

Capitolo D23: Partizioni di interi

Contenuti delle sezioni

a. Definizioni e prime nozioni per le partizioni -I p.1 b. Forme di Ferrers p.5 c. Partizioni -I coniugate p.8 d. Formula di Eulero per le partizioni -I p.10 e. Altre formule enumerative per le partizioni -I p.12

D23:0.01 Le partizioni degli interi positivi a cui è dedicato il presente capitolo sono sequenze di interi utilizzate in molteplici elaborazioni riguardanti configurazioni discrete, innanzi tutto per elaborazioni riguardanti i gruppi di permutazioni e le loro rappresentazioni.

Di queste entità, dopo averne data la definizione formale, viene introdotta la rappresentazione mediante le cosiddette forme di Ferrers, raffigurazioni che facilitano molte argomentazioni sopra le partizioni -I e la descrizione degli algoritmi che si rendono necessari per tenerle sotto controllo in modo costruttivo,, essendo decisamente limitate le formule più tradizionali che le riguardano.

Successivamente si tratta la relazione involutoria di coniugio fra partizioni di interi, si individuano varie sottoclassi del loro insieme e le prime relazioni per le rispettive cardinalità. Si ottiene poi la classica formula di Eulero per il numero delle partizioni di un dato intero positivo.

Da ultimo si introducono le tavole di Young, arricchimenti delle forme di Ferrers che svolgono un ruolo primario nelle costruzioni e nei calcoli enumerativi concernenti i gruppi simmetrici e le numerose configurazioni discrete collegate ad esse ad alle loro varianti.

D23:a. Definizioni e prime nozioni per le partizioni -I

D23:a.01 Sia n un intero positivo; con il termine **partizione dell'intero n** o **partizione -I di n** si intende una sequenza noncrescente di interi positivi

$$(1) \quad \langle \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \rangle \quad \text{tale che} \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n \quad \text{e} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0 .$$

I componenti della sequenza λ_i sono detti **addendi** della partizione -I $\underline{\lambda}$; la sua lunghezza k , intero per il quale deve essere $1 \leq k \leq n$, viene chiamata **numero degli addendi** della partizione -I; n viene detto **peso della partizione -I $\underline{\lambda}$** .

Con \mathbf{lprtn} denotiamo l'insieme delle partizioni dei vari interi positivi, con \mathbf{lprtn}_n l'insieme delle partizioni dell'intero n e con $\mathbf{lprtn}_{n,k}$ l'insieme delle partizioni dell'intero n che presentano k addendi.

Spesso si scrive

$$(2) \quad \underline{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k] \in \mathbf{lprtn}_n$$

per indicare che la sequenza $\langle \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \rangle$ è una partizione -I di $n := \sum_{i=1}^k \lambda_i$. La scrittura precedente è chiamata **rappresentazione canonica** della partizione -I $\underline{\lambda}$.

Questa rappresentazione evidenzia il fatto che ogni partizione di intero si può identificare con una funzione del genere $\{\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}\}$, cioè con un multinsieme. Più accuratamente una partizione -I si identifica con una funzione noncrescente di un genere $\{(r) \mapsto (s)\}$ per r e s interi positivi e quindi con un multinsieme avente come dominio un intervallo $(r]$ (D20:c).

D23:a.02 Un altro modo per presentare una partizione -I è dato dalla sua cosiddetta **rappresentazione esponenziale**:

$$(1) \quad \underline{\lambda} = \lambda_{(1)}^{h_1} \dots \lambda_{(r)}^{h_r} \quad \text{con} \quad \lambda_{(1)} > \lambda_{(2)} > \dots > \lambda_{(r)} > 0 \quad , \quad h_1, h_2, \dots, h_r \in \mathbb{P} .$$

Per ogni $j = 1, 2, \dots, r$ l'intero positivo h_j dice che la partizione -I presenta h_j addendi uguali a $\lambda_{(j)}$; esso viene detto **molteplicità** di $\lambda_{(j)}$. Chiaramente deve essere:

$$(2) \quad \sum_{j=1}^r h_j \lambda_{(j)} = n \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^r h_j = k .$$

Ad esempio la partizione dell'intero 17 in 6 addendi data dalla rappresentazione canonica $\underline{\lambda} = [5, 4, 4, 2, 1, 1]$, ha come rappresentazione esponenziale $\underline{\lambda} = 5^1 4^2 2^1 1^2$; evidentemente si trova

$$(3) \quad \sum_{j=1}^6 h_j \cdot \lambda_{(j)} = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 17 .$$

Non è difficile individuare gli algoritmi che consentono di trasformare la rappresentazione canonica di una partizione -I nella corrispondente esponenziale e viceversa.

D23:a.03 Una partizione di intero si dice **partizione -I semplice** o **partizione iniettiva** sse tutti i suoi addendi sono distinti, ovvero sse come funzione del genere $\{\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}\}$ è iniettiva, ossia sse tutte le sue molteplicità sono uguali ad 1. Per una tale partizione

$$\underline{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k] = \lambda_{(1)}^{h_1} \dots \lambda_{(r)}^{h_r} \quad \text{si ha} \quad r = k \quad \text{e} \quad \forall i = 1, \dots, k : \lambda_i = \lambda_{(i)} \quad , \quad h_i = 1 .$$

Ad esempio, l'intero 5 possiede le seguenti 11 partizioni

$$[5] \quad [4,1] \quad [3,1,1] \quad [2,1,1,1] \quad [1,1,1,1,1] \\ [3,2] \quad [2,2,1]$$

e di queste solo tre sono semplici:

$$[5] \quad [4,1] \quad [3,2] .$$

Le partizioni di 6 sono invece

$$[6] \quad [5,1] \quad [4,1,1] \quad [3,1,1,1] \quad [2,1,1,1,1] \quad [1,1,1,1,1,1] \\ [4,2] \quad [3,2,1] \quad [2,2,1,1] \\ [3,3] \quad [2,2,2]$$

e le partizioni semplici sono queste quattro:

$$[6] \quad [5,1] \quad [4,2] \quad [3,2,1] .$$

D23:a.04 Denotiamo con **lprtnS** l'insieme delle partizioni semplici di interi, con **lprtnS_n** l'insieme delle partizioni semplici di $n \in \mathbb{P}$, con **lprtn_{n,k}** l'insieme delle partizioni di n in k addendi (ovvero l'insieme

delle partizioni semplici di area n e lunghezza k) e con $\mathbf{lprtnS}_{n,k}$ l'insieme delle partizioni semplici di n in k addendi.

Passando alle cardinalità nel presente capitolo denotiamo semplicemente con $p_{n,k}$ il numero di tutte le partizioni di n in k addendi, con $q_{n,k}$ il numero di tutte le partizioni semplici di n in k addendi, con p_n il numero di tutte le partizioni di n e con q_n il numero di tutte le partizioni semplici di n .

$$(1) \quad p_{n,k} := |\mathbf{lprtn}_{n,k}| \quad q_{n,k} := |\mathbf{lprtnS}_{n,k}| \quad p_n := |\mathbf{lprtn}_n| \quad q_n := |\mathbf{lprtnS}_n| .$$

Ad esempio, per $n = 5$, abbiamo $p_{5,1} = 1, p_{5,2} = 2, p_{5,3} = 2, p_{5,4} = 1, p_{5,5} = 1, q_{5,1} = 1, q_{5,2} = 1, q_{5,3} = q_{5,4} = q_{5,5} = 0$.

Per $n = 6$ abbiamo invece $p_{6,1} = 1, p_{6,2} = 3, p_{6,3} = 3, p_{6,4} = 2, p_{6,5} = 1, p_{6,6} = 1, q_{6,1} = 1, q_{6,2} = 2, q_{6,3} = 1, q_{6,4} = q_{6,5} = q_{6,6} = 0$.

Dato che un intero positivo n non si può esprimere come somma di più di n numeri positivi, è leito e comodo assumere

$$(2) \quad \forall k > n : p_{n,k} = q_{n,k} = 0 .$$

D23:a.05 È evidente che esiste un unico modo per scrivere qualsiasi positivo n come somma di un solo positivo ($[n]$) e un solo modo per scrivere n come somma di n positivi ($[1, 1, \dots, 1]$); inoltre se $n = 2, 3, \dots$ esiste un solo modo di esprimerlo come somma di $n - 1$ positivi, in corrispondenza con la partizione -I $[2, 1, \dots, 1] = 2 \cdot 1^{n-2}$; quindi in generale

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{P} : p_{n,1} = p_{n,n-1} = p_{n,n} = 1 .$$

Per molti sviluppi e per semplificare alcune formule di ricorrenza risulta comodo assumere che l'intero 0 si possa esprimere solamente come somma di zero addendi positivi e coerentemente associare al numero naturale 0 una sola partizione -I data dalla sequenza vuota che qui denotiamo con “[]”; quindi si assume:

$$(2) \quad \text{per } k = 0, \quad p_{0,0} := q_{0,0} := 1 \quad ; \quad \text{per } k > 0, \quad p_{0,k} = q_{0,k} = 0 .$$

Questo è uno dei casi in cui risulta comoda la convenzione di Knuth $0^k := \delta_K(k = 0)$; questa consente di scrivere

$$(3) \quad \forall k \in \mathbb{N} : p_{0,k} = q_{0,k} = 0^k .$$

Si ha poi evidentemente

$$(4) \quad p_n = \sum_{k=0}^n p_{n,k} \quad , \quad q_n = \sum_{k=0}^n q_{n,k} .$$

D23:a.06 Le considerazioni precedenti e semplici elencazioni consentono di giungere per i numeri di partizioni -I a tabelle come le seguenti:

n	$p_{n,0}$	$p_{n,1}$	$p_{n,2}$	$p_{n,3}$	$p_{n,4}$	$p_{n,5}$	$p_{n,6}$	$p_{n,7}$	$p_{n,8}$
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	1	1					
4	0	1	2	1	1				
5	0	1	2	2	1	1			
6	0	1	3	3	2	1	1		
7	0	1	3	4	3	2	1	1	
8	0	1	4	6	5	3	2	1	1

n	$q_{n,0}$	$q_{n,1}$	$q_{n,2}$	$q_{n,3}$
0	1			
1	0	1		
2	0	1		
3	0	1	1	
4	0	1	1	
5	0	1	2	
6	0	1	2	1
7	0	1	3	1
8	0	1	3	1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p_n	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627
q_n	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64

D23:a.07 Le successioni $\langle n \in \mathbb{P} : p_n \rangle$ e $\langle n \in \mathbb{N} : q[n] \rangle$ sono state ampiamente studiate. Esse in particolare vengono trattate nella [\[\[OEIS\]\]](#) e sono identificate, risp., dalle sigle A000041 e A000009.

Ricordiamo che a lungo si è cercata senza successo un'espressione analitica finita per queste funzioni. Sono state ottenute invece delle importanti espressioni asintotiche che presenteremo in :e .

Infine va segnalato che recentemente, per merito soprattutto di Ken Ono, si è trovato che $\langle n \in \mathbb{P} : p_n \rangle$ possiede una struttura frattale (v. [\[\[Partizioni di interi\]\]](#) e [\[\[Partition \(number theory\)\]\]](#)).

D23:b. Forme di Ferrers

D23:b.01

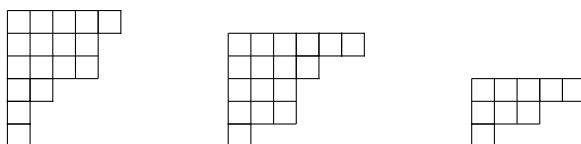
Ricordiamo che si definisce come **forma di Ferrers** o **diagramma di Ferrers** che raffigura la partizione -I $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ dell'intero $n := \sum_{i=1}^k \lambda_i$, e si denota con $\mathbf{Ffop}(\lambda)$, il sottoinsieme della scacchiera completa $n \times n$ costituito dalle prime λ_1 caselle della prima riga, dalle prime λ_2 caselle della seconda riga, ..., dalle prime λ_k caselle della k -esima riga:

$$(1) \quad \mathbf{Ffop}(\lambda) := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Alla precedente forma di Ferrers si attribuiscono l'area n e la lunghezza k .

Nel seguito abbrevieremo il termine "Forma di Ferrers" con fdF.

D23:b.02 Per esempio le forme di Ferrers per le partizioni -I $[5, 4, 4, 2, 1, 1]$, $[6, 4, 3, 3, 1]$ e $[5, 3, 1]$ sono, risp.:



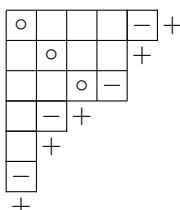
D23:b.03 Definiamo **diagonale** di una forma di Ferrers Φ l'insieme di tutte le caselle delle posizioni $\langle i, i \rangle$. Si dice **rango** di una forma di Ferrers Φ il numero delle caselle che costituiscono la sua diagonale; tale intero positivo lo denotiamo con $\text{rnk}\Phi$. Tale rango si può anche attribuire alla partizione associata alla fdF e si può scrivere $\text{rnk}(\lambda) := \text{rnk}(\mathbf{Ffop}(\lambda))$.

Si dice **quadrato di Dufee** di una partizione -I λ il cui rango scriviamo $r := \text{rnk}(\lambda)$ la fdF $\mathbf{Ffop}(r^r) = \{(i, j) = 1, 2, \dots, r \mid \langle i, j \rangle\}$. Tale quadrato si può considerare un sottoinsieme di $\mathbf{Ffop}(\lambda)$.

Consideriamo l'intero positivo $R := \lceil \sqrt{n} \rceil$. L'insieme dei ranghi delle partizioni dell'intero n è (R) ; in altre parole, non si ha alcuna partizione di n con rango superiore ad R , mentre si trovano partizioni per ciascuno dei ranghi $1, 2, \dots, R$.

Si dicono **caselle d'angolo** della fdF $\mathbf{Ffop}(\lambda)$ le caselle di fine riga $\langle i, \lambda_i \rangle$ che non hanno una casella nella posizione (immediatamente) al di sotto, cioè tali che aut i è la lunghezza della partizione -I, aut $\lambda_{i+1} < \lambda_i$.

Per la partizione $\lambda = [5, 4, 4, 2, 1, 1]$ la diagonale è data dalle caselle $\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle$, mentre le caselle d'angolo sono $\langle 1, 5 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 6, 1 \rangle$, come appare evidente dalla seguente raffigurazione nella quale le caselle diagonali sono riempite con \circ e quelle d'angolo con $-$:



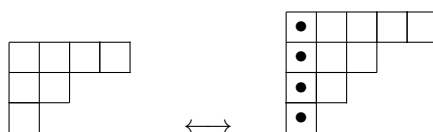
Si osserva che le caselle d'angolo di una forma di Ferrers di n sono tutte e sole le caselle la cui eliminazione porta ad una forma di Ferrers di $n - 1$. Nella figura sono segnate con $+$ tutte e sole le caselle di $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ che aggiunte alla fdF di n portano ad una fdF di $n + 1$.

D23:b.04 (1) Prop.: Per ogni $\langle n, k \rangle \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ con $k \leq n$, l'insieme delle partizioni -I di n in al più k addendi si può porre in biiezione con l'insieme delle partizioni di $n + k$ in esattamente k addendi.

Dim.: Se $\underline{\lambda}$ è una partizione di n in al più k addendi, la sua forma di Ferrers è formata al più da k righe. Quindi se si aggiunge a $\mathbf{Ffop}(\underline{\lambda})$ una colonna di k caselle come prima colonna, si ottiene la fdF di una partizione di $n + k$ in esattamente k parti.

Viceversa, se $\underline{\lambda}$ è una partizione di $n + k$ in k addendi, eliminando la prima colonna della sua forma (che ha k righe), si ottiene la forma di una partizione di n in al più k parti ■

La proposizione è chiarita dalla seguente figura:



Passando alle cardinalità possiamo dire che il numero delle partizioni -I di n in al più k parti è uguale al numero delle partizioni di $n + k$ in esattamente k parti; vale quindi l'uguaglianza:

$$(2) \quad p_{n+k,k} = p_{n,0} + p_{n,1} + \dots + p_{n,k-1} + p_{n,k} .$$

D23:b.05 (1) Prop.: Per ogni $\langle n, k \rangle \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ con $k \leq n$, l'insieme delle partizioni di $n + k + 1$ in $k + 1$ addendi si può porre in biiezione con l'insieme costituito dalle partizioni di $n + k$ in k addendi e dalle partizioni di n in $k + 1$ addendi.

Dim.: L'insieme delle partizioni -I di $n + k + 1$ in $k + 1$ addendi si bipartisce nel sottoinsieme formato dalle partizioni il cui ultimo addendo (il più piccolo) è 1 e nel sottoinsieme delle partizioni il cui ultimo addendo è almeno 2.

Il primo sottoinsieme è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle partizioni -I di $n + k$ in k parti, corrispondenza che si ottiene eliminando l'ultimo addendo. Il secondo sottoinsieme è in biiezione con le partizioni -I di n in $k + 1$ parti e questa corrispondenza si ottiene eliminando la prima colonna, formata da $k + 1$ caselle ■

Passando alle cardinalità dei due sottoinsiemi disgiunti abbiamo:

$$(2) \quad p_{n+k+1,k+1} = p_{n+k,k} + p_{n,k+1} .$$

D23:b.06 Prop. Per ogni $\langle n, k \rangle \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ con $k \leq n$, l'insieme delle partizioni -I semplici di $n + k + 1$ in $k + 1$ addendi è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle partizioni semplici di n in $k + 1$ o in k addendi.

Dim.: Sia $\underline{\lambda}$ una partizione semplice di $n + k + 1$ con $k + 1$ addendi. La sua fdF è formata da $k + 1$ righe e la forma che si ottiene eliminando da essa la prima colonna è la fdF di una partizione -I semplice di n in $k + 1$ addendi se l'ultimo addendo λ_{k+1} è maggiore di 1, in k addendi se $\lambda_{k+1} = 1$.

Viceversa, tutte le forme semplici di $n + k + 1$ con $k + 1$ righe si ottengono tutte una sola volta se alle forme di Ferrers semplici di n con $k + 1$ righe o con k righe si aggiunge una prima colonna di $k + 1$ caselle ■

Passando alle cardinalità otteniamo:

$$(2) \quad q_{n+k+1,k+1} = q_{n,k+1} + q_{n,k} .$$

D23:b.07 Prop. Per ogni $\langle n, k \rangle \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ con $k \leq n$, l'insieme delle partizioni -I di n in k addendi si può porre in biiezione con l'insieme delle partizioni -I semplici di $n + \binom{k}{2}$ in k parti

Dim.: La biiezione corrisponde alla modifica della fdF della prima partizione ottenuta aggiungendo alla sua prima riga $k - 1$ caselle, alla sua seconda $k - 2$ caselle, ..., alla sua $k - 1$ -esima una casella ■

Passando alle cardinalità si ha l'uguaglianza:

$$(2) \quad p_{n,k} = q\left(n + \binom{k}{2}, k\right).$$

D23:b.08 Prop. Per ogni $\langle n, k \rangle \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ con $k \leq n$, l'insieme delle partizioni -I di n in al più k parti è in corrispondenza biunivoca con l'insieme della partizioni -I semplici di $n + \binom{k+1}{2}$ in esattamente k addendi ■

La corrispondente relazione fra cardinalità è:

$$(2) \quad \sum_{i=1}^k p_{n,i} = q_{[n + \binom{k+1}{2}], k}.$$

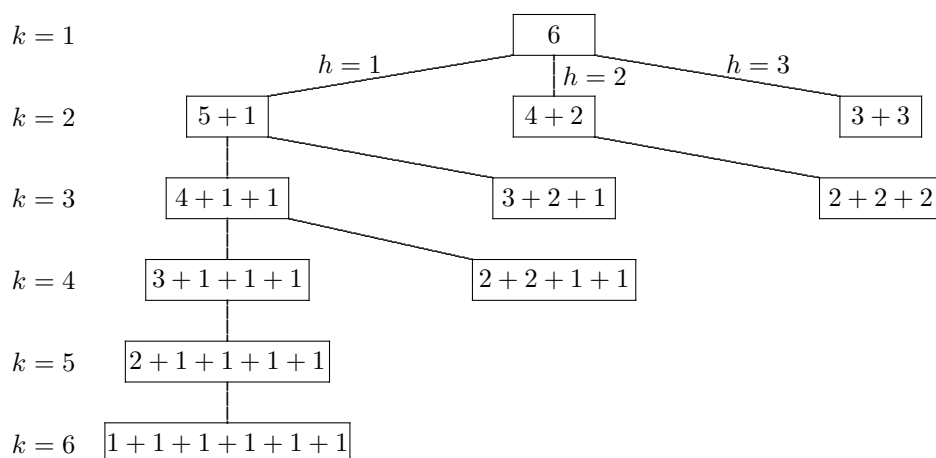
D23:b.09 Consideriamo adesso le partizioni -I di un $n \in \mathbb{P}$ in cui la parte più piccola è $h (\leq n)$: denotiamo con $\mathbf{lprtn}_{n,;h}$ il loro insieme e con $p_{n,;h}$ la corrispondente cardinalità. Denotiamo invece con $\mathbf{lprtn}_{n,k;|\geq h}$ l'insieme delle partizioni di n in k parti di cui h è quella minima e con $p_{n,k;|\geq h}$ la sua cardinalità. In formule:

$$(1) \quad p_{n,;h} := |\mathbf{lprtn}_{n,;h}|, \quad p_{n,k;|\geq h} := |\mathbf{lprtn}_{n,k;|\geq h}|.$$

Evidentemente

$$(2) \quad p_{n,;h} = p_{1,;h} + p_{2,;h} + \dots + p_{n,;h}.$$

Per esempio consideriamo l'insieme $\mathbf{lprtn}_{6,k;geqh}$ delle partizioni -I di 6 in k parti aventi h come ultimo addendo. Tale insieme può essere presentato in questo modo:



D23:b.10 La precedente rappresentazione permette di determinare facilmente $p_{n,k;h}$ mediante le seguenti formule:

$$(1) \quad \forall h \in \mathbb{P} : p_{n,k;h} = p_{n-k,k;h-1} ;$$

$$(2) \quad h = 1 \implies p_{n,1;h} = p_{n-1,k-1} .$$

Dim.: La prima formula segue dalla biiezione fra le partizioni di n con $h > 1$ $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k = h]$ e le partizioni di $n - k$ $[\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_{k-1} - 1, h - 1]$ ■

D23:b.11 Abbiamo inoltre

$$(1) \quad p_{,;h} = p_{n-h,;h} + p_{n-h,;h+1} + \dots ,$$

in quanto, da $n = h + (n - h)$ segue $p_{n,;h} = \sum_{k \geq h} p_{n-h,;k}$.

Possiamo quindi enunciare la seguente relazione di ricorrenza:

$$(2) \quad \forall n \in \mathbb{P} : h > 1 \implies p_{,;h}n = p_{n-1,;h-1} - p_{n-h,;h-1} , \quad h = 1 \implies p_{n,;h} = p_{n-1} .$$

D23:c. Partizioni -I coniugate

D23:c.01 Introduciamo ora avvalendoci delle forme di Ferrers la trasformazione chiamata **coniugio tra partizioni di interi**.

Definiamo **partizione -I coniugata** o **trasposta** di una partizione -I data $\underline{\lambda}$, e denotiamola con $\underline{\lambda}^\top$, la partizione che si ottiene scambiando tra loro le righe con le colonne della forma di Ferrers di $\underline{\lambda}$. Ad esempio la coniugata della $\underline{\lambda} = [5, 3, 1]$ è $\underline{\lambda}^\top = [3, 2, 2, 1, 1]$, in quanto le rispettive forme sono:

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & & \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array} \quad \lambda^\top = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}$$

La configurazione trasposta di una forma di Ferrers **Ffop**($\underline{\lambda}$) di data area n , chiaramente è anch'essa una forma di Ferrers con la stessa area; essa viene chiamata **trasposta** o **coniugata** della precedente e viene denotata con **Ffop** $^\top$ ($\underline{\lambda}$).

D23:c.02 Evidentemente il passaggio alla partizione -I coniugata è un'involuzione, ovvero per ogni partizione -I $\underline{\lambda}^\top = \underline{\lambda}$.

Se $\underline{\lambda}^\top = [\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_k]$, allora per ogni $i = 1, \dots, k$ λ'_i è il numero delle parti di $\underline{\lambda}$ maggiori o uguali a i . Inoltre se rappresentiamo $\underline{\lambda}$ in notazione esponenziale

$$\underline{\lambda} =: 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}$$

si ha che

$$\underline{\lambda}^\top = [\alpha_1 + \dots + \alpha_n, \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \alpha_3 + \dots + \alpha_n, \dots, \alpha_n].$$

Ad esempio se $\underline{\lambda} = 1^3 4^1 6^1 = 1^3 2^0 3^0 4^1 5^0 6^1$, allora $\underline{\lambda}' = [5, 2, 2, 2, 1, 1]$.

D23:c.03 Alla luce delle precedenti considerazioni risulta evidente l'enunciato che segue.

Teorema Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, l'insieme delle partizioni di n in k addendi è in biiezione con l'insieme delle partizioni di n in cui k è il primo addendo, cioè l'addendo maggiore.

Dim.: La corrispondenza biunivoca è fornita dalla trasformazione di coniugio: infatti $\underline{\lambda}$ è una partizione di n in k addendi sse $\mathbf{Ffop}(\underline{\lambda})$ ha k righe sse la prima riga della $\mathbf{Ffop}(\underline{\lambda}')$ presenta k caselle, sse $\underline{\lambda}'$ è una partizione di n in cui k è l'addendo maggiore ■

D23:c.04 Le partizioni -I che coincidono con la propria coniugata sono i punti fissi della trasformazione di coniugio e sono dette **partizioni autoconiugate**. Le forme di Ferrers relative a tali partizioni -I coincidono con le rispettive coniugate, cioè sono simmetriche rispetto alla diagonale principale e si dicono anch'esse **autoconiugate**.

Ad esempio la partizione $[4, 2, 1, 1]$ è una partizione autoconiugata di 8 e la sua forma è evidentemente simmetrica:

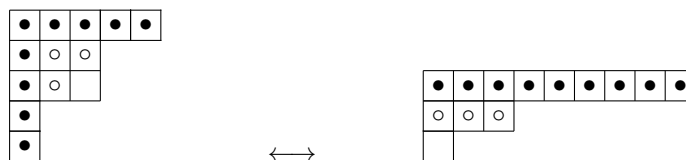


D23:c.05 Teorema Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si individua una biiezione tra l'insieme delle partizioni autoconiugate di n e l'insieme delle partizioni semplici di n in addendi dispari.

Dim.: Nella forma di una partizione autoconiugata $\underline{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_k]$, la prima riga e la prima colonna hanno lo stesso numero λ_1 di caselle e hanno una casella in comune; questo significa che idue insiemi contengono $2\lambda_1 - 1$ caselle. Se eliminiamo dalla forma queste caselle, otteniamo ancora la forma di una partizione autoconiugata $\mu = [\lambda_2 - 1, \dots, \lambda_k - 1]$. Le caselle che appartengono alla prima riga e alla prima colonna di questa seconda forma sono $2(\lambda_2 - 1) - 1 = 2\lambda_2 - 3$. Questo numero è strettamente minore di $2\lambda_1 - 1$ poichè $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Procedendo in questo modo ed collocando le caselle eliminate ad ogni passo nelle righe di una nuova forma, alla fine si individua una partizione -I di n in addendi dispari e distinti.

Se viceversa si parte dalla fdF di una partizione di n in addendi dispari e distinti, si può trasformare ogni sua riga in un gancio NW simmetrico piegandola ad angolo retto nella casella centrale; accostando questi ganci si ottiene una fdF simmetrica rispetto alla diagonale, cioè la forma di una partizione autoconiugata ■

La seguente figura illustra le due costruzioni inverse descritte:



Questo teorema ci permette di dire che il numero delle partizioni autoconiugate di n coincide con il numero delle partizioni semplici di n in parti dispari.

D23:d. Formula di Eulero per le partizioni -I

D23:d.01 Avendo denotato con $\mathbf{lprtn}(n)$ l'insieme delle partizioni -I del positivo n e con $\mathbf{Frrs}(n)$ l'insieme delle forme di area n , conviene denotare con $\mathbf{Iprtn}(n)$ il loro numero, cioè numero delle forme di area n . Questi insiemi e questi numeri per i primi valori di n si individuano facilmente.

n	$\mathbf{Iprtn}(n)$	$\mathbf{lprtn}(n)$
1	1	1
2	2	2, 11
3	3	3, 21, 111
4	5	4, 31, 22, 211, 1111
5	7	5, 41, 32, 311, 221, 2111, 11111
6	11	6, 51, 42, 411, 33, 321, 311, 222, 211, 111111
7	15	7, 61, 52, 511, 43, 421, 4111, 331, 322, 3211, 31111, 2221, 22111, 21111, 1111111
8	22	8, 71, 62, 611, 53, 521, 5111, 44, 431, 422, 4211, 41111, 332, 3311, 3221, 32111, 311111, 2222, 22211, 221111, 2111111, 11111111
9	30	9, 81, 72, 711, 63, 621, 6111, 54, 531, 522, 5211, 51111, 441, 432, 4311, 4221, 42111, 411111, 333, 3321, 33111, 3222, 32211, 321111, 3111111, 22221, 222111, 2211111, 21111111, 111111111

A questo punto si può osservare che la $\mathbf{Iprtn}(n)$ è una funzione crescente e che non sembra potersi esprimere in forma semplice.

Osserviamo anche che le partizioni -I sono state presentate in ordine lessicografico decrescente. Secondo quest'ordine la prima partizione dell'intero positivo n è la sequenza di un solo elemento $\langle n \rangle$, mentre l'ultima è la sequenza 1^n .

D23:d.02 Osservando le corrispondenti forme di Ferrers, si individua facilmente un algoritmo di generazione di $\mathbf{lprtn}(n)$ secondo l'ordine lessicografico decrescente.

Dato n si inizia generando come prima partizione -I la $[n]$. In ciascuno degli stadi successivi si cerca di trasformare una partizione -I $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_s \rangle$ nella successiva. Per questo occorre individuare l'ultima componente maggiore di 1; chiamiamola λ_r ; questa deve essere abbassata di 1 e deve essere seguita dalla prima delle partizioni dell'intero $S := \lambda_{r+1} + \dots + \lambda_s$ con componenti non superiori a $\lambda_r - 1$; non è difficile rendersi conto che questa è data da $\lceil S/\lambda_r - 1 \rceil$ repliche di $\lambda_r - 1$ e da $S \% (\lambda_r - 1)$ repliche di 1. Si osserva che le prime componenti mancano sse $S < \lambda_r - 1$ e l'ultima manca sse $\lambda_{r-1} \nmid S$.

Questa trasformazione di una partizione -I nella successiva non può essere effettuata solo per l'ultima, la $[1^n]$, nella quale non si trova alcuna componente maggiore di 1. La constatazione di questa impossibilità conduce alla conclusione della generazione.

Questo algoritmo si può seguire facilmente sulle fdF.

D23:d.03 Si potrebbe quindi ottenere una conoscenza empirica potenziale di $\mathbf{Iprtn}(n)$ generando con il computer l'intero $\mathbf{lprtn}(n)$. Questo modo di procedere non è certo molto efficiente e fa parte dei cosiddetti **procedimenti con forza bruta**. In effetti basta chiarire qualche altra proprietà di $\mathbf{Frrs}(n)$ per essere in grado di individuare un procedimento migliore per estendere la valutazione della $\mathbf{Iprtn}(n)$.

Dato che la coniugazione è una involuzione per $\mathbf{Frrs}(n)$, questo insieme si può tripartire distinguendo forme autoconiugate, prime coniugate e seconde coniugate. La scelta entro una coppia coniugata della

prima coniugata si può fare favorendo quella con la partizione -I maggiore secondo l'ordine lessicografico decrescente.

Denotiamo con $\mathbf{FrrsA}(n)$ l'insieme delle forme autoconiugate e con $FrrsA(n)$ il loro numero. Evidentemente il numero delle forme prime coniugate è dato da $1/2(Frrs(n) - FrrsA(n))$ e coincide con quello delle seconde coniugate.

Dagli elenchi trovati per i primi valori di n si trovano i seguenti valori:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$FrrsA(n)$	1	0	1	1	1	1	1	2	2	2

D23:d.04 Altre particolari forme di Ferrers sono i ganci (e in particolare le barre), i triangoli rettangoli normali ed elongati, i trapezi di Eulero.

In $\mathbf{Frrs}(n)$ si trovano $n - 1$ ganci e di questi due sono barre. Se $n = 2h$ è pari, si tratta di h coppie coniugate; se $n = 2h + 1$ si hanno una forma autoconiugata, $\mathbf{Ffop}(1^{h+1}h)$, e le h coppie coniugate, $\langle 2h + 1, 1^{2h+1} \rangle, \langle 2h, 1, 2, 1^{2h} \rangle, \dots, \langle h + 2, 1^{h-1}, h, 1^{h+1} \rangle$.

Triangoli normali, triangoli elongati e trapezi di Eulero sono piuttosto rari, in quanto si trovano singoli diagrammi di questi tipi solo negli insiemi $\mathbf{Frrs}(n)$ relativi a valori particolari di n .

D23:d.05 Ricordiamo che per rango $\text{rnk}(\Phi)$ della fdF Φ si intende il numero delle sue celle facenti parte della diagonale principale e osserviamo che ogni fdF si può considerare ottenuta accostando un numero di ganci -NW pari al suo rango. La decomposizione in ganci di alcune fdF è presentata qui di seguito nella raffigurazione francese.

1										
1	2	3	3							
1	2	2	2							
1	1	1	1	1						

1	2	3								
1	2	3								
1	2	2	2	2						
1	1	1	1	1						

1	2	3	4							
1	2	3	3							
1	2	2	2							
1	1	1	1							

Ne segue la rappresentazione di Fröbenius per una fdF Φ : essa è la sequenza di $\text{rnk}(\Phi)$ coppie di interi che forniscono il numero di caselle a destra e il numero di caselle al di sopra delle caselle sulla diagonale principale. Come rappresentazioni di Fröbenius in forma matriciale delle fdF precedenti assumiamo, risp.,

$$Frb \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad Frb \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad Frb \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

I ganci sono tutte e le sole forme di Ferrers aventi rappresentazione di Fröbenius costituita da una sola coppia di componenti. Una forma di Ferrers è autoconiugata sse la sua rappresentazione di Fröbenius presenta le due righe uguali.

D23:d.06 Si trova quindi la formula di Eulero per il numero delle partizioni di n .

$$Iprtn(n) = \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u (Iprtn(n - \text{Trpz}(2u - 1)) + Iprtn(n - \text{Trpz}(2u)))$$

Per i primi termini della somma si ha

$$Iprtn(n) = Iprtn(n - 1) + Iprtn(n - 2) - Iprtn(5) - Iprtn(7) + Iprtn(12) + Iprtn(15) - Iprtn(26) - Iprtn(30) + \dots$$

D23:e. Altre formule enumerative per le partizioni -I

D23:e.01 Nel passato si è cercata invano una formula per la successione delle cardinalità p_n . Eulero trovò invece una funzione generatrice (I35:) per questa successione.

(1) Prop.: $\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^k} \right)$. **Dim.:** Si sviluppano i fattori del secondo membro in quanto serie geometriche (I35:), ottenendo il prodotto infinito

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots) \dots ;$$

Si osserva che per ogni $n \in \mathbb{P}$ al coefficiente della potenza x^n contribuiscono le potenze positive di x dei soli sviluppi geometrici $1 + x^h + x^{2h} + \dots$ per $h = 1, 2, \dots, n$. Alla potenza x può contribuire solo il primo sviluppo, alla x^2 i primi due eccetera. Più precisamente il coefficiente di x^n esprime il numero di modi per ottenere x^n come prodotto di fattori ciascuno dei quali fornito da uno dei suddetti sviluppi. In altre parole esprime il numero delle sequenze $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ di interi naturali tali che $a_1 + 2 a_2 + 3 a_3 + \dots + n a_n = n$. Tra queste sequenze e le partizioni -I di n , in accordo con la :a.02(2), sussiste la seguente biiezione:

$$\{ \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle \} \leftrightarrow \{ 1^{a_1} 2^{a_2} 3^{a_3} \dots n^{a_n} \}$$

Quindi il coefficiente di x^n nell'enunciato è proprio p_n ■

D23:e.02 Si sono anche ricercate espressioni che consentano di approssimare questi interi. Nel 1918 [[Srinivasa Ramanujan]] e [[Godfrey Harold Hardy]] e indipendentemente nel 1920 [[James Victor Uspenskii]], hanno trovata la seguente formula asintotica

$$(1) \quad p_n \sim \frac{e^{\pi \sqrt{\frac{2n}{3}}}}{4n\sqrt{3}} \quad \text{per } n \rightarrow \infty .$$

D23:e.03 Questa formula fu migliorata nel [[1937]] da [[Hans Rademacher]] che trovò una serie convergente che tende a p_n per $4n \rightarrow +\infty$:

$$(1) \quad \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} A_k(n) \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh \left(\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(n - \frac{1}{24} \right) \right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right) ,$$

dove

$$(2) \quad \forall k \in \mathbb{P} \quad : \quad A_k(n) := \sum_{m \in [k] \ \& \ m \perp k} e^{\pi i [s(m,k) - \frac{2nm}{k}]} .$$

Nell'espressione precedente con $s(m, k)$ si denota un caso particolare di [[somma di Dedekind]]:

$$(3) \quad \forall m, k \in Mb \quad \text{con } m \perp k \quad : \quad s(m, k) := \frac{-1}{k} \sum_{\omega \in R} \frac{1}{(1 - \omega^m)(1 - \omega)} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4c} ,$$

ove R denota l'insieme delle radici complesse k -esime dell'unità diverse da 1, cioè

$$(4) \quad R := \{ h = 1, 2, \dots, k - 1 \mid e^{2\pi i \frac{h}{k}} .$$

D23:f. Tavole di Young

D23:f.01 Consideriamo una partizione -I $\underline{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$ di un intero positivo n e l'equivalente forma di Ferrers **Ffop**($\underline{\lambda}$). Si dice **tableau di Young** relativo alla partizione -I $\underline{\lambda}$, o avente la forma **Ffop**($\underline{\lambda}$), una funzione avente come dominio **Ffop**($\underline{\lambda}$).

Un tableau di Young quindi è fornito da una forma di Ferrers con ciascuna delle caselle munita di un valore; interessano soprattutto valori interi.

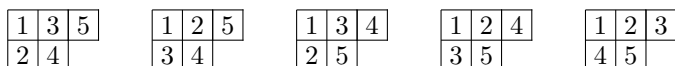
In particolare si dice **tableau di Young standard** della partizione -I $\underline{\lambda}$ o della forma **Ffop**($\underline{\lambda}$), una biiezione del genere $y \in \{\mathbf{Ffop}(\underline{\lambda}) \leftrightarrow (n)\}$ tale che i valori suoi $y_{i,j}$ presenti nelle diverse righe e nelle diverse colonne formino sequenze crescenti, cioè tale che

$$\forall \langle i, j \rangle \in \mathbf{Ffop}(\underline{\lambda}) : y_{i,j} < y_{i+1,j}, \quad y_{i,j} < y_{i,j+1},$$

D23:f.02 Procediamo a determinare le tavole di Young standard di forma $\underline{\lambda} = [3, 2]$; dobbiamo collocare i numeri 1, 2, 3, 4 e 5 nelle caselle della forma **Ffop**($\underline{\lambda}$) in modo che in ogni riga e colonna i numeri formino delle successioni crescenti. Il primo numero che collochiamo è il 5: essendo il numero più grande, esso occuperà una casella d'angolo. Abbiamo, quindi, le seguenti possibilità:



Il problema adesso è diventato quello di determinare tutte le tavole di Young di forma $[2, 2]$ e tutte quelle di forma $[3, 1]$. Procedendo come sopra, cioè collocando in tutti i modi possibili il numero più grande disponibile, si ottengono le seguenti tavole:



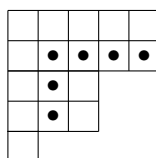
D23:f.03 I numeri delle tavole di Young delle diverse forme rivestono grande importanza nello studio dei gruppi finiti di permutazioni e in molti altri settori a quello collegati. A questo scopo introduciamo alcune nuove definizioni riguardanti le forme di Ferrers.

Il numero delle tavole di Young di forma $\underline{\lambda}$ viene indicato con $f_{\underline{\lambda}}$: nell'esempio appena considerato $f_{[3,2]} = 5$.

D23:f.04 Definiamo **gancio** (*hook*) associato alla casella $\langle i, j \rangle$ della forma di una partizione $\underline{\lambda}$ l'insieme denotato $H_{i,j}(\underline{\lambda})$ formato dalla stessa casella $\langle i, j \rangle$, da tutte le caselle alla sua destra e da tutte quelle al di sotto di essa:

$$(1) \quad H_{i,j}(\underline{\lambda}) := \{(p, q) \in \mathbf{Ffop}(\underline{\lambda}) \mid p = i \text{ e } q \geq j \text{ oppure } p \geq i \text{ e } q = j\}.$$

Per esempio per $\lambda = [5, 5, 3, 3, 1]$, il gancio della casella (2,2) nella forma $fop(\lambda)$, qui di seguito riportata, è dato dalle caselle riempite da un pallino nero:



D23:f.05 Con $h_{i,j}(\underline{\lambda})$ denotiamo la cardinalità o peso del gancio $H_{i,j}(\underline{\lambda})$, cioè:

$$(1) \quad h_{i,j}(\underline{\lambda}) := |H_{i,j}(\underline{\lambda})| .$$

Il numero $h_{i,j}(\underline{\lambda})$ si determina in modo molto semplice, infatti le caselle che stanno alla destra della casella $\langle i, j \rangle$ sono $\lambda_i - j$, mentre le caselle che stanno al di sotto della $\langle i, j \rangle$ sono $\lambda_j^\top - i$; quindi il peso del gancio $H_{i,j}(\underline{\lambda})$ è:

$$(2) \quad h_{i,j}(\underline{\lambda}) = (\lambda_i - j) + (\lambda_j^\top - i) + 1 .$$

Definiamo **tableau dei ganci** di una partizione $\underline{\lambda}$ la funzione che ad ogni casella di $\mathbf{Ffop}(\underline{\lambda})$ associa la lunghezza del gancio corrispondente. Ad esempio per l'ultima partizione considerata la tabella dei ganci è:

9	7	6	3	2
8	6	5	2	1
5	3	2		
4	2	1		
1				

D23:f.06 Con $h(\underline{\lambda})$ denotiamo invece il prodotto delle lunghezze dei vari ganci:

$$h(\underline{\lambda}) := \prod_{\langle i,j \rangle \in \mathbf{Ffop}(\underline{\lambda})} h_{i,j}(\underline{\lambda}) .$$

D23:f.07 Teorema di Frame, Robinson, Thrall, 1954 Il numero $f_{\underline{\lambda}}$ dei tableau di Young standard di forma $\underline{\lambda}$ è dato da

$$(1) \quad f_{\underline{\lambda}} = \frac{n!}{h(\underline{\lambda})} .$$

Per esempio il fatto di aver trovate 5 tavole di Young di forma $[3,2]$ è confermato dal teorema, in quanto:

$$f_{[3,2]} = \frac{5!}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 5 .$$

D23:f.08 Teorema Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle permutazioni di $[n]$ e l'unione relativa a tutte le partizioni $\underline{\lambda} \in \mathbf{lprtn}_n$ degli insiemi di tutte le coppie di tavole standard di Young aventi uguale forma $\underline{\lambda}$ ■

Passando alle cardinalità degli insiemi otteniamo:

$$(1) \quad n! = \sum_{\underline{\lambda} \in \mathbf{lprtn}_n} f_{\underline{\lambda}}^2 .$$