1

Capitolo D26
grafi nonorientati

Contenuti delle sezioni

30 pagine

D260.01 Questo capitolo presenta con una certa sistematicità le nozioni introduttive sui grafi nonorientati, le strutture relazionali più semplici all'aspetto che qui chiamiamo strutture della specie grafo.

Dopo una prima introduzione discorsiva delle strutture della specie grafo in generale, vengono introdotti i grafi nonorientati e le loro raffigurazioni, ponendo in rilievo la importanza di queste in quanto in grado di schematizzare un gran numero di situazioni reali tendenzialmente semplici.

Una successiva panoramica di queste entità intende rendere consapevoli dell'ampiezza della loro possibilità di modellizzazione.

Vengono quindi presentate le più evidenti configurazioni che si possono individuare nei grafi nonorientati, le passeggiate e i loro casi particolari.

Tra i grafi-nor si trovano i grafi bipartiti, definiti molto semplicemente, ma in grado di affrontare problemi circoscritti di notevole utilità.

Per riuscire a controllare intere collezioni di strutture di ogni specie risulta necessario avere chiere idee sulle loro simmetrie e sui loro isomorfismi. Questo accade in particolare per i grafi-nor e le caratteristiche delle loro simmetrie possono servire come base per lo studio delle simmetrie dei molteplici arricchimenti di queste fondamentali strutture relazionali.

Vengono successivamente affrontate alcune delle molte composizioni che si possono effettuare sui grafi-nor.

Viene poi introdotta un'altra collezione di grafi particolarmente semplici da definire, gli alberi, anch'essi di grande utilità per l'analisi e il controllo delle strutture grafiche più elaborate.

L'ultimo argomento affrontato in questo capitolo riguarda la possibilità di separare i grafi-nor in sottografi che possano essere analizzati più agevolmente.

D26 a. strutture grafo

D26a.01 Il termine **strutture a grafo** viene qui adottato per raggruppare varie specie di strutture discrete, accomunate dal fatto di essere costituite da oggetti tendenzialmente semplici detti **nodi della struttura a grafo** o **vertici della struttura a grafo** e da collegamenti tra questi nodi.

Tra le strutture grafiche se ne individuano due specie basilari che, risp., chiamiamo **grafi nonorientati** e grafi orientati; i primi sono chiamati anche concisamente **grafi-nor** e in questo capitolo e in alcuni altri semplicemente "grafi"; i secondi sono chiamati anche grafi diretti e **digrafi**.

Si studiano inoltre molte specie di strutture discrete che costituiscono svariati arricchimenti delle precedenti e che sono richiese per modellizzare una miriade di situazioni reali che si vogliono trattare con metodi qunatitativi e algoritmici.

D26a.02 Nei digrafi ogni collegamento, chiamato **arco**, va da un nodo a un altro (che potrebbe anche coincidere con il primo) e di ogni arco si distingue il nodo iniziale dal nodo finale; questo si esprime anche dicendo che gli archi sono dotati di una orientazione.

I collegamenti di un grafo-nor, chiamati **lati**, al contrario, non posseggono orientazione.

Gli archi sono coppie di nodi $\langle p, q\rangle$, i lati sono duetti $\{p, q\}$ o singoletti $\{p\}$ di nodi.

Tipicamente, mediante strutture grafiche, si possono schematizzare sistemi di collegamenti stradali, marittimi, ferroviari, aerei, ... riguardanti insiemi di località.
Se tutti i collegamenti si possono percorrere in entrambi i sensi basta un grafo nonorientato; se si hanno collegamenti a senso unico, come per molte strade di città storiche, va utilizzato un digrafo.

D26a.03 Come si è accennato, in conseguenza di sollecitazioni applicative, vengono introdotte molte strutture grafiche arricchendo delle due basilari.

Per esempio in uno schema di sistema stradale può rendersi necessario caratterizzare i diversi lati (tratti stradali) con parametri numerici che esprimono distanze, tempi di percorrenza, pendenze, larghezze, flussi medi, ...

Si possono inoltre distinguere tra le località (nodi) quelle dotate di parcheggio o di altri servizi e quelle che ne sono prive.

Sono di grande interesse, a cominciare da esigenze interne della matematica, anche strutture grafiche con insiemi numerabili di nodi e di collegamenti che in genere si vogliono individuati da definizioni che consentano di costruirli.
Per queste adottiamo i termini **grafi.N** per i grafi nonorientati e **digrafi.N** per i grafi orientati.

D26a.04 I digrafi coincidono con le relazioni finite e in particolare con le relazioni esplicite, mentre i grafi nonorientati si possono identificare con le relazioni simmetriche.
Invece che di strutture grafiche si può quindi parlare equivalentemente di strutture relazionali discrete; un altro termine utilizzato è configurazioni grafiche.

Le strutture grafiche vengono anche chiamate semplicemente come "grafi", utilizzando questo termine nella sua accezione generica. In determinati contesti il termine viene anche usato in accezioni specifiche per denotare tipi particolari di strutture grafiche la cui specificità si può sottintendere senza generare ambiguità.

Nel seguito di questa sezione ci serviremo del termine "grafo" nella sua accezione generica, mentre nei paragrafi seguenti lo useremo come semplificazione del termine grafo nonorientato.

D26a.05 I grafi, quando presentano un numero contenuto di nodi e di collegamenti (fino a poche decine), possono essere raffigurati nel piano in modo intuitivo ed efficace, associando a ogni nodo un punto e a ogni collegamento un segmento che unisce due nodi tra loro o un nodo con se stesso.

Come mostrano le raffigurazioni che seguono, i nodi di un grafo possono essere indifferenziati o, viceversa, possono distinguersi in vari modi; a loro volta i collegamenti tra i nodi (orientati o meno) possono essere indifferenziati o, viceversa, essere muniti di etichette, di valori numerici o di altre informazioni.

Inoltre si considerano strutture grafiche che tra un nodo e un altro presentano più di un collegamento; in tali casi si parla di **multigrafi** e di **multidigrafi**.
I rispettivi insiemi sono qui denotati con **Mgrf** e **Mdgrf**.

//input pD26a04

//input pD26a04e

Alcune proprietà dei grafi possano essere descritte ed analizzate in termini puramente visivi servendosi delle loro raffigurazioni. Inoltre di molte situazioni riguardanti entità matematiche, oggetti materiali, organismi socio-amministrativi e processi vengono proposte schematizzazioni di prima approssimazione mediante grafi, grazie alla semplicità degli elementi (nodi e collegamenti) che li costituiscono.

D26a.06 Lo studio dei grafi è iniziato nel diciottesimo secolo, ma, pur destando l'interesse di matematici del calibro di Euler, Hamilton e Cayley, fino alla II guerra mondiale è rimasto piuttosto circoscritto e frammentario.
L'attenzione nei confronti dei grafi è invece cresciuta vistosamente nella seconda metà del '900 per vari motivi.

– Sono stati ottenuti risultati incisivi concernenti grafi e altre strutture matematiche discrete loro collegate attraverso la edificazione di teorie di vasta portata e attraverso la precisazione di algoritmi complessi che hanno consentito di risolvere problemi importanti con elevata efficienza.
– Con la diffusione di mezzi di calcolo di elevata potenza sono stati implementati sistematicamente algoritmi sui grafi che costituiscono strumenti efficaci per l'indagine scientifica e per applicazioni pratiche.
– Molte situazioni che si incontrano nelle attività produttive o organizzative vengono schematizzate mediante grafi dei vari tipi e molti problemi concreti vengono risolti da procedure nelle quali hanno un ruolo centrale analisi e costruzioni di grafi.

D26a.07 Per quanto riguarda le principali applicazioni dei grafi cominciamo con alcune segnalazioni.

◦ I grafi schematizzano reti elettriche e reti di comunicazione che possono riguardare collegamenti interni di dispositivi elettronici, connessioni di apparecchiature informatiche costituenti sistemi articolati finalizzati alla esecuzione di attività complesse, collegamenti a distanza di computers organizzati in modo da cooperare istematicamente.
◦ Rappresentano reti di trasporto (stradale, ferroviario, marittimo, aereo, ...) e sono usati per affrontare problemi di viabilità e di traffico, sia in aree urbane che in vaste regioni geografiche.
◦ Costituiscono il supporto di tutti i numerosi tipi di automi e di macchine formali.
◦ Sono alla base delle strutture di dati e degli archivi da gestire con strumenti digitali per finalità di esteso impatto e con criteri di razionalità e con tendenza alla pervasività.

- In varianti opportunamente arricchite (come i diagrammi di flusso delle elaborazioni e i diagrammi di flusso dei dati) rappresentano gli algoritmi, il fluire delle informazioni nell'ambito dei sistemi informativi e varie azioni strategiche nel settore della programmazione.
- Permettono di descrivere lo svolgimento dei giochi e fanno da supporto a giochi particolari.
- Nella fisica delle particelle si incontrano, ad esempio, nelle vesti dei diagrammi di Feynman.
- In chimica si incontrano nelle formule di struttura delle molecole.
- In geografia servono, tra l'altro, a rappresentare bacini fluviali.
- Consentono di schematizzare svariati problemi organizzativi (organigrammi, pianificazione di manovre produttive, ripartizioni di compiti secondo competenze, assegnazione di risorse, e vari processi studiati nella sociologia).

D26a.08 In questo capitolo introduciamo le varie nozioni di base riguardanti i grafi che si incontrano nella descrizione e nell'analisi di gran parte delle configurazioni discrete. In vari capitoli successivi riprenderemo le configurazioni grafiche per affrontare questioni più specifiche e più impegnative.

D26 b. introduzione dei grafi nonorientati

D26b.01 Si dice **grafo nonorientato** o **grafo-nor** ogni $G :=: \langle Q, E\rangle$, dove Q è un insieme finito ed $E :\subseteq \mathfrak{P}_{1,2}(Q)$, cioè E è un insieme formato da sottoinsiemi di Q contenenti uno o due elementi, cioè da singoletti e duetti.
Q è detto **insieme dei nodi del grafo** o dei **insieme dei vertici** di G; E è detto **insieme dei lati** o **insieme degli spigoli** di G; un lato si dice **cappio** sse è costituito da un solo nodo.
Nel seguito del capitolo invece che di grafi nonorientati parleremo semplicemente di **grafi**.
Denotiamo con **Grf** la classe dei grafi nonorientati e con Grf_Q l'insieme dei grafi aventi Q come insieme dei nodi.

D26b.02 Il numero dei nodi di un grafo G si dice **ordine del grafo** e il numero dei lati **grado del grafo** G, o anche, con un termine suggerito dall'elettronica, affollamento di G.
I grafi di un dato ordine v li chiamiamo **grafi-**v e i grafi di un dato ordine v e di un dato grado s li chiamiamo **grafi-**(v, s); occorre tuttavia segnalare che di solito sono usati, risp., i termini v-grafi e (v, s)-grafi).

Facendo riferimento a un grafo G, si denota con $Nod(G)$ l'insieme dei suoi nodi e con $\boldsymbol{Edg}(G)$ l'insieme dei suoi lati. Quindi l'ordine di tale grafo è $|Nod(G)|$, il suo grado è $|Edg(G)|$ e si può scrivere $G = \big\langle Nod(G), \boldsymbol{Edg}(G)\big\rangle$.
L'ordine del grafo G spesso si denota concisamente con la notazione $|G|$.

Un grafo costituito da un solo nodo e da nessun lato viene chiamato **grafo nodo** o grafo banale.
In talune considerazioni risulta comodo considerare tra i grafi anche il **grafo vuoto**, grafo costituito da 0 nodi (e 0 lati).

D26b.03 Consideriamo dunque un grafo $G = \langle Q, E\rangle$; in particolare facciamo riferimento a

//input pD26b03

Due nodi diversi di G, p e q, si dicono **nodi adiacenti** sse $\{p, q\} \in E$; c si dice **lato adiacente a se stesso** sse $\{c\} \in E$, cioè sse costituisce un cappio.

Un $e = \{p, q\} \in E$ si dice **lato che connette due nodi** , o **lato che collega due nodi**, p e q, e questi nodi si dicono **nodi estremità del lato** e.

Se $\{c\} \in E$ si dice che il nodo c è l'unica estremità del cappio $\{c\}$, o anche che c è l'unico nodo nel quale il cappio $\{c\}$ è incidente.
I lati che hanno un dato nodo p come estremità si dicono **lati incidenti nel nodo** in p.

L'insieme dei nodi adiacenti a un determinato nodo p si dice **intorno del nodo** p.

Due lati si dicono **lati incidenti** sse hanno almeno una estremità in comune.

Un nodo si dice **nodo isolato** sse non possiede nodi adiacenti; si dice **nodo sconnesso** sse non ha nodi adiacenti diversi da se stesso.
Un nodo è sconnesso e non isolato sse è dotato di cappio e non è adiacente ad alcun altro nodo.

Un nodo si dice **nodo pendente** sse possiede un solo nodo adiacente diverso da se stesso.

Un grafo nonorientato privo di cappi si dice **grafo semplice**.

I cappi di un grafo in genere non giocano un ruolo molto significativo: essi forniscono solo una bipartizione dell'insieme dei nodi, in quanto consentono di distinguere tra nodi dotati e nodi privi di cappio. Per molte considerazioni è sufficiente limitarsi a esaminare i grafi semplici.

D26b.04 Il **grado di un nodo** o **valenza di un nodo** p di un grafo G è il numero dei lati incidenti in esso, ovvero il numero dei nodi adiacenti a esso.
Questo intero naturale si denota con $deg_G(p)$ o più semplicemente con $deg(p)$ quando non è necessario precisare esplicitamente il grafo al quale si fa riferimento.

Il termine valenza proviene dalla rappresentazione delle molecole come complesso di nodi (gli atomi) tenuti insieme da legami schematizzati dai lati di un multigrafo con nodi etichettati. I nodi di grado k sono detti anche **nodi k-valenti**.

Si osserva che un nodo è isolato sse ha grado 0, mentre un nodo è pendente sse ha grado 1 ed è privo di cappio.

D26b.05 **Prop.** Per il grafo $\langle\{p_1,...,p_v\},\{e_1,...,e_s\}\rangle$ si ha $\displaystyle\sum_{i=1}^{v} deg(p_i) = 2\,s$.

Dim.: Ciascuno degli s lati contribuisce con un addendo uguale ad 1 al grado di due nodi; quindi $\sum_{i=1}^{v} deg(p_i) = \sum_{j=1}^{s} 2 = 2s$ ▮

Da qui si ricava che in ogni grafo il numero dei nodi di grado dispari è pari.

Per presentare alcuni grafi risulta conveniente semplificare le presentazioni di spigoli come la $e=\{p,q\}$ nella $e=pq$.

D26b.06 Consideriamo una collezione $\mathcal{C}=\{V_1,V_2,...,V_n\}$ di sottoinsiemi di un insieme finito S. Si dice **grafo intersezione della collezione di insiemi** $\mathcal{C}$, e si denota con $Intsgrf(\mathcal{C})$, la coppia $\langle\mathcal{C},E\rangle$, dove E è l'insieme dei duetti $\{V_i,V_j\}$ tali che V_i e V_j presentano elementi comuni, cioè sono tali che $V_i\cap V_j\neq\emptyset$.

Per esempio se si considera la collezione degli insiemi di consonanti che entrano nei nomi di alcune delle maggiori città italiane, si trova il seguente grafo intersezione:

//input pD26b06

Ogni grafo si può considerare grafo intersezione di una collezione di insiemi: basta assegnare degli identificatori ai suoi lati e associare a ciascun nodo la collezione degli identificatori dei lati che incidono in esso.

D26b.07 Se si cambiano gli identificatori dei nodi di un grafo $G=\langle Q,E\rangle$, si ottiene un grafo G' che conserva tutte le proprietà di G che dipendono solo dal complesso dei collegamenti tra i nodi, proprietà che chiamiamo **invarianti spc Grf**. Per esempio i due grafi G e G' hanno lo stesso numero di nodi isolati, di nodi pendenti e, in genere, di nodi k-valenti.

Un cambiamento di nomi del tipo precedente è stato utilizzato per giungere ad asserire la portata generale dei grafi intersezione.

Formalmente il cambiamento di identificatori consiste nel considerare un insieme P con lo stesso numero di elementi di Q (i nuovi identificatori) e una biiezione $\beta\in\lceil Q \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright P\rceil$; essa porta a un grafo $H=\langle P,F\rangle$, dove F è l'insieme degli spigoli ottenuti da quelli di G modificando le loro estremità mediante l'applicazione β:

$$F := \left\lceil \{q,p\}\in E \;\mapsto\; \{\beta(q),\beta(p)\} \right\rceil \;\dot\cup\; \left\lceil \{c\}\in E \;\mapsto\; \beta(c) \right\rceil .$$

Una biiezione che, come la precedente, mantiene l'adiacenza tra nodi viene detta **isomorfismo tra grafi** e i due grafi associati dalla biiezione si dicono **grafi isomorfi**.
Per eunciare che G ed H sono grafi isomorfi si scrive $G \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Grf} H$ o più brevemente $G \cong H$, se il contesto rende questa scrittura sufficientemente chiara.

Con la scrittura $\lceil G \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Grf} H \rceil$ si denota l'insieme degli isomorfismi tra i grafi G ed H; quindi per affermare che β è un isomorfismo tra i grafi G ed H si può scrivere $\beta \in \lceil G \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Grf} H \rceil$.

D26b.08 Il grafo H, ottenuto cambiando i nomi dei nodi di G, in genere non mantiene le caratteristiche di G derivanti dalle individualità dei suoi nodi, ovvero dal procedimento specifico con il quale lo si è costruito a partire da oggetti più elementari: queste caratteristiche, in seguito a scelte per P e β tese alla semplicità, possono perdere di senso.

Le proprietà invarianti spc Grf sono associate alla specie delle strutture grafo e sono condivise da tutti i grafi isomorfi a G, grafi che insieme a G costituiscono una cosiddetta **classe di isomorfismo** di grafi.

Questo termine è giustificato dal fatto che l'isomorfismo tra grafi è una equivalenza. Infatti l'identità per i nodi di un grafo G si può considerare un isomorfismo di G con se stesso; la composizione di un isomorfismo β tra G e un secondo grafo H con un isomorfismo γ tra H e un terzo grafo K costituisce un isomorfismo tra G e K; infine ogni isomorfismo β tra G e H è invertibile e la sua applicazione inversa costituisce un isomorfismo tra H e G.

D26b.09 Quando interessano le proprietà dei grafi che non dipendono da come sono individuati i loro nodi, ma solo dal complesso dei collegamenti tra i nodi stessi, si dovrebbero considerare non tanto i grafi singoli, quanto le loro classi di isomorfismo.

In molti passi espositivi però risulta vantaggioso attribuire le proprietà condivise da tutti i grafi di una classe di isomorfismo ad un unica entità che chiamiamo **grafo astratto dallo specificato** G.
Spesso inoltre questo grafo si può studiare attraverso una sua cosiddetta **raffigurazione con nodi anonimi**, presentazione nella quale ciascuno dei nodi è individuato solo dall'immagine di un punto e non porta alcuna etichetta.

Occorre peraltro segnalare che di uno stesso grafo si possono dare diverse raffigurazioni equivalenti e che alcune di esse, a prima vista, possono sembrare presentazioni di grafi diversi.

In effetti vi sono grafi che in una raffigurazione evidenziano chiaramente una prima proprietà P, ma non una seconda Q, mentre in un'altra raffigurazione rendono palese la Q e nascondono la P.

Naturalmente una raffigurazione a nodi anonimi non fornisce le caratteristiche legate alle individualità dei nodi stessi, cioè relative alle modalità secondo le quali i singoli nodi sono stati definiti.

Va detto anche che per esporre alcune proprietà di grafi astratti risulta opportuno servirsi di rappresentativi particolari delle loro classi di isomorfismo assegnando ai loro nodi identificatori scelti con accorgimenti specifici. Nel seguito avremo modo di trattare i grafi in tutti i diversi modi appena presentati.

D26b.10 Introduciamo ora una importante relazione tra grafi.
Si dice che il grafo $G_1 :=: \langle Q_1, E_1 \rangle$ è **sottografo** di $G_2 :=: \langle Q_2, E_2 \rangle$ sse $Q_1 \subseteq Q_2$ ed $E_1 \subseteq E_2$, ovvero $E_1 \subseteq E_2 \cap \mathfrak{P}_{1,2}(Q_1)$.
Questa relazione si esprime scrivendo $G_1 \leq_{Grf} G_2$; in questo caso si dice anche che G_2 è **sovragrafo** di G_1.

Si dice che G' è **sottografo ricoprente** o **sottografo generante** di G sse i suoi nodi sono tutti i nodi di G, cioè sse $G' = \langle V, E' \rangle$ con $E' \subseteq E$.

Si passa da un grafo a un suo sottografo ricoprente mantenendo tutti i suoi nodi ed eliminando alcuni dei suoi spigoli.

Chiaramente quindi ogni sottografo ricoprente di un sottografo ricoprente di un dato grafo G è sottografo ricoprente di tale G.

D26 c. panoramica di grafi semplici

D26c.01 Presentiamo ora alcune famiglie di grafi semplici: per la maggior parte di essi conviene identificare i nodi mediante interi positivi, ma spesso si possono studiare utilizzando solo raffigurazioni con nodi anonimi.

Ricordiamo anche che per n intero positivo $(\mathrm{n}\ ]$ denota $\{1, 2, ..., n\}$, mentre $[n] := \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Si dice **grafo cammino canonico** (*path*) con n nodi (ed $n-1$ spigoli)

$$\mathsf{Path}_n \ := \big\langle (\mathrm{n}\ ]\ ,\ \{i = 1, ..., n-1 :|\ \{i, i+1\}\}\big\rangle\ .$$

Raffigurazioni di Path_4 e del generico Path_n sono

//input pD26c01

Per $n = 3, 4, ...$, si dice **ciclo** canonico con n nodi (ed n lati)

$$\boldsymbol{Cycl}_n \ := \big\langle (\mathrm{n}\ ]\ ,\ \{i = 1, ..., n-1 :|\ \{i, i+1\}\} \cup \{1, n\}\big\rangle\ .$$

//input ppD26c01B

Per $m = 3, 4, ...$, si dice **grafo stella** con m spigoli (ed $m+1$ nodi), ovvero stella di ordine $m+1$

$$\mathcal{K}_{1,m} \ := \big\langle [m]\ ,\ \{i = 1, ..., m :|\ \{0, i\}\}\big\rangle\ .$$

Il nodo 0 è detto **nodo centro della stella** ed ha grado m; i rimanenti m nodi sono nodi pendenti.
Si dice **grafo triade** la stella di ordine 4.

//input ppD26c01C

D26c.02 Si dice **grafo completo** con n nodi

$$\mathcal{K}_n \ := \big\langle (\mathrm{n}\ ]\ ,\ \{i = 1, ..., n-1;\ j = i+1, ..., n :|\ \{i, j\}\}\big\rangle\ .$$

La seguente figura mostra i grafi completi degli ordini 1, 2, 3, 4 e 5. Si osserva che $\mathcal{K}_1$ corrisponde al grafo nodo e $\mathcal{K}_2$ al cammino Path_2.

//input pD26c02

Evidentemente $\mathcal{K}_n$ ha $n(n-1)/2$ lati.

Più costruttivamente si dice **grafo completo** sull'insieme V il grafo semplice i cui nodi costituiscono V e i cui lati connettono tutte le coppie di nodi diversi, cioè un grafo della forma $\big\langle V, \mathfrak{P}_2(V)\big\rangle$ con $|V| = v$. In astratto, cioè prescindendo da ogni definizione costruttiva V, si parla al singolare di grafo completo $\mathcal{K}_{|V|}$.

D26c.03 Per $m = 3, 4, ...$, si dice **grafo ruota** (*wheel*) con m raggi, o anche **grafo] piramide** a base m-gonale,

$$Wl_m \ := \big\langle [m]\ ,\ \{i = 1, ..., m-1 :|\ \{i, i+1\}\} \cup \{1, m\} \cup \{i = 1, ..., m :|\ \{0, i\}\}\big\rangle\ .$$

Se $m \geq 4$ il nodo di Wl_m di grado m viene detto **nodo centro della ruota**, i restanti sono detti nodi periferici; i lati incidenti al centro sono chiamati **raggi della ruota** ed i rimanenti lati periferici.

Osserviamo che $Wl_3 \cong \mathcal{K}_4$, cioè per tale grafo ogni nodo ha valenza 3 e le distinzioni tra raggi si possono basare solo sulla raffigurazione, mentre in astrattonon hanno rilievo.

//input pD26c03

Chiaramente Wl_m ha $2\,m$ lati ed $m+1$ nodi.

D26c.04 Si dice **grafo scala** con $2m$ nodi

$$\mathrm{S}cl_{2m} := \Big\langle (2m] \;,\; \{i=1,...,m :| \; \{i,i+m\} \cup \{i=1,...,m-1 :| \; \{i,i+1\}\} \\ \cup \{i=m+1,...,2m-1 :| \; \{i,i+1\}\}\Big\rangle \quad .$$

Per $\mathrm{S}cl_6$ e per la generica $\mathrm{S}cl_{2m}$ si hanno le figure

//input p26c04

$\mathrm{S}cl_{2m}$ possiede $3m-2$ lati.

Evidentemente $\mathcal{K}_2 \cong \mathsf{Path}_2 \cong \mathrm{S}cl_2$, $\mathcal{K}_3 \cong \boldsymbol{Cycl}_3$ e $\mathrm{S}cl_4 \cong \boldsymbol{Cycl}_4$.

D26c.05 $\mathcal{P}rsm_m$ Per $m=3,4,...$, si dice **grafo prisma** con m facce laterali

$$\mathcal{P}rsm_m := \big\langle ((2m] \;,\; \{i=1,...,m :| \; \{i,i+m\} \cup \{i=1,...,m-1 :| \; \{i,i+1\}\} \cup \\ \{i=m+1,...,2m-1 :| \; \{i,i+1\}\} \cup \{\{1,m\},\{m+1,2m\}\}\big\rangle \quad .$$

//input pD26c05

$\mathcal{P}rsm_m$ presenta $2\,m$ nodi e $3\,m$ lati.

Sia $d=1,2,3,...$ e ricordiamo che $\mathbb{B}^d$ denota l'insieme delle d-uple binarie.
Si dice **grafo cubo a d dimensioni** il grafo $\mathcal{Q}_d := \langle \mathbb{B}^d, E\rangle$ i cui lati sono tutti i duetti di d-uple binarie, elementi di $\mathfrak{P}_2(\mathbb{B}^d)$, della forma
$\{\langle b_1,...,b_{i-1},0,b_{i+1},...,b_d\rangle \;,\; \langle b_1,...,b_{i-1},1,b_{i+1},...,b_d\rangle\}$, cioè i duetti costituiti da sequenze binarie aventi distanza di Hamming uguale a 1.

//input pD26c05B

Chiaramente $\mathcal{Q}_1 \cong \mathsf{Path}_2 \cong \mathcal{K}_2$, $\mathcal{Q}_2 \cong \mathcal{C}ycl_4$, e $\mathcal{Q}_3 \cong \mathcal{P}rsm_4$.

$\mathcal{Q}_d$ ha 2^d nodi, ovvero $|Nod(\mathcal{Q}_d)| = 2^d$.
Ogni suo nodo q ha grado d, in quanto il suo intorno è costituito dai nodi d-uple che presentano una e una sola delle loro componenti binarie diversa dalla corrispondente del nodo q.

Valutiamo i numeri dei lati $E_d := |Edg(\mathcal{Q}_d)|$. L'insieme dei nodi di $\mathcal{Q}_d$ si bipartisce nei sottoinsiemi delle d-uple aventi l'ultima componente risp. nulla e uguale a 1. I due sottografi ottenuti restringendo l'insieme dei nodi ai due suddetti insiemi complementari sono isomorfi a $\mathcal{Q}_{d-1}$.

L'insieme $Edg(\mathcal{Q}_d)$ si ripartisce in tre classi: due classi sono costituite dai lati dei due suddetti sottografi; la terza classe è costituita da lati che collegano ciascuno un nodo del primo sottografo con un nodo del secondo.
Quindi $E_d = 2E_{d-1} + |Nod(\mathcal{Q}_{d-1})| = 2E_{d-1} + 2^{d-1}$ e più dettagliatamente:

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E_d	1	4	12	32	80	192	448	1024	2304

D26c.06 Generalizzando la nozione di scala, diciamo **grafo griglia rettangolare** $m \times n$ e denotiamo con $\mathrm{G}ridr_{m,n}$, il grafo dato dalla seguente raffigurazione:

//input pD26c06

Questo grafo si colloca naturalmente nella griglia combinatoria [B21e) e per esso si possono usare i termini di tale struttura.

Evidentemente esso ha ordine $m \cdot n$. Per il grado si osserva che l'insieme dei lati verticali si pone in biiezione con l'insieme dei nodi che non si trovano sulla linea superiore e che l'insieme dei nodi orizzontali si pongono in biiezione con l'insieme dei nodi eccettuati i più a destra. Quindi il grado è $2(m-1)(n-1) + m - 1 + n - 1 = 2mn - m - n$.

Si osserva agevolmente che $\mathrm{G}ridr_{m,n} \cong \mathrm{G}ridr_{n,m}$ e $\mathrm{G}ridr_{2,n} \cong \mathrm{S}cl_{2n}$.

D26c.07 Generalizzando la nozione di prisma, chiamiamo **grafo griglia cilindrica** $m \times n$ e denotiamo con $\mathrm{G}ridc_{m,n}$ il grafo ottenuto aggiungendo a $\mathrm{G}ridr_{m,n}$ i lati $\{\langle i,1\rangle, \langle i,n\rangle\}$ per $i = 1,...,m$.
La griglia si può immaginarcome ottenuta avvolgendo una griglia rettangolare flessibile sopra un oggetto cilindrico e collegando i nodi inizialmente più a destra con i corrispondenti inizialmente più a sinistra.
Essa ha ordine $m \cdot n$ e affollamento $n\,m + m(n-1) = m\,n - n$.

//input pD26c07

Si osserva agevolmente che $\mathrm{G}ridc_{2,n} \cong \mathcal{P}rsm_n$.

D26c.08 Diciamo **grafo griglia toroidale** $m \times n$ il grafo $\mathrm{G}ridt_{m,n}$ che si può immaginare ottenuto da $\mathrm{G}ridc_{m,n}$ piegandola ad anello e collegando i nodi del suo ciclo inizialmente più in alto con i corrispondenti del suo ciclo più in basso, cioè aggiungendo i lati $\{\langle 1,j\rangle, \langle m,j\rangle\}$ per $j = 1,...,n$.
Evidentemente questo grafo ha ordine $m \cdot n$ e affollamento $2\,m\,n$.

//input pD26c08

Si osserva facilmente che $\mathrm{G}ridt_{m,n} \cong \mathrm{G}ridt_{n,m}$.

D26c.09 Eserc. Precisare le biiezioni tra intervalli di interi che determinano gli isomorfismi segnalati nel presente paragrafo.

D26c.10 Un grafo G si può qualificare significativamente con il cosiddetto **multigrado del grafo**, cioè con il multiinsieme che dice quanti sono i suoi nodi pendenti, quanti hanno grado 2, quanti grado 3 ecc. Il multigrado di G si denota con $Mdeg(G)$ e sarà presentato sempre mediante la notazione esponenziale.

Denoteremo, risp., con $mindeg(G)$ e con $maxdeg(G)$ il minimo e il massimo tra i gradi dei nodi di G. Per esempio per il primo grafo presentato in a.03 G_a si ha $Mdeg(G_a) = 1\,2\,3^5\,4^2\,5^2\,6$, $mindeg(G_a) = 1$ e $maxdeg(G_a) = 6$.

D26c.11 Eserc. Dimostrare le seguenti espressioni per i multigradi.

$Mdeg(\mathsf{Path}_n) = 1^2\,2^{n-2}$, $Mdeg(\boldsymbol{Cycl}_n) = 2^n$, $Mdeg(\mathcal{K}_{1,n}) = 1^n\,n^1$, $Mdeg(\mathcal{P}_n) = 1^2\,2^{n-2}$,
$Mdeg(Wl_n) = 2^n\,n^1$, $Mdeg(\mathcal{K}_n) = (n-1)^n$, $Mdeg(\mathrm{S}cl_{2\,m}) = 2^4\,3^{2\,m-4}$ (per $m \geq 4$) ,
$Mdeg(\mathcal{P}rsm_m) = 3^{2\,m}$, $Mdeg(\mathcal{K}_{s,t}) = s^t t^s$. $Mdeg(\mathrm{G}ridr_{m,n}) = 2^4 3^{2\,m+2\,n-8} 4^{(m-2)(n-2)}$.
$Mdeg(\mathrm{G}ridc_{m,n}) = 3^{2n}\,4^{(m-2)n}$, $Mdeg(\mathrm{G}ridt_{m,n}) = 4^{m\,n}$.

D26c.12 Un grafo G è detto **grafo regolare** sse è semplice e tutti i suoi nodi hanno lo stesso grado, cioè sse $mindeg(G) = maxdeg(G)$.

Più precisamente un grafo viene detto **grafo regolare**-k sse k è il grado comune a tutti i suoi nodi, ovvero sse tutti i suoi nodi sono k-valenti.

Evidentemente per un grafo k-regolare con v nodi ed e lati si ha $v\,k = 2\,e$.

Un grafo regolare-k nonconnesso ha tutte le componenti connesse costituite da grafi k-regolari: quindi interessano prevalentemente i grafi regolari connessi.

Si vede subito che unico grafo regolare-1 connesso è Path_2 e che i cicli sono tutti e i soli grafi regolari-2 connessi.

D26c.13 I grafi regolari-3 connessi costituiscono una popolazione ben più variegata e sono detti anche **grafi cubici**. Tutti i prismi sono grafi cubici. Dei cubi d-dimensionali solo $\mathcal{Q}_3$ è un grafo cubico.
La figura mostra alcuni grafi cubici.

//input pD26c14

L'ultimo grafo presentato è una struttura discreta dotata di molte eleganti proprietà nota come **grafo di Petersen**.

Sono grafi regolari-4 le griglie toroidali e il cubo quadridimensionale.
Si vede inoltre che per ogni d intero positivo il cubo d-dimensionale è d-regolare.

D26 d. grafi nonorientati: passeggiate, connessione

D26d.01 Una **passeggiata sopra un grafo** G è una sequenza nella quale si alternano nodi e lati che inizia e finisce con un nodo e nella quale ogni lato è incidente con il nodo che lo precedee e con il nodo che lo segue.

Formalmente si definisce **passeggiata** sopra G ogni

$$\pi := \big\langle q_0, e_1, q_1, \ldots q_{s-1}, e_s, q_s \big\rangle \in Q \times (E \times Q)^s \quad \text{con} \;\; s \in \mathbb{N} \;\rrbracket\; \forall i = 1, ..., s \;:\; e_i = \{q_{i-1}, q_i\},$$

La definizione consente che una passeggiata presenti nodi e lati ripetuti.
Si individuano quindi la sequenza delle occorrenze di nodi $\big\langle q_0, q_1, ..., q_s \big\rangle$ la sequenza delle occorrenze di lati $\big\langle e_1, e_2, ..., e_s \big\rangle$ che costituiscono una passeggiata e che si dicono "giacere" su di essa.

Si dice **lunghezza della passeggiata** di π, e si denota con $\pi^{\vdash\!\dashv}$, il numero delle occorrenze di lati, s, che giacciono su di essa.

I nodi q_0 e q_n si dicono **estremità della passeggiata** e quelli rimanenti **nodi interni della passeggiata**; si usa l'espressione passeggiate-(q_0, q_n) per caratterizzare quelle che hanno estremità iniziale in q_0 ed estremità finale in q_n.

Se G è un grafo-nor denotiamo con $\mathbf{Path}[G]$ l'insieme delle passeggiate su G e denotiamo con $\mathbf{Path}[G; p, q]$ l'insieme delle passeggiate su G che iniziano nel nodo p e terminano nel nodo q.

D26d.02 Una passeggiata individuata come la precedente π è detta **passeggiata chiusa** sse $q_0 = q_n$; si parla invece di **passeggiata aperta** sse $q_0 \neq q_n$.

La sequenza ridotta a un solo nodo di G può considerarsi una passeggiata su G, più precisamente una passeggiata chiusa di lunghezza 0. Se $\{p\}$ è un cappio di G, $\langle p, \{p\}, p\rangle$ è una passeggiata su G chiusa di lunghezza 1.

La sequenza riflessa di quella che fornisce una passeggiata individua una passeggiata che viene detta **passeggiata riflessa** di quella data; evidentemente le riflesse delle passeggiate-(p, q) sono le passeggiate-(q, p).

Molte passeggiate su un grafo si presentano efficacemente sulla sua raffigurazione segnando in modo più marcato i suoi lati.
Si osserva però che nel caso di passeggiate con nodi ripetuti e con lati (e nodi) ripetuti la presentazione suddetta può essere ambigua.

//input pD26d02

Si osserva anche che, se si escludono i grafi privi di spigoli che presentano solo passeggiate di lunghezza 0, si possono avere passeggiate lunghe quanto si vuole e l'insieme delle passeggiate su di un grafo è infinito, in quanto si possono avere passeggiate ottenute ripercorrendo nei due sensi quante volte si vuole ogni lato o ogni altra passeggiata.

D26d.03 La definizione formale delle passeggiate è piuttosto pesante e si è indotti a considerare sbrigativamente come passeggiata di lunghezza s una sequenza di $s + 1$ nodi tali che due consecutivi siano adiacenti o una sequenza di s lati tali che due consecutivi siano incidenti.

Queste semplificazioni in taluni casi portano a imprecisioni: per una passeggiata come la $\langle p, \{p,q\}, q, \{p,q\}, p\rangle$ non è lecito adottare la scrittura riguardante i soli lati $\langle\{p,q\}, \{p,q\}\rangle$, in quanto questa potrebbe fornire anche la passeggiata $\langle q, \{p,q\}, p, \{p,q\}, q\rangle$.
Quando basta la sequenza dei nodi si può usare la notazione
$\big\langle [p_0, p_1, ..., p_n] \big\rangle := \big\langle p_0, e_1, p_1, ..., p_{n-1}, e_n, p_n \big\rangle$

Due passeggiate $\pi = \big\langle q_0, e_1, ..., q_s\big\rangle$ e $\sigma = \big\langle p_0, f_1, ..., p_s\big\rangle$ si dicono costituire una **coppia di passeggiate consecutive** sse l'estremità finale della prima coincide con l'iniziale della seconda, ossia sse $q_s = p_0$.
Spesso serve la **giustapposizione di passeggiate consecutive**; come giustapposizione delle due passeggiate precedenti si assume:

$$\pi \, \sigma \ := \big\langle q_0, e_1, ..., q_s = p_0, f_1, ..., p_s \big\rangle \ .$$

La precedente costituisce un esempio di operazione parziale [T15e03] nell'insieme delle passeggiate sopra un grafo.
Si può sempre giustapporre una passeggiata alla propria riflessa e ottenere una cosiddetta **passeggiata chiusa ripetitiva**.

D26d.04 Due nodi p e q di un grafo G si dicono **nodi connessi sul grafo** G sse su tale grafo esiste una passeggiata-(p,q) (e quindi una passeggiata-(q,p)).

(1) Prop.: La connessione tra i nodi di un grafo $G = \langle Q, E\rangle$ è una relazione di equivalenza entro Q.

Dim.: Le passeggiate di lunghezza 0 garantiscono la sua riflessività; la possibilità di avere una passeggiata e la sua riflessa garantisce la sua simmetria; la possibilità di giustapporre passeggiate consecutive garantisce la sua transitività ▮

Le classi della relazione di connessione tra i nodi di un grafo G si dicono **componenti connesse del grafo** G.
Un grafo nonconnesso si può considerare unione disgiunta delle sue componenti connesse.
Le componenti connesse di un grafo sono i suoi sottografi connessi massimali.
Il numero di tali sottografi di G si chiama **indice di connessione del grafo** e si denota $connx(G)$.

//input pD26d04

Un grafo G si dice **grafo connesso** sse ogni coppia di suoi nodi distinti è connessa, ovvero sse è costituito da una sola componente connessa, cioè sse ha indice di connessione $connx(G) = 1$.

Osserviamo che, per la determinazione della connessione, i cappi non hanno alcuna influenza.

Molte conoscenze sopra un grafo si ricavano facilmente da quelle delle sue componenti connesse e molte manovre sui grafi si riducono a operazioni separate sulle sue componenti connesse.

Per esempio l'insieme delle passeggiate su un grafo nonconnesso è l'unione degli insiemi (disgiunti) delle passeggiate sulle diverse componenti connesse.
Quindi lo studio di proprietà dei grafi collegate alla connessione è opportuno che si concentri sui grafi semplici connessi.

D26d.05 Per le proprietà collegate alla connessione le passeggiate con ripetizioni di lati e nodi sono ridondanti: conviene quindi concentrare l'attenzione su passeggiate prive di tali ripetizioni.

Si dice **percorso su un grafo** o **passeggiata euleriana su un grafo** una sua passeggiata in cui tutti i lati sono distinti.

Si chiama **cammino su un grafo** o **passeggiata hamiltoniana su un grafo** una passeggiata in cui tutti i nodi sono distinti.

//input pD26d05

Chiaramente un cammino non può presentare lati ripetuti e quindi è un percorso.
In un grafo non ridotto a pochissimi elementi e non di tipo particolare (come le foreste che vedremo tra poco) l'insieme dei cammini è contenuto strettamente in quello dei percorsi e questo è un sottoinsieme proprio dell'insieme delle passeggiate.

D26d.06 Come per le passeggiate si distingue tra **percorsi chiusi** e **percorsi aperti** e si distinguono i **cammini chiusi** dai **cammini aperti**; inoltre si dicono, risp., percorsi-(p, q) i percorsi che collegano i nodi p e q e cammini-(p, q) i cammini che collegano i nodi p e q.

Un percorso è individuato completamente dalla sequenza dei suoi lati o dalla sequenza dei suoi nodi. Scriveremo quindi

$$\langle\!\llbracket p_0, p_1, ..., p_n \rrbracket\!\rangle \ := \langle\!\langle (e_1, ..., e_n) \rangle\!\rangle \ := \big\langle p_0, e_1, p_1, ..., p_{n-1}, e_n, p_n \big\rangle \ .$$

Evidentemente la passeggiata riflessa di un percorso è un percorso e che la passeggiata riflessa di un cammino è un cammino.

D26d.07 **Prop.** Ogni passeggiata-(p, q) si può ridurre a un percorso-(p, q).

Dim.: La riduzione si effettua cercando sulla sequenza dei lati le loro ripetizioni ed eliminandole una alla volta. Si opera per fasi successive relative ai successivi lati della sequenza. Per ogni nuovo lato e_i si cerca una sua eventuale ripetizione (o a partire dal lato successivo oppure, meglio, a partire dal lato finale). Se e_i non si ripete si passa al successivo e_{i+1}.
Se si trova $e_i = e_j$ con $i < j$ si distinguono due casi.
(1) Se i due lati compaiono in un contesto del tipo $\langle ..., e_{i-1}, q_{i-1}, e_i, q_i, ..., q_{i-1}, e_i, q_i, e_{j+1}, ...\rangle$, questa passeggiata si riduce alla $\langle ..., e_{i-1}, q_{i-1}, e_i, q_i, e_{j+1}, ...\rangle$.
(2) Se i due lati compaiono invece nella sequenza $\langle ..., e_{i-1}, q_{i-1}, e_i, q_i, ..., q_i, e_i, q_{i-1}, e_{j+1}, ...\rangle$, si riduce la passeggiata alla $\langle ..., e_{i-1}, q_{i-1}, e_{j+1}, ...\rangle$ ∎

//input pD26d07

D26d.08 **Prop.** Ogni percorso-(p, q) si può ridurre a un cammino-(p, q).

La riduzione si effettua cercando sulla sequenza dei nodi le loro ripetizioni ed eliminandole una alla volta.
Se si trova $q_i = q_j$ con $i < j$ e i due nodi compaiono in un contesto del tipo

$$\langle ..., e_{i-1}, q_{i-1}, e_i, q_i, ..., q_i, e_{j+1}, ...\rangle$$

si riduce la passeggiata alla $\langle ..., e_i, q_i, e_{j+1}, ...\rangle$ ∎

//input pD26d08

Ora possiamo asserire che due nodi sono connessi sse sono le estremità di un cammino.

D26d.09 Un cammino chiuso prende il nome di **ciclo puntato** o **circuito**. Si dicono **nodi circuitali** di un grafo i nodi che appartengono ad almeno uno dei suoi circuiti; i rimanenti si dicono **nodi acircuitali**
Un grafo in cui questi due tipi di nodi si differenziano nettamente è il seguente:

//input pD26d09

In genere un particolare ciclo puntato come $\langle p_0, e_1, p_1, ..., p_{n-1}, e_n, p_0 \rangle$ interessa meno della classe di tutti i cicli puntati ottenuti dal precedente permutando circolarmente i suoi lati

$$\langle p_i, e_{i+1}, p_{i+1}, ..., p_{i-1}, e_i, p_i \rangle \qquad \text{per} \quad i = 1, ..., n.$$

Una tale classe di percorsi chiusi isomorfi si dice **ciclo** o **poligono**.
Tutti i cicli della stessa lunghezza costituiscono grafi isomorfi. In astratto si parla al singolare di ciclo di lunghezza n o di n-**agono** o di **ciclo**-n e lo si denota con $\boldsymbol{Cycl}_n$. In particolare si parla di **triangolo**, **quadrangolo**, ...
Si noti che $\boldsymbol{Cycl}_3 = \mathcal{K}_3$.

D26d.10 Mentre ogni passeggiata su un grafo non privo di spigoli può essere estesa illimitatamente con nodi che precedono l'iniziale e nodi che seguono il finale, questo non è possibile per i percorsi, in quanto sono disponibili solo un numero finito di lati e tanto meno per i più particolari cammini.

Un percorso non può essere esteso a una lunghezza superiore al grado del grafo e un cammino non può mai essere esteso a una lunghezza superiore all'ordine del grafo.

Accade invece che riducendo una passeggiata (risp. un percorso, un cammino) si ottiene un'altra passeggiata (risp. percorso, cammino).

Si dice **percorso massimale** un percorso che non può essere esteso. Si dice **cammino massimale** un cammino che non può essere esteso.
Evidentemente per la determinazione delle proprietà di connessione ci si può limitare a tenere conto dei cammini massimali.

(1) Prop.: In un grafo connesso due cammini aventi lunghezze massimali hanno almeno un nodo in comune.

Dim.: Se si conoscono due cammini γ_1 γ_2 di lunghezza uguale che non hanno nodi in comune, si possono individuare due nodi del grafo che possono essere collegati da un cammino ρ che non tocca altri punti dei due in osservazione.
Si considera allora il sottografo ottenuto per restrizione ai nodi che giacciono su γ_1, γ_2 e ρ e su di esso si trova un cammino con lunghezza superiore a $|\gamma_1|$ e a $|\gamma_2|$. Quindi la situazione opposta all'enunciato non è sostenibile ▮

D26d.11 Si definisce **distanza tra due nodi** p e q di un grafo connesso la più piccola delle lunghezze dei cammini che li collegano. Essa si denota con $\text{dist}_G(p, q)$ o abbreviatamente con $\text{dist}(p, q)$.

I cammini più corti tra quelli che collegano i due nodi di ciascun duetto $\{p, q\}$ si dicono **geodetiche** tra p e q.

Si dice **diametro di un grafo connesso** la massima tra le distanze tra i suoi nodi. Esso si denota con $\text{diam}(G)$.
Su $\mathcal{K}_v$ la distanza di due nodi qualsiasi è 1. Più strettamente i grafi completi si possono definire come grafi per i quali la distanza tra due nodi qualsiasi è 1.

Per ogni grafo di $\boldsymbol{Cycl}_n$ le distanze tra i nodi vanno da 1 a $\lfloor n/2 \rfloor$; questo è il valore del suo diametro. L'insieme delle distanze tra i nodi di un qualsiasi grafo connesso è l'intervallo $(0 : \text{diam}(G)]$.

Per certe considerazioni può essere conveniente estendere la nozione di distanza a coppie di nodi di grafi nonconnessi; se due nodi appartengono alla stessa componente connessa vale la definizione data per i grafi connessi; a due nodi appartenenti a diverse componenti connessi si assegna come distanza $+\infty$.

Ad ogni grafo G si associa una significativa matrice delle distanze tra i nodi, matrice di profilo $\mathsf{ord}(G) \times \mathsf{ord}(G)$, con codominio contenuto in $[\mathsf{ord}(G)] \dot{\cup} \{+\infty\}$ e simmetrica.

D26d.12 Un grafo si dice **grafo aciclico** o **foresta** sse non possiede passeggiate chiuse, ovvero sse non possiede percorsi chiusi, ovvero sse non possiede cicli.
Una foresta deve essere priva di cappi e quindi è un grafo semplice.

Si dice **albero** un grafo connesso e aciclico.

Ciascuna delle componenti connesse di una foresta è un albero; le foreste si possono classificare primariamente con il numero delle loro componenti connesse.
Gli alberi sono quindi le particolari foreste costituite da una sola componente connessa.

I cammini intesi come grafi autonomi e le stelle sono alberi molto particolari e facilmente trattabili. Anche il grafo nodo si può considerare un albero.
Vi sono invece alberi più complessi non facilmente descrivibili; alcuni esempi di questi alberi sono:

//input pD26d12

D26d.13 Consideriamo un grafo G dotato di cicli; si dice cintura o **giro di vita** di G la minore delle lunghezze dei suoi cicli, cappi esclusi; questo paramerro si denota con $girth(G)$.
Si definisce invece **circonferenza di un grafo** G la maggiore delle lunghezze dei suoi cicli; essa si denota con $crcnf(G)$.
Evidentemente giro di vita e circonferenza sono due invarianti numerici dei grafi.

D26d.14 Eserc. Dimostrare i seguenti risultati. $girth(Wl_m) = 3$, $crcnf(Wl_m) = m$. $girth(\mathcal{S}c_{2m}) = 4$, $crcnf(\text{S}cl_m) = 2\,m$. $\forall n = 3, 4, ...$: $girth(\mathcal{K}_n) = 3$, $crcnf(\mathcal{K}_n) = n$. $girth(\boldsymbol{Cycl}_n) = crcnf(\boldsymbol{Cycl}_n) = n$. $girth(\mathcal{Q}_3) = 4$, $crcnf(\mathcal{Q}_3) = 8$. $girth(\mathcal{Q}_d) = 4$, $crcnf(\mathcal{Q}_d) = 2^d$.

D26d.15 Supponiamo che i grafi G_1 e G_2 abbiano gli insiemi dei nodi disgiunti. Si dice **unione dei grafi** G_1 e G_2 l'espressione, $G_1 \dot{\cup} G_2 := \langle V_1 \dot{\cup} V_2, E_1 \dot{\cup} E_2 \rangle$.

L'operazione di unione si può estendere a più di due grafi aventi gli insiemi di nodi mutuamente disgiunti.
Per ottenere la raffigurazione di un grafo risultato di una unione disgiunta basta accostare le raffigurazioni dei grafi sui quali opera l'unione.

//input pD26d15

Chiaramente ogni grafo è unione delle sue componenti connesse. Inoltre l'insieme delle componenti connesse di un grafo ottenuto mediante unione dei grafi G_1, ..., G_c è l'unione degli insiemi delle componenti connesse dei vari grafi G_1, ..., G_c.

Questo scenario generalizza quello con l'unione di varie foreste dil cui insieme delle componenti connesse è unione degli insiemi degli alberi che sono le componenti connesse delle foreste.

D26d.16 Si dice **nodo di taglio** di un grafo G un nodo la cui rimozione aumenta il numero delle sue componenti connesse.
Si dice invece **ponte di un grafo** o **istmo di un grafo** un suo lato la cui rimozione aumenta il numero delle componenti connesse.

Evidentemente le estremità di un ponte sono due nodi di taglio.

Eil primo dei grafi che seguono presenta un nodo di taglio e nessun ponte. Il secondo presenta 5 nodi di taglio e 5 ponti.

//input pD26d16

D26 e. grafi bipartiti

D26e.01 Un grafo $G = \langle V, E\rangle$ è detto **grafo bipartito** sse il suo insieme di nodi V può essere diviso in due sottoinsiemi disgiunti V_1 e V_2 in modo che ogni lato di G colleghi un nodo di V_1 con un nodo di V_2.
La classe dei grafi bipartiti si denota con **GrfBp**.

Alberi e foreste sono particolari grafi bipartiti.

Si constata che la bipartizione dei nodi di un albero che lo rende un grafo bipartito è unica, mentre per una foresta costituita da m alberi questa bipartizione dei nodi si può effettuare in 2^{m-1} modi.

Le componenti connesse di un grafo bipartito nonconnesso sono grafi bipartiti connessi; viceversa l'unione di grafi bipartiti con insiemi di nodi disgiunti è ancora un grafo bipartito.
Quindi anche tra i grafi bipartiti interessano prevalentemente quelli connessi.

D26e.02 Prop. Un grafo è bipartito sse privo di cicli dispari.

Dim.: Ogni ciclo di lunghezza dispari evidentemente non può costituire un grafo bipartito. Sia G un grafo bipartito: ogni suo ciclo deve avere la forma $\langle q_1, p_1, q_2, p_2, ..., q_s, p_s, q_1\rangle$ con q_1, q_2, ..., q_s in uno dei due sottoinsiemi di nodi e p_1, p_2, ..., p_s nell'altro. Quindi ogni suo ciclo ha lunghezza pari (ed in particolare non può essere un cappio).

Sia ora G un grafo i cui cicli abbiano tutti lunghezza pari. Supponiamo che esso sia connesso e privo di nodi pendenti, cioè che abbia solo nodi circuitali. Preso un ciclo qualsiasi $\langle q_1, p_1, q_2, p_2, ..., q_s, p_s, q_1\rangle$, assegnamo q_1, q_2, ...,q_s a un primo sottoinsieme di nodi V_1 e poniamo p_1, p_2, ...,p_s nel secondo.
Successivamente si può procedere ad ampliare V_1 e V_2 considerando, uno alla volta, altri cicli che contengono nodi già assegnati a uno di questi insiemi e nodi non assegnati fino a completare la bipartizione che garantisce il trattarsi di grafo bipartito ▮

D26e.03 Introduciamo una notazione che ci sarà spesso utile per individuare insiemi di lati: se A e B sono due insiemi poniamo

$$A \times_s B \;:=\; \{\langle a, b\rangle \in A \times B \;⁆\; a \neq b | \{a, b\}\}$$

Osserviamo che $A \times_s B = B \times_s A$.
Si dice **grafo bipartito completo** con m ed n nodi un grafo della forma $\left\langle V_1 \dot\cup V_2, V_1 \times_s V_2\right\rangle$ con $V_1 \in \mathbf{Set}_m$ e $V_2 \in \mathbf{Set}_n$, dove, ricordiamolo, $\mathbf{Set}_n$ denota la collezione degli insiemi di n elementi.
In astratto esso si denota con $\mathcal{K}_{m,n}$.

Osserviamo che i grafi $\mathcal{K}_{1,n}$ sono le stelle.

La seguente figura mostra due semplici esempi di grafi bipartiti completi: $\mathcal{K}_{3,3}$ e $\mathcal{K}_{2,4}$.

//input pD26e03

Evidentemente $\mathcal{K}_{u,v} \cong \mathcal{K}_{v,u}$.
Le stelle $\mathcal{K}_{1,v}$ non presentano alcun ciclo.
$\mathcal{K}_{2,2}$ presenta invece un ciclo, anzi è $\mathcal{K}_{2,2} \cong \boldsymbol{Cycl}_4$.
$\mathcal{K}_{2,3}$ presenta tre cicli del tipo $\boldsymbol{Cycl}_4$, mentre $\mathcal{K}_{3,3}$ ne presenta $\binom{3}{2}\binom{3}{2} = 9$ del tipo $\boldsymbol{Cycl}_4$ ed 1 del tipo $\boldsymbol{Cycl}_6$.

In generale per $u \leq v$ $\mathcal{K}_{u,v}$ presenta $\binom{u}{k}\binom{v}{k}$ cicli del tipo $\boldsymbol{Cycl}_{2k}$ per $k = 2, ..., u$.

D26e.04 Introduciamo una generalizzazione dei grafi bipartiti. Consideriamo a questo scopo $k = 2, 3, ...$

Si dice **grafo k-partito** ogni grafo $G = \langle Q, E \rangle$ tale che Q si può ripartire in k insiemi disgiunti Q_1, Q_2, ..., Q_k e ogni lato $\{p, q\}$ presenta la prima estremità in certo Q_i e la seconda in un $Q_j \neq Q_i$.

Si dice **grafo k-partito completo** sui k insiemi disgiunti V_1, V_2, ..., V_k il grafo

$$\mathcal{K}_{V_1,...,V_k} := \Big\langle V_1 \dot\cup V_2 \dot\cup ... \dot\cup V_k \ , \ \dot\cup_{1 \leq i < j \leq k} V_i \times_s V_j \Big\rangle.$$

Le classi di isomorfismo di questi grafi sono caratterizzate solo dal multiinsieme dei cardinali degli insiemi V_i. Per esempio $\mathcal{K}_{1,1,4}$ e $\mathcal{K}_{2,3,4}$ sono individuate dalle figure

//input pD26e04

D26 f. isomorfismo e simmetria per grafi nonorientati

D26f.01 I grafi nonorientati sono le strutture per le quali si possono introdurre nel modo più semplice nozioni di grande portata come quelle di isomorfismo, di invarianti e di gruppo di simmetria.
Cominciamo con il riprendere la nozione di isomorfismo.

Consideriamo due grafi $G :=: \langle Q, E\rangle$ ed $H :=: \langle P, F\rangle$. Essi si dicono **grafi isomorfi** sse si trova una corrispondenza biunivoca β, tra i due insiemi di nodi Q e P che preserva l'adiacenza tra nodi, cioè induce una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi di spigoli E ed F. La suddetta biiezione $\beta \in \lceil V \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright W \rceil$ è chiamata **isomorfismo tra i grafi** G ed H.

Per enunciare che G ed H sono grafi isomorfi si scrive specificamente $G \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Grf} H$ o più semplicemente $G \cong H$; per indicare che β è un isomorfismo tra G ed H si scrive $\beta \in \lceil G \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Grf} H \rceil$.
Questa scrittura equivale alla seguente:

$$\beta \in \lceil G \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright H \rceil \;\; ¶ \;\; F = \big\{\{q, r\} \in E :| \;\{\beta(q), \beta(r)\}\big\} \;.$$

Si definisce **invariante di un grafo** G è una entità (valore numerico, insieme, funzione, relazione, proprietà, ...) associata a G che ha lo stesso valore per ogni grafo isomorfo al detto G.
Tra gli invarianti dei grafi si individuano l'ordine, il grado, il numero delle componenti connesse, il nomero dei cicli e tanto altro.

D26f.02 Consideriamo ad esempio i due grafi:

//input pD26f02

e la corrispondenza biunivoca tra i due insiemi di nodi

$$\left\downarrow\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & c & e & b & d & g & h & f \end{matrix}\right\downarrow \;;$$

essa li rende grafi isomorfi.

Tra il primo e il secondo dei seguenti grafi:

//input pD26f02B

si ha l'isomorfismo:

$$\left\downarrow\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ a & c & e & b & d & f & h & j & g & i \end{matrix}\right\downarrow$$

Tra il primo e il terzo si ha invece l'isomorfismo:

$$\left\downarrow\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ A & B & C & D & G & F & I & H & E & J \end{matrix}\right\downarrow$$

D26f.03 Non sono invece isomorfi i grafi:

//input pD26f03

È quindi evidente che condizione necessaria ma non sufficiente per l'isomorfismo di due grafi è il fatto che essi abbiano lo stesso numero di nodi e di lati.

D26f.04 Il problema di stabilire se due grafi nonorientati G e H (aventi lo stesso ordine n e lo stesso grado) sono isomorfi o meno è un problema di grande importanza, in quanto molte situazioni di interesse matematico, informatico o applicativo sono schematizzate da strutture grafiche e i grafi nonorientati sono le più semplici tra tali strutture.

Senza una analisi preliminare delle caratteristiche dei due grafi, si dovrebbe cercare un isomorfismo entro le $n!$ corrispondenze biunivoche tra i due insiemi di nodi; per n elevato si tratterebbe di un lavoro enormemente oneroso.

Una tale ricerca si può sveltire notevolmente osservando che, in un isomorfismo, si devono associare nodi aventi le stesse caratteristiche puramente relazionali, cioè le stesse proprietà concernenti i collegamenti con gli altri nodi, ossia gli stessi invarianti per isomorfismo.

È evidente che due nodi corrispondenti per isomorfismo devono avere lo stesso grado. Altri invarianti utili per individuare l'isomorfismo sono quindi i numeri dei nodi aventi valenza pari a 0,1,2,....
Dunque il multigrado di un grafo è un altro invariante per isomorfismo e un'altra condizione necessaria per l'isomorfismo di G ed H è la coincidenza dei relativi multigradi. Osserviamo che l'uguaglianza $Mdeg(G) = Mdeg(H)$ implica le coincidenze di grado ed ordine dei due grafi.

Se si deve stabilire l'isomorfismo di due grafi aventi un multigrado del tipo $d^3e^4f^5$, naturalmente si dovrà cercare una biiezione nella quale ciascuno dei 3 nodi di grado d di G sia associato ad un nodo d-valente di H, ciascuno dei 4 di grado e lo sia a un pari grado di H e ciascuno dei 5 nodi di grado f sia in corrispondenza con uno dei 5 rimanenti di H. Quindi delle $(3 + 4 + 5)! = 12! = 479\,001\,600$ biiezioni a priori possibili è sufficiente prenderne in considerazione $3!4!5! = 172\,80$.

D26f.05 Altre caratteristiche essenziali dei grafi sono i cammini (ed in particolare quelli chiusi) delle diverse lunghezze (in particolare i cammini massimali): in un isomorfismo a ogni cammino (chiuso) deve corrispondere un percorso (chiuso) della stessa lunghezza.

Sono quindi invarianti proprietà come la aciclicità o meno, il numero delle componenti connesse (ed in partic. la connessione), il multiinsieme degli ordini delle componenti connesse, il multiinsieme delle lunghezze dei cicli, il multiinsieme delle lunghezze dei cammini massimali.

Osserviamo che, qualora si tenga conto delle caratteristiche dei cammini, non serve tener conto di quelle di percorsi e passeggiate, in quanto ciascuna di queste configurazioni si riduce a composizione di cammini.

Nella ricerca di un effettivo isomorfismo può essere molto utile ridurre le corrispondenze da esaminare chiedendo che a nodi circuitali corrispondano nodi circuitali, a nodi su un cammino massimale di data lunghezza corrispondano nodi su cammini massimali analoghi etc.

D26f.06 Sarebbe molto vantaggioso individuare i cosiddetti **insiemi completi di invarianti**, sistemi di invarianti che permettono di individuare univocamente ogni classe di equivalenza di grafi.

In tal caso si potrebbe affrontare il problema dell'isomorfismo tra G ed H procedendo a controllare la coincidenza di successivi invarianti, decidendo il non isomorfismo qualora un invariante non abbia lo stesso valore per G ed H e riuscendo a decidere l'isomorfismo qualora tutti gli invarianti superino i tests di coincidenza.

In effetti per una specie di strutture variegata come i grafi si conoscono solo invarianti la cui diversità permette di stabilire che due grafi sono non isomorfi, i quali cioè portano a condizioni necessarie ma non sufficienti all'isomorfismo.

D26f.07 I grafi, come le strutture discrete di ogni altra specie, possono essere studiati, essenzialmente, in due modi.

Un grafo può essere considerato come un oggetto matematico ben specifico, costruito a partire da altri oggetti ben determinati. In tale caso la stessa costruzione del grafo può essere piuttosto impegnativa, o in quanto richiede di tenere sotto controllo molti nodi e molti lati, o in quanto la stessa individuazione dei nodi richiede un lavoro non trascurabile.

Operando in questo modo, può essere necessario individuare i nodi ed i lati del grafo con scritture ben precise ed elaborate; inoltre lo studio del grafo può condurre a configurazioni per le quali anche la reinterpretazione può risultare onerosa.

Un secondo modo di studiare un grafo G, viceversa, prescinde dalla identità dei suoi nodi e riguarda esclusivamente le sue proprietà derivanti dai collegamenti esistenti tra i suoi nodi.
Questo studio (più astratto) porta a risultati che valgono anche per ogni altro grafo H che si può considerare ottenuto da G solo per la modifica degli identificatori dei suoi nodi: i nodi di H si possono porre in corrispondenza biunivoca con quelli di G in modo che $Edg(H)$, l'insieme dei lati di H, sia posto in corrispondenza biunivoca con $Edg(G)$. Con questo tipo di studi si possono ottenere notevoli economie di pensiero.

Possiamo comunque affermare che le grandezze e le proprietà invarianti individuano le caratteristiche sostanziali dei grafi nonorientati.

D26f.08 Le nozioni di isomorfismo e di invarianti sono nozioni matematiche assai generali e molto importanti.
In effetti la nozione di isomorfismo si può introdurre per tutte le specie di strutture, a cominciare dai digrafi e dai vari arricchimenti e specializzazioni di grafi e digrafi.

Per tutte le specie di strutture si può quindi parlare di invarianti per isomorfismo (quantità invarianti, funzioni invarianti, multiinsiemi invarianti, polinomi invarianti, proprietà invarianti, ...).

Tra le peculiarità di una specifica struttura S di una specie $\mathbf{S}$ è importante saper distinguere tra quelle invarianti per isomorfismo e le rimanenti.

Queste ultime dipendono da qualche particolare della sua definizione, ovvero della costruzione che ha condotto ad S, e quindi in genere non sono trasferibili alle altre strutture della stessa specie $\mathbf{S}$.

Gli invarianti per isomorfismo si possono considerare caratteristiche "essenziali", cioè elementi sui quali è opportuno concentrare gran parte dello studio delle strutture.
Infatti il chiarimento di fatti riguardanti queste caratteristiche per una struttura particolare S (un grafo nonorientato, un digrafo,...) costituisce un chiarimento per tutte le strutture della specie $\mathbf{S}$ isomorfe ad S stessa.
Quindi si tratta di una conoscenza utilizzabile non episodicamente, ma per una estesa gamma di situazioni.
La individuazione di un isomorfismo e di un invariante, quindi, possono portare a notevoli economie di pensiero.

Quando un grafo viene studiato senza considerarlo costruito a partire da oggetti particolari, interessano soprattutto le sue proprietà invarianti.
Quindi nell'ambito della costruzione delle conoscenze matematiche le classi di isomorfismo rivestono un interesse maggiore dei singoli grafi.
Tuttavia spesso è possibile ottenere ampie informazioni sopra una intera classe di isomorfismo attraverso l'esame di un suo ben determinato rappresentante che deve essere scelto con oculatezza.

In linea di massima la scelta di un elemento esemplare, chiamato **rappresentativo della classe di isomorfismo**, deve preocciparsi sia della semplicità della formulazione, sia della completezza delle caratteristiche dell'esemplare.
Nel caso dei grafi nonorientati (e di altre strutture grafiche) gioca un ruolo importante la scelta di una opportuna raffigurazione.

D26 g. costruzioni sui grafi nonorientati

D26g.01 Abbiamo già visto l'unione disgiunta di due o più grafi; Analizziamo ora altre importanti composizioni, trasformazioni e relazioni riguardanti i grafi nonorientati.

Consideriamo due grafi $G_i = \langle V_i, E_i \rangle$ con $i = 1, 2$.
Si dice **unione dei grafi** G_1 e G_2, $G_1 \cup G_2 \ := \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle$.
Si dice **intersezione dei grafi** G_1 e G_2, $G_1 \cap G_2 \ := \langle V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2 \rangle$.

Le operazioni di intersezione e unione si estendono senza difficoltà a più di due grafi e risultano associative.

D26g.02 Spesso interessano sottografi con particolari proprietà: abbiamo già incontrato i sottopercorsi, i sottocammini, i cicli, i sottografi connessi e i sottoalberi e incontreremo i sottoblocchi e i sottografi completi.

Tra i sottografi di un certo tipo talora interessa scegliere quelli che presentano un numero minimo oppure un numero massimo di nodi o lati: questi vengono qualificati risp. con gli aggettivi *minimale* e *massimale*.

D26g.03 Si chiama **complementare di un grafo semplice** $G = \langle V, E \rangle$ il grafo

$$G^{cg} \ := \langle V, V^{\mathfrak{P}_2} \setminus E \rangle \ .$$

Spesso il grafo complementare di un grafo denotato G si usa denotare con $\overline{G}$.
Chiaramente la complementazione è un'involuzione tra grafi semplici.
Esempi di coppie di grafi complementari:

//input pD26g03

Un grafo si dice **grafo autocomplementare** sse è isomorfo al proprio complementare. Esempi di grafi autocomplementari sono:

//input pD26g03

Il grafo complementare del grafo completo di ordine v, $\overline{\mathcal{K}}_v$, è il grafo completamente sconnesso con v nodi, ovvero il grafo 0-regolare di ordine v.

D26g.04 Se $U \subset V$ si dice **restrizione del grafo** G relativa al sottoinsieme di nodi U, il sottografo di G, denotato $G\rceil_U$, ottenuto eliminando tutti i nodi in $V \setminus U$ e tutti i lati adiacenti ad almeno uno di essi. Chiaramente si può scrivere

$$G\rceil_U \ := \langle U \ , \ E \cap (U \times_s U) \rangle \ .$$

La **rimozione di un lato** e **da un grafo** G è il sottografo ricoprente di G costituito da tutti i lati di G ad eccezione di e: esso si denota con $G - e \ := \ \langle Q, E \setminus e \rangle$.

La **rimozione di un nodo** p **da un grafo semplice** $G = \langle V, E \rangle$ è il sottografo di G costituito da tutti i nodi di G a eccezione di p, e da tutti i lati non incidenti con p. Esso si può introdurre scrivendo

$$G - p \ := \langle V \setminus p \ , \ E \setminus (p \times_s V) \rangle$$

.

$G|_U$ si ottiene attraverso le rimozioni dei nodi in $V \setminus U$, rimozioni attuabili secondo un ordine che si può scegliere ad arbitrio.

//input pD26g04

Rimuovendo da un grafo semplice un nodo e uno spigolo si ottiene un altro grafo semplice.
Ogni restrizione di un grafo semplice è un grafo semplice.
Con la rimozione da $\mathcal{K}_v$ di h nodi, con $0 < h < v$, si ottiene $\mathcal{K}_{v-h}$.

Rimuovendo da Path_n una delle sue due estremità si ottiene Path_{n-1}; rimuovendo un nodo interno si ha l'unione disgiunta di Path_h e di Path_{v-h-1} per $h = 1, ..., \lfloor V/2 \rfloor$.
La rimozione di un nodo di $\boldsymbol{Cycl}_n$ porta a Path_{n-1}.

Chiaramente se G è connesso ed e è un suo lato accade che $G - e$ è connesso sse e fa parte di un suo ciclo.

D26g.05 Consideriamo ancora due grafi $G_i = \langle V_i, E_i \rangle$ con $i = 1, 2$.
Si dice **somma [completa] dei grafi** G_1 e G_2:

$$G_1 + G_2 \ := \Big\langle \ V_1 \dot\cup V_2 \ , \ E_1 \ \dot\cup E_2 \ \dot\cup V_1 \times_s V_2 \ \Big\rangle \ .$$

//input pD26g05

Si vede facilmente che $(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2) \cong \mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3 \cong \mathcal{K}_5$ e, più in generale, che

$$\forall v, w \in \mathbb{P} \ \vdots \ \ \mathcal{K}_v + \mathcal{K}_w \cong \mathcal{K}_{v+w} \ .$$

Tenendo presente la complementazione rispetto all'insieme dei nodi $(v + w]$ si trova anche che

$$\overline{\mathcal{K}}_v + \overline{\mathcal{K}}_w \cong \mathcal{K}_{v,w} \ .$$

Si trova inoltre per la ruota di ordine $v + 1$: $Wl_v \cong \mathcal{K}_1 + \boldsymbol{Cycl}_v$.

D26g.06 Si dice **prodotto cartesiano dei grafi** G_1 e G_2

$$G_1 \times G_2 \ := \big\langle V_1 \times V_2, E' \dot\cup E'' \big\rangle, \text{ dove}$$

$E' \ := \ \big\{p' \in V_1 \wedge p_2 q_2 \in E_2 \ :| \ \{p' p_2, p' q_2\}\big\}$ ed $E'' \ := \ \big\{p'' \in V_2 \wedge p_1\, q_1 \in E_1 \ :| \ \{p_1\, p'', q_1\, p''\}\big\}$.

//input pD26g06

D26g.07 Definiamo **composizione dei grafi** G_1 e G_2 il costrutto $G_1[G_2] \ := \big\langle V_1 \times V_2, E' \dot\cup E'' \big\rangle$, dove
$E' \ := \ \big\{\{p' \in V_1 \wedge p_2\, q_2 \in E_2 \ :| \ p' p_2, p' q_2\}\big\}$ ed $E'' \ := \ \big\{p_1 q_1 \in E_1 \wedge p_2, q_2 \in V_2 \ :| \ \{p_1 p_2, q_1 q_2\}\big\}$.

//input pD26g07

Si constata facilmente che tutte queste composizioni se applicate a grafi semplici conducono a grafi semplici.

D26g.08 Si dice **aggiunto di un grafo semplice** $G = \langle Q, E\rangle$, e si denota con $\mathsf{adgrf}(G)$, il grafo i cui nodi sono i lati di G e i cui lati sono le coppie di lati di G incidenti, cioè aventi un nodo comune. Alcune coppie $\langle$ grafo , grafo aggiunto $\rangle$ sono le seguenti:

//input pD26g08

Inoltre si vede facilmente che $\mathsf{adgrf}(\mathcal{K}_{1,v}) \cong \mathcal{K}_v$.
Si osservi che l'aggiunto di G è un caso particolare di grafo intersezione, quello relativo alla collezione dei lati di G, ossia

$$\mathsf{adgrf}(G) \;=\; Intsgrf(\boldsymbol{Edg}(G)) \;.$$

Ricordiamo anche che invece di grafo aggiunto si usano talora i termini **grafo derivato** e **grafo dei lati** (*line graph*).

D26g.09 Il passaggio all'aggiunto si può considerare una endofunzione entro l'insieme dei grafi semplici astratti.

Di questa endofunzione si possono considerare anche le iterate $\mathsf{adgrf}^n(G) := \mathsf{adgrf}(\mathsf{adgrf}^{n-1}(G))$ per $n = 0, 1, 2, ...$ con $\mathsf{adgrf}^0(G) := G$ ed $\mathsf{adgrf}^1(G) = \mathsf{adgrf}(G)$.

Un punto fisso di questa endofunzione è ogni grafo isomorfo al proprio aggiunto, grafo chiamato **grafo autoaggiunto**.
Tutti i cicli sono evidentemente grafi autoaggiunti.

Il passaggio all'aggiunto non è una biiezione tra grafi: $\boldsymbol{Cycl}_3$ e la triade $\mathcal{K}_{1,3}$ sono due grafi non isomorfi aventi lo stesso autoaggiunto, $\boldsymbol{Cycl}_3$.

Il passaggio all'aggiunto non è neppure un'applicazione suriettiva, cioè vi sono grafi che non sono gli aggiunti di altri grafi. La triade è il più semplice grafo che non è aggiunto di alcun altro grafo.

Dalla definizione si ricava facilmente che a una sequenza di lati di G costituenti un cammino non chiuso di lunghezza s, corrisponde su $\mathsf{adgrf}(G)$ una sequenza di nodi costituenti un cammino non chiuso di lunghezza $s-1$: $\mathsf{adgrf}(\mathcal{P}_s) = \mathcal{P}_{s-1}$.

Di conseguenza: $\mathsf{adgrf}(G)$ è connesso sse G è connesso; il passaggio all'aggiunto mantiene il numero delle componenti connesse; ogni ponte di G che non sia lato pendente diventa in $\mathsf{adgrf}(G)$ un punto di taglio.
Accade anche che a ogni ciclo su G corrisponde un ciclo della stessa lunghezza su $\mathsf{adgrf}(G)$.

Il passaggio all'aggiunto, però, non mantiene la aciclicità.
Degli alberi solo i grafi cammino sono trasformati in grafi aciclici. Ad ogni nodo di grado $d \geq 3$ di un albero corrisponde una cricca $\mathcal{K}_d$ sul grafo aggiunto.

Due esempi di aggiunti di alberi sono:

//input pD26g09

D26g.10 **(1) Eserc.** Trovare i grafi aggiunti di scale e prismi.

(2) Eserc. Trovare i grafi aggiunti di griglie rettangolari e cilindriche.

(3) Eserc. Dimostrare che le griglie toroidali sono grafi autoaggiunti.

(4) Eserc. Trovare i grafi aggiunti delle stelle e dei grafi completi.

(5) Eserc. Dimostrare che $\mathcal{K}_{1,v}$ è il grafo aggiunto di $\lfloor v/2 \rfloor$ alberi.

D26 **h. alberi**

D26h.01 Gli alberi sono grafi con caratteristiche assai semplici, ma che rivestono grande interesse in quanto si rivelano strumenti in grado di contribuire alla comprensione e all'utilizzo di strutture discrete di complessità molto più elevata.

Gli alberi inoltre godono di molte proprietà e questo, come vedremo, rende possibile definirli in una grande varietà di modi che non è difficile dimostrare equivalenti. Questa situazione privilegiata è collegata naturalmente al fatto che posseggono numerose applicazioni dirette.

Cammini e stelle sono alberi particolari facilmente classificabili, in quanto individuabili, a meno di isomorfismi, con un solo parametro numerico.
Alberi più complessi presentano nodi con maggiore varietà di diramazioni.

La distinzione più importante per i nodi di un albero è quella che separa i nodi pendenti, ossia nodi di valenza 1, dai rimanenti.
Tra i nodi non pendenti vanno distinti quelli di valenza 2 da quelli di valenza superiore; questi ultimi sono detti "snodi" o **nodi di diramazione**.

Risulta interessante caratterizzare gli alberi con il multiinsieme dei gradi dei suoi nodi *Mdeg*.
Come si è visto $Mdeg(\mathcal{P}_v) = 1^2\, 2^{v-2}$ e $Mdeg(Wl_v) = 1^v\, v$.

D26h.02 Gli alberi sono facilmente componibili e decomponibili. Dato un albero T, si può aggiungere a uno qualsiasi dei suoi nodi un nuovo lato ottenendo un nuovo albero. Questo presenta un nodo in più e un lato in più di T.
Quindi ogni albero si può ottenere dal grafo nodo per successive aggiunte di lati incidenti in un solo nodo dell'albero precedente.

Ogni albero T diverso dal grafo nodo, quindi, si può porre in corrispondenza con gli alberi ottenuti da esso eliminando un nodo e un lato pendente (alberi immediatamente più poveri di T) e con gli alberi ottenuti arricchendo T con un nuovo lato e un nuovo nodo pendente; questi alberi si possono dichiarare "alberi immediatamente più ricchi di T".
Quindi risulta naturale considerare l'insieme degli alberi astratti ripartito nelle classi degli alberi relative ai successivi ordini.

Da queste considerazioni risulta anche, per induzione, che ogni albero con v nodi possiede $v-1$ lati.

Dati due alberi qualsiasi, fondendo due nodi arbitrariamente scelti l'uno sul primo albero, l'altro sul secondo, si ottiene un nuovo albero. L'ordine di questo è la somma dei due ordini diminuita di 1 (e il grado la somma dei due gradi).

Anche congiungendo due nodi scelti come sopra attraverso un nuovo lato si ottiene ancora un albero; l'ordine di questo è la somma degli ordini dei due alberi collegati e il grado è la somma dei gradi dei due alberi aumentata di 1.

È semplice anche la composizione dei multigrafi derivata da queste due costruzioni.

D26h.03 I cammini massimali di un albero sono in biiezione con le coppie di suoi nodi pendenti.
Diametro di un albero è la massima tra le lunghezze dei suoi cammini massimali.

D26h.04 Le proprietà fondamentali degli alberi sono riassunte nel teorema che segue.

Teorema Sia G un grafo semplice con v nodi ed e lati; le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) G è un albero, cioè è un grafo connesso e aciclico.
(b) Due nodi arbitrari di G sono collegati da un unico cammino.
(c) G è connesso e $v = e + 1$.
(d) G è aciclico e $v = e + 1$.
(e) G è aciclico e se due qualsiasi nodi non adiacenti p e q di G sono collegati dal nuovo lato pq, allora $G + pq$ presenta esattamente un ciclo.
(f) G è connesso, se $v \geq 3$ non è isomorfo a $\mathcal{K}_v$ e scelti arbitrariamente due nodi p e q non adiacenti di G, allora il grafo ottenuto collegando tali nodi, $G + pq$, presenta esattamente un ciclo.
(g) G non è isomorfo a $\mathcal{K}_3 \dot\cup \mathcal{K}_1$ né a $\mathcal{K}_3 \dot\cup \mathcal{K}_2$, $v = e + 1$ e, scelti arbitrariamente due nodi p e q non adiacenti di G, allora $G + pq$ ha esattamente un ciclo.
– È connesso minimale: togliendogli uno spigolo qualsiasi viene sconnesso.
– È aciclico e collegando con uno spigolo due suoi nodi qualsiasi diventa ciclico.

D26h.05 Per varie applicazioni, dato un grafo nonorientato G, interessa individuare qualche suo sottografo aciclico, ossia qualche sua sottoforesta.

Eliminando da una foresta qualche spigolo e i nodi che incidono solo in spigoli eliminati, si ottiene ancora una foresta.
Di conseguenza di un grafo G interessano soprattutto le sue **sottoforeste massimali**, cioè le sottoforeste il più possibile estese; le restanti sottoforeste: infatti, si ottengono da queste attraverso eliminazioni che si possono scegliere come si vuole.

Nel caso di un grafo connesso G le sottoforeste massimali sono sottoalberi: infatti ogni sottoforesta nonconnessa di G può essere estesa aggiungendole un percorso che abbassi il numero delle sue componenti connesse, cioè può essere estesa fino a diventare un sottoalbero. Di un grafo connesso, quindi, interessano prevalentemente i **sottoalberi massimali**.

Le sottoforeste massimali di un grafo nonconnesso G sono le unioni dei sottoalberi massimali dei grafi che costituiscono le componenti connesse di G.
Il sottoalbero massimale di un grafo connesso di n nodi tocca tutti i suoi nodi ed ha quindi $n - 1$ spigoli.
Si conclude quindi facilmente che, per una foresta $G = \langle Q, E\rangle$ si ha $|Q| = |E| + connx(G)$.

D26 **i. separabilità e blocchi dei grafi**

D26i.01 **Prop.** Un nodo c di un grafo $G = \langle Q, E \rangle$ è un nodo di taglio sse esistono in Q due nodi diversi v e w tali che c giace su ciascuno degli (v, w)-cammini.

Un grafo è detto **grafo nonseparabile** sse ha almeno due nodi, è connesso ed è privo di nodi di taglio.

Si dice **grafo blocco** un grafo semplice nonseparabile.
Il grafo blocco più ridotto è il triangolo $\boldsymbol{Cycl}_3$.

Si dice **sottoblocco di un grafo** G un suo sottografo che sia blocco, cioè un sottografo privo di cappi e nonseparabile.
Tra i sottoblocchi di un grafo interessano prevalentemente i massimali, in quanto i rimanenti si ottengono da questi per rimozione di nodi scelti ad arbitrio, rispettando solo la richiesta di rimanere con almeno tre lati.

D26i.02 Il seguente enunciato raccoglie varie caratterizzazioni della nozione di blocco:

Teorema Sia $G = \langle V, E \rangle$ un grafo semplice, connesso con almeno tre nodi; le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) G è un blocco.
(b) Per ciascuno dei duetti dei nodi di G i due elementi giacciono su uno stesso ciclo.
(c) Per ciascuna delle coppie costituite da un nodo e da un lato di G i due componenti iacciono su un ciclo comune.
(d) Per ciascuno dei duetti dei lati di G i due elementi giacciono su uno stesso ciclo.
(e) Per ciascuna terna costituita da due nodi e da un lato di G, esiste un cammino su G che collega i nodi e contiene il lato.
(f) Per ciascuna terna di nodi distinti di G, il grafo presenta un cammino che collega due di questi nodi e contiene il terzo.
(g) Per ciascuna terna di nodi distinti di G, il grafo presenta un cammino che collega due di essi e non contiene il terzo.

//input pD26i02