1

Capitolo D28
strutture grafo arricchite

Contenuti delle sezioni

12 pagine

D280.01 Questo capitolo presenta una panoramica sulle molte strutture discrete che costituiscono arricchimenti di digrafi e di grafi nonorientati e varianti di alcuni tali arricchienti.

Di queste entità si danno definizioni formali e descrittive e si segnalano vari esempi motivando la loro importanza in quanto elementi di modelli di applicazioni di rilevante importanza.

Vengono inoltre introdotti i multigrafi euleriani ed i digrafi hamiltoniani dimostrando alcune loro proprietà.

Alla fine viene presentata una introduzione dei digrafi e dei grefi nonorientati numerabili.

D28 a. grafi e digrafi arricchiti

D28a.01 Molte applicazioni vengono affrontate utilizzando modelli discreti che si basano su strutture ottenute arricchendo grafi e digrafi, cioè munendo grafi e digrafi con altre informazioni numeriche, simboliche o costituite da configurazioni discrete un poco eleborate associandole ai loro nodi e/o ai loro collegamenti.

I nodi di un grafo o di un digrafo astratto (ovvero i nodi di una classe di isomorfismo di grafi o di digrafi) possono essere distinti sia per i simboli o i nomi adottati per identificarli, sia dalle peculiarità dei sistemi di collegamenti che hanno con gli altri nodi e delle proprietà che da questi seguono.
Arricchimenti analoga si possono avere per gli archi e per i lati.

Per molte applicazioni è invece necessario introdurre informazioni che portino distinzioni tra i nodi e/o tra i collegamenti che vengono ad aggiungersi agli identificatori ed alle informazioni ricavabili dai sistemi dei collegamenti.

Sul piano descrittivo questo si ottiene assegnando ai diversi nodi delle etichette distintive, elementi formali che possono consistere in numeri, caratteri, parole o anche combinazioni degli oggetti precedenti che possono raggiungere complessità che li fanno considerare vere e proprie strutture informative.

Formalmente questo corrisponde a considerare strutture costituite oltre che da nodi e collegamenti, da funzioni che a ogni nodo o collegamento associa un elemento di un insieme finito talora semplice, talora unn poco composito.

D28a.02 Precisiamo formalmente alcuni di questi arricchimenti cominciando dai digrafi; per i grafi nonorientati ci limitiamo, invece a rilevare che le omologhe nozioni si possono introdurre assimilando queste strutture a casi particolari di digrafi, ovvero ai digrafi simmetrici.
Per gli esempi applicativi invece ci serviremo più spesso dei grafi nonorientati.

Diciamo **digrafo con nodi etichettati** un sistema $G = \langle Q, U, L, \eta\rangle$, dove $\langle Q, U\rangle$ è un digrafo, L è un insieme finito detto **insieme delle etichette dei nodi** e la funzione $\eta \in \lceil Q \longmapsto L \rceil$ è detta **etichettatura dei nodi** di G.

Diciamo invece **digrafo con archi etichettati** un sistema $G = \langle Q, U, M, \theta\rangle$, dove $\langle Q, U\rangle$ è un digrafo, M è un insieme finito detto **insieme delle etichette degli archi** e la funzione $\theta \in \lceil Q \longmapsto L \rceil$ è detta **etichettatura degli archi** di G.

Diciamo invece **digrafo con nodi e archi etichettati** un sistema $G = \langle Q, U, L, \eta, M, \theta\rangle$, dove L ed M sono insiemi finiti, mentre abbiamo $\eta \in \lceil Q \longmapsto L \rceil$ e $\theta \in \lceil Q \longmapsto L \rceil$.

D28a.03 Si possono introdurre i vari generi di morfismi tra digrafi etichettati chiedendo che la corrispondente funzione dai nodi di un primo digrafo ai nodi del secondo mantenga l'etichettatura o conduca a una nuova etichettatura ottenibile attraverso una biiezione o una più generica funzione tra i due insiemi di etichette.

In particolare per **isomorfismo tra digrafi con i nodi etichettati** $G_i = \langle Q_i, U_i, L_i, \eta_i\rangle$ per $i = 1, 2$ si intende una coppia di biiezioni $\langle f, g\rangle$ con $f \in \lceil Q_1 \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright Q_2 \rceil$ e $g \in \lceil L_1 \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright L_2 \rceil$ tale che

$$\forall q, r \in Q_1 \;:\; qU_1r \iff f(q)U_2f(r) \quad \text{e} \quad \forall q \in Q_1 \;:\; \eta_2(f(q)) = g(\eta_1(q)) \;.$$

Definizioni facilmente prevedibili si possono inrodurre per i **grafi nonorientati etichettati**.

D28a.04 L'assegnazione di etichette può servire a diversi scopi.

Il più semplice è la introduzione di distinzioni tra i nodi e/o i collegamenti che non siano derivabili dal complesso dei collegamenti.
Attribuendo ai nodi (o ai collegamenti) etichette semplici che possono non essere esclusive (e che non si devono confondere con i loro identificatori) si ripartiscono queste componenti in classi diverse.
Attribuendo alle componenti di un digrafo etichette costituite da insiemi di informazioni non elementari si possono associare a ciascuna componente qualifiche diversicatee significative per gli oggetti reali schematezzati dal digrafo stesso.

Consideriamo un grafo nonorientato che fa da modello per un sistema di depositi e dei relativi collegamenti stradali. I singoli depositi possono essere utilmente caratterizzati da codici che qualificano le loro classi di dotazioni (capienza, dotazione di spazi attrezzati per prestazioni specifiche (elevatori, frigoriferi, casseforti, sistemi di allarme, ...).
Queste classi costituiscono una ripartizione dei depositi di utilità facilmente immaginabile.

Consideriamo un digrafo rappresentante i tratti stradali (molti a senso unico) di una città; ogni arco è individuato da una coppia di incroci stradali o piazze.
I nomi delle vie caratterizzano sottoinsiemi di tratti stradali diversi e disgiunti (una via potrebbe riguardare sia coppie di archi opposti che archi corrispondenti sia tratti a senso unico.
I nomi delle vie quindi stabiliscono una ripartizione dell'insieme dei tratti stradali.

In molti schemi costituenti grafi arricchiti può essere pratico evidenziare le classi dei generi accennati in precedenza mediante colori (ma in molti casi si preferiscono immagini più complesse come bandierine, stemmi, logogrammi, ...).

Per queste schematizzazioni invece che di etichette, di etichettature e di digrafi etichettati si parla, risp., di colori, di colorazioni e di digrafi colorati.

Nell'ambito della teoria dei grafi, in effetti, per trattare grafi con i nodi e/o i collegamenti ripartiti secondo categorie preassegnate è tradizione adottare il linguaggio dei colori.

Attraverso una colorazione dei nodi si viene ad assegnare una partizione dell'insieme dei nodi, ciascun blocco essendo costituito dai nodi di un determinato colore.
Considerazioni simili per la possibilità di colorare i collegamenti.

D28a.05 Si dice **digrafo inizializzato** ogni $G = \langle Q, I, U\rangle$, dove $\langle Q, U\rangle$ è un digrafo ed $I \subseteq Q$.
I è detto **insieme dei nodi iniziali** di G.
L'insieme dei digrafi inizializzati lo denotiamo con **DgrfI**.

Si dice **digrafo inizializzato e finalizzato** ogni $G := \langle Q, I, F, U\rangle$ con $\langle Q, I, U\rangle$ digrafo inizializzato ed $F \subseteq Q$.
F è detto **insieme dei nodi finali** di Q.
Denotiamo l'insieme dei digrafi inizializzati e finalizzati con **DgrfIF**.

I digrafi inizializzati sono sostanzialmente digrafi colorati con due colori, mentre i digrafi inizializzati e finalizzati sono sostanzialmente digrafi muniti di due colorazioni bicromatiche ed equivalgono a digrafi colorati con 4 colori.

Per le elaborazioni che riguardano queste strutture grafiche per la evidenziazione entro l'insieme Q del sottoinsieme I conviene assegnare la funzione indicatrice

$$\mathcal{I}_{Q;I} = \lceil q \in I \;\not\Vdash\; 1 \rceil \;\dot\cup\; \lceil q \in Q \setminus I \;\not\Vdash\; 0 \rceil \;,$$

mentre per la evidenziazione dei sottoinsiemi I ed F entro Q conviene dare la funzione che presenta al più quattro valori

$$\lceil\, q \in Q \setminus (I \cup F) \nrightarrow 0 \,\rceil \;\dot\cup\; \lceil\, q \in (I \setminus F) \nrightarrow 1 \,\rceil \;\dot\cup\; \lceil\, q \in (F \setminus I) \nrightarrow 2 \,\rceil \;\dot\cup\; \lceil\, q \in (I \cap F) \nrightarrow 3 \,\rceil \;.$$

Evidentemente in generale non si esclude che si possano avere $Q \setminus (I \cup F) = \emptyset$, $I \setminus F = \emptyset$, $F \setminus I = \emptyset$ ed $I \cap F = \emptyset$.
La funzione precedente equivale a una colorazione con al più 4 colori.

Per trattare queste funzioni può essere utile introdurre la nozione di **quasipartizione**, generalizzazione della nozione di partizione che consente di esprimere un insieme ambiente A con una espressione della forma $A = \dot\bigcup_{i\in I} B_i$ nella quale alcuni dei B_i, ma non tutti, possono essere l'insieme vuoto.

A una funzione indicatrice per questi casi si attribuisce la forma

$$\mathcal{I}_{Q;I\setminus F;F\setminus I;Q\setminus(I\cup F)} \;.$$

D28a.06 In modo simile si definiscono grafi con i lati etichettati e digrafi con gli archi etichettati.

Nelle raffigurazioni di queste strutture arricchite nodi, archi e lati sono accompagnati da opportune scritture.

Gli esempi più semplici di grafi e digrafi arricchiti si possono esaminare in modo intuitivo attraverso le rispettive raffigurazioni.
Quando invece nodi e collegamenti sono numerosi, si rendono necessarie distinzioni e valutazioni accurate e si deve ricorrere a implementazioni che si servono di strutture informative accuratamente studiate per consentire loro manipolazioni efficienti e/o versatili.

D28a.07 Molte applicazioni chiedono di attribuire a nodi e/o collegamenti valutazioni numeriche che possono richieder sia semplici interi naturali, che numeri reali e anche numeri complessi (ad esempio in elettrologia). Spesso inoltre servono grandezze fisiche.

Si trattano quindi strutture come i **digrafi con nodi valutati**, sistemi della forma $D = \langle Q, U, v\rangle$, con $v \in \lceil\, Q \longmapsto \mathbb{R} \,\rceil$ e i **digrafi con archi misurati**, sistemi della forma $D = \langle Q, U, m\rangle$, con $m \in \lceil\, Q \longmapsto \mathbb{R}_+ \,\rceil$.

Accanto alle strutture precedenti si hanno le corrispondenti strutture con collegamenti nonorientati: in particolare si hanno i **grafi con nodi colorati** $\langle Q, E, C, c\rangle$ con $c \in \lceil\, Q \longmapsto C \,\rceil$, ed i **grafi con lati colorati** $\langle Q, E, C, c\rangle$ con $c \in \lceil\, E \longmapsto C \,\rceil$,

Esempi di grafi nonorientati con nodi valutati potrebbe riguardare i collegamenti tra diverse località caratterizzate dalle loro altitudini o i collegamenti tra alcuni depositi caratterizzati dalle loro capienze.

Dei grafi con collegamenti misurati possono essere utilizzati per descrivere reti per trasporti (strade, ferrovie, oleodotti, ...) con indicazioni di distanze o di costi per i diversi collegamenti.

Dei modelli più completi di queste reti potrebbero presentare più valutazioni su nodi e collegamenti (altitudini, lunghezze, portate, costi unitari di trasporto, ...) ed eventuali etichettature che, per esempio, servono a esprimere distinzioni amministrative.

D28a.08 Importanti modelli basati su grafi arricchiti sono utilizzati nello studio dei circuiti elettrici ed elettronici.

Modelli di circuiti elettrici utilizzati da tempo contengono figure rappresentati resistori (ciascuno caratterizzato da una resistenza), di capacitori (ciascuno caratterizzato da una capacità) e di batterie (ciascuna caratterizzata da una differenza di potenziale).

Questi schemi richiedono distinzioni qualitative per i diversi nodi e collegamenti e segnalazioni di grandezze fisiche coerenti con le precedenti.

Sopra di essi possono essere impostati vari tipi di problemi volti a determinare sistemi di grandezze fisiche come i livelli di potenziale per i diversi nodi e i flussi di correnti elettriche nei diversi collegamenti.

Modelli analoghi sono utilizzati in elettronica.

D28a.09 Altri modelli che richiedono grafi arricchiti sono utilizzati nella chimica e nella biologia molecolare.

In questi casi i nodi possono corrispondere ad atomi, ad elettroni, a ioni o a grppi di atomi, mentre i collegamenti riguardano i legami elettrochimici tra le diverse componenti e le loro caratteristiche (legami ionici, covalenti, ...).

parametri quantitativi possono concernere grandezze come masse, cariche elettriche e distanze, mentre le etichette possono riguardare distinzioni tra elettroni, tra nucleoni, tra diverse specie atomiche, tra gruppi ionici oppure distinzioni tra i diversi generi di legami.
In questi modelli si possono trovare anche caratterizzazioni geometriche e in particolare angoli.

D28a.10 Un altro genere di modelli mediante grafi arricchiti viene utilizzato per rappresentare archivi e reti informatiche.
Modelli simili sono utilizzati per trattare sistemi di conoscenze.
Tipici sono gli esempi degli schemi di classificazione per libri e articoli e di schematizzazioni dei collegamenti tra voci di dizionari.

D28a.11 Un altro tipo di arricchimento, che preciseremo più avanti parlando delle arborescenze distese [D30], consiste nel determinare per ogni nodo di un digrafo un ordinamento tra gli archi che escono o entrano in esso.
Un tale ordinamento può essere raffigurato implicitamente attraverso la collocazione nel piano dei diversi archi.

D28 b. multigrafi e plurigrafi

D28b.01 Nelle strutture grafiche precedenti non si ha molteplicità nei collegamenti, cioè tra un nodo e un altro non può esistere più di un collegamento ma sono previsti solo coppie di archi mutuamente riflessi.
La molteplicità dei collegamenti è però richiesta da molte applicazioni: per esempio tra due località si possono avere diverse strade oppure diversi tipi di collegamenti (strada, autostrada, ferrovia, ...).
La molteplicità si può ottenere consentendo di avere più lati (o archi) per ogni coppia o duetto di nodi ed eventualmente più cappi su un nodo, oppure considerando diversi sistemi di collegamenti sullo stesso insieme dei nodi.

D28b.02 Si dice **multigrafo** ogni $M := \langle Q, X, f\rangle$ con Q ed X insiemi finiti detti, risp., insieme dei nodi e insieme dei lati di M e con $f \in \lceil X \longmapsto \mathfrak{P}_{1,2}(Q) \rceil$.

Si dice **multidigrafo** ogni $M := \langle Q, X, f\rangle$ con Q ed X insiemi finiti detti, risp., insieme dei nodi e insieme degli archi e con $f \in \lceil X \longmapsto Q \times Q \rceil$.

Quando a due diversi valori in X corrisponde la stessa coppia di nodi o lo stesso elemento di $\mathfrak{P}_{1,2}(Q)$ si ha effettiva molteplicità di collegamenti.
In questi casi si parla anche di **lati paralleli** e di **archi paralleli**.

Con **Mgrf** denoteremo la classe dei multigrafi. con **Mdgrf** denoteremo la classe dei multidigrafi.

D28b.03 Si dice **plurigrafo** un sistema $P := \langle Q, A, \mathcal{U}\rangle$, dove Q è un insieme finito detto **insieme degli stati del plurigrafo** P, A un insieme finito detto **insieme delle etichette** per gli archi di P ed $\mathcal{U} \in \lceil A \longmapsto \mathfrak{P}(Q \times Q) \rceil$.
In seguito denoteremo la classe dei plurigrafi con **Pgrf**.

Per ogni $a \in A$ si considera $U_a := \{\langle p, q\rangle \in Q \times Q \,]\!]\, \mathcal{U}(a, p) = q\}$; esso è detto **insieme degli archi di** P **etichettati dalla etichetta** a.
Un plurigrafo si può quindi considerare formato dai digrafi $\langle Q, U_a\rangle$ riguardanti lo stesso insieme di nodi e diverse etichette $a \in A$. /JP La raffigurazione di un plurigrafo si può pensare ottenuta sovrapponendo le raffigurazioni dei suddetti digrafi distinguendo opportunamente i diversi sistemi di archi: mediante colori diversi, mediante caratteri o etichette diverse, servendosi di curve diversamente tratteggiate.

D28b.04 Si dice **plurigrafo inizializzato** una struttura $P := \langle Q, I, A, U\rangle$ dove $\langle Q, A, U\rangle$ è un plurigrafo ed $I \subseteq Q$. I è detto **insieme degli stati iniziali del plurigrafo** P.
L'insieme dei plurigrafi inizializzati viene denotato con **PgrfI**.

Si dice **plurigrafo inizializzato e finalizzato** ogni

$$P := \langle Q, I, F, A, U\rangle$$

dove $\langle Q, I, A, U\rangle$ è un plurigrafo inizializzato ed $F \subseteq Q$.
F è detto **insieme degli stati finali del plurigrafo** P.
Con **PgrfIF**. viene denotato l'insieme dei plurigrafi inizializzati-finalizzati.

D28 c. multigrafi euleriani

D28c.01 Di fronte a molti problemi da studiare servendosi di strutture grafiche occorre scegliere con attenzione la specie di strutture che risulta più opportuna.
Questo si è verificato fin dal primo problema affrontato mediante grafi e risolto nel 1736 dal grande matematico Euler detto "problema dei ponti di Königsberg".
Eulero nel 1736 viveva in questa città, allora facente parte della Prussia Orientale (ora fa parte della Russia e conserva il nome sovietico di Kaliningrad).
Egli amava passeggiare e si chiedeva se fosse possibile, nel corso di una passeggiata attraversare tutti i sette ponti che scavalcavano il fiume Pregel senza doverne passare nessuno più di una volta.

Il primo passo della risoluzione fu la schematizzazione del complesso dei possibili percorsi mediante il seguente multigrafo

//input pD28c01

//input pD28c01B

Ogni lato rappresenta l'attraversamento di un ponte, ogni nodo un'area della città percorribile senza attraversare alcun ponte. Su questo schema è facile individuare una soluzione, consistente in un **cammino euleriano** (questa l'origine del nome), nel quale si toccano tutti i suoi lati senza ripeterne alcuno.

D28c.02 Introduciamo anche il termine **circuito euleriano** per intendere un cammino euleriano con il nodo iniziale coincidente con il finale e il termine **multigrafo euleriano** per caratterizzare un multigrafo dotato di un circuito euleriano.

Generalizzando il problema, Eulero dimostrò che un multigrafo è euleriano sse è connesso e tutti i suoi nodi, eccettuati al più due, hanno valenza pari.
Si osserva infatti che, come per ogni grafo, il numero dei nodi con valenza dispari di un multigrafo deve essere pari.
In tal modo egli diede la soluzione del problema generale; la verifica del carattere euleriano dell'intero multigrafo venne ricondotta a una semplice indagine locale, sui singoli nodi.
Infine egli descrisse come si può individuare efficientemente uno dei cammini richiesti, cioè mostrò come si può giungere costruttivamente ed efficientemente a una soluzione.
Altri grafi euleriani per i quali si verifica facilmente l'affermazione precedente sono i seguenti:

//input pD28c02

D28c.03 Vediamo dunque come individuare concretamente un cammino euleriano sopra un multigrafo che si è verificato essere euleriano.

(1) Algoritmo: Si inizia da un nodo di valenza dispari o da un nodo qualsiasi, nel caso in cui non esistano nodi di valenza dispari.
Quindi si segue un lato qualsiasi e, giunti su un nuovo nodo, si cerca di proseguire su un lato non percorso in precedenza riconosciuto in quanto privo di un semplice segno che viene apposto a ogni lato utilizzato.

Se si giunge a un nodo privo di lati non ancora percorsi ma rimangono altri lati non attraversati, necessariamente o si è arrivati al secondo nodo di valenza dispari o si è tornati al nodo di partenza e non esiste alcun nodo dispari; inoltre il multigrafo ottenuto rimuovendo i lati già percorsi non possiede nodi di valenza dispari.

Sul grafo restante, che potrebbe essere nonconnesso, si può individuare un circuito chiuso euleriano che tocca il cammino già individuato operando con il criterio precedente a partire da un nodo del detto cammino.
Questo nuovo circuito si può concatenare con il cammino precedente in un più esteso cammino euleriano.
Può accadere che ancora rimangano lati non percorsi, ma ancora questi costituiscono un multigrafo con soli nodi di valenza pari più ridotto del precedente residuo.
Quindi questo processo può essere proseguito fino all'esaurimento dei lati ▮

D28c.04 Osserviamo che il problema della individuazione di un cammino euleriano di un multigrafo, cioè di una **configurazione globale di un multigrafo**, risulta sostanzialmente semplice, in quanto si serve esclusivamente di elaborazioni e di scelte riguardanti singoli nodi, cioè di **elaborazioni puntuali del multigrafo**, le quali possono essere essere gestite piuttosto semplicemente muovendosi su percorsi comodamente registrabili.
Gli attributi di puntuale e di globale sono stati qui introdotti per una struttura fondamentalmente semplice in relazione a un problema di cui si trova una soluzione piuttosto tranquilla (senza nulla togliere all'acutezza pionieristica con la quale Eulero ha individuato gli elementi essenziali del problema stesso).

I caratteri di località o meno possono essere trovati in molti altri problemi discreti, sempre in relazione a loro schematizzazioni grafiche discrete, cioè mediante strutture grafiche: il chiarimento dei suddetti caratteri spesso corrisponde a un sostanziale chiarimento per l'intero problema.

D28 d. digrafi hamiltoniani [1]

D28d.01 Una classe di grafi nonorientati che si può definire in modo simile è quella dei **grafi hamiltoniani**: questi sono i grafi sui quali si trova un **cammino hamiltoniano biiettivo sui nodi** (o sui vertici), cioè un cammino che tocca tutti i nodi una volta sola.

Osserviamo che per la ricerca di un tale cammino è una inutile complicazione prendere in considerazione multigrafi, in quanto di più lati paralleli se ne può utilizzare uno solo. Anche la presenza di cappi è del tutto superflua.

Quindi la ricerca di cammini hamiltoniani si può limitare ai grafi semplici.

I due problemi del cammino euleriano e del cammino hamiltoniano, a prima vista simili, sono profondamente diversi; infatti non si conoscono condizioni semplici da verificare e da utilizzare che caratterizzino i grafi hamiltoniani.

In effetti la ricerca di cammini hamiltoniani e di loro varianti, per grafi generici, costituisce un problema che si deve affrontare mediante algoritmi molto impegnativi anche per computers di alte prestazioni.

D28d.02 Il nome di grafo hamiltoniano deriva dal fatto che il grande matematico irlandese William Rowan Hamilton , intorno al 1860, aveva ideato un gioco consistente in un mappamondo stilizzato mediante un icosaedro regolare. Sui nodi del solido erano segnate 20 città del globo ciascuna delle quali connessa ad altre 3: si trattava di trovare un percorso che consentisse di "visitare" tutte queste città una e una sola volta.

//input pD28d02

Occorre però aggiungere che questo problema era stato presentato in tutta generalità nel 1856 da Thomas Kirkman, matematico molto meno famoso di Hamilton.

D28d.03 Il problema della ricerca dei cammini hamiltoniani sopra un grafo è collegato a problemi di grande interesse pratico detti "del commesso viaggiatore". Si tratta di individuare il percorso meno costoso che un commesso deve compiere per raggiungere tutti i suoi clienti: si tratta quindi di cercare i cammini più economici tra quelli che toccano tuti i nodi nessuno dei quali più volte.

Accade che, nel caso di un numero elevato di clienti (nodi da visitare) e di collegamenti tra le sedi dei clienti stessi (lati), questo problema risulta estremamente oneroso da risolvere.

La ragione di questa onerosità è dovuta al fatto che non bastano, come per i problemi riguardanti grafi euleriani, considerazioni locali ma, per decidere quale strada imboccare a ogni passo, servono conoscenze più globali sul grafo e queste conoscenze si possono ottenere con indagini molto più impegnative.
Si è quindi indotti a ricercare soluzioni che non sono ottime, ma che più modestamente risultano poco meno economiche di quelle ottime; in particolare in talune circostanze si considerano accettabili cammini che tornaho su alcuni, pochi, nodi già toccati.

D28d.04 In effetti si sono trovate intere classi di problemi per i quali si è dimostrato che sarebbe enormemente gravoso costruire soluzioni ottime e per i quali risulta necessario accontentarsi di soluzioni che semplicemente si avvicinano a quelle.

A questi problemi è stato dato il nome di *problemi intrattabili*.

L'esistenza di questi problemi costituisce un certo limite della matematica e dell'informatica. Essa porta alla necessità di non affrontare di petto certi problemi e a non intraprendere certi calcoli.
Evidentemente risulta necessario saper riconoscere queste situazioni per decidere se e quando si devono assumere atteggiamenti "rinunciatari" o compromissori.
Questi studi, che sono affrontati nell'ambito della complessità computazionale [C47] e fanno ampio ricorso alle elaborazioni sui grafi.

D28 e. digrafi e grafi numerabili

D28e.01 Molti problemi della matematica discreta si collocano in strutture numerabili ottenibili mediante strutture grafiche costituite da insiemi numerabili definiti da regole costruttive semplici e che possono considerarsi estensioni numerabili di strutture grafiche viste in precedenza.

Diciamo **grafo numerabile** un sistema $\langle Q, E\rangle$ con Q insieme numerabile (e quindi costruibile con una procedura ben determinata) ed E sottoinsieme decidibile di $\mathfrak{P}_{1,2}(Q)$.

Diciamo invece **digrafo numerabile** un sistema $\langle Q, U\rangle$ con Q insieme numerabile costruibile ed U sottoinsieme decidibile di $Q \times Q$.

Dare un grafo numerabile o un digrafo numerabile, dunque, richiede che si precisino un procedimento che permetta di procedere alla costruzione degli elementi dell'insieme dei nodi Q secondo un certo ordine e un procedimento che per ogni $q \in Q$ permetta di costruire tutti i nodi adiacenti a q già generati (questi in ogni caso sono in numero finito, anche se "alla fine" possono diventare una infinità numerabile).

In alternativa per avere un grafo numerabile, oltre al procedimento per la generazione dei nodi occorre determinare un procedimento di decisione che per ogni duetto $\{p, q\}$ di oggetti che si sanno riconoscere come elementi di Q permetta di decidere in un numero finito di passi se $\{q, p\} \in E$.

Similmente per avere un digrafo numerabile $\langle Q, U\rangle$, oltre al procedimento di generazione dei nodi costituenti Q, serve un procedimento che per ogni coppia $\langle q, p\rangle \in Q \times Q$ che si sappia riconoscere come appartenente ad U, consenta di decidere se $\langle p, q\rangle \in U$ o meno.

D28e.02 Ricordiamo il piano combinatorio $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e la griglia combinatoria [B21]. Un grafo numerabile è fornito da $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\ ,\ U\rangle$, dove U è l'insieme formato dai lati orizzontali $\{\langle i, j\rangle, \langle i+1, j\rangle\}$ e dai lati verticali $\{\langle i, j\rangle, \langle i, j+1\rangle\}$.

Un altro grafo numerabile individuabile nella griglia combinatoria è fornito dall'insieme delle caselle che svolgono il ruolo dei nodi e dall'insieme dei lati orizzontali e verticali con il ruolo degli spigoli che collegano i nodi caselle.

Questi due grafi numerabili sono grafi planari, cioè tali che si possa procedere quanto si vuole a tracciarli sul piano senza che sia necessario incrociare i loro collegamenti.

Anche a ogni grafo numerabile planare si associa un duale [D31] costituito dalle maglie e dai collegamenti tra due maglie separate da uno spigolo. I due grafi numerabili introdotti sopra costituiscono una coppia di grafi numerabili planari duali.

D28e.03 Sono di grande interesse alcuni digrafi numerabili associati ad importanti relazioni tra insiemi, stringhe e numeri.

Sono da distinguere i cosiddetti **digrafi numerabili ripartibili in parti finite**. Un tale digrafo numerabile $\langle Q, U\rangle$ presenta un terreno Q che è costituito da sottoinsiemi finiti di un ambiente T numerabile (meglio se facilmente costruibile) come $\mathbb{P}$, $\mathbb{Z}$ o l'insieme A^* delle stringhe sopra un dato alfabeto A) e si può ripartire in una successione di sottoinsiemi finiti tali che ciascuno dei suoi archi ha la forma $\langle S, S \dot\cup \{x\}\rangle$, per $S \subset_\varphi T$ ed $x \in T \setminus S$.

Questi sono digrafi numerabili graduati, nel senso che il loro insieme dei nodi si può ripartire in sottoinsiemi costituiti da nodi che rappresentano sottoinsiemi di T con lo stesso cardinale in modo tale che gli archi del digrafo collegano nodi di gradi consecutivi.

Discutendo di numeri interi [B26] può essere utile fare riferimento al **digrafo della divisibilità**, $\langle\ \mathbb{P}\ ,\ \{\langle i,j\rangle \in \mathbb{P}\times\mathbb{P} ¶\ i \,|\, j\}\rangle$.

Parlando di stringhe è utile fare riferimento a digrafi numerabili corrispondenti alle relazioni tra stringhe di prefisso, suffisso, infisso e sottostringa [B06a, C10a].

D28e.04 Di grande importanza sono anche i digrafi numerabili graduati delle partizioni degli interi e delle partizioni degli insiemi finiti.

Nell'ambito della teoria dei grafi risulta utile fare riferimento a digrafi che consentono di inquadrare intere classi di grafi come gli alberi e le arborescenze, ovvero le classi di isomorfismo di questi generi di strutture discrete.

Per esempio il digrafo degli alberi astratti ha come nodi tali classi di isomorfismo e come archi le coppie costituite da un albero ed uno degli alberi ottenibili aggiungendo un nuovo lato ed un nuovo nodo al precedente.
Questi nodi si distribuiscono per successivi livelli riguardanti i successivi ordini, ovvero i successivi gradi. Al livello 1 si pone il grafo nodo, al livello 2 $\mathcal{P}_2$ ed al livello 2 $\mathcal{P}_3$; al livello 3 si trovano la triade e $\mathcal{P}_3$; al livello 4 i 3 alberi con 4 lati; al livello 5 i 6 alberi con 5 lati; e così via.

Chiaramente al crescere del livello cresce vistosamente il numero dei nodi: quindi il digrafo degli alberi astratti, come ogni altro digrafo e grafo numerabile, può essere disegnato concretamente solo per un numero finito di livelli.
Il digrafo degli alberi non vuole servire per operazioni effettive sugli alberi con molti nodi, ma per presentare con chiarezza alcuni aspetti rilevanti del complesso di queste configurazioni discrete.

D28e.05 Anche gli altri digrafi e grafi numerabili accennati in precedenza svolgono un ruolo importante per la comprensione dei complessi di configurazioni discrete che sono rappresentati dai relativi nodi.
Essi hanno un ruolo di inquadramento delle costruzioni riguardanti le configurazioni discrete: consentono di chiarire e descrivere efficacemente alcune proprietà delle relazioni tra le configurazioni e quindi di facilitare la determinazione di algoritmi che permettono di operare su di esse, per esempio algoritmi che ad uno dei nodi del digrafo infinito consentono di associare tutti i nodi di livello superiore adiacenti o successori.