Capitolo D28:
Strutture grafiche arricchite

Contenuti delle sezioni

D28:0.01 Questo capitolo presenta una panoramica sulle molte strutture discrete che costituiscono arricchimenti di digrafi e di grafi nonorientati o varianti di alcuni tali arricchienti. Di queste entità si danno definizioni formali e vari esempi motivando la loro importanza per la definizione di modelli utili in applicazioni di rilevante importanza.
Vengono inoltre introdotti i multigrafi euleriani ed i digrafi hamiltoniani dimostrando alcune loro proprietà. Da ultimo viene presentata una panoramica dei digrafi e dei grefi nonorientati numerabili.

D28:a. Grafi e digrafi arricchiti

D28:a.01 Molte applicazioni vengono affrontate utilizzando modelli discreti che si basano su strutture ottenute arricchendo grafi e digrafi, cioè munendo grafi o digrafi con altre informazioni numeriche, simboliche o composite associate ai loro nodi e/o ai loro collegamenti.

I nodi di un grafo o di un digrafo astratto (ovvero i nodi di una classe di isomorfismo di grafi o di digrafi) possono essere distinti sia per i simboli o i nomi adottati per identificarli, sia dalle peculiarità dei sistemi di collegamenti che hanno con gli altri nodi e delle qualifiche che da questi seguono. Considerazione analoga vale per gli archi e per i lati.
Per molte applicazioni è invece necessario introdurre informazioni che portino distinzioni tra i nodi e/o tra i collegamenti che si aggiungono agli identificatori ed alle informazioni ricavabili dai sistemi di collegamenti.
Sul piano descrittivo questo si ottiene assegnando ai diversi nodi delle etichette distintive, elementi formali che possono consistere in numeri, caratteri, parole o anche combinazioni degli oggetti precedenti che possono raggiungere complessità che li fanno considerare vere e proprie strutture informative. Formalmente questo corrisponde a considerare strutture costituite oltre che da nodi e collegamenti, da funzioni che ad ogni nodo o collegamento associa un elemento di un insieme finito talora semplice, talora composito.

D28:a.02 Precisiamo formalmente alcuni di questi arricchimenti cominciando dai digrafi; per i grafi nonorientati ci limitiamo, invece a rilevare che le omologhe nozioni si possono introdurre assimilando queste strutture a casi particolari di digrafi, ovvero ai digrafi simmetrici.
Viceversa per gli esempi applicativi ci serviremo spesso di grafi nonorientati.

Diciamo **digrafo con nodi etichettati** un sistema $G = \langle Q, U, L, \eta \rangle$, dove $\langle Q, U \rangle$ è un digrafo, L è un insieme finito detto **insieme delle etichette dei nodi** e la funzione $\eta \in \{Q \longmapsto L\}$ è detta **etichettatura dei nodi** di G.
Diciamo invece **digrafo con archi etichettati** un sistema $G = \langle Q, U, M, \theta \rangle$, dove $\langle Q, U \rangle$ è un digrafo, M è un insieme finito detto **insieme delle etichette degli archi** e la funzione $\theta \in \{Q \longmapsto L\}$ è detta **etichettatura degli archi** di G.
Diciamo invece **digrafo con nodi ed archi etichettati** un sistema $G = \langle Q, U, L, \eta, M, \theta \rangle$, dove L ed M sono insiemi finiti, mentre $\eta \in \{Q \longmapsto L\}$ e $\theta \in \{Q \longmapsto L\}$.

D28:a.03 Si possono introdurre i vari generi di morfismi tra digrafi etichettati chiedendo che la corrispondente funzione dai nodi di un primo digrafo ai nodi del secondo mantenga l'etichettatura o conduca ad una nuova etichettatura ottenibile attraverso una biiezione fra i due insiemi di etichette.
In particolare per **isomorfismo tra due digrafi con i nodi etichettati** $G_i = \langle Q_i, U_i, L_i, \eta_i \rangle$ per $i = 1, 2$ si intende una coppia di biiezioni $\langle f, g \rangle$ con $f \in \{Q_1 \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright Q_2\}$ e $g \in \{L_1 \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright L_2\}$ tale che

$$\forall q, r \in Q_1 \;\vdots\; qU_1r \iff f(q)u_2f(r) \quad \text{e} \quad \forall q \in Q_1 \;\vdots\; \eta_2(f(q)) = g(\eta_1(q)) \;.$$

Definizioni del tutto prevedibili riguardano i **grafi nonorientati etichettati**.

D28:a.04 L'assegnazione di etichette può servire a diversi scopi. Il più semplice è la introduzione di distinzioni fra i nodi e/o i collegamenti. Attribuendo ai nodi (o ai collegamenti) etichette semplici che possono non essere esclusive (e che non si devono confondere con i loro identificatori) si ripartiscono queste componenti in classi diverse.
Attribuendo alle componenti di un digrafo etichette costituite da insiemi di informazioni semplici si possono associare a ciascuna componente le diverse qualifiche corrispondenti ai diversi elementi dell'insieme attribuito.

Consideriamo un grafo nonorientato che fa da modello per un sistema di depositi e dei relativi collegamenti stradali. I singoli depositi possono essere utilmente caratterizzati da codici che qualificano le loro classi di dotazioni (capienza, dotazione di spazi attrezzati per prestazioni specifiche (elevatori, frigoriferi, casseforti, sistemi di allarme, ...). Queste classi costituiscono una ripartizione dei depositi di prevedibile utilità.

Consideriamo un digrafo rappresentante i tratti stradali (molti a senso unico) di una città; ogni arco è individuato da una coppia di incroci stradali o di piazze. I nomi delle vie caratterizzano sottoinsiemi di tratti stradali diversi e disgiunti (una via potrebbe comprendere coppie di archi opposti e archi corrispondenti a tratti a senso unico. I nomi delle vie quindi stabiliscono una ripartizione dell'insieme dei tratti stradali.

In molti schemi costituenti grafi arricchiti può essere pratico evidenziare le classi dei generi accennati in precedenza mediante colori (ma in molti casi si preferiscono immagini più complesse come bandierine, stemmi, loghi, ...).
In questi casi invece che di etichette, di etichettature e di digrafi etichettati si parla, risp., di colori, di colorazioni e di digrafi colorati. Nell'ambito della teoria dei grafi, in effetti, per trattare grafi con i nodi e/o i collegamenti ripartitisecondo blocchi assegnati si adotta il linguaggio dei colori.
Attraverso una colorazione dei nodi si viene ad assegnare una partizione dell'insieme dei nodi, ciascun blocco essendo costituito dai nodi di un determinato colore. Considerazione analoga per la colorazione dei collegamenti.

D28:a.05 Si dice **digrafo inizializzato** ogni $G := \langle Q, I, U \rangle$, dove $\langle Q, U \rangle$ è un digrafo ed $I \subseteq Q$.
I è detto **insieme dei nodi iniziali** di G.

Si dice **digrafo inizializzato e finalizzato** ogni $G := \langle Q, I, F, U\rangle$ con $\langle Q, I, U\rangle$ digrafo inizializzato ed $F \subseteq Q$. F è detto **insieme dei nodi finali** di Q.

I digrafi inizializzati sono sostanzialmente digrafi colorati con due colori, mentre i digrafi inizializzati e finalizzati sono sostanzialmente digrafi muniti di due colorazioni bicromatiche ed equivalgono a digrafi colorati con 4 colori.
Infatti la evidenziazione entro l'insieme Q del sottoinsieme I equivale ad assegnare la funzione indicatrice

$$\mathcal{I}_{Q;I} \;=\; \lceil q \in I \mapsto 1 \rceil \;\dot\cup\; \lceil\, q \in Q \setminus I \mapsto 0 \rceil$$

e la evidenziazione dei sottoinsiemi I ed F entro Q equivale a dare la funzione che presenta al più quattro valori

$$\lceil q \in Q\backslash(I \cup F) \mapsto 0 \rceil \;\dot\cup\; \lceil\, q \in (I\backslash F) \mapsto 1 \rceil \;\dot\cup\; \lceil\, q \in (F\backslash I) \mapsto 2 \rceil \;\dot\cup\; \lceil\, q \in (I \cap F) \mapsto 3 \rceil\ .$$

Infatti l'arbitrarietà di I ed F non esclude che si possano avere $Q\backslash(I \cup F = \emptyset$, $I\backslash F = \emptyset$, $F\backslash I = \emptyset$ ed $I \cap F = \emptyset$.
Questa funzione equivale ad una colorazione con al più 4 colori.

Per trattare queste funzioni può essere utile introdurre la nozione di **quasipartizione**, generalizzazione della nozione di partizione che consente di esprimere un insieme ambiente A con una espressione della forma $A = \dot\bigcup_{i \in I} B_i$ nella quale alcuni dei B_i, ma non tutti, possono essere vuoti.
$\mathcal{I}_{Q;I\backslash F;F\backslash I;Q\backslash(I\cup F)}$.

D28:a.06 In modo simile si definiscono grafi con lati etichettati e digrafi con archi etichettati.

Nelle raffigurazioni di queste strutture arricchite nodi, archi e lati sono accompagnati da opportune scritture. Gli esempi più semplici di grafi e digrafi arricchiti si possono esaminare in modo intuitivo attraverso le rispettive raffigurazioni. Quando invece nodi e collegamenti sono numerosi, si rendono necessarie distinzioni e valutazioni accurate e ricorrere ad implementazioni che si servono di strutture informative accuratamente studiate per consentire loro manipolazioni efficienti e/o versatili.

D28:a.07 Molte applicazioni chiedono di attribuire a nodi e/o collegamenti valutazioni numeriche. Si trattano quindi strutture come i **digrafi con nodi valutati**, sistemi $D = \langle Q, U, v\rangle$, con $v \in \{Q \longmapsto \mathbb{R}\}$ ed i **digrafi con archi misurati**, sistemi $D = \langle Q, U, m\rangle$, con $m \in \{Q \longmapsto \mathbb{R}_+\}$.
Accanto alle strutture precedenti si hanno le corrispondenti strutture con collegamenti non orientati: in particolare si hanno i **grafi con nodi colorati** $\langle Q, E, C, c\rangle$ con $c \in \{Q \longmapsto C\}$, ed i **grafi con lati colorati** $\langle Q, E, C, c\rangle$ con $c \in \{E \longmapsto C\}$,

Esempi di grafi nonorientati con nodi valutati potrebbe riguardare i collegamenti fra diverse località caratterizzate dalle loro altitudini o i collegamenti tra alcuni depositi caratterizzati dalle loro capienze.
Dei grafi con collegamenti misurati possono essere utilizzati per descrivere reti di trasporti (strade, ferrovie, oleodotti, ...) con indicazioni di distanze o di costi per i diversi collegamenti.
Dei modelli più completi di queste reti potrebbero presentare più valutazioni su nodi e collegamenti (altitudini, lunghezze, portate, costi unitari di trasporto, ...) ed eventuali etichettature, ad esempio indicazioni atte a fornire distinzioni amministrative.

D28:a.08 Importanti modelli basati su grafi arricchiti sono utilizzati nello studio dei circuiti elettrici ed elettronici.
Modelli di circuiti elettrici utilizzati da tempo contengono indicazioni di resistori (ciascuno caratterizzato da una resistenza), di capacitori (ciascuno caratterizzzato da una capacità) e di batterie (ciascuna

caratterizzata da una differenza di potenziale. Questi schemi richiedono distinzioni qualitative per i diversi nodi e collegamenti e indicazioni di grandezze fisiche coerenti con le precedenti. Sopra di essi possono essere impostati vari tipi di problemi volti a determinare sistemi di grandezze fisiche come i livelli di potenziale per i diversi nodi ed i flussi di correnti elettriche nei diversi collegamenti.

Modelli analoghi sono utilizzati in elettronica.

D28:a.09 Altri modelli che richiedono grafi arricchiti sono utilizzati nella chimica e nella biologia molecolare.
In questi casi i nodi possono corrispondere ad atomi, ad elettroni, a ioni i a grppi di atomi, mentre i collegamenti riguardano i legami elettrochimici tra le diverse componenti e le loro caratteristiche (legami ionici, covalenti, ...).
I parametri quantitativi possono concernere grandezze come masse, cariche elettriche e distanze, mentre le etichette possono riguardare distinzioni fra elettroni, protoni, le diverse specie atomiche, i diversi gruppi ionici oppure distinzioni fra i diversi generi di legami. In questi modelli si possono trovare anche specificazioni geometriche e din particolare angoli.

D28:a.10 Un altro genere di modelli mediante grafi arricchiti viene utilizzato per rappresentare archivi e reti informatiche.
Modelii simili sono utilizzati per trattare sistemi di conoscenze. Tipici sono gli esempi degli schemi di classificazione e dei dizionari.

D28:a.11 Un altro tipo di arricchimento, che preciseremo più avanti parlando delle arborescenze distese (v. D30:), consiste nel determinare per ogni nodo di un digrafo un ordinamento tra gli archi che escono od entrano in esso. Un tale ordinamento può essere raffigurato implicitamente attraverso la collocazione nel piano dei diversi archi.

D28:b. Multigrafi e plurigrafi

D28:b.01 Nelle strutture grafiche precedenti non si ha molteplicità nei collegamenti, cioè tra un nodo ed un altro non può esistere più di un collegamento e sono previsti solo coppie di archi mutuamente riflessi. La molteplicità dei collegamenti è però richiesta da molte applicazioni: ad esempio tra due località si possono avere diverse strade oppure diversi tipi di collegamenti (strada, autostrada, ferrovia, ...). La molteplicità si può ottenere consentendo di avere più lati (o archi) per ogni coppia o doppietto di nodi (più cappi su un nodo), oppure considerando diversi sistemi di collegamenti sullo stesso insieme dei nodi.

D28:b.02 Si dice **multigrafo** ogni $M := \langle Q, X, f\rangle$ con Q ed X insiemi finiti detti, risp., insieme dei nodi ed insieme dei lati e con $f \in \{X \longmapsto \mathfrak{P}_{1,2}(Q)\}$.
Si dice **multidigrafo** ogni $M := \langle Q, X, f\rangle$ con Q ed X insiemi finiti detti, risp., insieme dei nodi ed insieme degli archi e con $f \in \{X \longmapsto Q \times Q\}$.
Quando a due diversi valori in X corrisponde la stessa coppia di nodi o lo stesso elemento di $\mathfrak{P}_{1,2}(Q)$ si ha molteplicità di collegamenti.
In questi casi si parla anche di **lati** e di **archi paralleli**.

D28:b.03 Si dice **plurigrafo** un sistema $P := \langle Q, A, \mathcal{U}\rangle$, dove Q è un insieme finito detto insieme degli **stati** di P, A un insieme finito detto insieme delle **etichette** per gli archi di P ed $\mathcal{U} \in \{A \longmapsto \mathfrak{P}(Q \times Q)\}$. Talora sarà comodo denotare la classe dei plurigrafi con **Pgrf**.

Per ogni $a \in A$ si considera $U_a := \{\langle p, q\rangle \in Q \times Q \mid \mathcal{U}(a, p) = q\}$; esso è detto **sistema degli archi di** P **etichettati da** a. Il plurigrafo si può quindi considerare formato dai digrafi $\langle Q, U_a\rangle$ relativi ai diversi $a \in A$.

La raffigurazione di un plurigrafo si può pensare ottenuta sovrapponendo le raffigurazioni dei suddetti digrafi distinguendo opportunamente i diversi sistemi di archi: mediante colori diversi, mediante caratteri o etichette diverse, servendosi di curve tratteggiate, ...

D28:b.04 Si dice **plurigrafo inizializzato** un sistema $P := \langle Q, I, A, U\rangle$ dove $\langle Q, A, U\rangle$ è un plurigrafo ed $I \subseteq Q$. I è detto insieme degli **stati iniziali** di P.

Si dice **plurigrafo inizializzato e finalizzato** ogni

$$P := \langle Q, I, F, A, U\rangle$$

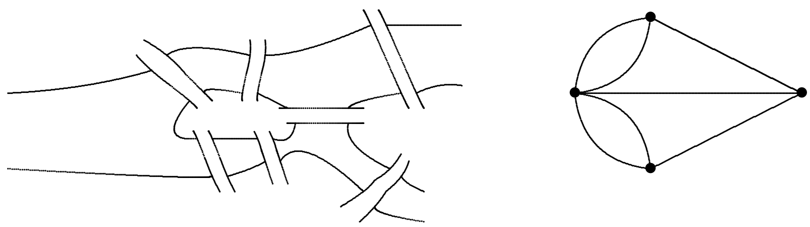
dove $\langle Q, I, A, U\rangle$ è un plurigrafo inizializzato ed $F \subseteq Q$.
F è detto insieme degli **stati finali** di P.

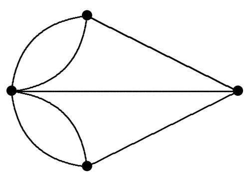
D28:c. Multigrafi euleriani

D28:c.01 Di fronte a molti problemi da studiare servendosi di strutture grafiche occorre scegliere con attenzione la specie di strutture che risulta più opportuna.

Questo si è verificato fin dal primo problema affrontato mediante grafi e risolto nel 1736 dal grande matematico [[Leonhard Euler]] detto "problema dei ponti di Königsberg". Eulero nel 1736 viveva in questa città, allora facente parte della Prussia Orientale (ora fa parte della Russia e conserva il nome sovietico di Kaliningrad). Egli amava passeggiare e si chiedeva se fosse possibile, nel corso di una passeggiata attraversare tutti i sette ponti che scavalcavano il fiume Pregel senza doverne passare nessuno più di una volta.

Il primo passo della risoluzione fu la schematizzazione del complesso dei possibili percorsi mediante il seguente multigrafo

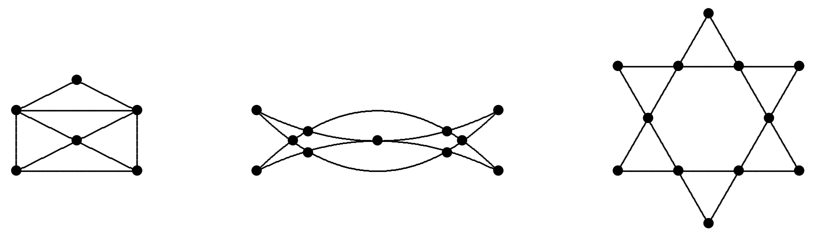




Ogni lato rappresenta l'attraversamento di un ponte, ogni nodo un'area della città percorribile senza attraversare alcun ponte. Su questo schema è facile individuare una soluzione, consistente in un **cammino euleriano** (questa l'origine del nome), nel quale si toccano tutti i suoi lati senza ripeterne alcuno.

D28:c.02 Introduciamo anche i termini **circuito euleriano** per intendere un cammino euleriano con il nodo iniziele coincidente con il finale e **multigrafo eulreriano** per caratterizzare un multigrafo dotato di un circuito euleriano.

Generalizzando il problema, Eulero dimostrò che un multigrafo è euleriano sse è connesso e tutti i suoi nodi, eccettuati al più due, hanno valenza pari. Ricordiamo infatti che il numero dei nodi con valenza dispari di un multigrafo è pari.
In tal modo egli diede la soluzione del problema generale; la verifica del carattere euleriano dell'intero multigrafo venne ricondotta ad una semplice indagine locale, sui singoli nodi. Infine egli descrisse come si può individuare efficientemente uno dei cammini richiesti, cioè mostrò come si può giungere costruttivamente ed efficientemente ad una soluzione.
Altri grafi euleriani per i quali si verifica facilmente l'affermazione precedente sono i seguenti:



D28:c.03 Vediamo dunque come individuare concretamente un cammino euleriano sopra un multigrafo che si è verificato essere euleriano.

(1) Algor.: Si inizia da un nodo di valenza dispari o da un nodo qualsiasi, nel caso in cui non esistano nodi di valenza dispari. Quindi si segue un lato qualsiasi e, giunti su un nuovo nodo, si cerca di proseguire su un lato non percorso in precedenza e privo di una indicazione apposta ad ogni lato utilizzato. Se si giunge ad un nodo privo di lati non ancora percorsi ma rimangono altri lati non attraversati, necessariamente o si è arrivati al secondo nodo di valenza dispari o si è tornati al nodo di partenza e non esiste alcun nodo dispari; inoltre il multigrafo ottenuto rimuovendo i lati già percorsi non possiede nodi di valenza dispari.

Sul grafo restante, che potrebbe essere non connesso, si può individuare un circuito chiuso euleriano che tocca il cammino già individuato operando con il criterio precedente a partire da un nodo del detto cammino. Questo nuovo circuito si può combinare con il cammino precedente in un più esteso cammino euleriano. Può accadere che ancora rimangano lati non percorsi, ma ancora questi costituiscono un multigrafo con soli nodi di valenza pari più ridotto del precedente residuo. Quindi questo processo può essere proseguito fino all'esaurimento dei lati ▮

D28:c.04 Osserviamo che il problema della individuazione di un cammino euleriano di un multigrafo, cioè di una sua **configurazione globale**, risulta sostanzialmente semplice, in quanto si serve esclusivamente di calcoli e di scelte riguardanti singoli nodi, cioè di **elaborazioni puntuali**.
Gli attributi di **puntuale** e di **globale** sono stati qui introdotti per una struttura fondamentalmente semplice in relazione ad un problema di cui si trova una soluzione piuttosto tranquilla (senza nulla togliere all'acutezza pionieristica con la quale Eulero ha individuato gli elementi essenziali del problema

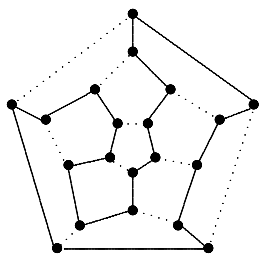
stesso). I caratteri di località o meno possono essere trovati in molti altri problemi discreti, sempre in relazione a loro schematizzazioni grafiche discrete, cioè mediante strutture grafiche: il chiarimento dei suddetti caratteri spesso corrisponde a un sostanziale chiarimento per l'intero problema.

D28:d. Digrafi hamiltoniani

D28:d.01 Una classe di grafi non orientati che si può definire in modo simile è quella dei **grafi hamiltoniani**: questi sono i grafi sui quali si trova un **cammino hamiltoniano biiettivo sui nodi** (o sui vertici), cioè un cammino che tocca tutti i nodi una volta sola. Osserviamo che per la ricerca di un tale cammino è una inutile complicazione prendere in considerazione multigrafi, in quanto di più lati paralleli se ne può utilizzare uno solo. Anche la presenza di cappi è del tutto superflua.

I due problemi del cammino euleriano e del cammino hamiltoniano, a prima vista simili, sono profondamente diversi; infatti non si conoscono condizioni semplici da verificare e da utilizzare che caratterizzino i grafi hamiltoniani. In effetti la ricerca di cammini hamiltoniani e di loro varianti, per grafi generici, costituisce un problema che si deve affrontare mediante algoritmi molto impegnativi anche per computers di alte prestazioni.

D28:d.02 Il nome di grafo hamiltoniano deriva dal fatto che il grande matematico irlandese [[William Rowan Hamilton]], intorno al 1860, aveva ideato un gioco consistente in un mappamondo stilizzato mediante un icosaedro regolare. Sui nodi del solido erano segnate 20 città del globo ciascuna delle quali connessa ad altre 3: si trattava di trovare un percorso che consentisse di "visitare" tutte queste città una e una sola volta.



Occorre però aggiungere che questo problema era stato presentato in tutta generalità nel 1856 da T. P. Kirkman, matematico molto meno famoso di Hamilton.

D28:d.03 Il problema della ricerca dei cammini hamiltoniani sopra un grafo è collegato a problemi di grande interesse pratico detti "del commesso viaggiatore". Si tratta di individuare il percorso meno costoso che un commesso deve compiere per raggiungere tutti i suoi clienti: è naturale ricercare i cammini più economici tra quelli che non toccano un nodo più volte.
Orbene, nel caso di un numero elevato di clienti (nodi) e di collegamenti delle sedi dei clienti stessi (lati), questo problema risulta estremamente oneroso da risolvere. La ragione di questa onerosità è dovuta al fatto che non bastano, come per i problemi riguardanti grafi euleriani, considerazioni locali ma, per decidere quale strada imboccare ad ogni passo, servono conoscenze più globali sul grafo e queste conoscenze si possono ottenere con indagini molto più impegnative. Si è quindi indotti a ricercare

soluzioni che non sono ottime ma che semplicemente risultano poco meno economiche di quelle ottime; in particolare si può consentire di tornare su qualche nodo già toccato.

D28:d.04 In effetti si sono trovate intere classi di problemi per i quali si è dimostrato che sarebbe enormemente gravoso costruire soluzioni ottime e per i quali risulta necessario accontentarsi di soluzioni che semplicemente si avvicinano a quelle. A questi problemi è stato dato il nome di *problemi intrattabili.* L'esistenza di questi problemi costituisce un certo limite della matematica e dell'informatica. Essa porta alla necessità di non affrontare di petto certi problemi e a non intraprendere certi calcoli; occorre riconoscere queste situazioni ed assumere atteggiamenti "rinunciatari". Questi studi, che riprenderemo nel capitolo sulla complessità computazionale, fanno ampio ricorso alle elaborazioni sui grafi.

D28:e. Digrafi e grafi numerabili

D28:e.01 Molti problemi della matematica discreta si collocano in strutture numerabili ottenibili mediante strutture grafiche costituite da insiemi numerabili definiti da regole costruttive semplici e che possono considerarsi estensioni numerabili di strutture grafiche viste in precedenza.

Diciamo **grafo numerabile** un sistema $\langle Q, E\rangle$ con Q insieme numerabile (e quindi costruibile con una procedura ben determinata) ed E sottoinsieme decidibile di $\mathfrak{P}_{1,2}(Q)$.

Diciamo invece **digrafo numerabile** un sistema $\langle Q, U\rangle$ con Q insieme numerabile costruibile ed U sottoinsieme decidibile di $Q \times Q$.

Dare un grafo numerabile o un digrafo numerabile, dunque, richiede che si precisino un procedimento che permetta di procedere alla costruzione degli elementi dell'insieme dei nodi Q secondo un certo ordine ed un procedimento che per ogni $q \in Q$ permetta di costruire tutti i nodi adiacenti a q già generati (questi in ogni caso sono in numero finito, anche se "alla fine" sarebbero una infinità numerabile).

In alternativa per avere un grafo numerabile, oltre al procedimento per la generazione dei nodi occorre determinare un procedimento di decisione che per ogni $c \in Q$ stabilisca se $\{c\} \in E$ e per ogni duetto $\{p, q\}$ di elementi di Q $p, q \in Q$ permetta di decidere se $\{q, p\} \in E$. Per avere un digrafo numerabile, oltre al procedimento di generazione dei nodi, serve un procedimento che per ogni $\langle q, p\rangle \in Q \times Q$ decida se $\langle p, q\rangle \in U$.

D28:e.02 Ricordiamo il piano combinatorio $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e la griglia combinatoria (v. B21:). Un grafo numerabile è fornito da $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, U\rangle$, dove U è l'insieme formato dai lati orizzontali $\{\langle i, j\rangle, \langle i + 1, j\rangle\}$ e dai lati verticali $\{\langle i, j\rangle, \langle i, j + 1\rangle\}$.

Un altro grafo numerabile individuabile nella griglia combinatoria è fornito dall'insieme delle caselle che svolgono il ruolo dei nodi e dall'insieme dei lati orizzontali e verticali con il ruolo degli spigoli che collegano i nodi caselle.

Questi due grafi numerabili sono grafi planari, cioè tali che si possa procedere quanto si vuole a tracciarli sul piano senza che sia necessario incrociare i loro spigoli.

Anche ad ogni grafo numerabile planare si associa un duale (v. D31:) costituito dalle maglie e dai collegamenti tra due maglie separate da uno spigolo. I due grafi numerabili introdotti sopra costituiscono una coppia di grafi numerabili planari duali.

D28:e.03 Sono di grande interesse alcuni digrafi numerabili associati ad importanti relazioni fra insiemi, stringhe e numeri.

Sono da distinguere i cosiddetti **digrafi numerabili ripartibili in parti finite**. Un tale digrafo $\langle Q, U\rangle$ presenta un Q che è costituito da sottoinsiemie finiti di un ambiente T numerabile e costruibile (come $\mathbb{P}$, $\mathbb{Z}$ o l'insieme A^* delle stringhe sopra un dato alfabeto A) e si può ripartire in una successione di sottoinsiemi finiti tali che ciascuno dei suoi archi ha la forma $\langle S, S \dot\cup \{x\}\rangle$, per $S \subset_f T$ ed $x \in T \setminus S$.
Questi sono digrafi numerabili graduati, nel senso che il loro insieme dei nodi si può ripartire in sottoinsiemi cotituiti da sottoinsiemi di T della stessa cardinalità tali che gli archi del digrafo collegano nodi di gradi consecutivi.
Discutendo di numeri interi (v. B26:) può essere utile fare riferimento al **digrafo della divisibilità**, $\langle \mathbb{P}, \{\langle i, j\rangle \in \mathbb{P} \times \mathbb{P} \,\P\, i \nmid j\}\rangle$.
Parlando di stringhe è utile fare riferimento a digrafi numerabili corrispondenti alle relazioni fra stringhe di prefisso, suffisso, infisso e sottostringa (v. C10:).

D28:e.04 Di grande importanza sono anche i digrafi numerabili graduati delle partizioni degli interi e delle partizioni di insiemi finiti.

Nell'ambito della teoria dei grafi risulta utile fare riferimento a digrafi che consentono di inquadrare intere classi di grafi come gli alberi e le arborescenze, ovvero le classi di isomorfismo di queste strutture discrete.

Ad esempio il digrafo degli alberi astratti ha come nodi tali classi di isomorfismo e come archi le coppie costituite da un albero ed uno degli alberi ottenuti aggiungendo un nuovo lato ed un nuovo nodo al precedente. I nodi si distribuiscono per successivi livelli riguardanti i successivi ordini, ovvero i successivi gradi. Al livello 1 si pone il grafo nodo, al livello 2 $\mathcal{P}_2$ ed al livello 2 $\mathcal{P}_3$; al livello 3 si trovano la triade e $\mathcal{P}_3$; al livello 4 i 3 alberi con 4 lati; al livello 5 i 6 alberi con 5 lati; e così via.

Chiaramente al crescere del livello cresce vistosamente il numero dei nodi: quindi il digrafo degli alberi astratti, come ogni altro digrafo e grafo numerabile, può essere disegnato concretamente solo per un numero finito di livelli.
Il digrafo degli alberi non vuole servire per operazioni effettive sugli alberi con molti nodi, ma per presentare con chiarezza alcuni aspetti del complesso di queste configurazioni discrete.

D28:e.05 Anche gli altri digrafi e grafi numerabili accennati in precedenza svolgono un ruolo importante per la comprensione dei complessi di configurazioni discrete che costituiscono i relativi nodi. Essi hanno un ruolo ausiliario nei confronti delle costruzioni riguardanti le configurazioni discrete: consentono di chiarire e descrivere efficacemente proprietà delle relazioni fra le configurazioni e quindi di individuare algoritmi che permettono di operare su di esse, ad esempio algoritmi che ad uno dei nodi del digrafo infinito consentono di associare tutti i nodi di livello superiore adiacenti o successori.