1

Capitolo D23
partizioni di interi

Contenuti delle sezioni

a. partizioni.i p. 2
b. forme di Ferrers p. 6
c. partizioni.i coniugate p. 10
d. reticolo di Young p. 13
e. reticolo di dominanza p. 14
f. formula di Eulero per le partizioni.i p. 16

17 pagine

D23 0.01 Le partizioni degli interi, che per distinguere dalle partizioni di insiemi chiamiamo preferibilmente **partizioni.i**, sono sequenze di interi positivi che si incontrano in molteplici elaborazioni sopra configurazioni discrete, in particolare per elaborazioni riguardanti i gruppi di permutazioni e le loro rappresentazioni.

Di queste entità, dopo averne data la definizione formale, vengono introdotte diverse rappresentazioni fedeli; tra queste si trovano le cosiddette forme di Ferrers, raffigurazioni piane che facilitano molte argomentazioni e la descrizione degli algoritmi che consentono di elaborare queste sequenze di interi, dato che formule tradizionali che si servono di operazioni aritmetiche hanno efficacia limitata.

Successivamente si tratta la relazione involutoria di coniugio tra partizioni.i, si individuano varie sottoclassi del loro insieme e le prime relazioni per i rispettivi cardinali.

Il complesso delle forme di Ferrers viene efficacemente organizzato nel cosiddetto reticolo di Young, il cui digrafo graduato consente di evidenziare come ciascuna di queste forme si può ottenere attraverso successive aggiunte di singole caselle.

L'insieme delle partizioni.i viene organizzato anche come poset basato sul cosiddetto ordinamento di dominanza.

Viene anche presentata la classica formula enumerativa di Eulero per i numeri delle partizioni dei vari interi positivi ottenibile con la tecnica delle funzioni generatrici.

D23 a. partizioni.i

D23 a.01 Sia n un intero positivo; con il termine partizione dell'intero n o **partizione.i** di n si intende una sequenza noncrescente di interi positivi

$$(1)\quad \langle \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \rangle =: \underline{\lambda} \qquad \text{tale che} \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = n \quad \text{e} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k > 0 \ .$$

I componenti della sequenza $\underline{\lambda}$ li chiamiamo **addendi della partizione.i** $\underline{\lambda}$; la sua lunghezza k, intero per il quale deve essere $1 \leq k \leq n$, viene chiamata **numero degli addendi della partizione.i**; n viene anche detto **peso della partizione.i** $\underline{\lambda}$.

Con **lprtn** denotiamo l'insieme delle partizioni dei vari interi positivi, con $\textbf{lprtn}_n$ l'insieme delle partizioni dell'intero n e con $\textbf{lprtn}_{n,k}$ l'insieme delle partizioni dell'intero n che presentano k addendi.

Spesso si scrive

$$(2)\qquad \underline{\lambda} \ = \ [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k] \ \in \ \textbf{lprtn}_n$$

per dichiarare che la sequenza $\langle \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \rangle$ è una partizione.i di $n := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$. La scritture precedente è chiamata **rappresentazione canonica della partizione.i** i $\underline{\lambda}$.

Questa rappresentazione evidenzia il fatto che ogni partizione di intero si può identificare con una funzione del genere $\lceil\, \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} \,\rceil$, cioè con un multiinsieme. Più accuratamente una partizione.i si identifica con una funzione noncrescente di un genere $\lceil\, (k] \longmapsto (\mathrm{s}\,] \,\rceil$ per k e s interi positivi e quindi con un multiinsieme avente come dominio un intervallo $(k]$ [D20c].

D23 a.02 Un altro modo per presentare una partizione.i è dato dalla sua cosiddetta **rappresentazione esponenziale della partizione.i**:

$$(1)\qquad \underline{\lambda} = {\lambda_{(1)}}^{h_1} ... {\lambda_{(r)}}^{h_r} \quad \text{con} \quad \lambda_{(1)} > \lambda_{(2)} > ... > \lambda_{(r)} > 0 \quad , \quad h_1, h_2, ..., h_r \in \mathbb{P} \ .$$

Per ogni $j = 1, 2, ..., r$ l'intero positivo h_j dice che la partizione.i presenta h_j addendi uguali a $\lambda_{(j)}$; esso viene detto **molteplicità della partizione.i** $\lambda_{(j)}$.

Chiaramente deve essere:

$$(2)\qquad \sum_{j=1}^{r} h_j \, \lambda_{(j)} \ = \ n \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{r} h_j \ = \ k \ .$$

Per esempio la partizione dell'intero 17 in 6 addendi individuata dalla rappresentazione canonica $\underline{\lambda} = [5, 4, 4, 2, 1, 1]$, ha come rappresentazione esponenziale $\underline{\lambda} = 5^1 4^2 2^1 1^2$; evidentemente si trova

$$(3)\qquad \sum_{j=1}^{6} h_j \cdot \lambda_{(j)} = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 17 \ .$$

Per controllare queste due rappresentazioni delle partizioni.i e altre che introdurremo più avanti, sono utilizzabili, oltre a sistemi di relazioni numeriche contenenti vari condizionamenti, vari algoritmi immaginabili piuttosto facilmente.
In particolare non è difficile individuare gli algoritmi che consentono di trasformare la rappresentazione canonica di una partizione.i nella corrispondente esponenziale e viceversa.

Talora è utile esprimere una partizione.i $\underline{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k]$ con la variante della notazione esponenziale che fa riferimento all'intera sequenza decrescente degli interi da λ_1 a 1 e utilizza esponenti che possono essere nulli.
Abbiamo quindi notazioni della forma $\underline{\lambda} = m^{\eta_m}(m-1)^{\eta_{m-1}} \cdots 1_1^{\eta}$, con $m := \lambda_1$ e $\forall j = m, m-1, ..., 1 \,:\, \eta_j \geq 0$.
Questa notazione può essere utilmente abbreviata con la scritture $\underline{\lambda} = [[\eta_m, \eta_{m-1}, ..., \eta_1]]$. Ad esempio $[7,7,5,4,4,2,2,2,1,1] = [[2,0,1,2,0,3,2]]$.

D23 a.03 Una partizione di intero si dice **partizione.i semplice** o **partizione.i iniettiva** sse tutti i suoi addendi sono distinti, ovvero sse come funzione del genere $\lceil\, \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} \,\rceil$ è iniettiva, ossia sse tutte le sue molteplicità sono uguali ad 1. Per una tale partizione

$$\underline{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_k] = {\lambda_{(1)}}^{h_1} ... \ {\lambda_{(r)}}^{h_r} \quad \text{si ha} \quad r = k \quad \text{e} \quad \forall i = 1, ..., k \,:\, \lambda_i = \lambda_{(i)} \ , \ h_i = 1 \ .$$

Per esempio, l'intero 5 possiede le seguenti 11 partizioni

[5] [4,1] [3,1,1] [2,1,1,1] [1,1,1,1,1]
[3,2] [2,2,1]

e di queste solo tre sono semplici:

[5] [4,1] [3,2] .

Le partizioni di 6 sono invece

[6] [5,1] [4,1,1] [3,1,1,1] [2,1,1,1,1] [1,1,1,1,1,1]
[4,2] [3,2,1] [2,2,1,1]
[3,3] [2,2,2]

e le partizioni semplici sono queste quattro:

[6] [5,1] [4,2] [3,2,1] .

D23 a.04 Denotiamo con lprtnS l'insieme delle partizioni semplici di interi, con lprtnS_n l'insieme delle partizioni semplici di $n \in \mathbb{P}$, con $\mathsf{lprtnS}_{n,k}$ l'insieme delle partizioni semplicidi n in k addendi (ovvero l'insieme delle partizioni semplici di area n e lunghezza k) e con $\mathsf{lprtnS}_{n,k}$ l'insieme delle partizioni semplici di n in k addendi.

Passando ai cardinali nel presente capitolo denotiamo semplicemente con $p_{n,k}$ il numero di tutte le partizioni di n in k addendi, con $q_{n,k}$ il numero di tutte le partizioni semplici di n in k addendi, con p_n il numero di tutte le partizioni di n, e con q_n il numero di tutte le partizioni semplici di n.

$$(1) \qquad p_{n,k} := |\mathsf{lprtn}_{n,k}| \qquad q_{n,k} := |\mathsf{lprtnS}_{n,k}| \qquad p_n := |\mathsf{lprtn}_n| \qquad q_n := |\mathsf{lprtnS}_n| \ .$$

Per esempio, per $n = 5$, abbiamo $p_{5,1} = 1$, $p_{5,2} = 2$, $p_{5,3} = 2$, $p_{5,4} = 1$, $p_{5,5} = 1$, $q_{5,1} = 1$, $q_{5,2} = 1$, $q_{5,3} = q_{5,4} = q_{5,5} = 0$.
Per $n = 6$ abbiamo invece $p_{6,1} = 1$, $p_{6,2} = 3$, $p_{6,3} = 3$, $p_{6,4} = 2$, $p_{6,5} = 1$, $p_{6,6} = 1$, $q_{6,1} = 1$, $q_{6,2} = 2$, $q_{6,3} = 1$, $q_{6,4} = q_{6,5} = q_{6,6} = 0$.

Dato che un intero positivo n non si può esprimere come somma di più di n numeri positivi, è lecito assumere

$$(2) \qquad \forall k > n \ : \ p_{n,k} = q_{n,k} = 0 \ .$$

In tal modo si possono trattare gli interi $p_{n,k}$ e gli interi $q_{n,k}$ come entrate di matrici numerabili. Vedremo che per talune considerazioni può essere utile consentire che i parametri n e k assumano il valore 0 e quindi si prendano in considerazione matrici del genere $\lceil\, \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N} \,\rceil$.

D23 a.05 È evidente che esiste un unico modo per scrivere qualsiasi positivo n come somma di un solo positivo ($[n]$) e un solo modo per scrivere n come somma di n positivi ($[1, 1, ..., 1]$); inoltre se $n = 2, 3, ...$ esiste un solo modo di esprimerlo come somma di $n-1$ positivi, in corrispondenza con la partizione.i $[2, 1, ...1] = 2\,1^{n-2}$; quindi in generale

$$\forall n \in \mathbb{P} \;:\; p_{n,1} = p_{n,n-1} = p_{n,n} = 1 \;. \tag{1}$$

Per molti sviluppi e per semplificare alcune formule di ricorrenza risulta comodo assumere che l'intero 0 si possa esprimere solamente come somma di zero addendi positivi e coerentemente associare al numero naturale 0 una sola partizione.i data dalla sequenza vuota che qui denotiamo con "[]"; quindi si assume:

$$\text{per}\;\; k = 0 \;,\quad p_{0,0} := q_{0,0} := 1 \quad ; \quad \text{per}\;\; k > 0 \;,\quad p_{0,k} = q_{0,k} = 0 \;. \tag{2}$$

Questo è uno dei casi in cui risulta comoda la convenzione di Knuth $0^k \;:=\; \delta_K(k = 0)$; questa consente di scrivere

$$\forall k \in \mathbb{N} \;:\; p_{0,k} = q_{0,k} = 0^k \;. \tag{3}$$

Si hanno inoltre le ovvie uguaglianze

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} \qquad , \qquad q_n = \sum_{k=0}^{n} q_{n,k} \;. \tag{4}$$

D23 a.06 Le considerazioni precedenti e semplici elencazioni consentono di giungere per i numeri di partizioni.i a tabelle come quelle che seguono.

$p_{n,k} = |\mathbf{lprtn}_{n,k}|$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8		
n											
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	1	1							
4	0	1	2	1	1						
5	0	1	2	2	1	1					
6	0	1	3	3	2	1	1				
7	0	1	3	4	3	2	1	1			
8	0	1	4	5	5	3	2	1	1		
9	0	1	4	7	6	5	3	2	1	1	
10	0	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1

$q_{n,k} = |\mathsf{lprtnS}_{n,k}|$

n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	1			
3	0	1	1		
4	0	1	1		
5	0	1	2		
6	0	1	2	1	
7	0	1	3	1	
8	0	1	3	2	
9	0	1	4	3	
10	0	1	4	4	1

$p_n = |\mathsf{lprtn}_n|$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p_n	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
p_n	792	1002	1255	1575	1958	2436	3010	3718	4565	5604	6842	8349	10143	12310

n	35	36	37	38	39	40	50	100	200
p_n	14883	17977	21637	26015	31185	37338	204 226	190 569 292	3 972 999 029 388

$q_n = |\mathsf{lprtnS}_n|$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
q_n	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22

D23 a.07 Le successioni $\langle n \in \mathbb{P} :| p_n \rangle$ e $\langle n \in \mathbb{N} :| q[n] \rangle$ sono state ampiamente studiate. Esse in particolare vengono trattate nella `OEIS (we)` e in questo importante archivio identificate, risp., dalle sigle A000041 e A000009.

Ricordiamo che a lungo si è cercata senza successo un'espressione analitica finita per queste funzioni. Sono state ottenute invece delle importanti espressioni asintotiche che presenteremo in :e .

Infine va segnalato che recentemente, per merito soprattutto di Ken Ono, si è scoperto che $\langle n \in \mathbb{P} :| p_n \rangle$ possiede una struttura frattale [`Partizioni di interi (wi)`, `Partition (number theory) (we)`].

D23 b. forme di Ferrers

D23 b.01
Ricordiamo che si definisce come **forma di Ferrers della partizione.i** o diagramma di Ferrers che raffigura la partizione.i $\underline{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k]$ dell'intero $n := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$; e si denota con $\mathsf{Ffop}(\underline{\lambda})$, il sottoinsieme della scacchiera completa $n \times n$ costituito dalle prime λ_1 caselle della prima riga, dalle prime λ_2 caselle della seconda riga,..., dalle prime λ_k caselle della k-esima riga:

(1) $$\mathsf{Ffop}(\underline{\lambda}) \ := \ \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \ \P \ 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \lambda_i\} \ .$$

Alla precedente forma di Ferrers si attribuiscono l'area n e la lunghezza k.

Nel seguito abbrevieremo il termine "Forma di Ferrers" con **forma-F**.

D23 b.02 Per esempio le forme di Ferrers per le partizioni.i $[5,3,1]$, $[6,4,3,3,1]$ e $[7,5,5,4,3,3,2,1,1]$ sono, risp.:

Le forme di Ferrers si possono pensare come costituite da tessere da mosaico quadrate con le stesse estensioni.
Il loro numero viene quindi chiamato area o peso della forma e per tale numero positivo relativo alla forma Φ adottiamo la scrittura $|\Phi|$.
Queste espressioni facilitano la descrizione e la visualizzazione di molte manovre riguardanti la partizioni.i, le equivalenti forma di Ferrers e i loro importanti arricchimenti costituiti dai tableaux di Young [D42].

D23 b.03 Definiamo **diagonale di una forma di Ferrers** Φ l'insieme di tutte le caselle delle posizioni $\langle i,i \rangle$.
Si dice **rango di una forma di Ferrers** Φ il numero delle caselle che costituiscono la sua diagonale; tale intero positivo lo denotiamo con $\mathrm{rnk}(\Phi)$.
Tale rango si può anche attribuire alla partizione associata alla forma-F e si può scrivere $\mathrm{rnk}(\underline{\lambda}) := \mathrm{rnk}(\mathsf{Ffop}(\underline{\lambda}))$.

Chiaramente $\mathrm{rnk}[5,3,1] = 2$, $\mathrm{rnk}[6,4,3,3,1] = 3$ e $\mathrm{rnk}[7,5,5,4,3,3,2,1,1] = 4$.

Si dice **quadrato di Durfee di una partizione.i** $\underline{\lambda}$ il cui rango scriviamo $r := \mathrm{rnk}(\underline{\lambda})$ la forma-F $\mathsf{Ffop}(r^r) = \{i,j = 1,2,...,r :| \langle i,j \rangle\}$. Tale quadrato, come mostra la figura che segue, si può considerare un sottoinsieme di $\mathsf{Ffop}(\underline{\lambda})$.

Consideriamo l'intero positivo $R_n := \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. L'insieme dei ranghi delle partizioni dell'intero n è $(R]$; in altre parole, non si ha alcuna partizione di n con rango superiore ad R_n, mentre si trovano partizioni per ciascuno dei ranghi 1, 2, ..., R_n.

Si dicono **caselle promontorio della forma-F** $\mathsf{Ffop}(\underline{\lambda})$ le caselle di fine riga $\langle i, \lambda_i \rangle$ che non hanno una casella nella posizione (immediatamente) al di sotto, cioè tali che aut i è la lunghezza della partizione.i, aut $\lambda_{i+1} < \lambda_i$.

Per la partizione $\lambda = [5,4,4,2,1,1]$ la diagonale è data dalle caselle $\langle 1,1 \rangle$, $\langle 2,2 \rangle$, $\langle 3,3 \rangle$, mentre le caselle promontorio sono $\langle 1,5 \rangle$, $\langle 3,4 \rangle$, $\langle 4,2 \rangle$, $\langle 6,1 \rangle$, come appare evidente dalla seguente raffigurazione nella quale le caselle diagonali sono riempite con $\circ$ e le promontorio con $-$:

Si osserva che le caselle promontorio di una forma di Ferrers di n sono tutte e sole le caselle la cui eliminazione porta a una forma di Ferrers di $n-1$.
Nella figura precedente inoltre sono segnate con + tutte e sole le caselle di $\mathbb{P}\times\mathbb{P}$ ciascuna delle quali aggiunte alla forma-F di n porta a una forma-F di $n+1$.

D23 b.04 (1) Prop.: Per ogni $\langle n,k\rangle \in \mathbb{P}\times\mathbb{P}$ con $k\le n$, l'insieme delle partizioni.i di n in al più k addendi si può porre in biiezione con l'insieme delle partizioni di $n+k$ costituite esattamente da k addendi.

Dim.: Se $\underline{\lambda}$ è una partizione di n in al più k addendi, la sua forma di Ferrers è formata al più da k righe. Quindi se si aggiunge a **Ffop**($\underline{\lambda}$) una colonna di k caselle come prima colonna, si ottiene la forma-F di una partizione di $n+k$ in esattamente k parti.

Viceversa, se $\underline{\lambda}$ è una partizione di $n+k$ in k addendi, eliminando la prima colonna della sua forma (che ha k righe), si ottiene la forma di una partizione di n in al più k parti ∎

La proposizione è chiarita dalla seguente figura:

Passando ai cardinali possiamo dire che il numero delle partizioni.i di n in al più k parti è uguale al numero delle partizioni di $n+k$ in esattamente k parti; vale quindi l'uguaglianza:

$$p_{n+k,k} \;=\; p_{n,0}+p_{n,1}+\ldots+p_{n,k-1}+p_{n,k}\ . \tag{2}$$

D23 b.05 (1) Prop.: Per ogni $\langle n,k\rangle \in \mathbb{P}\times\mathbb{P}$ con $k\le n$, l'insieme delle partizioni di $n+k+1$ in $k+1$ addendi si può porre in biiezione con l'insieme costituito dalle partizioni di $n+k$ in k addendi e dalle partizioni di n in $k+1$ addendi.

Dim.: L'insieme delle partizioni.i di $n+k+1$ in $k+1$ addendi si bipartisce nel sottoinsieme formato dalle partizioni il cui ultimo addendo (il più piccolo) è 1 e nel sottoinsieme delle partizioni il cui l'ultimo addendo è almeno 2.
Il primo sottoinsieme è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle partizioni.i di $n+k$ in k parti, corrispondenza che si ottiene eliminando l'ultimo addendo. Il secondo sottoinsieme è in biiezione con le partizioni.i di n in $k+1$ parti e questa corrispondenza si ottiene eliminando la prima colonna, formata da $k+1$ caselle ∎

Passando ai cardinali dei due sottoinsiemi disgiunti abbiamo:

$$p_{n+k+1,k+1} \;=\; p_{n+k,k}+p_{n,k+1}\ . \tag{2}$$

D23 b.06 Prop. Per ogni $\langle n,k\rangle \in \mathbb{P}\times\mathbb{P}$ con $k\le n$, l'insieme delle partizioni.i semplici di $n+k+1$ in $k+1$ addendi è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle partizioni semplici di n in $k+1$ o in k addendi.

Dim.: Sia $\underline{\lambda}$ una partizione semplice di $n+k+1$ con $k+1$ addendi. La sua forma-F è formata da $k+1$ righe e la forma che si ottiene eliminando da essa la prima colonna è la forma-F di una partizione.i semplice di n in $k+1$ addendi se l'ultimo addendo λ_{k+1} è maggiore di 1, in k addendi se $\lambda_{k+1}=1$.
Viceversa, tutte le forme-F semplici di $n+k+1$ con $k+1$ righe si ottengono tutte una sola volta se alle forme-F semplici di n con $k+1$ righe o con k righe si aggiunge una prima colonna di $k+1$ caselle ∎

Passando ai cardinali otteniamo:

$$q_{n+k+1,k+1} \;=\; q_{n,k+1}+q_{n,k}\ . \tag{2}$$

D23 b.07 Prop. Per ogni $\langle n,k\rangle \in \mathbb{P}\times\mathbb{P}$ con $k\le n$, l'insieme delle partizioni.i di n in k addendi $\mathsf{lprtn}_{n,k}$ si può porre in biiezione con l'insieme delle partizioni.i semplici di $n+\binom{k}{2}$ in k parti $\mathsf{lprtnS}_{n+(k(k+1)/2),k}$.

Dim.: La biiezione corrisponde alla modifica della forma-F della prima partizione ottenuta aggiungendo alla sua prima riga $k-1$ caselle, alla sua seconda $k-2$ caselle, ..., alla sua $k-1$-esima una casella ∎

Per i cardinali si ha l'uguaglianza:

$$p_{n,k} \;=\; q\left(n+\binom{k}{2},k\right)\;. \tag{2}$$

D23 b.08 Prop. Per ogni $\langle n,k\rangle \in \mathbb{P}\times\mathbb{P}$ con $k\le n$, l'insieme delle partizioni.i di n in al più k parti è in corrispondenza biunivoca con l'insieme della partizioni.i semplici di $n+\binom{k+1}{2}$ in esattamente k addendi ∎**Dim.**: La biiezione corrisponde alla modifica della forma-F di ogni partizione.i di n in al più k addendi ottenuta aggiungendo alla sua prima riga k caselle, alla sua seconda $k-1$ caselle, ..., alla sua k-esima (possibilmente vuota) una casella ∎

La corrispondente relazione tra cardinali è:

$$\sum_{i=1}^{k} p_{n,i} \;=\; q_{\left[n+\binom{k+1}{2}\right],k}\;. \tag{2}$$

D23 b.09 Consideriamo le partizioni.i di un $n\in\mathbb{P}$ in k addendi in cui l'addendo minore è $h(\le n)$ e denotiamo con $\mathsf{lprtn}_{n,k|\ldots h}$ il loro insieme e con $p_{n,k|\ldots h}$ il corrispondente cardinale.
Denotiamo invece con $\mathsf{lprtn}_{n|\ldots h}$ l'insieme delle partizioni di n in addendi di cui h è quella minima e con $p_{n|\ldots h}$ il suo cardinale. In formule:

$$p_{n|\ldots h} \;:=\; |\mathsf{lprtn}_{n|\ldots h}|, \qquad p_{n|\ge h} \;:=\; |\mathsf{lprtn}_{n|\ge h}|\;. \tag{1}$$

Evidentemente

$$p_{n|\ldots h} \;=\; p_{n,1|\ldots h}+p_{n,2|\ldots h}+\cdots+p_{n,n|\ldots h}\;. \tag{2}$$

Per esempio consideriamo l'insieme $\mathsf{lprtn}_{6|\ldots 1}$ delle partizioni.i di 6 aventi h come ultimo addendo. Tale insieme può essere presentato in questo modo:

D23 b.10 La precedente rappresentazione permette di determinare facilmente i cardinali $p_{n,k|\ldots h}$ procedendo per ricorrenza mediante le seguenti formule:

$$\forall h=2,3,\ldots \;:\; p_{n,k|\ldots h} \;=\; p_{n-k,k|\ldots h-1}\;; \tag{1}$$

$$h=1 \implies p_{n,k|\ldots 1} \;=\; p_{n-1,k-1}\;. \tag{2}$$

Dim.: La (1) segue dalla biiezione tra le partizioni di n con $h>1$ $[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k=h]$ e le partizioni di $n-k$ $[\lambda_1-1,\lambda_2-1,\cdots,\lambda_{k-1}-1,h-1]$ ∎

D23 b.11 Abbiamo inoltre la relazione di ricorrenza relativa a $k > 1$

$$p_{n,k|\dots h} \;=\; p_{n-h,k-1|\dots h} + p_{n-h,k-1|h+1} + \cdots \;, \tag{1}$$

ottenibile dalla eliminazione dell'ultima riga dagli elementi di $\mathsf{lprtn}_{n,k|\dots h}$.

Possiamo quindi enunciare la seguente relazione di ricorrenza:

$$\forall n \in \mathbb{P} \;\;:\;\; h > 1 \implies p_{n|\dots h} = p_{n-1|\dots h-1} - p_{n-h|\dots h-1} \;\wedge\; h = 1 \implies p_{n|\dots 1} = p_{n-1} \;. \tag{2}$$

D23 c. partizioni.i coniugate

D23 c.01 Introduciamo ora, avvalendoci delle forme di Ferrers, la trasformazione chiamata **coniugio tra partizioni di interi**.
Definiamo **partizione.i coniugata di una partizione.i** $\underline{\lambda}$, o anche partizione.i trasposta di tale partizione.i la partizione che si ottiene scambiando le righe con le colonne della forma di Ferrers di $\underline{\lambda}$. Denotiamo tale partizione.i con $\underline{\lambda}^{\mathsf{T}}$.
Per esempio la coniugata della $\underline{\lambda} = [5, 3, 1]$ è $\underline{\lambda}^{\mathsf{T}} = [3, 2, 2, 1, 1]$, in quanto le rispettive forme sono:

La configurazione trasposta di una forma di Ferrers $\mathbf{Ffop}(\underline{\lambda})$ di data area n, chiaramente è anch'essa una forma di Ferrers con la stessa area; essa viene chiamata **forma di Ferrers trasposta** o **forma di Ferrers coniugata** della precedente e viene denotata con $\mathbf{Ffop}^{\mathsf{T}}(\underline{\lambda})$.

D23 c.02 Evidentemente il passaggio alla partizione.i coniugata è un'involuzione, ovvero per ogni partizione.i $\underline{\lambda}^{\mathsf{T}\,\mathsf{T}} = \underline{\lambda}$.
Se $\underline{\lambda}^{\mathsf{T}} =: [\lambda_1{}', \lambda_2{}', ..., \lambda_k{}']$, allora per ogni $i = 1, ..., k$ $\lambda_i{}'$ è il numero delle parti di $\underline{\lambda}$ maggiori o uguali a i. Inoltre se rappresentiamo $\underline{\lambda}$ in notazione esponenziale

$$\underline{\lambda} =: 1^{\alpha_1}\, 2^{\alpha_2} \ldots n^{\alpha_n}$$

si ha che

$$\underline{\lambda}^{\mathsf{T}} = [\alpha_1 + ... + \alpha_n, \alpha_2 + ... + \alpha_n, \alpha_3 + ... + \alpha_n, ..., \alpha_n].$$

Per esempio se $\underline{\lambda} = [1^3\ 4^1\ 6^1] = [1^3\ 2^0\ 3^0\ 4^1\ 5^0\ 6^1]$, allora $\underline{\lambda}^{\mathsf{T}} = [5, 2, 2, 2, 1, 1]$.

D23 c.03 Le partizioni.i che coincidono con la loro coniugata si dicono, prevedibilmente, **partizioni.i autoconiugate**.
Tali partizioni.i sono in biiezione con quelle che chiamiamo **forme di Ferrers autoconiugate**. Queste forme nel piano $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ si presentano simmetriche rispeto alla loro diagonale.

Evidentemente questi oggetti autoconiugati sono i punti fissi della involuzione di passaggio alla partizione.i coniugata e quindi della trasformazione di ogni forma di Ferrers nella sua coniugata.

Definiamo **gancio di una Forma di Ferrers** di area n (o di n caselle) e lunghezza k ($< n$) la partizione.i $[n - k + 1\ 1^{k-1}]$ che denotiamo con $\mathsf{Hook}_{n,k}$.
Per l'insieme dei ganci di n caselle, ossia di area n, che denotiamo con ook_n, si constata che $|\mathsf{Hook}_n| = n$. Questo risulta evidente dalla osservazione dei ganci con $n = 1, 2, 3, 4$.

Risulta inoltre evidente che i ganci autoconiugati devono avere area dispari e per $n = 2\,m + 1$ si ha il solo gancio simmetrico $[m + 1\ 1^m]$.

È altrettanto evidente che ogni forma-F si può considerare come un sottoinsieme di $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ ottenuto come unione di ganci opportunamente traslati e disgiunti; più precisamente una forma-F Φ di rango r si può decomporre in r ganci aventi la prima casella sulla diagonale della Φ.

Il gancio avente la sua prima casella nella posizione $\langle 1,1\rangle \in \mathbb{P}\times\mathbb{P}$ viene detto primo gancio della forma-F, quello con la prima casella in $\langle 2,2\rangle$ viene detto secondo gancio e così via.

D23 c.04 Introduciamo una ulteriore notazione per le partizioni.i e le forme-F, chiamata **notazione di Frobenius della partizione.i**.
Questa notazione per una forma-F $\Phi = \mathsf{Ffop}(\underline{\lambda})$ di rango r consiste in una matrice con due righe ed r colonne la cui entrate sono interi naturali e alla quale diamo la forma

$$Frb(\Phi) \;=\; Frb(\underline{\lambda}) \;:=\; \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,r} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,r} \end{bmatrix} \quad .$$

Gli r interi della prima riga sono i numeri delle caselle di Φ alla destra delle succesive caselle della diagonale, mentre gli interi della seconda riga sono i numeri delle caselle di Φ al di sotto delle successive caselle della diagonale.

Ad esempio

$$Frb[9,7,7,5,5,5,4,3,3,1] \;=\; \begin{bmatrix} 8 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 9 & 7 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \; .$$

JU
Sulla notazione di Frobenius si ricavano varie osservazioni sulla forma-F Φ che essa rappresenta.

Le due righe sono sequenze strettamente decrescenti di interi positivi, con la sola possibile eccezione di $f_{1,r}$ e $f_{2,r}$ che possono assumere il valore 0.
La Φ è una forma-F simmetrica sse le due righe della matrice $Frb(\Phi)$ sono uguali.
Dalla $Frb(\Phi)$ si ricava una biiezione tra le forme-F e le coppie di partizioni.i semplici con numero di addendi uguale a r o a $r-1$. Questa biiezione ha il vantaggio di portare da una partizione.i di peso n elevato a due partizioni.i aventi come pesi $\sum j = 1^r f_{i,j}$ per $i = 1,2$,sensibilmente inferiori; nell'esempio precedente si passa dal peso $|\Phi| = 49$ ai pesi 18 e $26 = 49 - 18 - r$.
Si può utilizzare anche una variante della notazione di Frobenius che riguarda le due forme-F ottenute eliminando dalla Φ il quadrato di Durfee $r\times r$ e considerando, risp., le caselle alla sua destra e le caselle al di sotto.
Nel caso precedente la $[9,7,7,5,5,5,4,3,3,1]$ si rappresenta con $r = 5$, $[4,2,2]$ e $[5,4,4,2,1]$ e quindi si poassa dal peso 49 alla terna $\langle 5,8,16\rangle$. JR
D23 c.05 Occupiamoci delle partizioni.i autoconiugate cominciando con introdurre le notazioni lprtnA per l'insieme delle partizioni.i autoconiugate e con le restrizioni $\forall n \in \mathbb{P} : \mathsf{lprtnA}_n := \mathsf{lprtnA} \cap \mathsf{lprtn}_n$.

Introduciamo anche la notazione lprtn_{Odd} per l'insieme delle partizioni.i coinvolgenti solo addendi dispari e le sue restrizioni $\forall n \in \mathbb{P} : \mathsf{lprtn}_{n,Odd} := \mathsf{lprtn}_{Odd} \cap \mathsf{lprtn}_n$.

Prop. Per ogni $n \in \mathbb{P}$ gli insiemi lprtnA_n e $\mathsf{lprtn}_{n,Odd}$ si possono porre in una biiezione ben controllabile.

Dim.: La biiezione che ci interessa di introdurre e che denotiamo con $\boldsymbol{IPrAtO}$ mantiene la somma delle partizioni.i e che per ogni $n \in \mathbb{P}$ ristretta alle partizioni.i di n risulta del genere $\lceil\, \mathsf{lprtnA}_n \leftrightarrows \mathsf{lprtn}_{n,Odd} \,\rceil$.

Questa trasformazione si descrive chiaramente come operazione sulle realizzazioni materiali delle corrispondenti forme-F. Più specificamente pensiamo di trasformare una $\underline{\lambda} \in \mathsf{lprtnA}_n$ in una $\underline{\lambda} \in \mathsf{lprtn}_{n,Odd}$ e descriviamo questa trasformazione biiettiva sopra le rispettive forme-F $\Phi := \mathsf{Ffop}(\underline{\lambda})$ e $\Phi' := \mathsf{Ffop}(\underline{\lambda}')$.

Alla prima riga della Φ' assegnamo tutte le caselle del primo gancio della Φ; quindi assegnamo alla seconda riga della Φ' il secondo gancio della Φ e proseguiamo in questo modo fino ad esaurire tutti gli $r := \mathrm{rnk}(\Phi)$ ganci della forma-Fdi partenza ed ottenere la Φ', forma-F che presenta r righe.

Chiaramente alla manovra descritta corrisponde una manovra inversa che a ogni forma-F di r righe con numeri dispari di caselle fa corrispondere unaforma-Fautoconiugata di rango r.

D23 c.06 Le partizioni.i con addendi dispari per piccoli pesi n si individuano facilmente e si può ottenere facilmente una tavola dei cardinali degli insiemi di partizioni.i autoconiugati, ossia delle forme-F simmetriche ome la seguente.

$$|\mathsf{lprtnA}_n| \;=\; |\mathsf{lprtn}_{n,Odd}|$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	5	5	5	5	6

D23 d. reticolo di Young

D23 d.01 Come accennato in B55f con le partizioni.i dei vari numeri positivi si costituisce un importante insieme ordinato che denotiamo con $\mathbf{Y}_L = \langle \mathbf{lprtn}, \preceq_Y \rangle$ e che chiamiamo **precedenza-Y** con le richieste che seguono.

La relazione corrisponde a un digrafo graduato illimitato avente un infimo riguardante la partizione.i [1], l'unica avente come peso 1.
Per ogni $n \in \mathbb{P}$ al livello n del digrafo si collocano le partizioni.i dello stesso n, cioè le partizioni facenti parte di $\mathbf{lprtn}_n$ (o equivalentemente le forme-F di peso n).

La relazione è determinata dalla corrispondente relazione di precedenza-Y immediata $\prec_{Y,I}$ facilmente riconoscibile nelle forme-F.
Data una forma-F Φ sono facilmente individuate le sue caselle promontorio e le sue caselle baia; queste per esempio nella figura in b03 sono contrassegnate, risp., con il segno $-$ e il segno $+$.

Eliminando una casella promontorio si ottiene una forma-F Φ' per la quale si chiede $\Phi' \prec_{Y,I} \Phi$.
Aggiungendo a Φ una qualsiasi delle caselle baia si ottiene una forma-F Φ'' per la quale si chiede $\Phi \prec_{Y,I} \Phi''$.

Dunque da un semplice esame di ogni forma-F si individuano tutte le forme-F sue immediate procedenti e tutte le sue immediate suiccessive.

D23 d.02 Il digrafo precedente consente di individuare tutti i processi che portano a una qualsiasi forma-F Φ mediante a successive forme-F di una casella per volta: ciascuno di questi processi corrisponde a un cammino sul digrafo che porta dal nodo della forma minima di una sola casella al nodo della Φ

Nell'intervallo del poset $\mathbf{Y}_L$ avente come estremi [1] e un Φ di peso n si trova un sottoinsieme del reticolo booleano dell'insieme delle n caselle costituenti $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ chiuso rispetto alla giunzione e all'incontro, ovvero all'unione e all'intersezione tra insiemi di caselle aventi forme particolari (le forme-F).

Quindi il poset è un reticolo che viene chiamato **reticolo di Young**, in onore di Alfred Young.

D23 e. reticolo di dominanza

D23 e.01 Altri posets costituiti da partizioni.i di notevole interesse assumono come terreni gli insiemi $\mathbf{lprtn}_n$ per ciascuno degli interi positivi n.

Per definire con chiarezza la relazione di questi posets conviene considerare e definire due loro varianti.

Diciamo sequenza-n associata a una partizione.i di s addendi la n-upla ottenuta aggiungendole $n-s$ componenti 0 (ad eccezione della $[1^n]$ che è già una n-upla).

Diciamo poliomino integrale della $\underline{\lambda}$ la n-upla delle somme progressive delle componenti della sua sequenza-n, ossia

$$\left\langle \lambda_1, \lambda_1+\lambda_2, ..., \sum_{j=1}^{i}\lambda_j, ... \right\rangle .$$

A questa n-upla diamo la forma

$$polyom(\underline{\lambda}) \ :=: \left\langle \Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_n \right\rangle .$$

Questi poliomini non sono forme-F, ma lo sono le corrispondenti sequenza riflesse. Essi sono comunque sottoinsiemi finiti di $\mathbb{P}\times\mathbb{P}$ e si possono considerare le loro intersezioni e le loro unioni .
Queste due operazioni binarie sono ottenibili semplicemente dalle corrispondenti n-uple, la intersezione come $\min^{\times n}$ e l'unione come $\max^{\times n}$, ovvero con le estensioni alle n-uple di interi delle operazioni binarie min e max.

Si constata facilmente che la collezione di sottoinsiemi finiti di $\mathbb{P}\times\mathbb{P}$ $polyom(\mathbf{lprtn}_n)$ munito delle operazioni di intersezione e unione ha la struttura di una reticolo.

D23 e.02 Torniamo all'insieme $\mathbf{lprtn}_n$ e consideriamo due suoi generici elementi $\underline{\lambda}=\langle\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s\rangle$ e $\underline{\phi}=\langle\phi_1,\phi_2,...,\phi_t\rangle$.

Diciamo che $\underline{\lambda}$ è dominata in senso debole da $\underline{\phi}$ e scriviamo $\underline{\lambda}\preceq_D\underline{\phi}$ sse $polyom(\underline{\lambda})\subseteq polyom(\underline{\phi})$ ossia sse

$$\forall i=1,2,...,n: \ \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i\leq\phi_1+\phi_2+\cdots+\phi_i \ .$$

La relazione $\preceq_D$, che chiamiamo relazione di dominanza, è una relazione d'ordine. Infatti essa è evidentemente riflessiva e transitiva e dimostriamo rapidamente che essa è antisimmetrica.
Infatti se accade che $\underline{\lambda}\preceq_D\underline{\phi}$ e $\underline{\phi}\preceq_D\underline{\lambda}$ devono valere le uguaglianze

$$\begin{cases} \lambda_1=\phi_1 \\ \lambda_1+\lambda_2=\phi_1+\phi_2 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\phi_1+\phi_2+\phi_3 \\ \cdots\cdots \end{cases} ,$$

e queste implicano l'uguaglianza $\underline{\lambda}=\underline{\phi}$.

Più precisamente per ogni $n\in\mathbb{P}$ il poset $\mathbf{D}_{L,n} := \left\langle \mathbf{lprtn}_n, \preceq_D \right\rangle$ è un insieme reticolato in quanto $\left\langle polyom(\mathbf{lprtn}_n), \cap, \cap \right\rangle$ costituisce un reticolo.

$\mathbf{D}_{L,n}$ viene chiamato **reticolo di dominanza delle partizioni dell'intero** n.

D23 e.03 Si constata che per $n\leq 5$ i reticoli $\mathbf{D}_{L,n}$ hanno la struttura delle catene e il loro ordinamento coincide con l'ordinamento antilessicografico delle partizioni.i.

Un primo allontanamento della dominanza dall'ordinamento totale si riscontra per $n = 6$ in quanto si ha la nonconfrontabilità per $\preceq_D$ tra $[3, 3]$ e [4,1,1] e tra [3,1,1,1] e [2,2,2].

Per $n = 7$ abbiamo tre coppie di partizioni.i no confrontabili: $\langle [4, 3], [5, 1, 1] \rangle$, $\langle [3, 3, 1], [4, 1, 1, 1] \rangle$ e $\langle [2, 2, 2, 1], [3, 1, 1, 1, 1] \rangle$.

Per n superiori i reticoli di dominanza diventano via via più elaborati, come fa intuire questa figura.

D23 f. formula di Eulero per le partizioni.i

D23 f.01 Procediamo a ricavare una funzione generatrice per la successione $\langle n \in \mathbb{N} :| p_n \rangle$, ossia una espressione maneggevole per la serie formale $\boldsymbol{S}_p(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, x^n$.
Consideriamo il seguente prodotto infinito di serie formali

$$\mathcal{E}(x) := (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots) \;=: \sum_{j=0}^{+\infty} c_n x^n \ . \tag{1}$$

Questa costruzione formale è in grado di condurre a una serie formale con coefficienti interi positivi in quanto su ciascuno degli addendi formali $c_n x^n$ influiscono solo le prime n serie che sono fattori; anzi influiscono solo gli n polinomi formali ottenuti troncando a potenze inferiori o uguali a n i primi n fattori formali.
Risulta evidente che sia $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ (per un contributo dal primo fattore e di un contributo del secondo) e $c_3 = 3$ (un contributo dal primo fattore, uno da primo e secondo e uno dal terzo).
In generale a c_n contribuiscono prodotti ricavati dai successivi fattori x^h con esponenti h che hanno per somma n. Si trova quindi che a c_n forniscono un cotributo 1 combinazioni di monomi corrispondenti alla partizioni.i di n.
Abbiamo quindi la funzione generatrice

$$\mathcal{E}(x) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, x^n \ . \tag{2}$$

D23 f.02 Alla funzione generatrice possiamo dare una formula più maneggevole, osservando che ciascuno dei fattori della f02(1) sono delle serie formali geometriche.

Teorema (**teorema di Eulero per le partizioni.i**)

$$\mathcal{E}(x) \;=\; \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, x^n \ . \tag{1}$$

Questa espressione consente di ricavare facilmente vari altri risultati.

Denotiamo con $p_{n|\neq 1}$ il numero delle partizioni.i prive di addendi uguali a 1. Nella funzione generatrice di Eulero il contributo per gli addendi uguali ad 1 proviene da $\dfrac{1}{1-x}$; quindi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n|\neq 1}\, x^n \;&=\; 1 \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots \;=\; \frac{1-x}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots \\ &=\; (1-x) \cdot \mathcal{E}(x) \;=\; \mathcal{E}(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, x^{n+1} \qquad (2) \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n-1}, x^n \end{aligned}$$

Da questo sviluppo si ricava la relazione

(3) Prop.: $p_{n|\neq 1} \;=\; p_n - p_{n-1}$ ∎

Va osservato che questa proprietà è stata ricavata anche da una biiezione tra le forme-F in b11.

D23 f.03 Consideriamo il prodotto infinito formale

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(i+x^8\cdots \;=\; \prod_{h=0}^{+\infty}(1+x^{2^h})$$

e osserviamo che i suoi fattori sono polinomi ottenuti troncando i fattori dell'espressione f01(1) riguardanti le potenze dei monomi x^{2^h}. Abbiamo quindi che questo prodotto fornisce la funzione generatrice dei numeri delle partizioni.i i cui addendi sono solo potenze di 2 ciascuna delle quali potendo comparire come unico addendo.

Si osserva inoltre che che ogni intero positivo n possiede una unica notazione binaria e quindi per ogni n si ha una a una sola sua partizione.i costituita da potenze di 2 non ripetute. Quindi abbiamo la relazione tra sviluppi formali

$$\prod_{h=0}^{+\infty}(1+x^{2^h} \;=\; 1+x+x^2+x^3+\cdots \;=\; \frac{1}{1-x}\;. \tag{1}$$

Considerazioni simili alle precedenti si applicano alla seguente funzione generatrice

$$\prod_{h=0}^{+\infty}(1+x^n) \;=\; (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots \;=:\; \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n|S}\,x^n\;.$$

(2) Prop.: Per ogni $n\in\mathbb{P}$ ciascuno dei coefficienti $p_{n|S}$ esprime il numero di partizioni di n semplici, cioè formate da addendi tutti differenti.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php