Capitolo D21:
Convessità -ZZ e poliomini

Contenuti delle sezioni

D21:0.1 Questo capitolo è dedicato ad alcuni tipi di configurazioni del piano combinatorio.
All'inizio si introduce la convessità in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ al fine di avviare lo studio di questa proprietà geometrica in grado di garantire la possibilità di sviluppare i procedimenti risolutivi per una vasta gamma di problemi.
Successivamente si riprende la introduzione dei poliòmini preoccupandos in particolare di presentare problemi di pavimentazione del piano combinatorio.
Nell'ultima parte vengono tratta i permutomini, poliomini definiti a partire da due permutazioni.

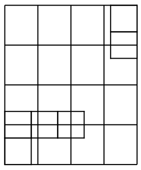
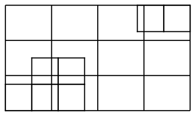
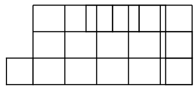
D21:a. Convessità nel piano -ZZ

D21:a.01 Veniamo ora alle caratterizzazioni di convessità degli insiemi in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

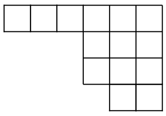
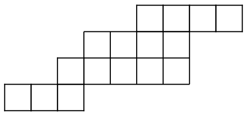
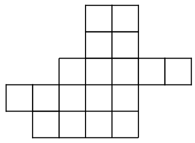
Un insieme di nodi del piano combinatorio si dice:
orizzontalmente convesso o **convesso -ZZH** sse tra due suoi elementi sulla stessa linea orizzontale non si trova alcun nodo estraneo all'insieme;
verticalmente convesso o **convesso -ZZV** sse tra due suoi elementi sulla stessa linea verticale non si trova alcun nodo estraneo all'insieme;
convesso -ZZR sse è convesso -ZZH e convesso -ZZV;
convesso -ZZD1 sse tra due suoi elementi sulla stessa linea parallela alla diagonale principale [linea -ZZD1] non si trova alcun nodo estraneo all'insieme;
convesso -ZZD2 sse tra due suoi elementi sulla stessa parallela alla diagonale secondaria, [linea -ZZD2] non si trova alcun nodo estraneo all'insieme;
convesso -ZZB sse è convesso -ZZD1 e convesso -ZZD2.
convesso -ZZK sse è convesso -ZZR e convesso -ZZB.

D21:a.02 I rettangoli (e quindi le barre), le scale, i triangoli rettangoli CathR, i triangoli rettangoli CathB, i triangoli rettangoli elongati, i trapezi di Eulero sono convessi -ZZK.
I ganci non ridotti a barra sono convessi -ZZR e non convessi -ZZB.

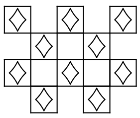
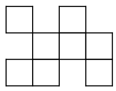
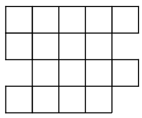
Altri insiemi piani convessi -ZZR e convessi -ZZB sono i seguenti

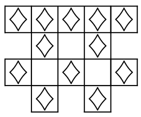
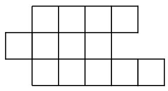
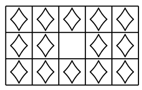
I seguenti insiemi piani sono convessi -ZZR ma non convessi -ZZB.

Sono invece convessi -ZZB ma non convessi -ZZR i seguenti insiemi piani.

Infine i seguenti insiemi piani non sono nè convessi -ZZB nè convessi -ZZR.

D21:a.03 Spesso è utile saper comporre e decomporre le figure piane. Attraverso la composizione si possono ottenere figure elaborate a partire da figure semplici. Attraverso la decomposizione si individuano componenti semplici di una figura elaborata.

Consideriamo due figure piane F_1 ed F_2.
Per ottenere un **affiancamento** di F_2 ad F_1 si trasla F_2 fino a far coincidere almeno un suo lato verticale più a sinistra con un lato verticale più a destra di F_1 senza che si abbia intersezione fra le due figure.
Per ottenere una **sovrapposizione** di F_2 ad F_1 si trasla F_2 fino a far coincidere almeno un suo lato orizzontale inferiore con un lato orizzontale superiore di F_1 evitando ogni coincidenza di nodi.

Se F_1 ed F_2 sono connesse -R, ogni loro affiancamento e ogni loro sovrapposizione è connessa -R.

Osserviamo che i rettangoli si possono considerare affiancamenti o sovrapposizioni di barre di uguale lunghezza; i triangoli rettangoli normali ed elongati si possono considerare affiancamenti o sovrapposizioni di barre di lunghezze consecutive; i trapezi di Eulero si ottengono affiancando un quadrato con un triangolo rettangolo normale.

D21:a.04 Una figura è convessa -ZZH sse si può ottenere come sovrapposizione di barre orizzontali (o di figure h-convesse).

Simmetricamente una figura è convessa -ZZV sse si può ottenere come affiancamento di barre verticali (o di figure convesse -ZZV).

D21:a.05 Quando si affiancano barre verticali, in generale diverse tra di loro, si tiene l'**allineamento in basso [alto]** se si tengono sulla stessa linea orizzontale le caselle inferiori [superiori] delle barre. Similmente si sovrappongono barre orizzontali tenendo l'**allineamento a sinistra [destra]** se si tengono sulla stessa linea verticale le caselle più a sinistra [destra].
Le figure così ottenute si dicono **trapezoidi**. I trapezoidi ottenuti sovrapponendo barre orizzontali con allineamento a sinistra [destra] si dicono **volti a destra [sinistra]**; i trapezoidi ottenuti affiancando barre verticali con allineamento in basso [alto] si dicono **volti in alto [basso]**.
Vi sono trapezoidi volti verso destra e volti verso l'alto: sono quelli ottenibili sovrapponendo barre allineate a sinistra oppure affiancando barre allineate in basso. Similmente vi sono trapezoidi volti verso l'alto e verso sinistra, trapezoidi volti verso sinistra e verso il basso, trapezoidi volti verso il basso e verso destra.
Si tratta quindi di trapezoidi volti verso due direzioni adiacenti relativamente al ciclo di direzioni $\langle$ destra, alto, sinistra, basso $\rangle$.
Ogni trapezoide è contenuto in un unico rettangolo minimale con il quale condivide parte del perimetro: un intero lato e parte di altri due. Il perimetro dei trapezoidi che non si riducono a rettangoli presenta dunque tre cammini rettilinei che sono perimetro del suo rettangolo ricoprente minimale e un cammino formato da segmenti che seguono tre direzioni. Il perimetro di un trapezoide si può quindi bipartire. Questa bipartizione si può ottenere in due modi per i trapezoidi volti in due direzioni e in quattro modi nel caso dei rettangoli (che si possono considerare trapezoidi volti in quattro direzioni).

D21:b. Poliòmini e pavimentazioni

D21:b.01 I poliòmini con un certo numero n di elementi si dicono n-òmini, quelli con un solo elemento si dicono monòmini, quelli con due elementi dòmini, quelli con 3 tròmini, con 4 tetròmini, 5 pentòmini, 6 esòmini, 7 eptòmini, 8 octòmini, 8 enneòmini, 10 decòmini, e così via. Gli analoghi termini per gli pseudo-poliòmini si ottengono premettendo pseudo- ai corrispondenti per i poliòmini: pseudo-n-òmini, pseudo-monòmini, pseudo-dòmini, ...

Nei problemi di pavimentazione in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si considera una certa figura piana F tendenzialmente regolare (cioè definibile semplicemente) ed abbastanza estesa ed uno o più tipi di figure di dimensioni inferiori che chiameremo **tessere**. Una pavimentazione della F mediante le tessere date è un collocamento di un numero opportuno di repliche delle tessere sulla F tale che non si abbia alcuna sovrapposizione e che nessuna casella della F rimanga scoperta. Un primo tipo di problema è di tipo esistenziale: si chiede se esiste una pavimentazione di F mediante le tessere date. In caso affermativo si pone il problema enumerativo di stabilire il numero delle possibili pavimentazioni. Inoltre si possono porre problemi di tipo generativo i quali chiedono di individuare procedimenti che consentano di generare alcune o tutte le pavimentazioni, oppure quelle con determinate caratteristiche.

Molti problemi di pavimentazione mediante poliòmini e configurazioni simili sono presentati in [Golomb 1994]. Un altro problema di pavimentazione si individua nel videogame Tetris: in questo caso si tratta di pavimentare mediante tetròmini un trapezoide il più alto possibile nel minor tempo possibile.

D21:b.02 Presentiamo un classico problema di pavimentazione.
Consideriamo un quadrato di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ di lato 8 ed eliminiamo le caselle in due vertici opposti. Dimostrare che è impossibile pavimentarlo completamente con dei dòmini.
La dimostrazione si potrebbe condurre cercando di individuare un procedimento con qualche possibilità di costruire una pavimentazione servendosi di $(8 \cdot 8 - 2)/2 = 31$ dòmini e provando che esso non può avere successo.
Dato che il numero dei tentativi è finito, si potrebbe pensare di procedere sperimentalmente, mediante un computer: in realtà che un tale tentativo sarebbe estremamente costoso.
Alla dimostrazione dell'impossibilità si arriva invece rapidamente dopo aver, apparentemente, complicato la figura da pavimentare.
Se si bicolora il quadrato smussato distinguendo caselle pari e dispari, si ha un insieme di 32 caselle nere (ad es.) e di 30 caselle bianche.

●	○	●	○	●	○	●	
○	●	○	●	○	●	○	●
●	○	●	○	●	○	●	○
○	●	○	●	○	●	○	●
●	○	●	○	●	○	●	○
○	●	○	●	○	●	○	●
●	○	●	○	●	○	●	○
	●	○	●	○	●	○	●

Ma bicolorando con lo stesso criterio i dòmini, si vede che 31 di queste tessere non possono che coprire 31 caselle bianche e 31 nere e quindi non possono fornire una pavimentazione.

La soluzione di questo problema costituisce un classico esempio di situazione nella quale il ricorso al computer risulta completamente dissennato.

D21:c. Permutomini

D21: c.01

`Le varie componenti di questo testo sono accessibili in http://www.mi.imati.cnr.it/∼alberto`