Capitolo D27: Digrafi, matrici e raggiungibilità

Contenuti delle sezioni

D27:a. Digrafi

D27:a.01 Si dice **digrafo**, o **grafo diretto**, o **grafo orientato**, ogni coppia $D :=: \langle Q, U\rangle$ per la quale Q è un insieme finito ed $U :\subseteq Q \times Q$; Q è detto **insieme dei nodi** ed U **insieme degli archi** del digrafo D.

Il numero dei nodi di D si dice **ordine** del digrafo, mentre quello degli archi è chiamato **grado** di D.

Un digrafo equivale ad una relazione binaria finita munita dell'insieme entro il quale si considera definita.

Denoteremo con **Dgrf** la classe dei digrafi. Dato un digrafo D, può risultare comodo denotare con $Nod(D)$ l'insieme dei suoi nodi e con $Arc(D)$ l'insieme dei suoi archi. Potremo quindi riferirci ad un digrafo esprimendolo come $D = \langle Nod(D), Arc(D)\rangle$.

Un digrafo costituito da un solo nodo e da nessun arco viene chiamato **digrafo nodo** o **digrafo banale**.

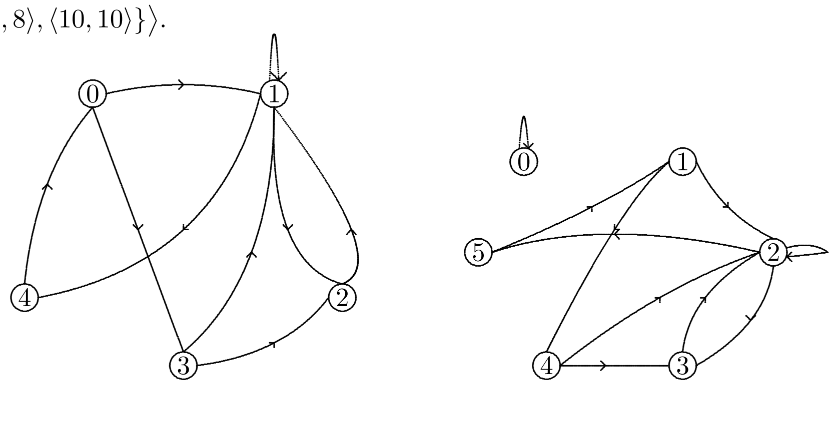
Talora conviene considerare che di **Dgrf** faccia parte anche il cosiddetto **digrafo vuoto**, digrafo costituito da 0 nodi (e 0 archi).

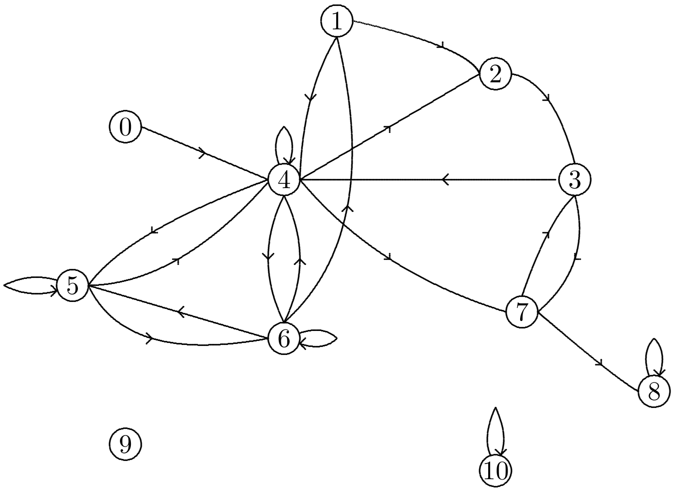
D27:a.02 Tre esempi di digrafi che prenderemo in considerazione sono:

$D_a = \langle\{0,1,2,3,4\}\ ,\ \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,0\rangle\}\rangle$

$D_b = \langle\{0,1,2,3,4,5\}\ ,\ \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 5,1\rangle\}\rangle$

$D_c = \big\langle\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\ ,\ \{\langle 0,4\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 4,6\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 6,4\rangle, \langle 5,6\rangle, \langle 6,5\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 3,7\rangle, \langle 7,3\rangle, \langle 7,8\rangle, \langle 8,8\rangle, \langle 10,10\rangle\}\big\rangle.$





D27:a.03 Le scritture usate precedentemente per definire digrafi sono assai pesanti e conviene servirsi di loro semplificazioni. Se ogni nodo di $D \in$ **Dgrf** è componente di almeno un arco si può evitare di indicare l'insieme $Nod(D)$; se i nodi sono identificati da segni semplici si possono individuare gli archi mediante digrammi.
Quindi D_a è dato da $\{01, 03, 11, 12, 14, 21, 31, 33, 40\}$ e D_b da $\{00, 12, 14, 22, 23, 25, 32, 42, 43, 51\}$. Non si può invece presentare in questo modo D_c perché 9 non è membro di alcun arco e uno dei nodi è identificato da unacoppia di cifre. Se si reputa conveniente limitarsi ad archi espressi da digrammi si può sostituire la scrittura 10 con X o con la cifra esadecimale A e, più efficacemente, identificare i nodi mediante lettere maiuscole o minuscole se ne bastano 26, mediante maiuscole e minuscole se nhe servono non più di 52, medeiante lettere e cifre se non se ne hanno più di 62.

D27:a.04 Se $a := \langle q, r\rangle$ è un arco di un digrafo, il nodo q si dice **estremità iniziale** di a, mentre il nodo r si dice **estremità finale** di a. Archi particolari di un digrafo sono i suoi **cappi** o **lacci**, cioè archi della forma $\langle q, q\rangle$, ovvero gli archi con le estremità coincidenti. D_a possiede un cappio; D_b ne possiede due; D_c ne possiede cinque.

Un **digrafo** privo di cappi si dice **semplice**.

D27:a.05 In un digrafo, insieme ad un arco $\langle q, r\rangle$ che non sia cappio ($q \neq r$), potrebbe essere presente o meno l'arco $\langle r, q\rangle$; quest'ultimo viene detto **riflesso** del precedente. In D_a $\langle 2, 1\rangle$ è il riflesso di $\langle 1, 2\rangle$; in D_b $\langle 2, 3\rangle$ e $\langle 3, 2\rangle$ sono l'uno il riflesso dell'altro; D_c possiede quattro coppie di archi mutuamente riflessi.

Consideriamo un generico digrafo $D = \langle Q, U\rangle$.
Si dice **riflesso** o **trasposto** di D il digrafo

$$D^{\leftarrow} := \langle Q, U^{\leftarrow}\rangle,$$

cioè al digrafo ottenuto cambiando l'orientazione degli archi di D. Il trasposto di un digrafo D corrisponde alla relazione trasposta di quella associata a D.

D27:a.06 Relativamente ad un digrafo $\langle Q, U\rangle$ si dicono **successori** o **discendenti diretti** del nodo q i nodi che sono estremità finale di un arco che ha q come estremità iniziale. Si dicono invece **predecessori** o **ascendenti diretti** di q i nodi che sono estremità iniziale di un arco che ha q come estremità finale. In D_a i successori di 1 sono 2, 4 e lo stesso 1; in D_b l'insieme dei nodi predecessori di 2 è $\{1, 2, 3, 4\}$. Il nodo q è ascendente diretto di p, e p è discendente diretto di q sse $\langle p, q\rangle \in U$, cioè sse $\langle q, p\rangle \in U^{\leftarrow}$.

I nodi predecessori e successori di q, si dicono, collettivamente, **adiacenti** ad esso. L'insieme dei nodi adiacenti a p è $(p \triangleleft U) \cup (p \triangleleft U^{\leftarrow}) = (p \triangleleft U) \cup (U \triangleright p)$. Osserviamo esplicitamente che un nodo può essere predecessore (ovvero successore, ovvero adiacente) di sé stesso: questo accade sse esso è dotato di cappio. L'insieme dei nodi adiacenti ad un determinato nodo p si dice **intorno** di p.

D27:a.07 Due **archi** si dicono **convergenti** sse hanno in comune l'estremità finale; **divergenti** sse hanno in comune l'estremità iniziale; **consecutivi** sse l'estremità finale di uno di essi coincide con la iniziale dell'altro. Più genericamente due archi si dicono **incidenti** sse hanno almeno una estremità in comune.

Un nodo si dice **isolato** sse non possiede alcun nodo adiacente. In D_c 9 è isolato.
Un nodo si dice **sconnesso** sse non è adiacente ad alcun nodo diverso da se stesso. Esempi di nodi sconnessi sono 0 in D_b e 10 in D_c.
Ogni nodo isolato è anche sconnesso, mentre i nodi dotati di cappio e di nessun altro arco incidente sono sconnessi e non isolati.

Un nodo si dice **pendente** sse possiede un solo nodo adiacente diverso da sé stesso.

D27:a.08 Si dice **grado uscente** di un nodo p del digrafo D il numero degli archi che escono da esso, cioè il numero degli archi che hanno p come estremità iniziale, cioè $|p \triangleleft U|$. Questo intero naturale si denota con $deg_+(p)$.
Si dice **grado entrante** di p, e lo denotiamo con $deg_-(p)$, il numero degli archi che entrano in esso, cioè il numero degli archi che hanno p come estremità finale, cioè $|p \triangleleft U^{\leftarrow}| = |U \triangleright p|$.
Si dice **grado** o **valenza** di un nodo p, e si denota semplicemente con $deg(p)$, la somma del suo grado entrante e del suo grado uscente; quindi

$$deg(p) \;:=\; deg_+(p) + deg_-(p) = |p \triangleleft U| + |p \triangleleft U^{\leftarrow}| \;.$$

In D_a il nodo 2 ha grado entrante 2 e grado uscente 1; in D_b il nodo 5 ha grado entrante e grado uscente uguali ad 1; in D_c il nodo 4 ha grado entrante 6 e grado uscente 5.

Si osservi che un nodo è isolato sse ha grado 0, mentre un nodo è pendente sse ha grado 1 ed è privo di cappio.

D27:a.09 Ricordiamo che relativamente ad una funzione $F \in \{Q \longmapsto R\}$ si dice multicardinalità la funzione $Mcard_F := \lceil r \in R \mid\!\blacktriangleright F^{-\mathbf{1}}(r) \rceil$.
Dalle funzioni costituenti $\{Nod(D) \longmapsto \mathbb{N}\}$ si ricavano tre multicardinalità associate al digrafo quella dei gradi uscenti, quella dei gradi entranti e quella dei gradi.
Nella pratica in genere conviene assegnare a Q un ordine totale ed individuare la sequenza dei suoi gradi uscenti, la sequenza dei suoi gradi entranti e la sequenza dei suoi gradi.

Ricordiamo anche che, se Q è un insieme, si dice **valutazione enumerativa** su Q una funzione del genere $\{Q \longmapsto \mathbb{N}\}$.
Le funzioni deg, deg_- e deg_+ sono evidentemente valutazioni enumerative per gli insiemi di nodi dei digrafi.
In un digrafo la somma dei gradi uscenti di tutti i suoi nodi coincide con la somma dei gradi entranti di tutti i suoi nodi e con il numero dei suoi archi.

D27:a.10 Se si cambiano gli identificatori dei nodi di un digrafo $D = \langle Q, U \rangle$, si ottiene un digrafo che conserva tutte le proprietà di D che dipendono solo dal complesso dei collegamenti tra i nodi, proprietà che chiamiamo Dgrf-invarianti. Ad esempio i due digrafi hanno lo stesso numero di nodi isolati, lo stesso numero di nodi pendenti e lo stesso multinsieme di gradi.
Formalmente il cambiamento di identificatori consiste nel considerare un insieme P con lo stesso numero di elementi di Q (i nuovi identificatori) ed una biiezione $\beta \in \{Q \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright P\}$; essa porta ad un digrafo

$H = \langle P, F \rangle$, dove F è l'insieme degli archi ottenuti da quelli di D modificando le loro estremità, ma stando attenti a mantenere l'orientazione degli archi stessi, mediante l'applicazione β:

$$F = \{\langle q, p \rangle \in U :| \langle \beta(q), \beta(p) \rangle\}.$$

Una biiezione che, come la precedente, mantiene l'adiacenza fra nodi e l'orientazione degli archi viene detta **isomorfismo tra digrafi** ed i due digrafi associati dalla biiezione si dicono **isomorfi**; per indicare che D ed H sono digrafi isomorfi si scrive $D \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Dgrf} H$ o più brevemente $D \cong H$, quando il contesto consente di evitare ambiguità.

Con la scrittura $\{D \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Dgrf} H\}$ denotiamo l'insieme di tutti gli isomorfismi tra D ed H. Per indicare che β è un isomorfismo tra i digrafi D ed H si scrive quindi $\beta \in \{D \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Dgrf} H\}$.

D27:a.11 Il digrafo H, ottenuto da un digrafo D cambiando gli identificatori dei suoi nodi, in genere non mantiene le proprietà di D derivanti dalle individualità dei suoi nodi, ovvero dal procedimento specifico con il quale lo si è costruito a partire da oggetti più elementari: queste proprietà, con certe scelte per H e β tese alla semplicità, potrebbero anche perdere di senso.

L'isomorfismo tra digrafi è una equivalenza. Infatti l'identità per i nodi di un digrafo D si può considerare un isomorfismo di D con sé stesso; la composizione di un isomorfismo β tra D ed H con un isomorfismo γ tra H ed un terzo digrafo K costituisce un isomorfismo tra D e K; infine ogni isomorfismo β tra D e H è invertibile e la sua applicazione inversa costituisce un isomorfismo tra H e D.

Chiameremo **proprietà invarianti spc-Dgrf** le proprietà condivise da tutti i digrafi isomorfi a D, cioè dai digrafi che insieme a D costituiscono una cosiddetta **classe di isomorfismo** di digrafi. La specificazione sincopata "spc-Dgrf" richiama la specie delle strutture digrafo.

D27:a.12 Per gli studi nei quali interessano solo proprietà dei digrafi che non dipendono da come sono individuati i loro singoli nodi, ma solo dal complesso dei collegamenti tra i nodi stessi, non sono rilevanti i digrafi singoli, ma le loro classi di isomorfismo.

In molte fasi espositive risulta vantaggioso attribuire le proprietà di un digrafo D condivise da tutti i digrafi della classe di isomorfismo a cui appartiene ad una unica entità che viene chiamata **digrafo astratto** associato a D. Anche questa è una struttura ottenuta con una astrazione espositiva.

Un digrafo astratto non molto elaborato in genere si può studiare attraverso una sua **raffigurazione con nodi anonimi**, figura nella quale non si inserisce alcuna indicazione per i nodi: ciascuno di essi è individuato solo da un punto nella raffigurazione.

D27:a.13 Naturalmente una raffigurazione a nodi anonimi non dice nulla sulle caratteristiche che dipendono dalle individualità dei nodi stessi.

Occorre peraltro rilevare che di uno stesso digrafo si possono dare diverse raffigurazioni equivalenti e che alcune di esse, a prima vista, possono sembrare presentazioni di digrafi diversi. In particolare vi sono digrafi che in una raffigurazione evidenziano chiaramente una prima proprietà P, ma non una seconda Q, mentre in un'altra raffigurazione rendono palese la Q e nascondono la P.

Va detto anche che vi sono proprietà generali che idealmente riguardano digrafi astratti, ma che in pratica conviene analizzare riferendosi a particolari rappresentativi delle loro classi di isomorfismo; inoltre spesso ai nodi di questi digrafi si assegnano identificatori scelti in modo da evidenziare specifiche caratteristiche il cui chiarimento è di interesse primario.

D27:b. Passeggiate e nozioni associate

D27:b.01 Si dice **semipasseggiata** sul digrafo $D = \langle Q, U\rangle$ ogni sequenza

$$\gamma := \langle q_0, u_1, q_1, \ldots, q_{s-1}, u_s, q_s\rangle \in Q \times (U \times Q)^s \quad \text{con} \quad s \in \mathbb{N}$$

tale che le due estremità di ogni suo arco (eventualmente coincidenti) sono costituite dal nodo che lo precede e da quello che lo segue in γ, cioè t.c. sia $u_i \in \big\{\langle q_{i-1}, q_i\rangle, \langle q_i, q_{i-1}\rangle\big\}$. Il numero s degli archi nella sequenza si dice **lunghezza** della semipasseggiata; tale grandezza si denota $\gamma^{\vdash\!\dashv}$ o $|\gamma|$.
Questa definizione piuttosto laboriosa si giustifica in quanto utile nelle applicazioni nelle quali un digrafo fa da modello per reti di trasporto, ad esempio di reti stradali: un arco rappresenta una strada a senso unico. Una semipasseggiata descrive una serie di spostamenti di un veicolo che in certi tratti si muove in senso vietato. Insistendo su questo modello si può pensare che ai cappi corrispondano aree di parcheggio e che il percorrere un cappio corrisponda a sostare nella relativa area per un "turno".

Si osserva che ogni arco $u = \langle q_{i-1}, q_i\rangle$ di un digrafo individua due sue semipasseggiate di lunghezza 1, $\langle q_{i-1}, u, q_i\rangle$ e $\langle q_i, u, q_{i-1}\rangle$.
Inoltre di un digrafo conviene considerare come semipasseggiate anche le sequenze costituite semplicemente da singoli nodi; a ciascuna di tali semipasseggiate si attribuisce la lunghezza zero. Si constata facilmente che questa scelta consente enunciati di maggiore generalità.

I nodi $q_0, q_1, ..., q_s$ e gli archi $u_1, ..., u_s$ si dicono **giacere** sulla semipasseggiata γ oppure si dicono **appartenere** ad essa.
Si dicono, risp., **estremità iniziale e finale di una semipasseggiata** il suo primo ed il suo ultimo nodo componente; i rimanenti nodi sono detti **nodi interni**.

D27:b.02 Una semipasseggiata del digrafo D $\gamma = \langle q_0, u_1, q_1, \ldots, q_{s-1}, u_s, q_s\rangle$ si dice **passegggiata** su D sse per ogni suo arco si ha $u_i = \langle q_{i-1}, q_i\rangle$, cioè sse ogni coppia di archi successivi presenta l'estremità finale del primo coincidente con l'iniziale del secondo. Quindi gli archi che si succedono su una passeggiata sono consecutivi. Secondo il modello del veicolo che si muove su strade a senso unico la passeggiata corrisponde ad uno spostamento che rispetta questi sensi.

Si dice che una passeggiata consente di **raggiungere** la sua estremità finale a partire dalla sua estremità iniziale.

D27:b.03 La definizione data di passeggiata ha il vantaggio di riferirsi a quella più generale di semipasseggiata, utile in varie applicazioni; inoltre essa consente di attribuire ad una semipasseggiata sia dei nodi che degli archi. Vedremo in seguito che essa è utilizzabile anche per i multidigrafi (v. D28:h) . Essa però è piuttosto pesante, in quanto una passeggiata su un digrafo può essere individuato dalla sola sequenza dei suoi archi o dalla sola sequenza dei suoi nodi. Si potrebbe definire passeggiata su un digrafo come una sequenza di suoi archi tali che l'estremità finale di un arco, che non sia l'ultimo, coincide con l'estremità iniziale dell'arco successivo. In tal modo la sua lunghezza, cioè il numero dei suoi archi, risulta essere un caso particolare della nozione di lunghezza per le sequenze. svq
Per individuare una passeggiata quindi, invece di una scrittura come

$$\big\langle q_0, \langle q_0, q_1\rangle, q_1, \langle q_1, q_2\rangle, q_2 ... q_{s-1}, \langle q_{s-1}, q_s\rangle, q_s\big\rangle \ ,$$

si potrebbe usare una scrittura riguardante solo i suoi archi come la

$$\langle\!\langle \langle q_0, q_1\rangle, \langle q_1, q_2\rangle, ..., \langle q_{s-1}, q_s\rangle\rangle\!\rangle \ ,$$

oppure una scrittura che indica solo i suoi nodi come la

$$\langle\!\langle q_0, q_1, q_2, ..., q_{s-1}, q_s \rangle\!\rangle \ .$$

Ad esempio, la scrittura $\langle 1, \langle 1,2\rangle, 2, \langle 3,2\rangle, 3, \langle 3,2\rangle, 2\rangle$ rappresenta una semipasseggiata in D_a, mentre $\langle 1, \langle 1,1\rangle, 1, \langle 1,4\rangle, 4, \langle 4,0\rangle, 0\rangle$ definisce una passegiata in D_a che può essere anche individuata come $\langle\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 4,0\rangle\rangle$, oppure come sequenza di nodi $\langle\!\langle 1,1,4,0\rangle\!\rangle$.

D27:b.04 Una semipasseggiata di un digrafo D $\gamma = \langle q_0, u_1, q_1, \ldots, q_{s-1}, u_s, q_s\rangle$ si dice **semipasseggiata chiusa** o **semicircuito** sse il suo primo ed il suo ultimo nodo coincidono, cioè sse $q_0 = q_s$. Si parla invece di **semipasseggiata aperta** sse $q_0 \neq q_s$.
Similmente si definiscono le **passeggiate chiuse** o **circuiti** e le **passeggiate aperte**.
I cappi di un digrafo sono le sue semipasseggiate chiuse (ed anche le sue passeggiate chiuse) di lunghezza 1.
Gli esempi di semipasseggiata e passeggiata appena visti sono anche esempi di semipasseggiate e passeggiate aperte, mentre $\langle 1, \langle 1,2\rangle, 2, \langle 4,2\rangle, 4\langle, 1,4\rangle, 1\rangle$ individua un semicircuito in D_b e $\langle\!\langle 1,2,5,1\rangle\!\rangle$ un circuito sempre in D_b.

D27:b.05 Si dice **semipercorso** o **semipasseggiata euleriana** sul digrafo D una semipasseggiata su D in cui tutti gli archi sono distinti.

Si dice **percorso** o **passeggiata euleriana** sul digrafo D una passeggiata in cui tutti gli archi sono distinti. Equivalentemente possiamo definirlo come un semipercorso in cui ogni coppia di archi successivi presenta l'estremità finale del primo coincidente con l'iniziale del secondo (cioè presenta una sequenza di archi consecutivi).

D27:b.06 Si dice **semicammino** o **semipasseggiata hamiltoniana** sul digrafo D una semipasseggiata in cui tutti i nodi sono distinti, ad esclusione dei nodi iniziale e finale (che coincidono) nel caso di semipasseggiata chiusa.

Si dice **cammino** o **passeggiata hamiltoniano** su D una passeggiata in cui tutti i nodi sono distinti ad esclusione dei nodi iniziale e finale (che coincidono) nel caso di una passeggiata chiusa; equivalentemente si dice cammino su D un suo semicammino in cui ogni coppia di archi successivi presenta l'estremità finale del primo coincidente con l'iniziale del secondo (cioè presenta una sequenza di archi consecutivi).

D27:b.07 Chiaramente un semicammino, non potendo presentare archi ripetuti, è un semipercorso. Similmente un cammino è un percorso.
I percorsi e i cammini, essendo particolari passeggiate, possono venire rappresentati mediante scritture in cui compaiono solo gli archi oppure solo i nodi. La definizione di lunghezza per questi nuovi oggetti si riconduce a quella introdotta per le semipasseggiate.
Possiamo quindi dire che in D_a $\langle\!\langle\langle 3,1\rangle, \langle 1,2\rangle\rangle\!\rangle$, cioè $\langle\!\langle 3,1,2\rangle\!\rangle$, è un cammino di lunghezza 2; in D_b $\langle\!\langle\langle 5,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\rangle\!\rangle = \langle\!\langle 5,1,2,2,3\rangle\!\rangle$, è un percorso di lunghezza 4; $\langle\!\langle 0,4,5,6,1,2,3,7,8\rangle\!\rangle$ è invece un cammino di D_c di lunghezza 8.

D27:b.08 Una passeggiata di lunghezza 0 si può considerare anche un percorso o un cammino di lunghezza 0; esso si può individuare con una notazione come $\langle\!\langle q_i\rangle\!\rangle$, ma non con una notazione del tipo $\langle\!\langle ... \rangle\!\rangle$.
In un digrafo non ridotto a pochissimi elementi e non di tipo particolare l'insieme dei semicammini è contenuto strettamente in quello dei semipercorsi che a sua volta è contenuto strettamente in quello delle semipasseggiate. Similmente, se si escludono pochi casi particolari, l'insieme dei cammini è

contenuto strettamente in quello dei percorsi che a sua volta è contenuto strettamente in quello delle passeggiate.

Se il digrafo non è di tipo particolare, si hanno passeggiate euleriane (cioè percorsi) che non sono hamiltoniane (cioè cammini) e passeggiate che non sono euleriane (nè, a fortiori, hamiltoniane).

Per avere un esempio di quest'ultimo caso basta considerare passeggiate in cui qualche nodo, oppure qualche arco, si ripetono. In D_c la $\langle\!\langle 0,4,4,6,4,6,5 \rangle\!\rangle$ rappresenta una passeggiata che non è euleriana, in quanto l'arco $\langle 4,6\rangle$ è ripetuto, e non è nemmeno hamiltoniana perchè i nodi 4, 6 sono presenti più d'una volta.

Una semipasseggiata su D_c che non è un percorso ma un semipercorso è: $\big\langle\langle 7,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,6\rangle\big\rangle$.

Un percorso che non è un cammino in D_b è $\langle\!\langle 5,1,2,2,3 \rangle\!\rangle$; in D_c è $\langle\!\langle 4,7,3,4,5,6,1 \rangle\!\rangle$.

D27:b.09 È facile dimostrare che una semipasseggiata si può ridurre ad un semipercorso che a sua volta si può ridurre ad un semicammino (v :b.13).

Nel primo caso la riduzione si effettua cercando sulla sequenza degli archi le loro ripetizioni ed eliminandole una alla volta. Nel secondo caso si procede in modo analogo, ma cercando le ripetizioni sulla sequenza dei nodi.

Similmente una passeggiata può essere ridotta ad un percorso che può essere ridotto ad un cammino.

D27:b.10 Consideriamo ora quali effetti possono avere le riduzioni delle semipasseggiate e di alcuni loro casi particolari.

Evidentemente riducendo una semipasseggiata si ottiene una semipasseggiata e riducendo un semipercorso si ottiene un semipercorso.

Inoltre può accadere che riducendo, risp., una semipasseggiata, un semipercorso o un semicammino, si ottenga, risp., una passeggiata, un semipercorso o un semicammino. Riducendo una passeggiata si può ottenere un percorso e riducendo un percorso si può ottenere un cammino.

D27:b.11 Ogni semipasseggiata, su un digrafo dotato di qualche arco, può essere estesa illimitatamente con nodi che precedono l'iniziale e nodi che seguono il finale.

Per quanto riguarda le passeggiate, solo nel caso di digrafi dotati di circuiti alcune di esse possono estendersi illimitatamente; in caso contrario non è possibile alcuna estensione illimitata.

Si possono avere semipercorsi (percorsi) illimitati solo per digrafi aventi un nodo su due semicircuiti (circuiti) che hanno insiemi di archi disgiunti.

Un semicammino (cammino) non può mai essere esteso ad una lunghezza superiore all'ordine del digrafo.

D27:b.12 Si dice **semicammino massimale** un semicammino che non può essere esteso. Si dice **cammino massimale** un cammino che non può essere esteso.

D27:b.13 Si dice **discendente** nel digrafo D del nodo p ogni nodo q raggiungibile da p percorrendo un cammino che ha p come estremità iniziale.

In D_a ogni nodo ha come discendenti tutti i nodi del digrafo, sé stesso compreso; l'insieme dei discendenti di 4 in D_b è $\{1,2,3,4,5\}$.

Un nodo di un digrafo D da cui sono raggiungibili tutti i rimanenti si dice **radice** di D. Specularmente un nodo di un digrafo D che sia raggiungibile da tutti i rimanenti si dice **coradice** del digrafo.

Si dice **ascendente** sul digrafo D del nodo q ogni nodo p dal quale si può raggiungere q percorrendo un cammino che ha p come estremità iniziale.

In D_c l'insieme degli ascendenti di 8 è $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, mentre 9 non possiede discendenti e neanche ascendenti. Sempre in D_c il nodo 10 ha sé stesso come unico ascendente e discendente, a causa della presenza del cappio.
I nodi predecessori di un dato nodo sono casi particolari dei suoi ascendenti, mentre i nodi successori sono casi particolari dei suoi discendenti.
Le nozioni di nodo ascendente e discendente si collegano a quelle di chiusura riflessivo-transitiva di una relazione: p è ascendente di q sse $q \in p \urcorner U^{\otimes}$ sse q è discendente di p sse $p \in q \urcorner (Q^{\leftarrow \otimes})$.

D27:b.14 Si dice **semipercorso chiuso** o **semicircuito euleriano** su D un semipercorso con il nodo iniziale coincidente con il nodo finale, cioè un semipercorso che sia anche semipasseggiata chiusa e senza ripetizioni di archi. In modo analogo si definiscono il **percorso chiuso** o **circuito euleriano**, il **semicammino chiuso** o **semicircuito hamiltoniano**, il **cammino chiuso** o **circuito hamiltoniano**.
Ovviamente le inclusioni viste per semipasseggiate, semipercorsi e semicammini (e quindi per passeggiate, percorsi e cammini) valgono anche per i semicircuiti (e quindi per i circuiti).
Il percorso individuato in precedenza non è un circuito euleriano. Un percorso chiuso in D_a che non è cammino chiuso è $\langle\!\langle 1,4,0,1,2,1 \rangle\!\rangle$. Oppure $\langle\!\langle 2,5,1,2,3,2 \rangle\!\rangle$ in D_b. Un semipercorso chiuso non semicammino chiuso in D_b è $\langle\!\langle 1,2,3,2,5,1 \rangle\!\rangle$. I due cammini individuati in precedenza non sono circuiti hamiltoniani. Un cammino chiuso in D_a è invece $\langle\!\langle 1,4,0,1 \rangle\!\rangle$. Mentre un semicammino di D_c è $\langle\!\langle 1,2,3,4,5,6,1 \rangle\!\rangle$.

D27:b.15 Si definiscono anche le seguenti configurazioni:

– **semipasseggiate iniettive sui nodi**, semipasseggiate che toccano ogni nodo al più una volta, ad esclusione del primo e dell'ultimo (queste sono le semipasseggiate hamiltoniane);
– **semipasseggiate suriettive sui nodi**, semipasseggiate che toccano tutti i nodi almeno una volta;
– **semipasseggiate biiettive sui nodi**, semipasseggiate che toccano tutti i nodi una ed una sola volta (ad esclusione del primo e dell'ultimo coincidenti nel caso di semipasseggiate chiuse);
– **semipasseggiate iniettive sugli archi**, semipasseggiate che toccano ogni arco al più una volta (queste sono le semipasseggiate euleriane);
– **semipasseggiate suriettive sugli archi**, semipasseggiate che toccano tutti gli archi almeno una volta;
– **semipasseggiate biiettive sugli archi**, semipasseggiate che toccano tutti gli archi una ed una sola volta;

Di queste semipasseggiate si possono poi considerare le varianti chiuse e si possono avanzare contemporanee richieste su nodi ed archi.

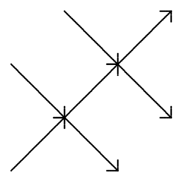
D27:b.16 Date due semipasseggiate tali che l'estremità finale del primo coincida con l'estremità iniziale del secondo, $\langle q_0, u_1, q_1, ..., u_s, q_s \rangle$ e $\langle q_s, u_{s+1}, q_{s+1}, ..., u_{s+t}, q_{s+t} \rangle$, si può considerare la loro **composizione** $\langle\!\langle q_0, u_1, q_1, ..., q_s, ..., u_{s+t}, q_{s+t} \rangle\!\rangle$.

Considerando in particolare la **composizione** o **giustapposizione** di due passeggiate si ottiene una nuova passeggiata. Componendo due semipercorsi si potrebbe ottenere una semipasseggiata che non è un semipercorso; essa però è riducibile a un semipercorso. Similmente componendo due semicammini si potrebbe ottenere una semipasseggiata che non è un semicammino; essa però è riducibile a un semicammino. Similmente si possono definire la composizione di percorsi e la composizione di cammini.
Componendo $\langle\!\langle q_0, q_1, ..., q_s \rangle\!\rangle$ e $\langle\!\langle q_s, q_{s+1}, ..., q_{s+t} \rangle\!\rangle$ si ottiene $\langle\!\langle q_0, q_1, ..., q_s, q_{s+1}, ..., s_{s+t} \rangle\!\rangle$.
Si ha anche che componendo due percorsi si ottiene una passeggiata che se non è percorso si può ridurre ad una tale configurazione. Ed infine componendo due cammini si ottiene una passeggiata che se non è un cammino si può ridurre a tale configurazione.

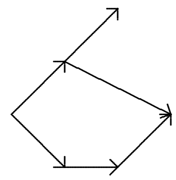
D27:b.17 Viceversa di una semipasseggiata, di un semipercorso e di un semicammino si possono considerare le **decomposizioni** ottenute "separando" tali configurazioni in due o più parti. Evidentemente decomponendo un semipercorso si ottengono semipercorsi, mentre riducendo un semicammino si ottengono semicammini. In particolare si ha anche la decomposizione di passeggiate, percorsi e cammini. Se si considera che ogni passeggiata è individuata da una sequenza di archi, le nozioni di composizione e decomposizione di passeggiate si collegano a quelle di giustapposizione e fattorizzazione di stringhe.

Un circuito non hamiltoniano si può decomporre in più circuiti hamiltoniani separando la sua sequenza di nodi e archi per ogni nodo toccato più volte (che non sia il primo ed ultimo).
Ad esempio l'unico non hamiltoniano dei circuiti precedenti, $\langle\!\langle 1,4,0,1,2,1\rangle\!\rangle$, in D_a si decompone in $\langle\!\langle 1,4,0,1\rangle\!\rangle$ e $\langle\!\langle 1,2,1\rangle\!\rangle$; il circuito non hamiltoniano su D_b $\langle\!\langle 3,2,5,1,2,2,3,2,5,1,4,3\rangle\!\rangle$ si può decomporre nei quattro circuiti hamiltoniani $\langle\!\langle 2,2\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle 2,3,2\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle 2,5,1,2\rangle\!\rangle$ e $\langle\!\langle 3,2,5,1,4,3\rangle\!\rangle$.
Viceversa accanto ad un circuito si possono considerare tutti i circuiti ottenuti percorrendolo più volte.
Discorsi analoghi si possono svolgere per i semicircuiti.

D27:b.18 Un digrafo si dice **acircuitale** sse non presenta passeggiate chiuse (cioè circuiti), ovvero sse non presenta percorsi chiusi, ovvero sse non presenta cammini chiusi. Si dice invece **digrafo aciclico** sse non presenta semipasseggiate chiuse (cioè semicircuiti) e quindi sse non ha semipercorsi chiusi, ovvero sse non ha semicammini chiusi. Un esempio di digrafo aciclico è:



Ogni digrafo aciclico è necessariamente acircuitale, in quanto ogni circuito è anche un semicircuito.
Un digrafo acircuitale che non è aciclico è il seguente:



D27:b.19 Due nodi p e q di un digrafo D si dicono **connessi** sse esiste una semipasseggiata su D che collega p e q.

(1) Prop.: Due nodi di un digrafo sono connessi sse esiste un semicammino che li collega ▮

Un digrafo si dice **connesso** sse ogni coppia di nodi risulta collegata da una semipasseggiata.

(2) Prop.: Un digrafo è connesso sse ogni coppia dei suoi nodi è collegata da un semipercorso, ovvero da un semicammino ▮

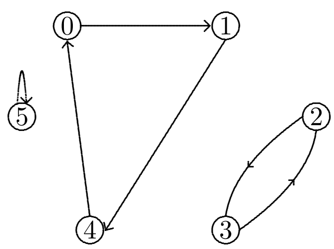
D_a è un digrafo connesso, mentre D_b e D_c non lo sono.

La relazione di connessione tra i nodi di un digrafo è riflessiva, simmetrica e transitiva: la riflessività è conseguenza dell'aver ammesso semipasseggiate di lunghezza 0; la simmetria è dovuta al fatto che per le semipasseggiate (e quindi anche per i semicammini) non si distingue l'orientazione degli archi; la transitività segue dalla possibilità di comporre semipasseggiate, semipercorsi e semicammini. La connessione tra nodi di un digrafo è quindi una relazione di equivalenza.

D27:b.20 L'insieme dei nodi di un digrafo non connesso si ripartisce naturalmente nelle classi della precedente equivalenza; questi sottoinsiemi di nodi sono detti **classi di connessione**.
I digrafi costituiti dai nodi di una di queste classi e dagli archi che li toccano sono evidentemente connessi e si dicono **componenti connesse** del digrafo di partenza.
D_b ha due componenti connesse, quella basata sul solo nodo 0 e quella che si basa sui nodi rimanenti.
D_c possiede tre componenti connesse.

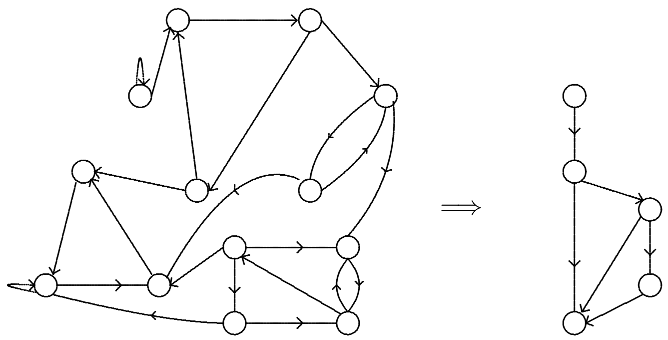
D27:b.21 I nodi p e q si dicono **fortemente connessi** su D sse esiste una passeggiata chiusa, cioè un circuito, che tocca sia p che q.
Un digrafo si dice **fortemente connesso** sse ogni coppia dei suoi nodi è fortemente connessa, cioè sse per ogni coppia di suoi nodi $\langle p, q\rangle$ vi è un circuito che tocca p e q, ovvero sse possiede un circuito suriettivo sui nodi. Ad esempio D_a è un digrafo fortemente connesso.
Chiaramente ogni digrafo fortemente connesso è anche connesso. Un esempio di un digrafo connesso che non è fortemente connesso è dato dalla componente connessa basata sui nodi 0, 1, ..., 8 di D_c: infatti il nodo 0 non è raggiungibile da alcun altro nodo.

Si dimostra facilmente che anche la connessione forte tra i nodi di un digrafo è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva. La connessione forte è quindi un'altra equivalenza sull'insieme dei nodi di ciascuno dei digrafi. Ogni digrafo ottenuto da un digrafo D per riduzione ad una sua classe di equivalenza per questa relazione si dice **componente fortemente connessa** di D.
Ad esempio il seguente digrafo presenta tre componenti fortemente connesse:



D27:b.22 Servendoci della relazione di forte connessione tra i nodi di un digrafo D che denotiamo $\sim_{sc}$, individuiamo ora un digrafo più ridotto di D detto **quoziente di forte connessione** di D e denotato $D/\sim_{sc}$. Nodi di questo digrafo sono le classi di forte connessione di D (cioè i nodi rappresentanti le diverse componenti fortemente connesse); si chiede poi che tra due diversi di questi nodi S_i ed S_j si abbia un arco sse esiste almeno un arco di D tra un nodo in S_i ed uno di S_j.

Nella seguente figura viene presentato un grafo connesso e il suo quoziente di forte connessione:



D27:b.23 Prop. Il digrafo $D/\sim_{sc}$ è acircuitale.

Dim.: Questo digrafo non possiede cappi per definizione e se esistesse un circuito che tocca due nodi diversi S_i ed S_j si avrebbe su D un circuito che tocca qualche nodo di S_i e qualche nodo di S_j; questo si può estendere ad un circuito che tocca tutti i nodi di S_i e tutti i nodi di S_j, quindi tali sottoinsiemi di d dovrebbero appartenere alla stessa classe di forte connessione ▮

I semicammini massimali (risp. i cammini massimali) sono i più rilevanti tra i semicammini (risp. tra i cammini) per la determinazione delle proprietà di connessione (risp. di forte connessione); infatti basta la loro ispezione per determinare le componenti connesse (risp. le componenti fortemente connesse) del digrafo.

A questo proposito valgono i due seguenti enunciati.

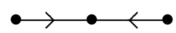
D27:b.24 Prop. In un digrafo connesso due semicammini aventi lunghezza massima hanno almeno un nodo in comune ▮

D27:b.25 Prop. In un digrafo fortemente connesso due cammini aventi lunghezza massima hanno almeno un nodo in comune ▮

D27:b.26 I nodi p e q si dicono **unilateralmente connessi** su D sse esiste un passeggiata, ovvero un cammino, cha va da p a q, ma non una passeggiata cha va da q a p, oppure esiste un passeggiata che va da q a p, ma non una cha va da p a q.

I nodi p e q si dicono **quasifortemente connessi** su D sse esiste un nodo r di D t.c. sia p che q sono raggiungibili da r.

D27:b.27 Ricordiamo che per radice di un digrafo si intende un nodo dal quale siano raggiungibili tutti i restanti (:b.13). Evidentemente perchè un digrafo possegga una radice è necessario ma non sufficiente che esso sia connesso. Che la connessione non sia una condizione sufficiente all'esistenza di una radice è mostrato dal semplicissimo controesempio:



(1) Prop.: Un digrafo è fortemente connesso sse tutti i suoi nodi sono radici ▮

D27:c. Tipi particolari di digrafi

D27:c.01 Vediamo ora alcuni tra i molti tipi particolari di digrafi.

Si dice **digrafo completo** o **ovvio** un digrafo della forma $\langle Q, Q \times Q \rangle$. Si dice **digrafo assurdo** un digrafo della forma $\langle Q, \emptyset \rangle$. Questi nomi, a prima vista stravaganti, hanno le seguenti motivazioni: i digrafi del primo tipo corrispondono alle relazioni ovvie, cioè alle relazioni verificate da tutte le coppie di oggetti per i quali si prendono in considerazione; i digrafi assurdi corrispondono alle relazioni assurde, relazioni non verificate da alcuna delle coppie di oggetti da considerare.

D27:c.02 Si possono poi considerare vari tipi di digrafi corrispondenti ai diversi tipi di relazioni. Si parla quindi di digrafi riflessivi, simmetrici, antisimmetrici, transitivi, di equivalenza, di preordine e d'ordine.
In particolare denotiamo con **DgrfSym** la collezione dei digrafi simmetrici.

D27:c.03 Digrafi molto particolari ed interessanti sono i digrafi bipartiti. Formalmente $G := \langle Q, U \rangle$ si dice **digrafo bipartito** sse Q si può bipartire come $Q = Q_1 \dot\cup Q_2$ in modo che sia $U \subseteq Q_1 \times Q_2$
Denotiamo con **DgrfBp** l'insieme dei digrafi bipartiti.

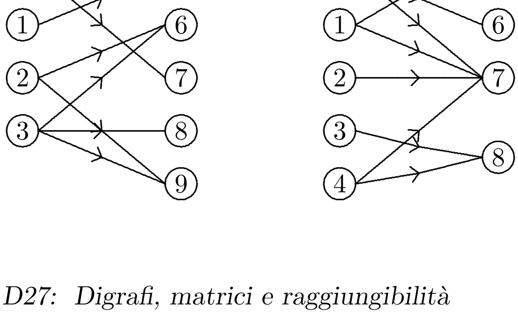
In generale i nodi di un digrafo bipartito si tripartiscono tra nodi con grado uscente positivo e grado entrante 0, nodi con grado uscente 0 e grado entrante positivo e nodi isolati. I primi si dicono **nodi origine** ed i secondi **nodi bersaglio**. L'insieme dei nodi origine del digrafo G si denota con $G^{\vdash}$; l'insieme dei nodi bersaglio del digrafo G si denota con $G^{\dashv}$;

I nodi isolati, in considerazioni generali che prescindono da applicazioni hanno scarso interesse. Spesso quindi si chiede che un digrafo bipartito sia privo di nodi isolati. questo equivale a chiedere che $Q = G^{\vdash} \dot\cup G^{\dashv} \quad U \subseteq G^{\vdash} \times G^{\dashv}$.
In effetti i digrafi bipartiti più interessanti sono quelli connessi, in quanto i non connessi si ottengono "accostando" alcuni connessi.

D27:c.04 Ogni arco di un digrafo bipartito, dunque, va da un nodo origine ad un nodo bersaglio. Nei nodi origine non entra alcun arco, dai nodi bersaglio non esce alcun arco.

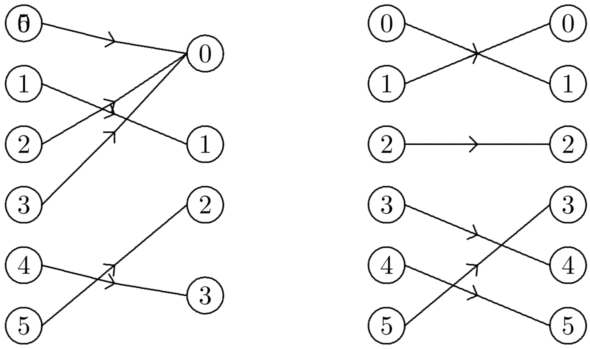
Evidentemente passando al riflesso di un digrafo bipartito si ottiene un secondo digrafo bipartito; in esso i ruoli di nodi origine e di nodi bersaglio si scambiano.

Questi digrafi vengono presentati vantaggiosamente mediante la loro **raffigurazione sagittale**:
– sulla sinistra della figura vengono incolonnati i nodi origine;
– sulla destra vengono incolonnati i nodi bersaglio;
– ogni arco va da un nodo della prima colonna ad uno della seconda.



In queste raffigurazioni le orientazioni delle frecce potrebbero essere omesse.

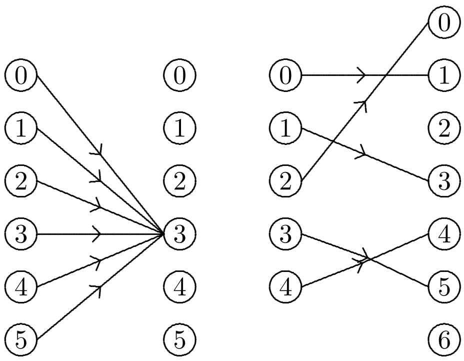
D27:c.05 Casi particolari di digrafi bipartiti sono i **digrafi funzionali**, digrafi per i quali da un nodo origine può uscire un solo arco. Essi forniscono gli esempi più semplici e maneggevoli della fondamentale nozione di funzione.



Alcuni fatti riguardanti funzioni e relazioni concernenti insiemi poco numerosi risultano evidenti facendo riferimento alla raffigurazione sagittale. Ad esempio, si vede con chiarezza il fatto che invertendo una generica funzione non è garantito che si ottenga una seconda funzione: in generale si ottiene una relazione, in quanto in qualcuno dei nodi bersaglio del relativo digrafo bipartito possono entrare più archi.

Ad esempio, quando vengono invertite le due funzioni precedenti, solo la seconda fornisce una nuova funzione.

Si hanno inoltre raffigurazioni assai chiare per le funzioni suriettive, iniettive, biiettive e costanti.



D27:c.06 I digrafi bipartiti corrispondono a relazioni tra due insiemi disgiunti.

Essi sono ampiamente utilizzati per schematizzare i collegamenti fra due entità che intervengono in un archivio organizzato con il computer. Il passaggio da un digrafo bipartito al suo riflesso costituisce il corrispondente matematico della operazione informatica basilare detta **file inversion**.

D27:d. Sottodigrafi e morfismi tra digrafi

D27:d.01 Dati due digrafi $D_i := \langle Q_i, U_i \rangle$ con $i = 1, 2$, si dice che D_1 è **sottodigrafo** di D_2 sse $Q_1 \subseteq Q_2$ e $U_1 \subseteq U_2 \cap (Q_1 \times Q_1)$.
Denoteremo questa relazione con $D_1 \leq_{Dgrf} D_2$.

Un digrafo abbastanza ricco di nodi ed archi possiede numerosi sottodigrafi. Alcuni si possono ottenere eliminando alcuni archi e mantenendo tutti i nodi. Altri si ottengono eliminando alcuni nodi e tutti e soli gli archi incidenti nei nodi eliminati.
Altri sottodigrafi sono ottenuti richiedendo che soddisfino particolari proprietà ed attuando opportune eliminazioni di nodi e archi. Casi di questo genere sono i passaggi alle componenti connesse o alle componenti fortemente connesse. Altri casi interessanti sono i passaggi ai sottodigrafi circuitali, ottenibili per eliminazione progressiva di archi ed i passaggi ai sottodigrafi completi, ottenibili attaverso eliminazioni di nodi ed archi relativi.

D27:d.02 Riprendiamo ora la nozione di isomorfismo tra digrafi. Ricordiamo che due digrafi $D :=: \langle Q, U \rangle$ ed $H :=: \langle P, F \rangle$. si dicono **isomorfi** sse si trova una corrispondenza biunivoca β, tra i due insiemi di nodi Q e P che preserva l'orientazione degli archi che collegano i nodi di ogni digrafo, cioè induce una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi di archi U ed F. La suddetta biiezione $\beta \in \{V \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright W\}$ è chiamata **isomorfismo** tra D ed H.

Per indicare che D ed H sono digrafi isomorfi si scrive specificamente $D \triangleleft\!\!-\!\!\triangleright_{Dgrf} H$ o più semplicemente $D \cong H$; per indicare che β è un isomorfismo tra D ed H si scrive $\beta \in \{D \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Dgrf} H\}$.

Questa scrittura equivale alla seguente:

$$\beta \in \{D \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright H\} \quad \text{t.c.} \quad F = \big\{\langle q, r \rangle \in U :| \ \langle \beta(q), \beta(r) \rangle \big\}.$$

Per **invariante di un digrafo** D si intende una entità (valore numerico, insieme, funzione, relazione, proprietà, ...) associata a D che ha lo stesso valore per ogni digrafo isomorfo al detto D.

D27:d.03 È evidente che condizione necessaria ma non sufficiente per l'isomorfismo di due digrafi è il fatto che essi abbiano lo stesso numero di nodi e di archi.
Più in generale si hanno condizioni necessarie ma non sufficienti per l'isomorfismo di due digrafi riguardanti coincidenze di invarianti.

Il problema di stabilire se due digrafi D e H sono isomorfi o meno è un problema di grande importanza, in quanto molte situazioni di interesse matematico, informatico o applicativo sono schematizzate da digrafi: in particolare all'isomorfismo tra digrafi si riconducono molti problemi posti dall'intelligenza artificiale.
Possiamo supporre di aver già banalmente verificato che essi abbiano lo stesso ordine n e lo stesso grado. Senza una analisi preliminare di altre caratteristiche dei due digrafi, si dovrebbe cercare un isomorfismo entro le $n!$ corrispondenze biunivoche fra i due insiemi di nodi; per n elevato si tratterebbe di un lavoro enormemente oneroso.
La decisione dell'isomorfismo si può sveltire notevolmente osservando che, una tale biiezione deve associare nodi aventi le stesse caratteristiche puramente relazionali, cioè le stesse proprietà concernenti i collegamenti con gli altri nodi. Queste caratteristiche vengono dette **invarianti per isomorfismo dei nodi**.

D27:d.04 È evidente che due nodi corrispondenti per isomorfismo devono avere lo stesso grado entrante e lo stesso grado uscente.

Quindi una condizione necessaria per l'isomorfismo di D ed H è la coincidenza dei relativi multinsiemi di gradi uscenti e multiinsiemi di gradi entranti.

Altre caratteristiche essenziali dei digrafi sono i cammini delle diverse lunghezze ed in particolare i cammini chiusi ed i massimali: in un isomorfismo ad ogni cammino chiuso (risp. massimale) deve corrispondere un cammino chiuso (risp. massimale) della stessa lunghezza. Sono quindi invarianti proprietà come la aciclicità o meno, il numero dei cappi, il numero delle componenti connesse, i vari tipi di connessione.
Osserviamo che, qualora si tenga conto delle caratteristiche dei cammini, non serve tener conto di quelle di percorsi e passeggiate, in quanto ciascuna di queste configurazioni si riduce a composizione di cammini.

D27:d.05 Nella ricerca di un effettivo isomorfismo in genere è molto utile ridurre le corrispondenze biunivoche fra nodi da esaminare chiedendo che a nodi circuitali di un digrafo corrispondano nodi circuitali dell'altro, a nodi su un cammino massimale di data lunghezza corrispondano nodi su cammini massimali analoghi etc. .

D27:d.06 Sarebbe molto vantaggioso individuare i cosiddetti **insiemi completi di invarianti**, sistemi di invarianti che permettono di individuare univocamente ogni classe di equivalenza di digrafi. In tal caso si potrebbe affrontare il problema dell'isomorfismo tra D ed H procedendo a controllare in successione la coincidenza di questi invarianti; in tal modo, oltre a decidere il non isomorfismo qualora un invariante non abbia lo stesso valore per D ed H, si giunge a decidere l'isomorfismo qualora tutti gli invarianti superino i tests di coincidenza.
In effetti per una specie di strutture variegata come i digrafi si conoscono solo invarianti la cui diversità permette di stabilire il non isomorfismo, i quali cioè portano a condizioni necessarie ma non sufficienti all'isomorfismo.

D27:d.07 I digrafi, come le strutture discrete di ogni altra specie, possono essere studiati, essenzialmente, in due modi.
Un digrafo può essere considerato come un oggetto formale costruito a partire da altri oggetti di partenza specifici. In tale caso la stessa costruzione del digrafo potrebbe essere piuttosto impegnativa, o in quanto richiede molti nodi e molti archi, o in quanto la stessa individuazione dei nodi richiede uno sforzo di astrazione dagli oggetti di partenza non trascurabile. (gli oggetti di partenza potrebbero avere le nature più svariate). Operando in questo modo, può essere necessario individuare i nodi ed gli archi del digrafo con scritture ben precise ed elaborate; inoltre lo studio del digrafo può condurre a configurazioni la cui reinterpretazione può risultare onerosa.

Un secondo modo di studiare un digrafo D, viceversa, prescinde dalla identità dei suoi nodi e riguarda esclusivamente le sue proprietà derivanti dai collegamenti esistenti fra i suoi nodi. Questo studio (tendenzialmente più astratto, ma riguardante solo digrafi) porta a risultati che valgono anche per ogni altro digrafo H che si può considerare ottenuto da D solo per la modifica degli identificatori dei suoi nodi: i nodi di H si possono porre in corrispondenza biunivoca con quelli di D in modo che $Arc(H)$, l'insieme degli archi di H, sia posto in corrispondenza biunivoca con $Arc(G)$.

D27:d.08 Le nozioni di isomorfismo e di invarianti sono nozioni matematiche assai generali e molto importanti.
In effetti la nozione di isomorfismo si può introdurre per tutte le specie di strutture, a cominciare dai vari arricchimenti e specializzazioni di digrafi e grafi non orientati.

Per tutte le specie di strutture si può quindi parlare di invarianti per isomorfismo (quantità invarianti, multinsiemi invarianti, polinomi invarianti, proprietà invarianti, ...).

Tra le peculiarità di una specifica struttura S di una specie $\mathbf{S}$ è importante saper distinguere tra quelle invarianti per isomorfismo e le rimanenti. Queste ultime dipendono da qualche particolare della sua definizione, ovvero della costruzione che ha condotto ad S, e quindi non sono trasferibili facilmente ad altre strutture della specie $\mathbf{S}$.

Gli invarianti per isomorfismo si possono considerare caratteristiche "essenziali", cioè elementi sui quali è opportuno concentrare gran parte dello studio delle strutture. Infatti il chiarimento di fatti riguardanti queste caratteristiche per una struttura particolare S (un grafo non orientato, un digrafo, ...) costituisce un chiarimento per tutte le strutture della specie $\mathbf{S}$ isomorfe ad S stessa. Quindi si tratta di una conoscenza utilizzabile non episodicamente, ma per una estesa gamma di situazioni.

La individuazione di un isomorfismo e di un invariante, quindi, possono portare a notevoli economie di pensiero.

D27:d.09 Quando un digrafo viene studiato senza considerarlo costruito a partire da oggetti particolari, interessano soprattutto le sue proprietà invarianti. Quindi interessano maggiormente le classi di isomorfismo dei singoli digrafi. Di solito è possibile confondere una classe di isomorfismo con un suo ben determinato rappresentante, ed anche con una sua raffigurazione.

D27:e. Matrici delle adiacenze

D27:e.01 Per individuare i nodi di una struttura grafica studiata per una determinata applicazione, e quindi per considerarla in relazione con altre entità, può essere opportuno contrassegnare i suoi nodi con notazioni elaborate che forniscano un loro significato.

Quando invece si studia una struttura grafica senza collegarla ad altre, è comodo individuare i suoi nodi con oggetti semplici come interi consecutivi. In tal modo si introduce anche un ordinamento nell'insieme dei suoi nodi.

Per individuare un digrafo $D = \langle Q, U\rangle$ per il computer conviene assumere $Q = \{1, ..., n\}$ oppure $Q = \{0, ..., n-1\}$ e servirsi della funzione indicatrice di U entro $Q \times Q$; questa funzione è una matrice binaria detta **matrice delle adiacenze** del digrafo e indicata $Mad(D)$.

D27:e.02 Le matrici delle adiacenze dei digrafi D_a, D_b e D_c visti all'inizio del capitolo sono:

$$D_a = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad D_b = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_c = \begin{vmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{vmatrix}$$

D27:e.03 Alcune caratteristiche di un digrafo D possono essere lette facilmente nella sua matrice delle adiacenze $A := Mad(D)$ e con le matrici delle adiacenze si possono effettuare in modo semplice varie operazioni sui digrafi.

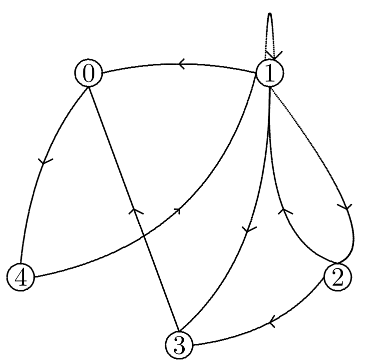
Su una riga di A si ha un 1 in corrispondenza di ogni arco uscente dal nodo caratterizzante la riga stessa. Su una colonna di A si ha invece un 1 in corrispondenza di ogni arco che entra nel nodo che caratterizza tale linea. Le componenti uguali ad 1 sulla diagonale principale corrispondono biunivocamente ai cappi.

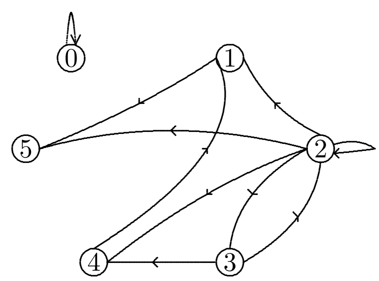
Le somme delle componenti di una riga (risp. le componenti di una colonna) danno il numero degli archi uscenti dal (risp. archi entranti nel) nodo corrispondente; a sua volta la somma delle componenti sulla diagonale principale fornisce il numero dei cappi del digrafo.

D27:e.04 Il passaggio da un digrafo al suo **riflesso**, cioè al digrafo che presenta gli stessi nodi e gli archi con la direzione delle frecce capovolta, corrisponde al passaggio alla matrice delle adiacenze trasposta: $Mad(D^{\leftarrow}) = (Mad(D))^{\mathsf{T}}$

Ad esempio le trasposte delle matrici delle adiacenze di D_a e D_b sono:

$$\begin{vmatrix} 0&0&0&0&1\\ 1&1&1&1&0\\ 0&1&0&1&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0 \end{vmatrix}$$





D27:e.05 La simmetria e la riflessività dei digrafi vengono caratterizzati facilmente attraverso le matrici delle adiacenze.

Un digrafo D è simmetrico sse la sua matrice $Mad(D)$ è simmetrica.

Un digrafo D è riflessivo sse la diagonale della sua matrice $Mad(D)$ ha tutte le componenti uguali ad 1.

La **complementazione** di una matrice binaria A porta alla matrice che ha come componenti $C_{ij} := 1 - A_{ij}$. La complementare della matrice delle adiacenze $Mad(D)$ di un digrafo D fornisce la matrice delle adiacenze del digrafo complementare, digrafo associato alla relazione opposta a quella espressa da D.

D27:e.06 La matrice delle adiacenze con tutte le entrate uguali ad 1 corrisponde al digrafo completo $\langle Q, Q \times Q \rangle$, ovvero alla relazione ovvia. La matrice delle adiacenze con tutte le entrate uguali a 0 corrisponde al digrafo $\langle Q, \emptyset \rangle$, ovvero alla relazione assurda.
Nel seguito denoteremo con $\mathrm{M}zr_Q$ la matrice di profilo $Q \times Q$ avente tutte le entrate uguali a 0 e con $\mathcal{M}un_Q$ la matrice $Q \times Q$ con tutte le entrate uguali ad 1.

D27:e.07 Quando si cambia l'ordinamento dei nodi di un digrafo la matrice delle adiacenze deve essere modificata sottoponendo sia le sue righe che le sue colonne alla permutazione corrispondente al cambiamento. Una buona scelta dell'ordine dei nodi può portare a matrici delle adiacenze significative, in grado di chiarire alcune proprietà dei digrafi.

D27:e.08 Una matrice numerica quadrata M di profilo $Q \times Q$ si dice **matrice diagonalizzabile a blocchi** sse Q si può ripartire come $Q = Q_1 \dot\cup \ldots \dot\cup Q_k$, in modo che $a, b \in_{\neq} \{1, ..., k\}, i \in Q_a, j \in Q_b \Longrightarrow M_{i,j} = 0$. Se le prime linee della matrice riguardano gli elementi di Q_1, quelle di un successivo gruppo Q_2, ..., le ultime i nodi di Q_k, la matrice ha la forma del tipo:

$$A = \begin{vmatrix} a & \ldots & b & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & \ldots & d & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & e & \ldots & f & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & g & \ldots & h & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & w & \ldots & x \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & y & \ldots & z \end{vmatrix}$$

Le sottomatrici formate dalle righe e dalle colonne relative ad un solo Q_a si dicono **blocchi diagonali**, quelle costituite da soli zeri relative a un Q_a e un Q_b diversi **blocchi non-diagonali**. La matrice di partenza si dice esprimibile come **somma diretta** delle matrici costituenti i suoi blocchi diagonali.
Se si riordinano i nodi del digrafo senza tener conto della ripartizione può accadere che la matrice presenti un aspetto dal quale non risulta affatto evidente la sua diagonalità a blocchi.

D27:e.09 Un digrafo ottenuto considerando come unico digrafo due digrafi dati ha come matrice delle adiacenze la matrice diagonale a due blocchi somma diretta delle matrici delle adiacenze dei due digrafi di partenza. Più in generale con una analoga costruzione a partire da k digrafi si ottiene una matrice binaria somma diretta di k blocchi.

Particolari matrici diagonali a blocchi sono quelle nelle quali tutte le entrate dei blocchi diagonali sono uguali ad 1. Queste corrispondono a mettere assieme diversi digrafi completi. I digrafi così ottenuti sono tutti e soli i digrafi associati alle relazioni di equivalenza con k blocchi.

D27:e.10 Le matrici delle adiacenze costituiscono una **implementazione canonica** dei digrafi, ovvero delle relazioni binarie esplicite. Questa implementazione è piuttosto conveniente, in quanto si serve di bits, cioè di informazioni che ogni computer consente di registrare e manipolare in modo altamente efficiente.

I digrafi dunque si possono trattare in tre modi equivalenti: (1) come insiemi di coppie, (2) mediante raffigurazioni e (3) con matrici binarie quadrate.
Quando si affronta un problema complesso riguardante digrafi può essere vantaggioso servirsi ora di una ora di un'altra di queste modalità. In linea di massima gli insiemi di coppie (cioè le relazioni) consentono di trattare i problemi nel modo più sintetico; le raffigurazioni sono preferibili per presentazioni intuitive, per prime prese in visioni delle situazioni; le matrici delle adiacenze invece sono le più vicine alle elaborazioni automatiche.

D27:e.11 Molte situazioni riguardanti digrafi possono vedersi parallelamente secondo i tre diversi punti di vista:

- (1) Relazione riflessiva; (2) digrafo nel quale ogni nodo è dotato di cappio; (3) matrice binaria con tutte le componenti sulla diagonale principale uguali ad 1.
- (1) Relazione simmetrica; (2) digrafo nel quale, insieme ad ogni arco, è presente il suo riflesso; (3) matrice simmetrica, cioè matrice uguale alla sua trasposta.
- (1) Relazione antisimmetrica; (2) digrafo nel quale accanto ad un suo arco non può essere presente il suo riflesso. (3) matrice con soli 0 sulla diagonale principale e che per ogni componente uguale a 1 presenta una componente 0 nella posizione simmetrica rispetto alla diagonale principale.
- (1) Relazione di equivalenza; (2) digrafo nel quale si individuano sottoinsiemi di nodi che costituiscono digrafi completi e tra i quali non vi sono connessioni; (3) matrice diagonalizzabile a blocchi con blocchi diagonali formati da soli 1.

D27:e.12 Consideriamo i digrafi aventi come supporto $\{1, ..., n\}$ e forniti, risp., dalle relazioni $\leq$, $<$ e "essere l'immediato predecessore". Essi, nel caso $n = 5$ hanno come matrici delle adiacenze:

$$\begin{vmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{vmatrix}$$

Esse sono dette, risp., **matrici binarie triangolari superiori**, **matrici binarie strettamente triangolari superiori** e **matrici di shift uguale a** $+1$.
Similmente si definiscono le **matrici binarie triangolari inferiori**, le **matrici binarie strettamente triangolari inferiori** e le **matrici di shift uguale a** -1.

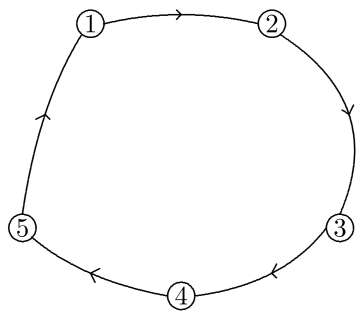
D27:e.13 Altre matrici particolari sono quelle relative alle permutazioni circolari.

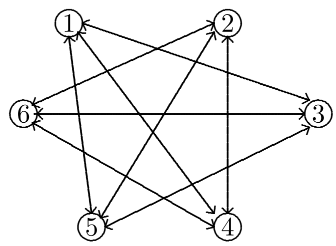
$$\begin{vmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{vmatrix}$$

In generale si dicono **matrici circolanti** le matrici che sono individuate dalla loro prima riga, le righe successive essendo ottenute dalla precedente con una permutazione circolare di un posto. Si dicono **matrici circolanti binarie elementari** le matrici circolanti individuate da una prima riga contenente un solo 1 e le rimanenti entrate nulle. La precedente matrice esplicita è una delle matrici circolanti binarie elementari di ordine 5. Una matrice circolante binaria non elementare, evidentemente somma di due circolanti elementari, è la seguente:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Le due matrici considerate corrispondono, risp., ai digrafi:





D27:f. Grafi bipartiti e matrici

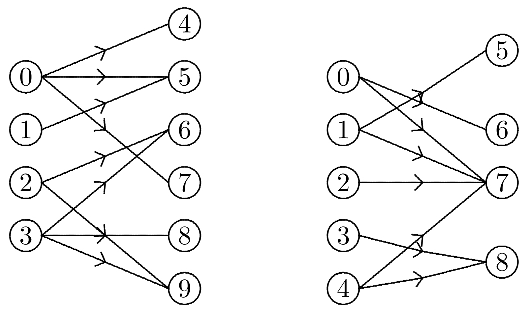
D27:f.01 La matrice delle adiacenze di un digrafo bipartito può essere sostituita da una sua sottomatrice. Consideriamo un digrafo bipartito con n nodi e supponiamo che i nodi origine siano 1, 2, ..., s ed i nodi bersaglio $s+1$, $s+2$, ..., n. La sua matrice delle adiacenze assume una forma a blocchi del tipo:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & & s & s+1 & & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ s \\ s+1 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b & \dots & b \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matrice è quindi formata da quattro blocchi individuati dalla ripartizione fra nodi origine e nodi bersaglio e tre di questi blocchi (quello relativo agli archi da origine ad origine, quello relativo agli archi da bersaglio a bersaglio, quello relativo agli archi da bersaglio ad origine) hanno tutte le componenti uguali a zero. È quindi opportuno considerare una **matrice delle adiacenze ridotta** costituita dal solo blocco relativo alle righe dei nodi origine ed alle colonne dei nodi bersaglio: in tal modo si evitano indicazioni di scarso interesse.

D27:f.02 Queste matrici possono avere il numero delle righe diverso dal numero delle colonne. In ogni caso le loro righe sono caratterizzate da un insieme di oggetti (i nodi origine) diverso da quello che caratterizza le loro colonne (l'insieme dei nodi bersaglio), anzi disgiunto.

Le matrici ridotte dei due seguenti digrafi bipartiti:



sono le seguenti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

D27:f.03 Le matrici ridotte per digrafi bipartiti funzionali, se sono presentate in una forma stilizzata con l'aggiunta di due assi cartesiani, costituiscono raffigurazioni matriciali di configurazioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ corrispondenti a funzioni da interi ad interi.

$$\begin{vmatrix} \bullet & . & . & . \\ . & \bullet & . & . \\ \bullet & . & . & . \\ \bullet & . & . & . \\ . & . & . & \bullet \\ . & . & \bullet & . \end{vmatrix}$$

Le raffigurazioni dei digrafi bipartiti costituiscono le cosiddette **raffigurazioni sagittali delle relazioni**. Nel caso di digrafi bipartiti funzionali si hanno le **raffigurazioni sagittali delle funzioni**.

D27:f.04 I digrafi bipartiti sono stati presentati come casi particolari dei digrafi. D'altra parte le matrici delle adiacenze dei digrafi generici sono casi particolari delle matrici ridotte dei digrafi bipartiti. In effetti lo studio dei digrafi si può ricondurre a quello dei digrafi bipartiti con ugual numero di nodi origine e nodi bersaglio.

Consideriamo ora un digrafo bipartito con il numero dei nodi origine, denotato con n, uguale al numero dei nodi bersaglio, ed una corrispondenza biunivoca tra nodi origine e nodi bersaglio. Pensiamo ad un suo modello meccanico con gli archi costituiti da asticciole di materiale flessibile e parzialmente deformabile e spostiamo i nodi in modo che ciascun nodo origine venga fatto aderire al nodo bersaglio corrispondente. Se ciascuna di queste coppie di nodi si pensa come un unico nodo, si ottiene un digrafo con n nodi avente come matrice delle adiacenze la matrice delle adiacenze ridotta del digrafo bipartito di partenza: infatti nella operazione descritta i collegamenti tra nodi non cambiano e conseguentemente la matrice delle adiacenze non si può modificare.

D27:g. Somme e prodotti di matrici, digrafi e multidigrafi

D27:g.01 Consideriamo due matrici binarie A e B con lo stesso profilo $I \times J$: le possiamo pensare come matrici delle adiacenze ridotte di due digrafi bipartiti riguardanti la stessa coppia costituita dall'insieme di nodi origine I e dall'insieme dei nodi bersaglio J.
Si dice **somma booleana** di A e B la matrice che ha lo stesso profilo di A e B e che ha come componenti:

$$S_{i,j} := A_{i,j} \dot{+} B_{i,j}$$

dove "$\dot{+}$" indica la somma binaria, con $0 \dot{+} 0 = 0$ e $0 \dot{+} 1 = 1 \dot{+} 0 = 1 \dot{+} 1 = 1$.
Si dice invece **somma [usuale]** di A e B la matrice dello stesso profilo che ha come componenti:

$$T_{i,j} := A_{i,j} + B_{i,j}$$

La prima di queste matrici ci dice se è possibile per ogni coppia $\langle i, j\rangle$ di nodi origine-bersaglio avere un collegamento o con un arco di A o con un arco di B. La seconda per ogni coppia $\langle i, j\rangle$ dà il numero di tali collegamenti.
Ad esempio:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \dot{+} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

e

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

D27:g.02 La complementazione della matrice ridotta di un digrafo bipartito individua il digrafo bipartito nel quale si hanno tutti e soli i collegamenti "origine $\rightarrow$ bersaglio" che erano assenti nel digrafo di partenza.

D27:g.03 È utile interpretare in termini di grafi anche matrici aventi come entrate interi naturali; per questo ricordiamo la struttura chiamata **multidigrafo**, variante del digrafo costituita da nodi ed archi con la possibiità che da un nodo ad un altro si possa avere anche più di un arco; si chiede anche che gli archi siano indistinguibili.
Formalmente un multidigrafo è un sistema $M = \langle Q, U, f\rangle$, dove Q ed U sono due insiemi finiti ed $f \in \{U \longmapsto Q \times Q\}$. Matrice delle adiacenze di M è la matrice A di profilo $Q \times Q$ con entrate in $\mathbb{N}$ t.c. $A_{i,j}$ è uguale al numero di elementi di U che f trasforma nella coppia $\langle i, j\rangle$, cioè $\langle i, j\rangle f^{-1}$.
Si può parlare anche di **multidigrafi bipartiti** e delle loro matrici ridotte. Una matrice M con entrate in $\mathbb{N}$ rappresenta il multidigrafo bipartito i cui nodi origine sono associati alle righe, i cui nodi bersaglio sono associati alle colonne e che presenta $M_{i,j}$ archi dal nodo i al nodo j.

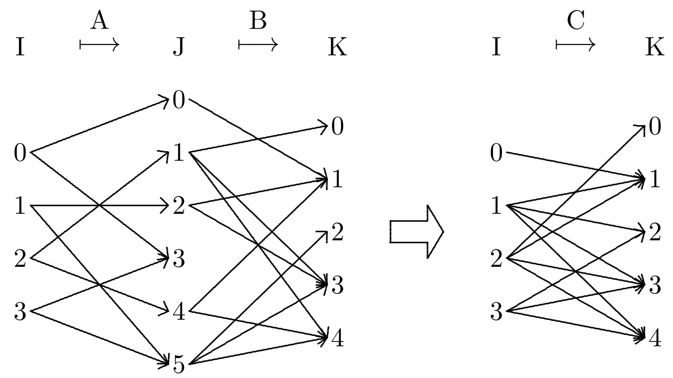
D27:g.04 Tutte le precedenti definizioni valgono anche per matrici quadrate e in questo caso si possono interpretare come possibilità di collegamenti tra i nodi di un insieme sul quale si considerino due digrafi. Questi si possono pensare utilmente come rappresentativi di due sistemi di collegamenti tra località (ad esempio collegamenti stradali e collegamenti ferroviari). Le due somme di due di queste matrici danno, risp., le possibilità e i numeri dei collegamenti diretti tra le località considerate.

Per le matrici a componenti intere con lo stesso profilo si può definire anche l'operazione differenza: è quella che porta alla matrice che ha come componenti:

$$D_{ij} := A_{ij} - B_{ij},$$

In genere una tale matrice ha componenti negative. Questa operazione è interpretabile in termini di digrafi bipartiti considerando fenomeni come trasferimenti di merci o di denari positivi e negativi (crediti e debiti) fra nodi origine e nodi bersaglio.

D27:g.05 Consideriamo ora due digrafi bipartiti $D_d = \langle I, U_d, J\rangle$ e $D_e = \langle J, U_e, K\rangle$ t.c. i nodi bersaglio del primo coincidano con i nodi origine del secondo. Per chiarezza conviene raffigurare i due digrafi bipartiti accostati.
Per semplicità di interpretazione delle linee delle varie matrici, individuiamo con i primi interi positivi gli elementi di tutti gli insiemi di nodi in gioco.



La figura ottenuta si può pensare come schematizzazione di una rete di collegamenti (stradali, aerei,...) fra tre gruppi di località. Lo schema mostra che per passare da una località (nodo) di I ad una località di K è necessario transitare per una località di J.

D27:g.06 Ci chiediamo ora quali sono i possibili modi di passare, tramite una località di J, da una località di I ad una località di K. La risposta si ottiene con un'operazione sulle matrici ridotte delle adiacenze di D_d e D_e, matrici che denoteremo con D ed E, che ora definiamo.
Si dice **prodotto binario** di D per E, la matrice binaria $M = D * E$ avente profilo $I \times K$ le cui componenti sono date da:

$$M_{i,k} = \sum_{j=1}^{J} D_{i,j} \cdot E_{j,k} = D_{i,1} \cdot E_{1,k} \dot{+} D_{i,2} \cdot E_{2,k} \dot{+} ... \dot{+} D_{i,J} \cdot E_{J,k}$$

In questa formula il segno $\sum$ indica la sommatoria costruita con la somma booleana.

D27:g.07 Nel caso particolare considerato si ha:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C = A * B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice ottenuta ha le righe associate a nodi di I e le colonne associate a nodi di K e la sua componente $M_{i,k}$ è 1 sse esiste un collegamento a due tratti (passeggiata di lunghezza 2) fra i e k, 0 se non esiste un collegamento di questo genere.
Infatti $M_{i,k}$ vale 1 sse esiste almeno uno $j \in J$ t.c. $D_{i,j} = E_{j,k} = 1$, vale zero in caso contrario. Ma, nel primo caso, accade che esiste almeno un nodo di J nel quale entra un arco proveniente da un nodo di I e dal quale esce un arco diretto verso un nodo di K, e solo in questa evenienza si ha un collegamento tra i e k.
In generale due matrici si dicono costituire una **coppia di matrici conformabili** sse le righe della prima sono individuate dagli stessi oggetti che individuano le colonne della seconda. Le due matrici D ed E costituiscono una tale coppia. Osserviamo che solo coppie di matrici conformabili possono essere sottoposte ad una operazione binaria come il prodotto precedentemente definito.

D27:g.08 Accanto alla moltiplicazione booleana si può definire anche la moltiplicazione normale di matrici binarie conformabili come D ed E, servendosi della usuale somma di interi invece della somma booleana.
Si dice dunque **prodotto usuale** di D per E la matrice $N = D \cdot E$ avente profilo $I \times K$ ed avente come componenti gli interi non negativi dati da:

$$N_{i,k} = \sum_{j=1}^{J} D_{i,j} \cdot E_{j,k} = D_{i,1} \cdot E_{1,k} + D_{i,2} \cdot E_{2,k} + ... + D_{i,J} \cdot E_{J,k} \ .$$

La componente $N_{i,k}$ dice in quanti modi dal nodo i si può raggiungere k. Infatti $N_{i,k}$ dà il numero di nodi $j \in J$ tali che $D_{i,j} = E_{j,k} = 1$, cioè il numero dei nodi di J che individuano passeggiate di lunghezza due da i a k, passeggiate della forma $\big\langle \langle i,j\rangle, \langle j,k\rangle \big\rangle$.
Per le matrici dell'esempio precedente si ha:

$$D = A \cdot B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Le due matrici M ed N hanno dunque un'interpretazione molto chiara in termini di raggiungibilità e di passegiate.

D27:g.09 Il prodotto di matrici conformabili può definirsi più in generale quando le entrate delle matrici stesse sono numeri reali o complessi o i generale appartengono a stutture per le quali possano definirsi somme e prodotti. In algebra, v. T15h08 e B41c02, tali entità sono dette **semianelli**.
Nel caso delle matrici ad entrate in $\mathbb{N}$ si ha una interpretazione molto naturale. Ricordando la formula $N_{i,k} = \sum_j D_{i,j} \cdot E_{j,k}$, si ha che $N_{i,k}$ dà il numero delle passeggiate dal nodo i al nodo k: infatti per ogni nodo j intermedio $D_{i,j} \cdot E_{j,k}$ dà il numero delle passeggiate da i a k passanti per j.

D27:g.10 Estendendo il discorso si può considerare una sequenza di 3, 4, ..., s digrafi o multidigrafi bipartiti t.c. i nodi bersaglio di un digrafo coincidano con i nodi origine del digrafo successivo. Si possono quindi considerare i prodotti binario e normale delle rispettive matrici delle adiacenze ottenendo

matrici che sono interpretabili in termini, risp., di possibilità e di numero di collegamenti ad s passi tra un nodo origine del primo digrafo ed un nodo bersaglio dell's-esimo.
Con costruzioni di questo genere ci si rende conto agevolmente dell'associatività dei prodotti booleano e normale delle matrici binarie, o più in generale a componenti intere naturali:

$$D * (E * F) = (D * E) * F \qquad\qquad D \cdot (E \cdot F) = (D \cdot E) \cdot F,$$

Infatti entrambi i membri della prima uguaglianza danno le possibilità di passaggio da un nodo del primo insieme ad uno del quarto, mentre entrambi i membri della seconda danno i numeri delle passeggiate da un nodo del primo insieme ad uno del quarto.

D27:g.11 Una matrice binaria quadrata $n \times n$ si può quindi interpretare sia come matrice delle adiacenze di un digrafo con n nodi, sia come matrice delle adiacenze ridotta di un digrafo bipartito con n nodi origine ed n nodi bersaglio. Una matrice quadrata $n \times n$ ad entrate intere naturali si può invece interpretare sia come matrice delle adiacenze di un multidigrafo con n nodi, sia come matrice delle adiacenze ridotta di un multidigrafo bipartito con n nodi origine ed n nodi bersaglio.

Il quadrato booleano di una matrice A binaria $n \times n$, cioè $A^{*2} = A * A$, si può considerare come la matrice che esprime le possibilità di collegamento con passeggiate di lunghezza 2 tra i nodi di un digrafo. Il quadrato normale di una matrice a valori in $\mathbb{N}$ si può considerare come la matrice che esprime i numeri dei collegamenti con passeggiate di lunghezza 2 tra i nodi di un multidigrafo.

D27:g.12 Estendendo il discorso, si possono considerare le potenze booleane s-esime con $s \geq 2$ di una matrice quadrata binaria ed interpretarle in termini di possibilità o meno di collegamenti tra i nodi di un digrafo. Inoltre si possono considerare le le potenze normali s-esime con $s \geq 2$ di una matrice quadrata a valori in $\mathbb{N}$ed interpretarle in termini di numero di collegamenti tramite passeggiate di lunghezza s tra i nodi di un multidigrafo.

D27:h. Chiusure di matrici e raggiungibilità

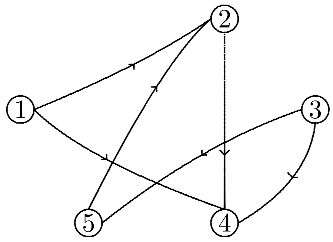
D27:h.01 In questa sezione e talora nel seguito sarà comodo abbreviare il termine "matrice binaria quadrata" con il termine **matrice -BS**.

Le somme di matrici quadrate si possono applicare in particolare a potenze diverse di una unica matrice delle adiacenze: chiamiamo A tale matrice, diciamo D il digrafo corrispondente e sia n il numero dei nodi.
Ad esempio $A^{*2} \dot{+} A^{*3}$ individua la possibilità di collegamento tra i nodi di D mediante passeggiate di lunghezza 2 o di lunghezza 3.
$A + A^2 + A^3$ fornisce invece i numeri dei collegamenti fra i nodi D ottenuti come passeggiate di lunghezza minore o uguale a 3.

D27:h.02 Ad esempio per la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

il cui digrafo è:



si ha:

$$A^{*2} \dot{+} A^{*3} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad A + A^2 + A^3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

D27:h.03 Si dice **chiusura transitiva** di A la matrice binaria

$$A^{\oplus} := A \dot{+} A^{*2} \dot{+} \cdots \dot{+} A^{*n},$$

Per il digrafo precedente:

$$A^{\oplus} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Vediamo quali informazioni essa fornisce.
Se $(A^{\oplus})_{i,j} = 1$ evidentemente esiste almeno una passeggiata dal nodo i al nodo j: infatti per almeno un intero s compreso tra 1 e n accade che $(A^{*s})_{i,j} = 1$, cioè esiste una passeggiata di lunghezza s tra i e j.
Se viceversa $(A^{\oplus})_{i,j} = 0$ è garantito che non esiste alcuna passeggiata tra i e j: infatti deve essere $A_{i,j} = (A^{*2})_{i,j} = ... = (A^{*n})_{i,j} = 0$, cioè non può esistere alcuna passeggiata di lunghezza inferiore od uguale ad n che va da i a j. Ma non può esistere neppure una passeggiata di lunghezza superiore ad n da i a j. Infatti se esistesse sarebbe una passeggiata non elementare in quanto almeno uno degli n nodi di D dovrebbe essere toccato almeno due volte e questo implicherebbe l'esistenza di una passeggiata di lunghezza inferiore o uguale ad n, situazione che abbiamo già dimostrata impossibile.

D27:h.04 Nella espressione data in precedenza per la chiusura transitiva, la sommatoria booleana spesso si può interrompere con una potenza inferiore ad n: infatti basta considerare la massima distanza tra due nodi del digrafo: tale distanza non può mai superare $n-1$. Viceversa si può anche scrivere:

$$A^{\oplus} := A \dot{+} A^{*2} \dot{+} \cdots$$

come se si trattasse di somma infinita, in quanto oltre una certa potenza di A non si ha ulteriore contributo al primo membro.

D27:h.05 Si dice **chiusura riflessivo-transitiva** di A

$$A^{\otimes} := \mathrm{Id}_Q \dot{+} A \dot{+} A^{*2} \dot{+} \cdots = \mathrm{Id}_Q \dot{+} A^{\oplus}.$$

Questa matrice tiene conto anche delle passeggiate di lunghezza zero sul digrafo.

D27:h.06 Si può considerare anche la **chiusura riflessivo-transitiva simmetrizzata** $(A^{\leftarrow})^{\oplus} \cup \mathrm{Id}_Q \cup A^{\oplus}$ ottenibile come $A^{\otimes} \cup (A^{\otimes})^{\mathsf{T}}$. Il generico elemento $\langle i,j\rangle$ di questa matrice è uguale ad 1 sse esiste un cammino da i a j o un cammino da j a i.

D27:h.07 Infine si introduce la **chiusura riflessivo-simmetrico-transitiva** della A $(A^{\leftarrow} \cup \mathrm{Id}_Q \cup A)^{\oplus}$; essa è detta anche **chiusura di equivalenza** della A; la sua entrata $\langle i,j\rangle$ è uguale ad 1 sse è possibile raggiungere j da i attraverso un percorso. Questa matrice è diagonalizzabile a blocchi e ciascun blocco individua una componente semplicemente connessa del digrafo relativo alla A.

D27:h.08 Le matrici precedentemente definite consentono di dare risposta a varie questioni di raggiungibilità.
Le potenze della matrice delle adiacenze consentono di individuare le passeggiate chiuse del relativo digrafo. L'entrata $\langle i,i\rangle$ della potenza booeana k-esima A^{*k} è uguale ad 1 sse sul digrafo D si trova una passeggiata chiusa di lunghezza k passante per il nodo i. L'entrata $\langle i,i\rangle$ della potenza k-esima A^k dà il numero delle passeggiate chiuse di lunghezza k passanti per il nodo i.

In un digrafo esistono passeggiate chiuse sse esistono passeggiate di lunghezza arbitraria (cioè arbitrariamente elevata).

D27:h.09 Una matrice quadrata M di profilo $Q \times Q$ si dice **nilpotente** sse si trova un $k \in \mathbb{N}$ t.c. $M^k = \mathrm{Mzr}_Q$. Il minimo intero positivo k per il quale vale la precedente uguaglianza si dice **grado di nilpotenza** della matrice. Tra le matrici di profilo $Q \times Q$ solo la Mzr_Q ha grado di nilpotenza 1.
Tipiche matrici nilpotenti sono le matrici strettamente triangolari superiori e le matrici strettamente triangolari inferiori introdotte in :e.12 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

D27:h.10 Prop. Una matrice binaria A è nilpotente con grado di nilpotenza k sse rappresenta un digrafo privo di passeggiate di lunghezza k sse è nulla la sua potenza booleana k-esima.
Dim.: Dato che l'entrata $\langle i,j\rangle$ di A^h dà il numero di passeggiate di lunghezza h dal nodo i al nodo j, $A^h = \mathrm{Mzr}$ sse sul digrafo D che essa rappresenta non esiste alcuna passeggiata di lunghezza h; e quest'ultimo fatto si verifica sse $A^{*h} = \mathrm{Mzr}$ ▮

D27:h.11 Prop. Una matrice binaria è nilpotente sse rappresenta un digrafo acircuitale.
È la riscrittura sintetica della precedente ▮

D27:h.12 Prop. Una matrice ad entrate in $\mathbb{N}$ è nilpotente sse rappresenta un multidigrafo acircuitale.
Dim.: Basta osservare che un multidigrafo è acircuitale sse il digrafo che costituisce la sua semplificazione è acircuitale ▮

La proposizione precedente si estende facilmente alle matrici quadrate con entrate reali non negative.

Osserviamo ancora che, in particolare, hanno matrici delle adiacenze nilpotenti i digrafi strettamente ordinati.

D27:h.13 Vogliamo ora riprendere la semplificazione generale per i digrafi chiamata quoziente di forte connessione (v. :B).

Dato un digrafo generico, si possono individuare le sue componenti fortemente connesse e in relazione a queste decomporre la matrice delle adiacenze come somma diretta di matrici con l'aggiunta di valori 1 nelle posizioni triangolari superiori.
In un generico digrafo connesso si possono individuare le componenti fortemente connesse servendosi della $A^{\oplus}$.
Si possono quindi fondere i nodi di ciascuna componente fortemente connessa ed eliminare i cappi ottenendo un grafo acircuitale (quoziente di forte connessione).
Questo a sua volta può essere semplificato eliminando gli archi $\langle i,k\rangle$ quando siano presenti l'arco $\langle i,j\rangle$ e $\langle j,k\rangle$ per qualche nodo j. Il digrafo essenzialmente ordinato che si ottiene costituisce una forte caratterizzazione del digrafo di partenza. A ciascuno dei nodi di questo digrafo si possono aggiungere significativamente i numeri dei nodi del digrafo di partenza che gli hanno dato origine fondendosi.
Ad esempio il digrafo visto in precedenza si semplifica nel digrafo quoziente con matrice delle adiacenze:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Tutte le matrici delle adiacenze così ottenute sono nilpotenti.

`Le varie componenti di questo testo sono accessibili in http://www.mi.imati.cnr.it/∼alberto`