più fine della bipartizione tra grafi planari e nonplanari.

D31:**c.03** Abbiamo visto che $\mathcal{K}_5$ e $\mathcal{K}_{3,3}$ sono nonplanari. quindi un grafo planare non può possedere un sottografo omeomorfo a $\mathcal{K}_5$ o a $\mathcal{K}_{3,3}$.

Come ha dimostrato Kuratowski, è vero anche l'enunciato converso e questo ha fornito la prima importante caratterizzazione della planarità.

D31:**c.04 Teorema** (**teorema di Kuratowski, 1930**) Un grafo è planare sse non possiede un sottografo omeomorfo a $\mathcal{K}_5$ o a $\mathcal{K}_{3,3}$.
Per la dimostrazione si veda *Harary* [1969].

La seguente figura mostra un grafo G e un suo sottografo omeomorfo a $\mathcal{K}_{3,3}$.

//input pD31c04

D31:**c.05** Il teorema di Kuratowski consente di mostrare la non planarità di molti grafi, ma in certi casi non è di facile applicazione.
Per esempio l'importante **grafo di Petersen**, rappresentato nella seguente figura, è nonplanare, ma non è facile mostrare questo fatto individuando un suo sottografo omeomorfo a $\mathcal{K}_5$ o $\mathcal{K}_{3,3}$.

//input pD31c05

In generale si sente la opportunità di disporre di criteri di planarità alternativi, tipicamente criteri meno generali ma applicabili agevolemnte alle classi di grafi alle quali si adattano.

In particolare risulta utile la caratterizzazione nel paragrafo che segue la quale si serve della relazione di contraibilità dei grafi.

Un grafo si dice **grafo contraibile** in un altro sse può ottenersi da questo attraverso successive contrazioni di spigoli.

D31:**c.06** **Teorema** (**teorema di Wagner 1937** e **teorema di Harary-Tutte 1965**)
Un grafo è planare sse non possiede un sottografo che possa essere contratto in $\mathcal{K}_5$ o in $\mathcal{K}_{3,3}$.

È semplice vedere che il grafo di Petersen si può contrarre in $\mathcal{K}_5$.

D31:**c.07** **Teorema** (**teorema di MacLane 1937**) Un grafo è planare sse possiede un sistema di circuiti costituenti una base tale che nessuno spigolo appartiene a più di due di tali circuiti.

D31:**c.08** Definiamo ora alcuni grafi planari che rivestono interesse sia per gli sviluppi matematici che per le applicazioni.

Chiamiamo **griglia di triangoli**, e denotiamolo con GridTr_n, il grafo planare costruito nel modo che segue.
In una prima fase si considerano n vertici $p_0, p_1, ..., p_{n-1}$, vertici che per semplicità si possono considerare allineati, collegati ognuno al successivo tramite uno spigolo (eccettuato p_{n-1}).
In una seconda fase si considerano $n-1$ vertici $p_n, p_{n+1}, ..., p_{2n-2}$ allineati e collegati ognuno al successivo tramite uno spigolo (eccetto p_{2n-2}), spigoli che per semplicità possono essere pensati paralleli ai precedenti; si collegano, inoltre, p_n con p_0 e p_1, p_{n+1} con p_1 e p_2,..., p_{2n-2} con p_{n-2} e p_{n-1}.
A questo punto si sono costruite $2n-3$ facce triangolari limitate e si prosegue il procedimento di costruzione aggiungendo alla i-esima fase $n-i+1$ vertici allineati e operando i collegamenti sopra descritti, procedimento che termina quando $i = n$.
In questo modo si è costruito il grafo planare costituito da $\dfrac{n(n+1)}{2}$ vertici, $\dfrac{3n(n-1)}{2}$ spigoli e da $(n-1)^2$ facce triangolari limitate.
Nella seguente figura è rappresentata la griglia di triangoli GridTr_4.

//input pD31c08

D31:**c.09** Chiamiamo **griglia di quadrati**, e lo denotiamolo con $\mathsf{GridSq}_{n,k}$, il grafo planare costruito nel modo che segue.
Nella prima fase si precisano n vertici $p_0, p_1, ..., p_{n-1}$, che per semplicità si possono considerare allineati, collegati ognuno al successivo tramite uno spigolo (eccetto p_{n-1}).
In una seconda fase si introducono n vertici $p_n, p_{n+1}, ..., p_{2n-1}$ allineati e collegati ognuno al successivo tramite uno spigolo (eccetto p_{2n-1}), spigoli che per semplicità possono essere pensati paralleli ai precedenti; si colleghino, inoltre, p_n con p_0, p_{n+1} con p_1,..., p_{2n-1} con p_{n-1}. In questo modo si sono costruite $2n-2$ facce quadrangolari limitate.
Si itera il procedimento di costruzione aggiungendo alla i-esima fase n vertici allineati e operando i collegamenti sopra descritti, procedimento che si conclude con $i = k$.
Con questa costruzione si è ottenuto il grafo planare costituito da $n\,k$ vertici, $2\,n\,k - n - k$ spigoli e da $(n-1)(k-1)$ facce quadrangolari limitate.
Nella seguente figura è rappresentata la griglia di quadrati $\mathsf{GridSq}_{5,4}$.

//input pD31c09

D31:**c.10** Chiamiamo **losanga di triangoli**, e denotiamo con $\mathsf{lzg}_{n,k}$, il grafo planare costruito con il procedimento che segue.

Nella prima fase si inroducono n vertici $p_0, p_1, ..., p_{n-1}$, che per semplicità si possono considerare allineati, collegati ognuno al successivo tramite uno spigolo (eccetto p_{n-1}).
Si definiscono nella seconda fase n vertici $p_n, p_{n+1}, ..., p_{2n-1}$ allineati e collegati ognuno al successivo tramite uno spigolo (eccetto p_{2n-1}), spigoli che per semplicità possono essere pensati paralleli ai precedenti; si collegano, inoltre, p_n con p_0 e p_1, p_{n+1} con p_1 e p_2,..., p_{2n-1} con p_{n-2} e p_{n-1}. Con queste azioni si sono costruite $2(n-1)$ facce triangolari limitate.
Si itera il procedimento di costruzione aggiungendo nella i-esima fase n vertici allineati e attuando collegamenti analoghi ai sopra descritti; l'iterazione si conclude quando $i = k$.

Con questa costruzione si è ottenuto il grafo planare costituito da $n\,k$ vertici, $3\,n\,k - 2\,n - k$ spigoli e da $2(n-1)(k-1)$ facce triangolari limitate.
Nella figura che segue è rappresentata la losanga di triangoli $\mathsf{lzg}_{4,3}$.

//input pD31c10

D31:d. multigrafi duali geometrici di multigrafi planari

D31:**d.01** Consideriamo un multigrafo planare G, una sua immersione piana P e una immersione sferica $\overline{P}$ ottenibile dalla precedente mediante proiezione stereografica.

Ci proponiamo di associare a P una immersione piana P^* di un multigrafo che denotiamo con G^* e che diciamo essere un **duale geometrico del grafo** G.

Individuiamo più esplicitamente gli elementi di G scrivendo $G = \langle V, E\rangle$ con $V = \{p_1, ..., p_v\}$ e con $E = \{s_1, ..., s_e\}$; siano poi $F_1, ..., F_f$ le facce dell'immersione piana P ed $\overline{F}_1, ..., \overline{F}_f$ le facce dell'immersione sferica $\overline{P}$.
Scegliamo entro ogni faccia F_h della P un punto f_h e sia $\overline{f}_h$ la sua proiezione sulla faccia $\overline{F}_h$ della sfera. Questi punti forniscono i vertici del multigrafo G^*.

Due vertici f_h ed f_k sono collegati da uno spigolo di G^* sse le corrispondenti facce F_h ed F_k sono incidenti nello stesso spigolo di G.
Si ha quindi una corrispondenza biunivoca tra spigoli di G e spigoli di G^*. Per l'insieme di questi ultimi spigoli scriviamo $E^* = \{s^*_1, ..., s^*_e\}$. Per il multigrafo duale geometrico di G abbiamo quindi $G^* = \langle\{f_1, ..., f_f\}, \{s^*_1, ..., s^*_e\}\rangle$. Denotiamo con P_i la faccia contenente il vertice $p_i \in V$.

D31:**d.02** Le facce dell'immersione piana di G^* sono in corrispondenza biunivoca con i vertici $p_1, ..., p_v$ di G; infatti ogni regione piana di $\overline{P}$ deve contenere uno e un solo vertice di G.
Quindi vertici e facce si scambiano i ruoli passando da un multigrafo piano a un suo duale geometrico.

Evidentemente la trasformazione di un grafo planare nel suo duale geometrico è una inversione.

Tra i già citati grafi platonici si può osservare che il grafo del cubo e il grafo dell'ottaedro sono duali geometrici l'uno dell'altro, così come lo sono il grafo del dodecaedro e quello dell'icosaedro.
Il grafo del tetraedro invece ha come duale un grafo isomorfo e quindi considerato come grafo astratto va considerato un grafo autoduale gemetrico.

D31:**d.03** Per la trasformazione dei grafi P nei rispettivi duali geometrici P^* si possono fare varie osservazioni.
A un cappio di P corrisponde un vertice pendente di P^* e viceversa a un vertice pendente di P un cappio di P^*; ad una coppia di spigoli in serie di P corrisponde una coppia di spigoli paralleli in di P^* e viceversa; ad una coppia di spigoli paralleli in di P corrisponde una coppia di spigoli in serie di P^*.

Osserviamo ancora che il duale geometrico di un grafo (privo di coppie di spigoli paralleli) può essere un multigrafo effettivamente dotato di spigoli paralleli. Per questo motivo risulta opportuno definire la dualità geometrica per i multigrafi.

Anche il carattere di grafo semplice non si mantiene necessariamente passando al duale geometrico. Si ha invece che anche il duale geometrico di un grafo semplice privo di ponti è semplice e privo di ponti.

D31:**d.04** Un multigrafo G^* ottenuto come duale geometrico di un multigrafo planare G è anch'esso planare e quindi si può individuare un suo duale geometrico G^{**}.

Si vede facilmente che questo multigrafo è isomorfo al multigrafo G^*, ovvero che il passaggio al duale geometrico costituisce una involuzione per le classi di isomorfismo di multigrafi sul piano.

I multigrafi planari isomorfi ai propri duali geometrici si dicono **multigrai autoduali**.
Il più semplice di tali multigrafi è $\mathcal{K}_4$; più in generale tutte le ruote sono autoduali.

Si consideri un grafo G planare con v vertici, e spigoli e f facce; le due disequazioni $e \leq 3\,v - 6$ e $f \leq 2\,v - 4$ viste in precedenza [b08, b09] in conseguenza della dualità geometrica diventano $e \leq 3\,f - 6$ e $v \leq 2\,f - 4$.