Capitolo D26:
Grafi non-orientati

Contenuti delle sezioni

a. Generalità sulle strutture grafiche p.1 b. Introduzione dei grafi non-orientati p.3 c. Panoramica di grafi semplici p.6 d. Grafi non-orientati: passeggiate, connessioni p.10 e. Grafi bipartiti p.15 f. Isomorfismo e simmetria per i grafi non-orientati p.16 g. Costruzioni sui grafi non-orientati p.19 h. Alberi p.23 i. Separabilità e blocchi dei grafi p.25

D26:a. Generalità sulle strutture grafiche

D26:a.01 Con il termine **strutture grafiche** intendiamo varie specie di strutture discrete, accomunate dal fatto di essere costituite da oggetti tendenzialmente semplici detti **nodi** o **vertici** e da collegamenti tra questi nodi.
Si individuano due specie di strutture grafiche basilari che chiamiamo, risp., **grafi non-orientati** e **grafi orientati** (chiamati anche **grafi diretti** o **digrafi** e molte specie che sostanzialmente costituiscono degli arricchimenti delle precedenti.
Nei digrafi ogni collegamento, chiamato **arco**, va da un nodo ad un altro (che può coincidere con il primo) e si distingue fra nodo iniziale e nodo finale; gli archi sono quindi dotati di un'orientazione. I collegamenti di un grafo non-orientato, chiamati **lati**, al contrario, non posseggono orientazione. Gli archi sono coppie di nodi $\langle p, q\rangle$, i lati sono doppietti $\{p, q\}$ o singoletti $\{p\}$ di nodi.
Tipicamente, mediante strutture grafiche, si possono schematizzare sistemi di collegamenti stradali riguardanti determinate località. Se tutti i collegamenti si possono percorrere in entrambi i sensi basta un grafo non-orientato; se si hanno alcune strade a senso unico va utilizzato un digrafo.

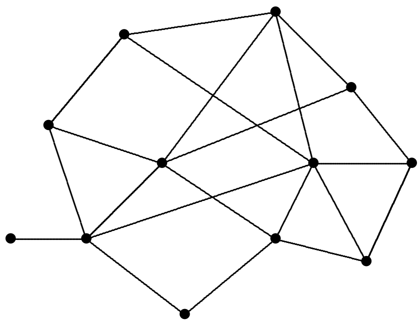
D26:a.02 Si introducono poi varie specie di strutture grafiche arricchendo delle due basilari, spesso in seguito a sollecitazioni applicative. Ad es. in uno schema di sistema stradale può rendersi necessario caratterizzare i diversi tratti (lati) con parametri numerici che esprimono distanze, tempi di percorrenza, pendenze, larghezze, ... ; oppure distinguere fra le località (nodi) dotate di parcheggio e quelle prive.
Sono di grande interesse, a cominciare da esigenze interne della matematica, anche strutture grafiche con insiemi numerabili (effettivamente costruibili) di nodi e di collegamenti.

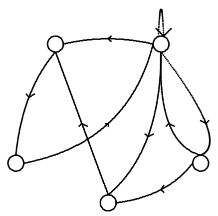
D26:a.03 I digrafi coincidono con le relazioni esplicite, mentre i grafi non-orientati si possono confondere con le relazioni simmetriche. Invece che di strutture grafiche si può quindi parlare equivalentemente di **strutture relazionali discrete**; un altro termine utilizzato è **configurazioni grafiche**. Le strutture grafiche vengono anche indicate semplicemente come "grafi", utilizzando questo termine nella sua accezione

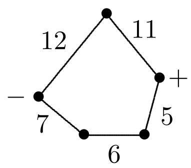
generica. In determinati contesti il termine viene anche usato in accezioni specifiche per indicare tipi particolari correnti di strutture grafiche.
Nel seguito di questo paragrafo ci serviremo del termine "grafo" nella sua accezione generica, mentre nei paragrafi seguenti lo useremo come semplificazione del termine grafo non-orientato.

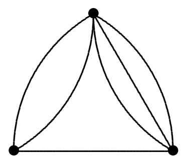
D26:a.04 I grafi, quando presentano un numero non eccessivo di nodi e di collegamenti, possono essere raffigurati nel piano in modo intuitivo ed efficace, associando a ogni nodo un punto e ad ogni collegamento un segmento che unisce due nodi fra loro o un nodo con sé stesso.

Come mostrano le raffigurazioni che seguono, i nodi di un grafo possono essere indifferenziati o, viceversa, possono distinguersi in vari modi; a loro volta i collegamenti fra i nodi (orientati o meno) possono essere indifferenziati o, viceversa, essere muniti di etichette, di valori numerici o di altre informazioni; inoltre può essere ammesso che tra un nodo ed un altro si abbia più di un collegamento; in tali casi si parla di **multigrafi** e **multidigrafi**.









Molte proprietà dei grafi possano essere descritte ed analizzate in termini puramente visivi servendosi delle loro raffigurazioni. Inoltre molte situazioni riguardanti entità matematiche, oggetti materiali o entità socio-amministrative vengono schematizzate agevolmente mediante grafi, grazie alla semplicità degli elementi (nodi e collegamenti) che li costituiscono.

D26:a.05 Lo studio dei grafi è iniziato nel diciottesimo secolo, ma, pur destando l'interesse di matematici del calibro di L. Euler, R. Hamilton ed A. Cayley, fino alla II guerra mondiale è rimasto piuttosto circoscritto e frammentario. L'attenzione nei confronti dei grafi è invece cresciuta vistosamente nella seconda metà del '900 per vari motivi.

– Sono stati ottenuti risultati incisivi concernenti grafi ed altre strutture matematiche discrete loro collegate attraverso la edificazione di teorie di vasta portata e attraverso la precisazione di algoritmi complessi di elevata efficienza.
– Con la diffusione di mezzi di calcolo di elevata potenza sono stati implementati sistematicamente algoritmi sui grafi che costituiscono strumenti efficaci per l'indagine scientifica e per applicazioni pratiche.
– Molte situazioni che si incontrano nelle attività produttive o organizzative vengono schematizzate mediante grafi dei vari tipi e molti problemi concreti vengono risolti da procedure nelle quali hanno un ruolo centrale analisi e costruzioni di grafi.

D26:a.06 Per quanto riguarda le principali applicazioni dei grafi cominciamo con alcune segnalazioni.

○ I grafi schematizzano reti elettriche e reti di comunicazione che possono riguardare collegamenti interni di dispositivi elettronici, connessioni di apparecchiature informatiche costituenti sistemi articolati finalizzati alla esecuzione di attività complesse, collegamenti a distanza di computers organizzati in modo da cooperare.
○ Rappresentano reti di trasporto (stradale, ferroviario, marittimo, aereo, ...) e sono usati per affrontare problemi di viabilità e di traffico, sia in aree urbane che in vaste regioni geografiche.
○ Costituiscono il supporto di tutti i numerosi tipi di automi e di macchine formali.
○ Sono alla base delle strutture di dati e degli archivi da gestire secondo criteri di sistematicità e razionalità e quindi da manipolare con il computer.

- In varianti opportunamente arricchite (come i diagrammi di flusso delle elaborazioni e i diagrammi di flusso dei dati) rappresentano gli algoritmi, il fluire delle informazioni nell'ambito dei sistemi informativi e varie situazioni studiate nel settore strategico della programmazione.
- Permettono di descrivere lo svolgimento dei giochi e fanno da supporto a giochi particolari.
- In fisica delle particelle si incontrano, ad es., nelle vesti dei diagrammi di Feynman.
- In chimica si incontrano nelle formule di struttura delle molecole.
- In geografia servono, tra l'altro, a rappresentare bacini fluviali.
- Consentono di schematizzare svariati problemi organizzativi (organigrammi, pianificazione di attività produttive, ripartizioni di compiti secondo competenze, assegnazione di risorse, e varie situazioni studiate dalla sociologia).

D26:a.07 In questo capitolo introduciamo le varie nozioni di base riguardanti i grafi che si incontrano nella descrizione e nell'analisi di gran parte delle configurazioni discrete. In vari capitoli successivi riprenderemo le configurazioni grafiche per affrontare questioni più specifiche e più impegnative.

D26:b. Introduzione dei grafi non-orientati

D26:b.01 Si dice **grafo non-orientato** ogni $G :=: \langle Q, E\rangle$, dove Q è un insieme finito ed $E :\subseteq \mathfrak{P}_{1,2}(Q)$, cioè E è un insieme formato da sottoinsiemi di Q contenenti uno o due elementi, cioè da singoletti e doppietti.
Q è detto insieme dei **nodi** o dei **vertici** di G; E è detto insieme dei **lati** o degli **spigoli** di G; un lato si dice **cappio** sse è costituito da un solo nodo.
Nel seguito del capitolo invece che di grafi non-orientati parleremo semplicemente di **grafi**.
Denotiamo **Grf** la classe dei grafi non-orientati e Grf_Q l'insieme dei grafi aventi Q come insieme dei nodi.

D26:b.02 Il numero dei nodi di un grafo G si dice **ordine** ed il numero dei lati **grado** di G, o anche, con un termine suggerito dall'elettronica, **affollamento** di G.
I grafi di un dato ordine v si dicono anche v-**grafi**; i grafi di un dato ordine v e di un dato grado s si chiamano anche (v, s)-**grafi**.
Facendo riferimento ad un grafo G, si indica $Nod(G)$ l'insieme dei suoi nodi e con $Edg(G)$ l'insieme dei suoi lati. Quindi l'ordine di tale grafo è $|Nod(G)|$, il suo grado è $|Edg(G)|$ e si può scrivere $G = \langle Nod(G), Edg(G)\rangle$. L'ordine del grafo G spesso si denota concisamente con la notazione $|G|$.
Un grafo costituito da un solo nodo e da nessun lato viene chiamato **grafo nodo** o **grafo banale**.
Talora conviene considerare anche il **grafo vuoto**, grafo costituito da 0 nodi (e 0 lati).

D26:b.03 Consideriamo dunque un grafo $G = \langle Q, E\rangle$. input pD26b03
Due nodi diversi di G, p e q, si dicono **nodi adiacenti** sse $\{p, q\} \in E$; c si dice **lato adiacente a se stesso** sse $\{c\} \in E$, cioè sse costituisce un cappio.
Se $e = \{p, q\} \in E$ si dice che il lato e **collega** o **connette** p e q, e questi nodi si dicono le **estremità** del lato e. Se $\{c\} \in E$ si dice che c è l'unica estremità del cappio $\{c\}$, o anche che c è l'unico nodo nel quale il cappio $\{c\}$ è incidente.
I lati che hanno un dato nodo p come estremità si dicono **incidenti** in p. L'insieme dei nodi adiacenti ad un determinato nodo p si dice **intorno** di p. Due lati si dicono **lati incidenti** sse hanno almeno una estremità in comune.

Un **nodo** si dice **isolato** sse non possiede nodi adiacenti; si dice **sconnesso** sse non ha nodi adiacenti diversi da sé stesso. Un nodo è sconnesso e non isolato sse è dotato di cappio e non è adiacente ad alcun altro nodo.

Un **nodo** si dice **pendente** sse possiede un solo nodo adiacente diverso da sé stesso.

Un **grafo non-orientato** privo di cappi si dice **semplice**. I cappi di un grafo non giocano un ruolo molto significativo: essi forniscono solo una bipartizione dell'insieme dei nodi, in quanto si può distinguere fra nodi dotati e nodi privi di cappio. Per molte considerazioni è sufficiente limitarsi ad esaminare i grafi semplici.

D26:b.04 Il **grado** o **valenza** di un nodo p del grafo G è il numero dei lati incidenti in esso, ovvero il numero dei nodi adiacenti ad esso. Questo intero naturale si denota con $deg_G(p)$ o più semplicemente con $deg(p)$ quando non è necessario indicare esplicitamente il grafo che si considera.
Il termine valenza proviene dalla rappresentazione delle molecole come complesso di nodi (gli atomi) tenuti insieme da legami schematizzati dai lati di un multigrafo con nodi etichettati (v.o.). I nodi di grado k sono detti anche k-**valenti**.
Si osservi che un nodo è isolato sse ha grado 0, mentre un nodo è pendente sse ha grado 1 ed è privo di cappio.

D26:b.05 Prop. Per il grafo $\langle\{p_1,...,p_v\},\{e_1,...,e_s\}\rangle$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{v} deg(p_i) = 2s$.

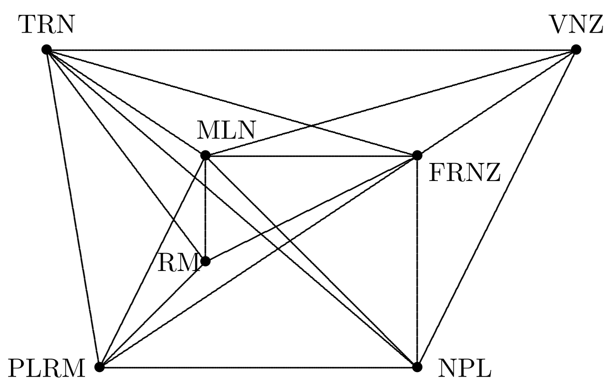
Dim.: Ciascuno degli s lati contribuisce con un addendo uguale ad 1 al grado di due nodi; quindi $\sum_{i=1}^{v} deg(p_i) = \sum_{j=1}^{s} 2 = 2s$ ▮

Da qui si ricava che in ogni grafo il numero dei nodi di grado dispari è pari.

Talora conviene semplificare una notazione come la $e = \{p,q\}$ nella $e = pq$.

D26:b.06 Consideriamo una collezione $\mathcal{C} = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$ di sottoinsiemi di un insieme finito S. Si dice **grafo intersezione** di $\mathcal{C}$, e si denota $Intsgrf(\mathcal{C})$, la coppia $\langle\mathcal{C}, E\rangle$, dove E è l'insieme dei doppietti $\{V_i, V_j\}$ t.c. V_i e V_j presentano elementi comuni, cioè t.c. $V_i \cap V_j \neq \emptyset$.

Ad es. se si considera la collezione degli insiemi di consonanti che entrano nei nomi di alcune delle maggiori città italiane, si trova il seguente grafo intersezione:



Ogni grafo si può considerare grafo intersezione di una collezione di insiemi: basta assegnare degli identificatori ai suoi lati e associare a ciascun nodo la collezione degli identificatori dei lati che incidono in esso.

D26:b.07 Se si cambiano gli identificatori dei nodi di un grafo $G = \langle Q, E \rangle$, si ottiene un grafo G' che conserva tutte le proprietà di G che dipendono solo dal complesso dei collegamenti tra i nodi, proprietà che chiamiamo **invarianti spcGrf**. Ad es. i due grafi G e G' hanno lo stesso numero di nodi isolati, di nodi pendenti e, in genere, di nodi k-valenti.
Un cambiamento di nomi del tipo precedente è stato utilizzato per giungere ad asserire la portata generale dei grafi intersezione.
Formalmente il cambiamento di identificatori consiste nel considerare un insieme P con lo stesso numero di elementi di Q (i nuovi identificatori) ed una biiezione $\beta \in \{Q \triangleleft\!\!\!-\!\!\!\triangleright P\}$; essa porta ad un grafo $H = \langle P, F \rangle$, dove F è l'insieme dei lati ottenuti da quelli di G modificando le loro estremità mediante l'applicazione β:

$$F \ := \ \{\{q,p\} \in E :| \ \{\beta(q), \beta(p)\} \ \cup \ \{\{c\} \in E :| \ \beta(c)\} \ .$$

Una biiezione che, come la precedente, mantiene l'adiacenza fra nodi viene detta **isomorfismo tra grafi** ed i due grafi associati dalla biiezione si dicono **isomorfi**; per indicare che G ed H sono grafi isomorfi si scrive $G \triangleleft\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\triangleright_{Grf} H$ o più brevemente $G \cong H$, se il contesto rende questa scrittura sufficientemente chiara. Con la scrittura $\{G \triangleleft\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\triangleright_{Grf} H\}$ si denota l'insieme degli isomorfismi tra G ed H; quindi per indicare che β è un isomorfismo tra i grafi G ed H si scrive $\beta \in \{G \triangleleft\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\triangleright_{Grf} H\}$.

D26:b.08 Il grafo H, ottenuto cambiando i nomi dei nodi di G, in genere non mantiene le caratteristiche di G derivanti dalle individualità dei suoi nodi, ovvero dal procedimento specifico con il quale lo si è costruito a partire da oggetti più elementari: queste caratteristiche, in seguito a scelte per P e β tese alla semplicità, possono perdere di senso.
Le proprietà invarianti spcGrf sono associate alla specie delle strutture grafo e sono condivise da tutti i grafi isomorfi a G, grafi che insieme a G costituiscono una cosiddetta **classe di isomorfismo** di grafi.
Questo termine è giustificato dal fatto che l'isomorfismo tra grafi è una equivalenza. Infatti l'identità per i nodi di un grafo G si può considerare un isomorfismo di G con sé stesso; la composizione di un isomorfismo β tra G e un secondo grafo H con un isomorfismo γ tra H ed un terzo grafo K costituisce un isomorfismo tra G e K; infine ogni isomorfismo β tra G e H è invertibile e la sua applicazione inversa costituisce un isomorfismo tra H e G.

D26:b.09 Quando interessano le proprietà dei grafi che non dipendono da come sono individuati i loro nodi, ma solo dal complesso dei collegamenti tra i nodi stessi, si dovrebbero considerare non tanto i grafi singoli, quanto le loro classi di isomorfismo.
In molti passi espositivi però risulta vantaggioso attribuire le proprietà condivise da tutti i grafi di una classe di isomorfismo ad un unico ente che si chiama **grafo astratto dallo specificato** G.
Spesso inoltre questo grafo si può studiare attraverso una sua **raffigurazione con nodi anonimi**; ciascuno dei nodi è individuato solo dall'immagine di un punto e non porta alcuna indicazione.

Occorre peraltro rilevare che di uno stesso grafo si possono dare diverse raffigurazioni equivalenti e che alcune di esse, a prima vista, possono sembrare presentazioni di grafi diversi. In effetti vi sono grafi che in una raffigurazione evidenziano chiaramente una prima proprietà P, ma non una seconda Q, mentre in un'altra raffigurazione rendono palese la Q e nascondono la P.
Naturalmente una raffigurazione a nodi anonimi non fornisce le caratteristiche legate alle individualità dei nodi stessi, cioè relative alle modalità secondo le quali i singoli nodi sono stati costruiti.

Va detto anche che per esporre alcune proprietà di grafi astratti risulta opportuno servirsi di rappresentativi particolari delle loro classi di isomorfismo assegnando ai loro nodi identificatori scelti con accorgimenti specifici. Nel seguito avremo modo di trattare i grafi nei vari modi indicati.

D26:b.10 Introduciamo ora una importante relazione fra grafi.

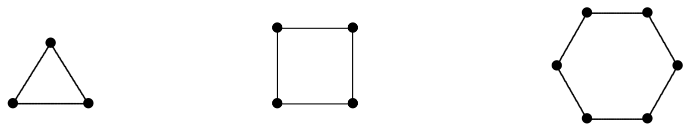
Si dice che il grafo $G_1 :=: \langle Q_1, E_1\rangle$ è **sottografo** di $G_2 :=: \langle Q_2, E_2\rangle$ sse $Q_1 \subseteq Q_2$ ed $E_1 \subseteq E_2$, ovvero $E_1 \subseteq E_2 \cap \mathfrak{P}_{1,2}(Q_1)$.
Questa relazione si esprime scrivendo $G_1 \leq_{Grf} G_2$; in questo caso si dice anche che G_2 è **sovragrafo** di G_1.

Si dice che G' è **sottografo ricoprente** o **sottografo generante** di G sse i suoi nodi sono tutti i nodi di G, cioè sse $G' = \langle V, E'\rangle$ con $E' \subseteq E$.
Si passa da un grafo ad un suo sottografo ricoprente mantenendo tutti i suoi nodi ed eliminando alcuni dei suoi lati.
Chiaramente quindi ogni sottografo ricoprente di un sottografo ricoprente di un dato grafo G è sottografo ricoprente di tale G.

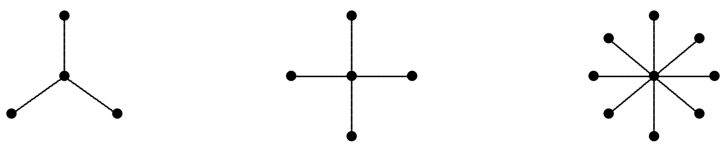
D26:c. Panoramica di grafi semplici

D26:c.01 Presentiamo ora alcune famiglie di grafi semplici: per la maggior parte di essi conviene identificare i nodi mediante interi positivi e spesso sono sufficienti raffigurazioni con nodi anonimi.
Ricordiamo anche che per n intero positivo $(n]$ denota $\{1, 2, ..., n\}$, mentre $[n] = \{0, 1, 2, ..., n\}$.
Si dice **grafo cammino** (*path*) con n nodi (ed $n-1$ lati) $\mathcal{P}ath_n := \langle (n], \{i = 1, ..., n-1 :| \{i, i+1\}\}\rangle$. Le raffigurazioni di $\mathcal{P}ath_4$ e del generico $\mathcal{P}ath_n$ sono

Per $n = 3, 4, ...$, si dice **ciclo** (*cycle*) con n nodi (ed n lati)
$\boldsymbol{Cycl}_n := \langle (n], \{i = 1, ..., n-1 :| \{i, i+1\}\} \cup \{1, n\}\rangle$.

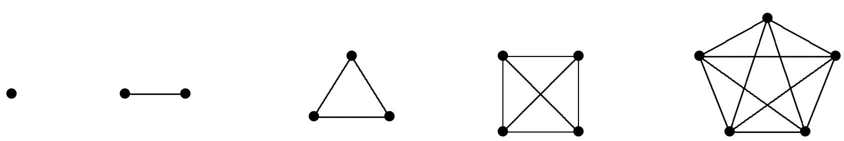


Per $m = 3, 4, ...$, si dice **stella** con m lati (ed $m+1$ nodi) $\mathcal{K}_{1,m} := \langle [m], \{i = 1, ..., m :| \{0, i\}\}\rangle$. Il nodo 0 è il **centro** della stella ed ha grado m; i rimanenti m nodi sono pendenti. Si dice **grafo triade** la stella di ordine 4.



D26:c.02 Si dice **grafo completo** con n nodi $\mathcal{K}_n := \langle (n], \{i = 1, ..., n-1;\ j = i+1, ..., n :| \{i, j\}\}\rangle$.

La seguente figura mostra i grafi completi degli ordini 1, 2, 3, 4 e 5. Si osservi che $\mathcal{K}_1$ corrisponde al grafo nodo e $\mathcal{K}_2$ a $\mathcal{P}_2$.



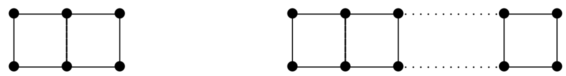
$\mathcal{K}_n$ ha $n(n-1)/2$ lati.

Più costruttivamente si dice **grafo completo** sull'insieme V il grafo semplice i cui nodi costituiscono V ed i cui lati connettono tutte le coppie di nodi diversi, cioè un grafo della forma $\langle V, \mathfrak{P}_2(V)\rangle$ con $|V| = v$. In astratto, cioè prescindendo da V, si parla al singolare di grafo completo $\mathcal{K}_{|V|}$.

D26:c.03 Per $m = 3, 4, ...$, si dice **ruota** (*wheel*) con m raggi, o anche **piramide** a base m-gonale,
$Wl_m := \langle [m], \{i = 1, ..., m-1 :| \{i, i+1\}\} \cup \{1, m\} \cup \{i = 1, ..., m :| \{0, i\}\}\rangle$.
Se $m \geq 4$ il nodo di Wl_m di grado m viene detto **centro** della ruota, i restanti sono detti **periferici**; i lati incidenti al centro sono chiamati **raggi** ed i rimanenti **periferici**. Osserviamo che $Wl_3 \cong \mathcal{K}_4$, cioè per tale grafo ogni nodo ha valenza 3 e le distinzioni fra raggi e lati periferici vengono a cadere.

Wl_m ha $2m$ lati ed $m+1$ nodi.

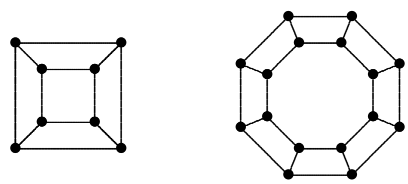
D26:c.04 Si dice **grafo scala** con $2m$ nodi $\mathcal{S}cl_{2m} := \langle (2m]\ ,\ \{i = 1, ..., m :| \{i, i+m\} \cup \{i = 1, ..., m-1 :| \{i, i+1\}\} \cup \{i = m+1, ..., 2m-1 :| \{i, i+1\}\}\rangle$. Per $\mathcal{S}cl_6$ e per la generica $\mathcal{S}cl_{2m}$ si hanno le figure



$\mathcal{S}cl_{2m}$ possiede $3m-2$ lati.

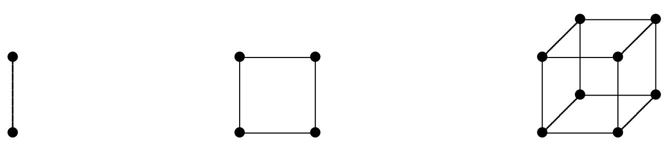
Evidentemente $\mathcal{K}_2 \cong \mathcal{P}ath_2 \cong \mathcal{S}cl_2$, $\mathcal{K}_3 \cong \mathcal{C}ycl_3$ e $\mathcal{S}cl_4 \cong \mathcal{C}ycl_4$.

D26:c.05 Per $m = 3, 4, ...$, si dice **prisma** con m facce laterali
$\mathcal{P}rsm_m := \langle (2m]\ ,\ \{i = 1, ..., m :| \{i, i+m\} \cup \{i = 1, ..., m-1 :| \{i, i+1\}\} \cup$
$\{i = m+1, ..., 2m-1 :| \{i, i+1\}\} \cup \{\{1, m\}, \{m+1, 2m\}\}\rangle$.



$\mathcal{P}rsm_m$ ha $2m$ nodi e $3m$ lati.

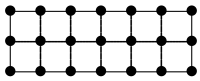
Sia $d = 1, 2, 3, ...$ e ricordiamo che $\mathbb{B}^d$ denota l'insieme delle d-uple binarie.
Si dice **[grafo] cubo** a d dimensioni il grafo $\mathcal{Q}_d := \langle \mathbb{B}^d, E\rangle$ i cui lati sono tutti i doppietti di d-uple binarie, elementi di $\mathfrak{P}_2(\mathbb{B}^d)$, della forma
$\{\langle b_1, ..., b_{i-1}, 0, b_{i+1}, ..., b_d\rangle\ ,\ \langle b_1, ..., b_{i-1}, 1, b_{i+1}, ..., b_d\rangle\}$, cioè i doppietti costituiti da sequenze binarie aventi distanza di Hamming uguale a 1.



Chiaramente $\mathcal{Q}_1 \cong \mathcal{P}ath_2 \cong \mathcal{K}_2$, $\mathcal{Q}_2 \cong \mathcal{C}ycl_4$, e $\mathcal{Q}_3 \cong \mathcal{P}rsm_4$.
$\mathcal{Q}_d$ ha 2^d nodi, $|Nod(\mathcal{Q})| = 2^d$. Ogni suo nodo q ha grado d, in quanto il suo intorno è costituito dai nodi d-uple che presentano una ed una sola delle loro componenti binarie diversa dalla corrispondente del nodo q.
Valutiamo i numeri dei lati $E_d := |Edg(\mathcal{Q}_d)|$. L'insieme dei nodi di $\mathcal{Q}_d$ si bipartisce nei sottoinsiemi delle d-uple aventi l'ultima componente risp. nulla e uguale a 1. I due sottografi ottenuti restringendo l'insieme dei nodi ai due suddetti insiemi complementari sono isomorfi a $\mathcal{Q}_{d-1}$. L'insieme $Edg(\mathcal{Q}_d)$ si ripartisce in tre classi: due classi sono costituite dai lati dei due suddetti sottografi; la terza classe è costituita da lati che collegano ciascuno un nodo del primo sottografo con un nodo del secondo. Quindi $E_d = 2E_{d-1} + |Nod(\mathcal{Q}_{d-1})| = 2E_{d-1} + 2^{d-1}$. Abbiamo quindi

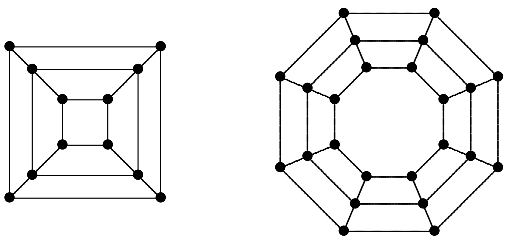
d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E_d	1	4	12	32	80	192	448	1024	2304

D26:c.06 Generalizzando la nozione di scala, diciamo **[grafo] griglia rettangolare** $m \times n$ e denotiamo $\mathcal{G}ridr_{m,n}$ il grafo dato dalla seguente raffigurazione:



Questo grafo si colloca naturalmente nella griglia combinatoria (v. B21:e) e per esso si possono usare i termini di tale struttura.
Evidentemente esso ha ordine $m \cdot n$. Per il grado si osserva che l'insieme dei lati verticali si pone in biiezione con l'insieme dei nodi che non si trovano sulla linea superiore e che l'insieme dei nodi orizzontali si pongono in biiezione con l'insieme dei nodi eccettuati i più a destra. Quindi il grado è $2(m-1)(n-1) + m - 1 + n - 1 = 2mn - m - n$.
Si osserva agevolmente che $\mathcal{G}ridr_{m,n} \cong \mathcal{G}ridr_{n,m}$ e $\mathcal{G}ridr_{2,n} \cong \mathcal{S}cl_{2n}$.

D26:c.07 Generalizzando la nozione di prisma, diciamo **[grafo] griglia cilindrica** $m \times n$ e denotiamo $\mathcal{G}ridc_{m,n}$ il grafo ottenuto aggiungendo a $\mathcal{G}ridr_{m,n}$ i lati $\{\langle i,1\rangle, \langle i,n\rangle\}$ per $i = 1, ..., m$. Si può immaginare come ottenuta avvolgendo una griglia rettangolare flessibile sopra un oggetto cilindrico e collegando i nodi inizialmente più a destra con i corrispondenti inizialmente più a sinistra.
Essa ha ordine $m \cdot n$ ed affollamento $nm + m(n-1) = 2mn - n$.



Si osserva agevolmente che $\mathcal{G}ridc_{2,n} \cong \mathcal{P}rsm_n$.

D26:c.08 Diciamo **[grafo] griglia toroidale** $m \times n$ il grafo $\mathcal{G}ridt_{m,n}$ che si può immaginare ottenuto da $\mathcal{G}ridc_{m,n}$ piegandola ad anello e collegando i nodi del suo ciclo inizialmente più in alto con i corrispondenti del suo ciclo più in basso, cioè aggiungendo i lati $\{\langle 1,j\rangle, \langle m,j\rangle\}$ per $j = 1, ..., n$.
Evidentemente questo grafo ha ordine $m \cdot n$ ed affollamento $2mn$.

Si osserva facilmente che $\mathcal{G}ridt_{m,n} \cong \mathcal{G}ridt_{n,m}$.

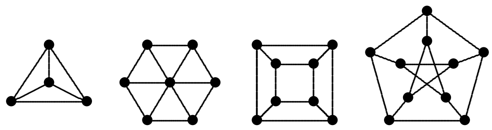
D26:c.09 Eserc. Precisare le biiezioni tra intervalli di interi che determinano gli isomorfismi segnalati nel presente paragrafo.

D26:c.10 Un grafo G si può qualificare significativamente con il cosiddetto **multigrado**, cioè con il multinsieme che dice quanti sono i suoi nodi pendenti, quanti hanno grado 2, quanti grado 3 ecc. Il multigrado di G si denota $Mdeg(G)$ e sarà presentato sempre mediante la notazione esponenziale.
Denoteremo risp. con $mindeg(G)$ e con $maxdeg(G)$ il minimo e il massimo tra i gradi dei nodi di G.
Ad es. per il primo grafo presentato in a.03 G_a si ha $Mdeg(G_a) = 123^5 4^2 5^2 6$, $mindeg(G_a) = 1$ e $maxdeg(G_a) = 6$.

D26:c.11 Eserc. Dimostrare le seguenti espressioni per i multigradi.
$Mdeg(\mathcal{P}ath_n) = 1^2 2^{n-2}$, $Mdeg(\boldsymbol{Cycl}_n) = 2^n$, $Mdeg(\mathcal{K}_{1,n}) = 1^n n^1$, $Mdeg(\mathcal{P}_n) = 1^2 2^{n-2}$, $Mdeg(Wl_n) = 2^n n^1$, $Mdeg(\mathcal{K}_n) = (n-1)^n$, $Mdeg(\mathcal{S}cl_{2m}) = 2^4 3^{2m-4}$ (per $m \geq 4$), $Mdeg(\mathcal{P}rsm_m) = 3^{2m}$, $Mdeg(\mathcal{K}_{s,t}) = s^t t^s$. $Mdeg(\mathcal{G}ridr_{m,n}) = 2^4 3^{2m+2n-8} 4^{(m-2)(n-2)}$. $Mdeg(\mathcal{G}ridc_{m,n}) = 3^{2n} 4^{(m-2)n}$. $Mdeg(\mathcal{G}ridt_{m,n}) = 4^{mn}$.

D26:c.11 Un grafo G è detto **regolare** sse è semplice e tutti i suoi nodi hanno lo stesso grado, cioè sse $mindeg(G) = maxdeg(G)$. Più precisamente un grafo viene detto **grafo k-regolare** sse k è il grado comune a tutti i suoi nodi, ovvero sse tutti i suoi nodi sono k-valenti.
Evidentemente per un grafo k-regolare con v nodi ed e lati si ha $vk = 2e$.
Un grafo k-regolare non connesso ha tutte le componenti connesse costituite da grafi k-regolari: quindi interessano prevalentemente i grafi regolari connessi.
Si vede subito che unico grafo 1-regolare connesso è $\mathcal{P}ath_2$ e che i cicli sono tutti e i soli grafi 2-regolari connessi.

D26:c.12 I grafi 3-regolari connessi costituiscono una popolazione ben più variegata e sono detti anche **grafi cubici**. Tutti i prismi sono grafi cubici. Dei cubi d-dimensionali solo $\mathcal{Q}_3$ è un grafo cubico.
La figura mostra alcuni grafi cubici.



L'ultimo grafo indicato è una struttura dotata di molte eleganti proprietà e viene detto **grafo di Pedersen**.
Sono grafi 4-regolari le griglie toroidali ed il cubo quadridimensionale.
Si vede inoltre che per ogni d intero positivo il cubo d-dimensionale è d-regolare.

D26:d. Grafi non-orientati: passeggiate, connessione

D26:d.01 Una **passeggiata** (*walk*) sopra un grafo G è una sequenza alternata di nodi e lati che inizia e finisce con un nodo e in cui ogni lato è incidente con il nodo immediatamente precedente e con il nodo immediatamente seguente. Formalmente si definisce **passeggiata** soprs G ogni

$$\pi := \langle q_0, e_1, q_1, \dots q_{s-1}, e_s, q_s\rangle \in Q \times (E \times Q)^s \quad \text{con} \;\; s \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall i = 1, ..., s : \; e_i = \{q_{i-1}, q_i\},$$

Si dice **lunghezza** di π, e si indica $\pi^{\vdash\dashv}$, il numero dei lati che giacciono su di essa, s.

I nodi $q_0, q_1, ..., q_n$ e i lati $e_1, ..., e_n$ si dicono **giacere** sulla passeggiata π.

I nodi q_0 e q_n si dicono **estremità** della passeggiata e quelli rimanenti **nodi interni**; si parla di (q_0, q_n)-passeggiate per individuare quelle che hanno estremità iniziale in q_0 ed estremità finale in q_n.

Una **passeggiata** individuata come la precedente π è detta **chiusa** sse $q_0 = q_n$; si parla invece di **passeggiata aperta** sse $q_0 \neq q_n$.

D26:d.02 La sequenza ridotta ad un solo nodo di G può considerarsi una passeggiata su G, più precisamente una passeggiata chiusa di lunghezza 0. Se $\{p\}$ è un cappio di G, $\langle p, \{p\}, p\rangle$ è una passeggiata su G chiusa di lunghezza 1.

La sequenza riflessa di quella che fornisce una passeggiata individua una passeggiata che viene detta **passeggiata riflessa** di quella data; evidentemente le riflesse delle (p, q)-passeggiate sono le (q, p)-passeggiate.

Molte passeggiate su un grafo si presentano efficacemente sulla sua raffigurazione segnando in modo più marcato i suoi lati. La definizione però consente ripetizioni di nodi e lati ed in questi casi la presentazione suddetta può essere ambigua.

In effetti, se si escludono i grafi privi di spigoli che presentano solo passeggiate di lunghezza 0, si possono avere passeggiate lunghe quanto si vuole e l'insieme delle passeggiate è infinito, in quanto si possono avere passeggiate ottenute ripercorrendo nei due sensi quante volte si vuole ogni lato o ogni altra passeggiata.

D26:d.03 La definizione formale è piuttosto pesante e si è indotti a considerare sbrigativamente come passeggiata di lunghezza s una sequenza di $s + 1$ nodi t.c. due consecutivi siano adiacenti o una sequenza di s lati t.c. due consecutivi siano incidenti.

Questo però in taluni casi porta ad imprecisioni: per una passeggiata come la $\langle p, \{p, q\}, q, \{p, q\}, p\rangle$ non è lecito adottare la scrittura riguardante i soli lati $\langle\{p, q\}, \{p, q\}\rangle$, in quanto questa potrebbe fornire anche la passeggiata $\langle q, \{p, q\}, p, \{p, q\}, q\rangle$.

Quando basta la sequenza dei nodi si può usare la notazione
$\langle[p_0, p_1, ..., p_n]\rangle := \langle p_0, e_1, p_1, ..., p_{n-1}, e_n, p_n\rangle$

Due **passeggiate** $\pi = \langle q_0, e_1, ..., q_s\rangle$ e $\sigma = \langle p_0, f_1, ..., p_s\rangle$ si dicono costituire una **coppia di passeggiate consecutive** sse l'estremità finale della prima coincide con l'iniziale della seconda, $q_s = p_0$. Si può considerare la **giustapposizione di passeggiate consecutive**; con le due precedenti si ha $\pi \cdot \sigma := \langle q_0, e_1, ..., q_s = p_0, f_1, ..., p_s\rangle$. La precedente costituisce un esempio di **operazione parziale** (V. T15e03) nell'insieme delle passeggiate sopra un grafo.

Si può sempre giustapporre una passeggiata alla propria riflessa ed ottenere una cosiddetta **passeggiata chiusa ripetitiva**.

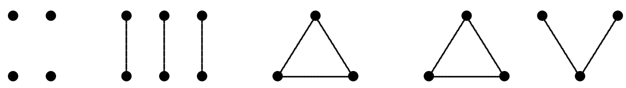
D26:d.04 Due nodi p e q si dicono **nodi connessi** su G sse su tale grafo esiste una (p, q)-passeggiata (e quindi una (q, p)-passeggiata).

(1) Prop.: La connessione fra i nodi di un grafo $G = \langle Q, E \rangle$ è una relazione di equivalenza entro Q.

Dim.: Le passeggiate di lunghezza 0 garantiscono la sua riflessività; la possibilità di avere passeggiate riflesse garantisce la sua simmetria; la possibilità di giustapporre passeggiate consecutive garantisce la sua transitività ▮

Le classi della relazione di connessione fra i nodi di un grafo G si dicono **componenti connesse** di G. Un grafo non connesso si può considerare unione disgiunta delle sue componenti connesse. Le componenti connesse di un grafo sono i suoi sottografi connessi massimali.

Il numero di tali sottografi di G si chiama **indice di connessione** e si denota $connx(G)$.



Grafo con 10 *componenti connesse*

Un grafo G si dice **connesso** sse ogni coppia di suoi nodi distinti è connessa, ovvero sse è costituito da una sola componente connessa, cioè sse ha indice di connessione $connx(G) = 1$.

Osserviamo che, per la determinazione della connessione, i cappi non hanno alcuna influenza.

Molte conoscenze sopra un grafo si ricavano facilmente da quelle delle sue componenti connesse e molte manovre sui grafi si riducono ad operazioni separate sulle sue componenti connesse.

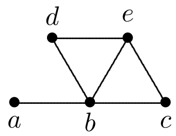
Ad es. l'insieme delle passeggiate su un grafo non connesso è l'unione degli insiemi (disgiunti) delle passeggiate sulle diverse componenti connesse.

Quindi lo studio di proprietà dei grafi collegate alla connessione è opportuno che si concentri sui grafi semplici connessi.

D26:d.05 Per le proprietà collegate alla connessione le passeggiate con ripetizioni di lati e nodi sono ridondanti: conviene quindi concentrare l'attenzione su passeggiate prive di tali ripetizioni.

Si dice **percorso** (*trail*) o **passeggiata euleriana** una passeggiata in cui tutti i lati sono distinti.

Si chiama **cammino** (*path*) o **passeggiata hamiltoniana** una passeggiata in cui tutti i nodi sono distinti.



$abebc$ è una passeggiata e non un percorso
$abedbc$ è un percorso e non un cammino
$abed$ è un cammino
$bdeb$ è un ciclo
cintura = 3
circonferenza = 4
diametro = 2

Chiaramente un cammino non può presentare lati ripetuti e quindi è un percorso.

In un grafo non ridotto a pochissimi elementi e non di tipo particolare (le foreste che vedremo tra poco) l'insieme dei cammini è contenuto strettamente in quello dei percorsi e questo è contenuto strettamente in quello delle passeggiate.

D26:d.06 Come per le passeggiate si distingue fra **percorsi chiusi** e **aperti** e si distinguono i **cammini chiusi** e **aperti**; inoltre si dicono, risp., (p,q)-percorsi e (p,q)-cammini i percorsi o i cammini che collegano i nodi p e q.

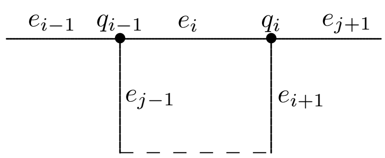
Un percorso è individuato completamente dalla sequenza dei suoi lati o dalla sequenza dei suoi nodi. Scriveremo quindi

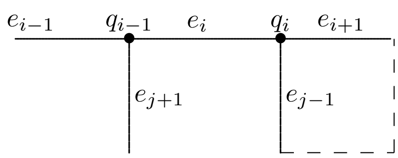
$$\llbracket p_0, p_1, ..., p_n \rrbracket := \langle\!\langle e_1, ..., e_n \rangle\!\rangle := \langle p_0, e_1, p_1, ..., p_{n-1}, e_n, p_n \rangle .$$

Si vede facilmente che la passeggiata riflessa di un percorso è un percorso e che la passeggiata riflessa di un cammino è un cammino.

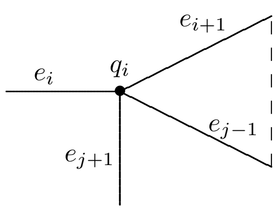
D26:d.07 Prop. Ogni (p,q)-passeggiata si può ridurre ad un (p,q)-percorso.

Dim.: La riduzione si effettua cercando sulla sequenza dei lati le loro ripetizioni ed eliminandole una alla volta. Si opera per fasi successive relative ai successivi lati della sequenza. Per ogni nuovo lato e_i si cerca una sua eventuale ripetizione (o a partire dal lato successivo oppure, meglio, a partire dal lato finale). Se e_i non si ripete si passa al successivo e_{i+1}.
Se si trova $e_i = e_j$ con $i < j$ si distinguono due casi.
(1) Se i due lati compaiono in un contesto del tipo $\langle ..., e_{i-1}, q_{i-1}, e_i, q_i, ..., q_{i-1}, e_i, q_i, e_{j+1}, ... \rangle$, questa passeggiata si riduce alla $\langle ..., e_{i-1}, q_{i-1}, e_i, q_i, e_{j+1}, ... \rangle$.
(2) Se i due lati compaiono invece nella sequenza $\langle ..., e_{i-1}, q_{i-1}, e_i, q_i, ..., q_i, e_i, q_{i-1}, e_{j+1}, ... \rangle$, si riduce la passeggiata alla $\langle ..., e_{i-1}, q_{i-1}, e_{j+1}, ... \rangle$ ▮



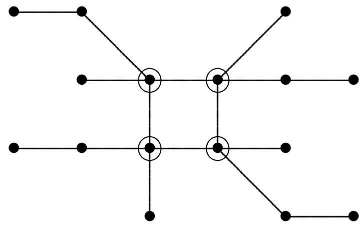


D26:d.08 Prop. Ogni (p,q)-percorso si può ridurre ad un (p,q)-cammino.
La riduzione si effettua cercando sulla sequenza dei nodi le loro ripetizioni ed eliminandole una alla volta.
Se si trova $q_i = q_j$ con $i < j$ ed i due nodi compaiono in un contesto del tipo
$\langle ..., e_{i-1}, q_{i-1}, e_i, q_i, ..., q_i, e_{j+1}, ... \rangle$ si riduce la passeggiata alla $\langle ..., e_i, q_i, e_{j+1}, ... \rangle$ ▮



Ora possiamo asserire che due nodi sono connessi sse sono le estremità di un cammino.

D26:d.09 Un cammino chiuso prende il nome di **ciclo puntato** o **circuito**. Si dicono **nodi circuitali** di un grafo i nodi che appartengono ad almeno uno dei suoi circuiti; i rimananenti si dicono **nodi acircuitali** Un grafo in cui questi due tipi di nodi si differenziano nettamente è il seguente:



In genere un particolare ciclo puntato come $\langle p_0, e_1, p_1, ..., p_{n-1}, e_n, p_0\rangle$ interessa meno della classe di tutti i cicli puntati ottenuti dal precedente permutando circolarmente i suoi lati

$$\langle p_i, e_{i+1}, p_{i+1}, ..., p_{i-1}, e_i, p_i\rangle \qquad \text{per} \;\; i = 1, ..., n.$$

Una tale classe di percorsi chiusi isomorfi si dice **ciclo** o **poligono**. Tutti i cicli della stessa lunghezza costituiscono grafi isomorfi. In astratto si parla al singolare di ciclo di lunghezza n o di n-**agono** o di n-**ciclo** e lo si indica con $\boldsymbol{Cycl}_n$. In particolare si parla di **triangolo**, **quadrangolo**, ... Si noti che $\boldsymbol{Cycl}_3 = \mathcal{K}_3$.

D26:d.10 Mentre ogni passeggiata su un grafo non privo di spigoli può essere estesa illimitatamente con nodi che precedono l'iniziale e nodi che seguono il finale, questo non è possibile per i percorsi in quanto sono disponibili solo un numero finito di lati e tanto meno per i cammini.

Si possono avere percorsi illimitati solo per grafi aventi un nodo su due circuiti che hanno insiemi di lati disgiunti.
Un cammino non può mai essere esteso ad una lunghezza superiore all'ordine del grafo.

Accade invece che riducendo una passeggiata (risp. un percorso, un cammino) si ottiene un'altra passeggiata (risp. percorso, cammino).
Si dice **cammino massimale** un cammino che non può essere esteso.
I cammini di questo tipo sono quelli più rilevanti per la determinazione delle proprietà di connessione.

(1) Prop.: In un grafo connesso due cammini aventi lunghezza massima hanno almeno un nodo in comune.
Dim.: Se due cammini γ_1 γ_2 non avessero punti in comune, si possono individuare due suoi punti che possono essere collegati da un cammino ρ che non tocca altri punti dei due dati. Si considera allora il sottografo ottenuto per riduzione ai nodi che giacciono su γ_1, γ_2 e ρ e su di esso si trova un cammino con lunghezza superiore a $|\gamma_1| = |\gamma_2|$ ▮

D26:d.11 Si definisce **distanza** tra due nodi p e q di un grafo connesso la più piccola delle lunghezze dei cammini che li collegano. Essa si indica $dist_G(p, q)$ o semplicemente $dist(p, q)$. I cammini più corti fra quelli che collegano p e q si dicono **geodetiche** tra p e q.
Si dice **diametro** di un grafo connesso la massima tra le distanze tra i suoi nodi. Esso si indica $diam(G)$.
Su $\mathcal{K}_v$ la distanza di due nodi qualsiasi è 1. Su $\boldsymbol{Cycl}_n$ le distanze vanno da 1 a $\lfloor n/2\rfloor$, il valore del suo diametro.
In generale l'insieme delle distanze tra i nodi di un grafo connesso è l'intervallo $(diam(G)]$.

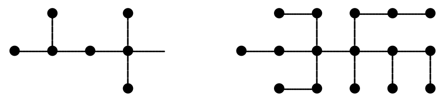
Per certe considerazioni può essere conveniente estendere la nozione di distanza a coppie di nodi di grafi non connessi; se due nodi appartengono alla stessa componente connessa vale la definizione data per i grafi connessi; a due nodi appartenenti a diverse componenti connessi si assegna come distanza $+\infty$.

D26:d.12 Un grafo si dice **grafo aciclico** o **foresta** sse non possiede passeggiate chiuse, ovvero sse non possiede percorsi chiusi, ovvero sse non possiede cicli.
Una foresta deve essere priva di cappi e quindi è un grafo semplice.

Si dice **albero** un grafo connesso e aciclico.

Le foreste si possono classificare primariamente con il numero delle loro componenti connesse; ciascuna di queste è un albero. Gli alberi sono quindi particolari foreste, quelle costituite da una sola componente connessa.

I cammini intesi come grafi autonomi e le stelle sono alberi molto particolari e facilmente descrivibili. Anche il grafo nodo si può considerare un albero. Vi sono invece alberi più complessi non facilmente descrivibili; alcuni esempi di questi alberi sono:

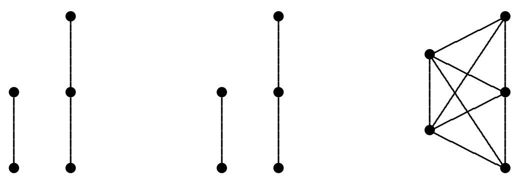


D26:d.13 Consideriamo un grafo G dotato di cicli; si dice **cintura** o **giro di vita** di G la minore delle lunghezze dei suoi cicli, cappi esclusi; essa si indica $girth(G)$. La **circonferenza** di un grafo G è, invece, la maggiore delle lunghezze dei suoi cicli; essa si indica $crcnf(G)$. Evidentemente si tratta di due invarianti numerici dei grafi.

D26:d.14 Eserc. Dimostrare i seguenti risultati. $girth(Wl_m) = 3$, $crcnf(Wl_m) = m$. $girth(\mathcal{S}c_{2m}) = 4$, $crcnf(\mathcal{S}cl_m) = 2m$. Per $n \geq 3$, $girth(\mathcal{K}_n) = 3$, $crcnf(\mathcal{K}_n) = n$. $girth(\boldsymbol{Cycl}_n) = crcnf(\boldsymbol{Cycl}_n) = n$. $girth(\mathcal{Q}_3) = 4$, $crcnf(\mathcal{Q}_3) = 8$. $girth(\mathcal{Q}_d) = 4$, $crcnf(\mathcal{Q}_d) = 2^d$.

D26:d.15 Supponiamo ora che G_1 e G_2 abbiano gli insiemi dei nodi disgiunti. Si dice **unione disgiunta** di G_1 e G_2, $G_1 \dot\cup G_2 = \langle V_1 \dot\cup V_2, E_1 \dot\cup E_2 \rangle$.

L'operazione di unione disgiunta si può estendere a più di due grafi. La raffigurazione di un grafo risultato di una unione disgiunta si ottiene semplicemente accostando le raffigurazioni dei grafi sottoposti all'unione.



G_1 G_2 $\qquad$ $G_1 \cup G_2$ $\qquad$ $G_1 + G_2$

Chiaramente ogni grafo è unione delle sue componenti connesse. Inoltre l'insieme delle componenti connesse di un grafo ottenuto mediante unione dei grafi G_1, ..., G_c è l'unione degli insiemi delle componenti connesse dei grafi G_1, ..., G_c.

Chiaramente le componenti connesse delle foreste sono alberi e ogni foresta si ottiene come unione di alberi.

D26:d.16 Si dice **nodo di taglio** di un grafo G un nodo la cui rimozione aumenta il numero delle componenti connesse di G; è detto invece **ponte** o **istmo** uno lato la cui rimozione aumenta il numero delle componenti connesse di G.
Evidentemente le estremità di un ponte sono due nodi di taglio.
Esempi . . . . .

D26:e. Grafi bipartiti

D26:e.01 Un grafo $G = \langle V, E\rangle$ è detto **grafo bipartito** sse il suo insieme di nodi V può essere diviso in due sottoinsiemi disgiunti V_1 e V_2 in modo che ogni lato di G colleghi un nodo di V_1 con uno di V_2.
La classe dei grafi bipartiti si indica **GrfBp**.

Alberi e foreste sono particolari grafi bipartiti.
Le componenti connesse di un grafo bipartito non connesso sono grafi bipartiti connessi; viceversa l'unione di grafi bipartiti è ancora un grafo bipartito. Quindi anche tra i grafi bipartiti interessano prevalentemente quelli connessi.
D26:e.02 Prop. Un grafo è bipartito sse privo di cicli dispari.
Dim.: Sia G un grafo bipartito: ogni suo ciclo deve avere la forma $\langle q_1, p_1, q_2, p_2, ..., q_s, p_s, q_1\rangle$ con q_1, q_2, ..., q_s in uno dei due sottoinsiemi di nodi e p_1, p_2, ..., p_s nell'altro. Quindi ogni suo ciclo ha lunghezza pari (ed in particolare non può essere un cappio).
Sia ora G un grafo i cui cicli abbiano tutti lunghezza pari. Supponiamo che esso sia connesso e privo di nodi pendenti, cioè che abbia solo nodi circuitali. Preso un ciclo qualsiasi $\langle q_1, p_1, q_2, p_2, ..., q_s, p_s, q_1\rangle$, assegnamo q_1, q_2, ...,q_s ad un primo sottoinsieme di nodi V_1 e poniamo p_1, p_2, ...,p_s nel secondo.
Procediamo quindi ad ampliare V_1 e V_2 considerando, uno alla volta, altri cicli che contengono nodi già assegnati ad uno di questi insiemi.

D26:e.03 Introduciamo una notazione che ci sarà spesso utile per individuare insiemi di lati: se A e B sono due insiemi poniamo

$$A \times_s B := \{\langle a, b\rangle \in A \times B \P\ a \neq b | \{a, b\}\}$$

Osserviamo che $A \times_s B = B \times_s A$.
Si dice **grafo bipartito completo** con m ed n nodi un grafo della forma $\langle V_1 \dot\cup V_2, V_1 \times_s V_2\rangle$ con $V_1 \in \mathsf{Set}_m$ e $V_2 \in \mathsf{Set}_n$, dove Set_n indica la collezione degli insiemi di n elementi.
In astratto esso si indica con $\mathcal{K}_{m,n}$.
Osserviamo che i grafi $\mathcal{K}_{1,n}$ sono le stelle.
La seguente figura mostra due semplici esempi di grafi bipartiti completi: $\mathcal{K}_{3,3}$ e $\mathcal{K}_{2,4}$.

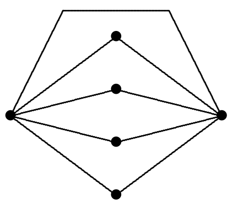
Evidentemente $\mathcal{K}_{u,v} \cong \mathcal{K}_{v,u}$.
Le stelle $\mathcal{K}_{1,v}$ non presentano alcun ciclo.
$\mathcal{K}_{2,2}$ presenta invece un ciclo, anzi è $\mathcal{K}_{2,2} \cong \boldsymbol{Cycl}_4$.
$\mathcal{K}_{2,3}$ presenta tre cicli del tipo $\boldsymbol{Cycl}_4$, mentre $\mathcal{K}_{3,3}$ ne presenta $\binom{3}{2}\binom{3}{2} = 9$ del tipo $\boldsymbol{Cycl}_4$ ed 1 di lunghezza 6.
In generale per $u \leq v$ $\mathcal{K}_{u,v}$ presenta $\binom{u}{k}\binom{v}{k}$ cicli del tipo $\boldsymbol{Cycl}_{2k}$ per $k = 2, ..., u$.

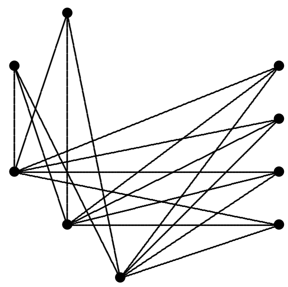
D26:e.04 Vediamo ora una generalizzazione dei grafi bipartiti. Consideriamo $k = 2, 3, ...$
Si dice **grafo k-partito** ogni grafo $G = \langle Q, E\rangle$ t.c. Q si può ripartire in k insiemi disgiunti Q_1, Q_2, ..., Q_k ed ogni lato $\{p, q\}$ presenta la prima estremità in certo Q_i e la seconda in un $Q_j \neq Q_i$.

Si dice **grafo k-partito completo** sui k insiemi disgiunti V_1, V_2, ..., V_k il grafo

$$\mathcal{K}_{V_1,\ldots,V_k} = \big\langle V_1 \dot\cup V_2 \dot\cup \ldots \dot\cup V_k \ ,\ \ \dot\cup_{1\le i<j\le k} V_i \times_s V_j \big\rangle .$$

Le classi di isomorfismo di questi grafi sono caratterizzate solo dal multinsieme delle cardinalità degli insiemi V_i. Ad es. $\mathcal{K}_{1,1,4}$ e $\mathcal{K}_{2,3,4}$ sono dati da





D26:f. Isomorfismo e simmetria per grafi non-orientati

D26:f.01 I grafi (non-orientati) sono le strutture per le quali si possono introdurre nel modo più semplice nozioni di grande portata come quelle di isomorfismo, di invarianti e di gruppo di simmetria. Cominciamo col riprendere la prima di queste.

Consideriamo dunque due grafi $G :=: \langle Q, E\rangle$ ed $H :=: \langle P, F\rangle$. Essi si dicono **isomorfi** sse si trova una corrispondenza biunivoca β, tra i due insiemi di nodi Q e P che preserva l'adiacenza fra nodi, cioè induce una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi di spigoli E ed F. La suddetta biiezione $\beta \in \{V \lhd\!\!\!\longleftrightarrow\!\!\!\rhd W\}$ è chiamata **isomorfismo** tra G ed H.

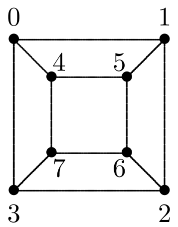
Per indicare che G ed H sono grafi isomorfi si scrive specificamente $G \lhd\!\!\!\longleftrightarrow\!\!\!\rhd_{Grf} H$ o più semplicemente $G \cong H$; per indicare che β è un isomorfismo tra G ed H si scrive $\beta \in \{G \lhd\!\!\!\longleftrightarrow\!\!\!\rhd_{Grf} H\}$.

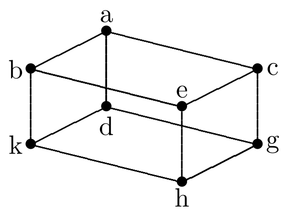
Questa scrittura equivale alla seguente:

$$\beta \in \{G \lhd\!\!\!\longleftrightarrow\!\!\!\rhd H\} \ \text{ t.c. } \ F = \big\{\{q,r\} \in E :|\ \{\beta(q), \beta(r)\}\big\}.$$

Un **invariante** di un grafo G è una entità (valore numerico, insieme, funzione, relazione, proprietà, ...) associata a G che ha lo stesso valore per ogni grafo isomorfo al detto G.

D26:f.02 Consideriamo ad es. i grafi:



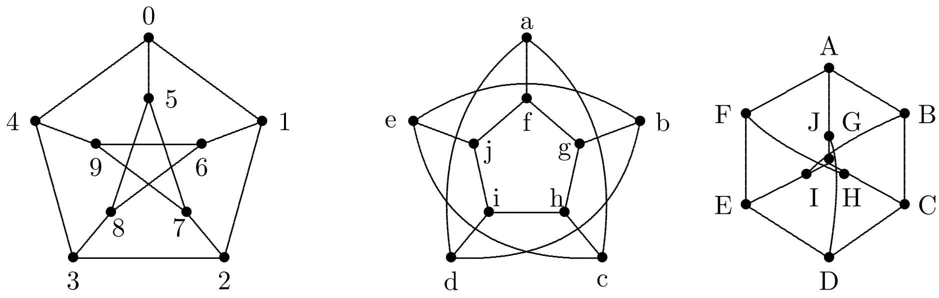


La corrispondenza biunivoca tra i due insiemi di nodi:

$$\left\downarrow\begin{array}{|cccccccc|} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & c & e & b & d & g & h & f \end{array}\right\downarrow$$

li rende grafi isomorfi.

Tra il primo e il secondo dei seguenti grafi:



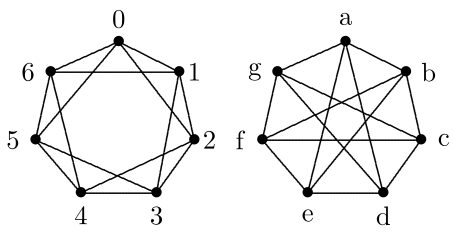
si ha l'isomorfismo:

$$\left\downarrow\begin{array}{|cccccccccc|} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ a & c & e & b & d & f & h & j & g & i \end{array}\right\downarrow$$

Fra il primo ed il terzo si ha invece l'isomorfismo:

$$\left\downarrow\begin{array}{|cccccccccc|} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ A & B & C & D & G & F & I & H & E & J \end{array}\right\downarrow$$

D26:f.03 Non sono invece isomorfi i grafi:



È quindi evidente che condizione necessaria ma non sufficiente per l'isomorfismo di due grafi è il fatto che essi abbiano lo stesso numero di nodi e di lati.

D26:f.04 Il problema di stabilire se due grafi G e H (aventi lo stesso ordine n e lo stesso grado) sono isomorfi o meno è un problema di grande importanza, in quanto molte situazioni di interesse matematico, informatico o applicativo sono schematizzate da strutture grafiche ed i grafi sono le più semplici tra tali strutture.

Senza una analisi preliminare delle caratteristiche dei due grafi, si dovrebbe cercare un isomorfismo entro le $n!$ corrispondenze biunivoche fra i due insiemi di nodi; per n elevato si tratterebbe di un lavoro enormemente oneroso.
Una tale ricerca si può sveltire notevolmente osservando che, in un isomorfismo, si devono associare nodi aventi le stesse caratteristiche puramente relazionali, cioè le stesse proprietà concernenti i collegamenti con gli altri nodi.
Queste caratteristiche, più precisamente, vengono dette **invarianti per isomorfismo**.
Come si è già osservato, sono invarianti l'ordine ed il grado del grafo. È anche evidente che due nodi corrispondenti per isomorfismo devono avere lo stesso grado. Altri invarianti sono quindi i numeri dei nodi aventi valenza pari a 0,1,2,...; è dunque invariante il multigrado.
Quindi un'altra condizione necessaria per l'isomorfismo di G ed H è la coincidenza dei relativi multigradi. Osserviamo che l'uguaglianza $Mdeg(G) = Mdeg(H)$ implica le coincidenze di grado ed ordine dei due grafi.

Se si deve stabilire l'isomorfismo di due grafi aventi un multigrado del tipo $d^3e^4f^5$, naturalmente si dovrà cercare una biiezione nella quale ciascuno dei 3 nodi di grado d di G sia associato ad un nodo d-valente di H, ciascuno dei 4 di grado e lo sia ad un pari grado di H e ciascuno dei 5 nodi di grado f sia in corrispondenza con uno dei 5 rimanenti di H. Quindi delle $(3 + 4 + 5)! = 12! = 479\,001\,600$ biiezioni inizialmente possibili è sufficiente prenderne in considerazione $3!4!5! = 17280$.

D26:f.04 Altre caratteristiche essenziali dei grafi sono i cammini (ed in particolare quelli chiusi) delle diverse lunghezze (in particolare i cammini massimali): in un isomorfismo ad ogni cammino (chiuso) deve corrispondere un percorso (chiuso) della stessa lunghezza. Sono quindi invarianti proprietà come la aciclicità o meno, il numero delle componenti connesse (ed in partic. la connessione), il multinsieme degli ordini delle componenti connesse, il multinsieme delle lunghezze dei cicli, il multinsieme delle lunghezze dei cammini massimali.
Osserviamo che, qualora si tenga conto delle caratteristiche dei cammini, non serve tener conto di quelle di percorsi e passeggiate, in quanto ciascuna di queste configurazioni si riduce a composizione di cammini.
Nella ricerca di un effettivo isomorfismo può essere molto utile ridurre le corrispondenze da esaminare chiedendo che a nodi circuitali corrispondano nodi circuitali, a nodi su un cammino massimale di data lunghezza corrispondano nodi su cammini massimali analoghi etc. .

D26:f.05 Sarebbe molto vantaggioso individuare i cosiddetti **insiemi completi di invarianti**, sistemi di invarianti che permettono di individuare univocamente ogni classe di equivalenza di grafi. In tal caso si potrebbe affrontare il problema dell'isomorfismo tra G ed H procedendo a controllare la coincidenza di successivi invarianti, decidendo il non isomorfismo qualora un invariante non abbia lo stesso valore per G ed H e giungendo a decidere l'isomorfismo qualora tutti gli invarianti superino i tests di coincidenza.
In effetti per una specie di strutture variegata come i grafi si conoscono solo invarianti la cui diversità permette di stabilire che due grafi sono non isomorfi, i quali cioè portano a condizioni necessarie ma non sufficienti all'isomorfismo.

D26:f.06 I grafi, come le strutture discrete di ogni altra specie, possono essere studiati, essenzialmente, in due modi.
Un grafo può essere considerato come un oggetto matematico ben specifico, costruito a partire da altri oggetti ben determinati. In tale caso la stessa costruzione del grafo può essere piuttosto impegnativa, o in quanto richiede molti nodi e molti lati, o in quanto la stessa individuazione dei nodi richiede uno sforzo di astrazione non trascurabile. Operando in questo modo, può essere necessario individuare i

nodi ed i lati del grafo con scritture ben precise ed elaborate; inoltre lo studio del grafo può condurre a configurazioni la cui reinterpretazione può risultare onerosa.

Un secondo modo di studiare un grafo G, viceversa, prescinde dalla identità dei suoi nodi e riguarda esclusivamente le sue proprietà derivanti dai collegamenti esistenti fra i suoi nodi. Questo studio (più astratto) porta a risultati che valgono anche per ogni altro grafo H che si può considerare ottenuto da G solo per la modifica degli identificatori dei suoi nodi: i nodi di H si possono porre in corrispondenza biunivoca con quelli di G in modo che $Edg(H)$, l'insieme dei lati di H, sia posto in corrispondenza biunivoca con $Edg(G)$. Con questo tipo di studi si possono ottenere notevoli economie di pensiero.

D26:f.07 Le nozioni di isomorfismo e di invarianti sono nozioni matematiche assai generali e molto importanti.
In effetti la nozione di isomorfismo si può introdurre per tutte le specie di strutture, a cominciare dai digrafi e dai vari arricchimenti e specializzazioni di grafi e digrafi.
Per tutte le specie di strutture si può quindi parlare di invarianti per isomorfismo (quantità invarianti, multinsiemi invarianti, polinomi invarianti, proprietà invarianti, ...).
Tra le peculiarità di una specifica struttura S di una specie $\mathbf{S}$ è importante saper distinguere tra quelle invarianti per isomorfismo e le rimanenti. Queste ultime dipendono da qualche particolare della sua definizione, ovvero della costruzione che ha condotto ad S, e quindi non sono trasferibili alle altre strutture della specie $\mathbf{S}$.
Gli invarianti per isomorfismo si possono considerare caratteristiche “essenziali”, cioè elementi sui quali è opportuno concentrare gran parte dello studio delle strutture. Infatti il chiarimento di fatti riguardanti queste caratteristiche per una struttura particolare S (un grafo non-orientato, un digrafo,...) costituisce un chiarimento per tutte le strutture della specie $\mathbf{S}$ isomorfe ad S stessa. Quindi si tratta di una conoscenza utilizzabile non episodicamente, ma per una estesa gamma di situazioni.
La individuazione di un isomorfismo e di un invariante, quindi, possono portare a notevoli economie di pensiero.

Quando un grafo viene studiato senza considerarlo costruito a partire da oggetti particolari, interessano soprattutto le sue proprietà invarianti. Quindi interessano maggiormente le classi di isomorfismo dei singoli grafi. Di solito è possibile confondere una classe di isomorfismo con un suo ben determinato rappresentante, ed anche con una sua raffigurazione.

D26:g. Costruzioni sui grafi non-orientati

D26:g.01 Abbiamo già visto l'unione disgiunta di due o più grafi . Analizziamo ora altre importanti composizioni, relazioni e trasformazioni riguardanti grafi.

Consideriamo due grafi $G_i = \langle V_i, E_i \rangle$ con $i = 1, 2$.
Si dice **unione** di G_1 e G_2, $G_1 \cup G_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle$.
Si dice **intersezione** di G_1 e G_2, $G_1 \cap G_2 = \langle V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2 \rangle$.

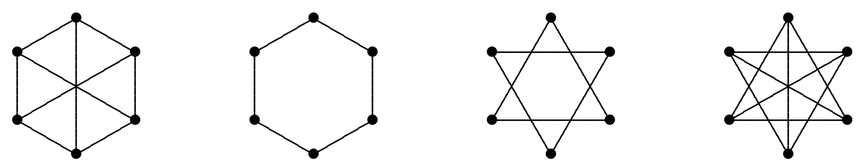
Le operazioni di intersezione ed unione si estendono immediatamente a più di due grafi.

D26:g.02 Spesso interessano sottografi con particolari proprietà: vedremo a questo proposito i sottopercorsi, i sottocammini, i cicli, i sottografi connessi, i sottoalberi e i sottoblocchi.

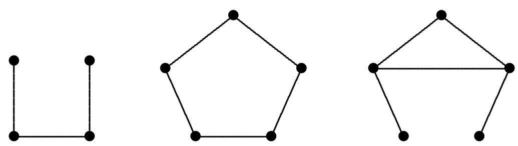
Tra i sottografi di un certo tipo talora interessa scegliere quelli che presentano un numero minimo oppure un numero massimo di nodi o lati: questi vengono qualificati risp. con gli aggettivi *minimale* e *massimale*.

D26:g.03 Si chiama **complementare** di un grafo semplice $G = \langle V, E\rangle$ il grafo $G^{cg} := \langle V, V^{\mathfrak{P}_2} \setminus E\rangle$.

Spesso il grafo complementare di un grafo denotato G si denota $\overline{G}$. Chiaramente la complementazione è un'involuzione tra grafi semplici. Esempi di coppie di grafi complementari:



Un grafo si dice **autocomplementare** sse è isomorfo al proprio complementare. Esempi di grafi autocomplementari sono:



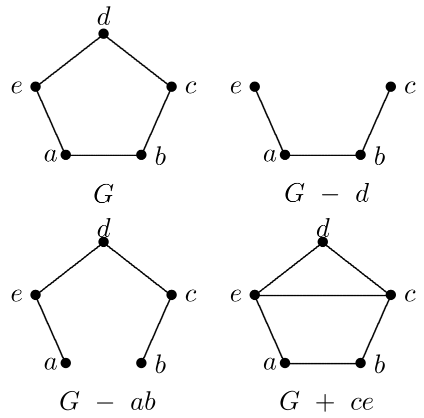
Il grafo complementare del grafo completo di ordine v, $\overline{\mathcal{K}}_v$, è il grafo completamente sconnesso con v nodi, ovvero il grafo 0-regolare di ordine v.

D26:g.04 Se $U \subset V$ si dice **restrizione** del grafo G relativa al sottoinsieme di nodi U, il sottografo di G, denotato $G_{|U}$, ottenuto eliminando tutti i nodi in $V \setminus U$ e tutti i lati adiacenti ad almeno uno di essi. Chiaramente si può scrivere $G_{|U} = \langle U, E \cap (U \times_s U)\rangle$.

La **rimozione di un lato** e da un grafo G è il sottografo ricoprente di G, indicato con $G - e$, costituito da tutti i lati di G ad eccezione di e: $G - e = \langle Q, E \setminus e\rangle$.

La **rimozione di un nodo** p da un grafo semplice $G = \langle V, E\rangle$ è il sottografo di G, indicato con $G - p$, costituito da tutti i nodi di G ad eccezione di p, e da tutti i lati non incidenti con p. Per esso si trova $G - p = \langle V \setminus p, E \setminus (p \times_s V)\rangle$.

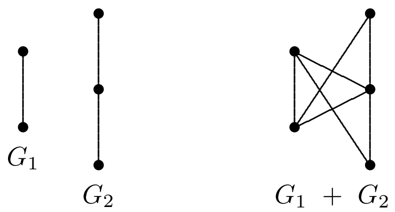
$G_{|U}$ si ottiene attraverso le rimozioni dei nodi in $V \setminus U$, rimozioni attuabili secondo un ordine arbitrario.



Rimuovendo da un grafo semplice un nodo ed uno spigolo si ottiene un altro grafo semplice.
Ogni restrizione di un grafo semplice è semplice.
Con la rimozione da $\mathcal{K}_v$ di h nodi, con $0 < h < v$, si ottiene $\mathcal{K}_{v-h}$. Rimuovendo da $\mathcal{P}ath_n$ una estremità si ottiene $\mathcal{P}ath_{n-1}$; rimuovendo un nodo interno si ha l'unione disgiunta di $\mathcal{P}ath_h$ e di $\mathcal{P}ath_{v-h-1}$ per $h = 1, ..., \lfloor V/2 \rfloor$.
La rimozione di un nodo di $\boldsymbol{Cycl}_n$ porta a $\mathcal{P}ath_{n-1}$.

Chiaramente se G è connesso ed e è un suo lato accade che $G - e$ è connesso sse e fa parte di un suo ciclo.

D26:g.05 Consideriamo ancora due grafi $G_i = \langle V_i, E_i \rangle$ con $i = 1, 2$.
Si dice **somma [completa]** di G_1 e G_2: $G_1 + G_2 = \langle\ V_1 \dot\cup V_2\ ,\ E_1\ \dot\cup E_2\ \dot\cup V_1 \times_s V_2\ \rangle$.

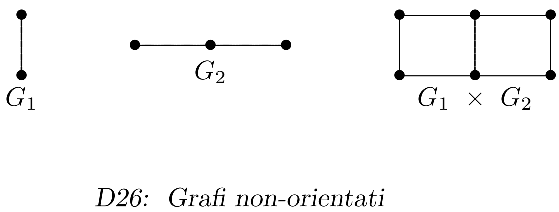


Si vede facilmente che $(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2) \cong \mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3 \cong \mathcal{K}_5$ e, più in generale, che $\mathcal{K}_v + \mathcal{K}_w \cong \mathcal{K}_{v+w}$.
Si trova anche che $\overline{\mathcal{K}}_v + \overline{\mathcal{K}}_w \cong \mathcal{K}_{v,w}$.

Si trova inoltre per la ruota di ordine $v + 1$: $Wl_v \cong \mathcal{K}_1 + \boldsymbol{Cycl}_v$.

D26:g.06 Si dice **prodotto cartesiano** di G_1 e G_2

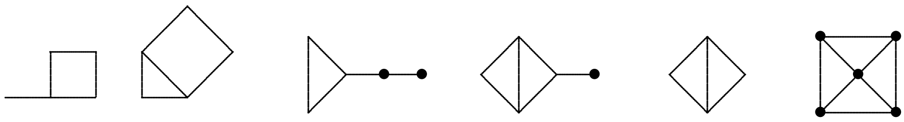
$G_1 \times G_2 := \langle V_1 \times V_2, E' \dot\cup E'' \rangle$, dove
$E' := \big\{p' \in V_1 \wedge p_2q_2 \in E_2 :|\ \{p'p_2, p'q_2\}\big\}$ ed $E'' := \big\{p'' \in V_2 \wedge p_1q_1 \in E_1 :|\ \{p_1p'', q_1p''\}\big\}$.



D26:g.07 Per **composizione** di G_1 e G_2 si intende $G_1[G_2] := \langle V_1 \times V_2, E' \dot{\cup} E'' \rangle$, dove $E' := \big\{\{p' \in V_1 \wedge p_2q_2 \in E_2 :| \; p'p_2, p'q_2\}\big\}$ ed $E'' := \big\{p_1q_1 \in E_1 \wedge p_2, q_2 \in V_2 :| \; \{p_1p_2, q_1q_2\}\big\}$.

Si constata facilmente che tutte queste composizioni se applicate a grafi semplici conducono a grafi semplici.

D26:g.08 Si dice **aggiunto** di un grafo semplice $G = \langle Q, E \rangle$, e si denota $Adjg(G)$, il grafo i cui nodi sono i lati di G ed i cui lati sono le coppie di lati di G incidenti, cioè aventi un nodo comune. Alcune coppie $\langle$grafo, grafo aggiunto$\rangle$ sono le seguenti:



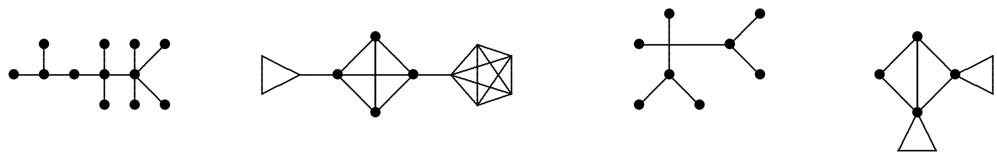
Inoltre si vede facilmente che $Adjg(\mathcal{K}_{1,v}) \cong \mathcal{K}_v$.
Si osservi che l'aggiunto di G è un caso particolare di grafo intersezione, quello relativo alla collezione dei lati di G: $Adjg(G) = Intsgrf(Edg(G))$.
Ricordiamo anche che invece di grafo aggiunto si usano talora i termini **grafo derivato** e **grafo dei lati** (*line graph*).

D26:g.09 Il passaggio all'aggiunto si può considerare una endofunzione entro l'insieme dei grafi semplici astratti. Di questa endofunzione si possono considerare anche le iterate $Adjg^n(G) := Adjg(Adjg^{n-1}(G))$ per $n = 0, 1, 2, ...$ con $Adjg^0(G) = G$ ed $Adjg^1(G) = Adjg(G)$.
Un punto fisso di questa endofunzione è ogni grafo isomorfo al proprio aggiunto, grafo chiamato **autoaggiunto**. Tutti i cicli sono grafi autoaggiunti.

Il passaggio all'aggiunto non è una biiezione tra grafi: $\boldsymbol{Cycl}_3$ e la triade $\mathcal{K}_{1,3}$ sono due grafi non isomorfi aventi lo stesso autoaggiunto, $\boldsymbol{Cycl}_3$.

Il passaggio all'aggiunto non è neppure un'applicazione suriettiva, cioè vi sono grafi che non sono gli aggiunti di altri grafi. La triade è il più semplice grafo che non è aggiunto di alcun altro grafo.

Dalla definizione si ricava facilmente che ad una sequenza di lati di G costituenti un cammino non chiuso di lunghezza s, corrisponde su $Adjg(G)$ una sequenza di nodi costituenti un cammino non chiuso di lunghezza $s-1$: $Adjg(\mathcal{P}_s) = \mathcal{P}_{s-1}$.
Di conseguenza: $Adjg(G)$ è connesso sse G è connesso; il passaggio all'aggiunto mantiene il numero delle componenti connesse; ogni ponte di G che non sia lato pendente diventa in $Adjg(G)$ un punto di taglio.
Accade anche che ad ogni ciclo su G corrisponde un ciclo della stessa lunghezza su $Adjg(G)$. Il passaggio all'aggiunto, però, non mantiene la aciclicità. Degli alberi solo i grafi cammino sono trasformati in grafi aciclici. Ad ogni nodo di grado $d \geq 3$ di un albero corrisponde una cricca $\mathcal{K}_d$ sul grafo aggiunto.
Due esempi di aggiunti di alberi sono:



D26:g.10 **(1) Eserc.** Trovare i grafi aggiunti di scale e prismi.

(2) Eserc. Trovare i grafi aggiunti di griglie rettangolari e cilindriche.

(3) Eserc. Dimostrare che le griglie toroidali sono grafi autoaggiunti.

(4) Eserc. Trovare i grafi aggiunti delle stelle e dei grafi completi.

(5) Eserc. Dimostrare che $\mathcal{K}_{1,v}$ è il grafo aggiunto di $\lfloor v/2 \rfloor$ alberi.

D26:h. Alberi

D26:h.01 Gli alberi sono grafi che rivestono grande interesse: essi godono di molte proprietà e questo, come vedremo, rende possibile definirli in una grande varietà di modi che non è difficile dimostrare equivalenti. Questa situazione privilegiata è collegata naturalmente al fatto che posseggono numerose applicazioni.

Cammini e stelle sono alberi particolari facilmente classificabili, in quanto individuabili, a meno di isomorfismi, con un solo parametro numerico. Alberi più complessi presentano nodi con maggiore varietà di diramazioni.
La distinzione più importante per i nodi di un albero è quella che separa i **nodi pendenti**, nodi di valenza 1, dai rimanenti.
Tra i nodi non pendenti vanno distinti quelli di valenza 2 da quelli di valenza superiore; questi ultimi sono detti **nodi di diramazione** o **snodi**.

Risulta interessante caratterizzare gli alberi con il multinsieme dei gradi dei suoi nodi *Mdeg*. Come si è visto $Mdeg(\mathcal{P}_v) = 1^2 2^{v-2}$ e $Mdeg(Rg_v) = 1^v v$. ...

D26:h.02 Gli alberi sono facilmente componibili e decomponibili. Dato un albero T, si può aggiungere ad un suo nodo qualsiasi un nuovo lato ottenendo un nuovo albero. Questo presenta un nodo in più ed un lato in più di T.

Quindi ogni albero si può ottenere dal grafo nodo per successive aggiunte di lati incidenti in un solo nodo dell'albero precedente.
Ogni albero T diverso dal grafo nodo, quindi, si può porre in corrispondenza con gli alberi ottenuti da esso eliminando un nodo ed un lato pendente (alberi immediatamente più poveri di T) e con gli alberi ottenuti arricchendo T con un nuovo lato e un nuovo nodo pendenti (alberi immediatamente più ricchi di T).
Quindi risulta naturale considerare gli alberi ripartiti nelle classi relative ai successivi ordini.
Da queste considerazioni risulta anche, per induzione, che ogni albero con v nodi possiede $v-1$ lati.

Dati due alberi qualsiasi, fondendo due nodi arbitrariamente scelti l'uno sul primo albero, l'altro sul secondo, si ottiene un nuovo albero. L'ordine di questo è la somma dei due ordini diminuita di 1 (e il grado la somma dei due gradi).
Anche congiungendo due nodi scelti come sopra attraverso un nuovo lato si ottiene ancora un albero; l'ordine di questo è la somma degli ordini dei due alberi collegati.

D26:h.03 I cammini massimali di un albero sono in biiezione con le coppie di suoi nodi pendenti.
Diametro di un albero è la massima tra le lunghezze dei suoi cammini massimali.

D26:h.04 Le proprietà fondamentali degli alberi sono riassunte nel teorema che segue.
Teorema Sia G un grafo semplice con v nodi ed e lati; le seguenti affermazioni sono equivalenti:
(a) G è un albero, cioè è connesso ed aciclico.
(b) Due nodi arbitrari di G sono collegati da un unico cammino.
(c) G è connesso e $v = e + 1$.
(d) G è aciclico e $v = e + 1$.
(e) G è aciclico e se due qualsiasi nodi non adiacenti p e q di G sono collegati dal nuovo lato pq, allora $G + pq$ ha esattamente un ciclo.
(f) G è connesso, se $v \geq 3$ non è isomorfo a $\mathcal{K}_v$ e scelti arbitrariamente due nodi p e q non adiacenti di G, allora il grafo ottenuto collegando tali nodi, $G + pq$, ha esattamente un ciclo.
(g) G non è isomorfo a $\mathcal{K}_3 \dot\cup \mathcal{K}_1$ nè a $\mathcal{K}_3 \dot\cup \mathcal{K}_2$, $v = e + 1$ e, scelti arbitrariamente due nodi p e q non adiacenti di G, allora $G + pq$ ha esattamente un ciclo.
- È connesso minimale: togliendogli uno spigolo qualsiasi viene sconnesso.
- È aciclico e collegando con uno spigolo due suoi nodi qualsiasi diventa ciclico.

D26:h.05 Talora, dato un grafo non-orientato G, interessa individuare qualche suo sottografo aciclico, cioè qualche sua **sottoforesta**.
Eliminando da una foresta qualche spigolo ed i nodi che incidono solo in spigoli eliminati, si ottiene ancora una foresta. Di conseguenza di un grafo G interessano soprattutto le **sottoforeste massimali**, cioè le sottoforeste il più possibile estese; le restanti sottoforeste, infatti, si ottengono da queste attraverso eliminazioni che si possono scegliere come si vuole.

Nel caso di un grafo connesso G le sottoforeste massimali sono sottoalberi: infatti ogni sottoforesta non connessa di G può essere estesa aggiungendole un percorso che abbassi il numero delle sue componenti connesse, cioè può essere estesa fino a diventare un sottoalbero. Di un grafo connesso, quindi, interessano solo i **sottoalberi massimali**.
Le sottoforeste massimali di un grafo non connesso G sono le unioni dei sottoalberi massimali dei grafi che costituiscono le componenti connesse di G.
Il sottoalbero massimale di un grafo connesso di n nodi tocca tutti i suoi nodi ed ha quindi $n-1$ spigoli.

Si conclude quindi facilmente che, per una foresta $G = \langle Q, E\rangle$ si ha $|Q| = |E| + connx(G)$.

D26:i. Separabilità e blocchi dei grafi

D26:i.01 Prop. Un nodo c di un grafo $G = \langle Q, E\rangle$ è un nodo di taglio sse esistono in Q due nodi diversi v e w t.c. c giace su ciascuno degli (v, w)-cammini.

Un grafo è detto **non-separabile** sse è non banale, connesso e privo di nodi di taglio.
Si dice **grafo blocco** un grafo semplice non-separabile. Il grafo blocco più ridotto è il triangolo $\boldsymbol{Cycl}_3$.
Si dice **sottoblocco** di un grafo G un suo sottografo che sia blocco, cioè un sottografo privo di cappi e non-separabile.
Tra i sottoblocchi di un grafo interessano prevalentemente i massimali, in quanto i rimanenti si ottengono da questi per rimozione di nodi scelti ad arbitrio, pur di rimanere con almeno tre lati.

D26:i.02 Il seguente enunciato raccoglie varie caratterizzazioni della nozione di blocco:

Teorema Sia $G = \langle V, E\rangle$ un grafo semplice, connesso con almeno tre nodi; le seguenti affermazioni sono equivalenti:
(a) G è un blocco.
(b) Due nodi arbitrari di G giacciono su un ciclo comune.
(c) Un nodo ed un lato arbitrari di G giacciono su un ciclo comune.
(d) Due lati arbitrari di G giacciono su un ciclo comune.
(e) Presi due nodi e un lato arbitrari di G, esiste un cammino che collega i nodi e contiene il lato.
(f) Presi tre nodi arbitrari distinti di G, esiste un cammino che collega due di essi e contiene il terzo.
(g) Presi tre nodi arbitrari distinti di G, esiste un cammino che collega due di essi e non contiene il terzo.