

## Capitolo D20: Successioni e matrici enumerative 1

### Contenuti delle sezioni

a. Successione dei fattoriali e varianti p.1    b. Coefficienti binomiali p.3    c. Multinsiemi p.10    d. Numeri di Fibonacci p.13    e. Numeri di Catalan p.18    f. Numeri di Stirling p.21    g. Numeri euleriani p.24    h. Numeri di Lah p.26    **P. 27**

---

**D20:0.01** In questo capitolo esaminiamo alcune successioni di interi naturali, cioè alcune funzioni del genere  $\{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$ , e alcune matrici del genere  $\{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$  che hanno importanti interpretazioni enumerative, cioè che assumono valori che si possono interpretare come cardinalità di insiemi di oggetti che rivestono particolare importanza. Queste funzioni enumerative si incontrano in moltissime formule della matematica (in algebra, analisi infinitesimale, geometria, probabilità e statistica, ...), della fisica, della chimica, delle tecnologie, dell'economia, ... . Il loro studio oggi viene inquadrato nella combinatoria, cioè nell'apparato teorico della matematica delle configurazioni discrete.

### D20:a. Successione dei fattoriali e varianti

**D20:a.01** Se  $n$  è un intero positivo, si definisce come  $n$  **fattoriale**, e si indica con  $n!$ , il prodotto dei primi  $n$  numeri interi positivi.

$$(1) \quad n! := \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n .$$

Si chiede inoltre che  $0! := 1$ , in accordo con la convenzione che il prodotto di zero fattori, il cosiddetto **prodotto vuoto**, come la potenza nulla di un intero positivo, sia uguale ad 1.

Dal punto di vista enumerativo il fattoriale di  $n$  fornisce il numero delle sequenze (ordinate) formate da  $n$  oggetti distinti, ovvero il numero delle permutazioni di  $n$  oggetti, ovvero il numero delle stringhe formate da  $n$  caratteri diversi e che non presentano ripetizioni.

**D20:a.02** In modo equivalente la successione dei fattoriali può essere definita iterativamente richiedendo:

$$(2) \quad 0! := 1 \quad , \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots : n! := n(n-1)! .$$

I componenti della successione dei fattoriali crescono molto rapidamente con  $n$  e il punto esclamativo della notazione  $n!$  è stato adottato per indicare lo stupore suscitato dalla rapidità di tale crescita.

$$\left| \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \dots \\ \hline 1 & 1 & 2 & 6 & 24 & 120 & 720 & 5040 & 40320 & 362880 & 3628800 & 39916800 & 479001600 & \dots \end{array} \right|$$

Osserviamo che la successione dei fattoriali cresce più rapidamente della  $\langle 10^n \rangle_{\mathbb{N}} = \langle n \in \mathbb{N} : | 10^n \rangle$ .

**D20:a.03** Vengono studiate molte successioni collegate a quella dei fattoriali; vediamone alcune.

Si dice **semifattoriale** o **doppio fattoriale** di  $n$ , e si denota con  $n!!$ , la successione definita iterativamente ponendo

$$(1) \quad 0!! := 1 \quad , \quad 1!! := 1 \quad , \quad \forall n = 2, 3, 4, \dots : n!! := n \cdot (n-2)!! .$$

Per questa successione si trovano i seguenti valori numerici

$$\left| \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & \dots \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 & 15 & 48 & 105 & 384 & 945 & 3\,840 & 10\,395 & 135\,135 & 46\,080 & 645\,120 & \dots \end{array} \right|$$

Inoltre possono essere utili le formule seguenti

$$(3) \quad \forall n \in \mathbb{N} : n! = n!! \cdot (n-1)!! ;$$

$$(4) \quad \forall h \in \mathbb{P} : (2h)!! = 2^h \cdot h! \quad , \quad (2h+1)!! = \frac{(2h+1)!}{(2h)!!} = \frac{(2h+1)!}{2^h h!} .$$

**D20:a.04** Si definisce come **superfattoriale** dell'intero naturale  $n$

$$\text{Sfact}(n) := \prod_{i=1}^n i! = \prod_{i=1}^n i^{n-i+1} .$$

La equivalente definizione iterativa di questa successione si ottiene ponendo

$$\text{Sfact}(0) := 1 \quad , \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots : \text{Sfact}(n) := \text{Sfact}(n-1) \cdot n! .$$

Questa successione cresce molto più rapidamente dello stesso fattoriale

$$\left| \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 12 & 288 & 34\,560 & 24\,883\,200 & 125\,411\,328\,000 & 5\,056\,584\,744\,960\,000 \\ & & & & & & & & 9 \\ & & & & & & & & 1\,834\,933\,472\,251\,084\,800\,000 & \dots \end{array} \right|$$

**D20:a.05** La precedente è una delle successioni alle quali si fa riferimento quando si studiano numeri estremamente grandi; vediamone alcune altre.

La successione

$$(1) \quad \langle n = 1, 2, 3, \dots : n^n \rangle = \langle 1, 4, 27, 256, 3125, 46656, 823543, 16777316, 387420489, 10^{10}, \dots \rangle ,$$

ha la componente  $n$ -esima che esprime il numero delle endofunzioni di un insieme di  $n$  elementi.

Si definisce come **iperfattoriale** dell'intero naturale  $n$

$$(2) \quad \text{Hfact}(n) := \prod_{i=1}^n i^i .$$

Equivalentemente si può dare la seguente definizione iterativa:

$$(3) \quad \text{Hfact}(0) := \text{Hfact}(1) := 1 \quad , \quad \forall n = 2, 3, 4, \dots : \text{Hfact}(n) := \text{Hfact}(n-1) \cdot n^n .$$

Anche questa successione cresce molto più rapidamente della successione fattoriale:

$$\left| \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ 1 & 1 & 4 & 108 & 27\,648 & 864 \cdot 10^5 & 40310784 \cdot 10^5 & 33197663987712 \cdot 10^5 & \dots \end{array} \right|$$

Segnaliamo anche che  $\text{Hfact}(14) \approx 0.1847 \cdot 10^{100} < 10^{100} < \text{Hfact}(15) \approx 8.0896 \cdot 10^{117} .$

**D20:a.06** Confrontiamo le successioni precedenti.

**(1) Prop.:**  $\forall n = 3, 4, \dots : \text{Sfact}(n) < \text{Hfact}(n)$ .

**Dim.:** Procediamo per induzione.  $\text{Sfact}(3) = 12 < 108 = \text{Hfact}(3)$ . Supponiamo poi che per un intero positivo  $n$  sia  $\text{Sfact}(n) < \text{Hfact}(n)$  e dimostriamo che  $\text{Sfact}(n+1) < \text{Hfact}(n+1)$ . In effetti:  $\text{Sfact}(n+1) = (n+1)! \text{Sfact}(n) < (n+1)^{n+1} \text{Hfact}(n) = \text{Hfact}(n+1)$  ■

**D20:a.07** In alcuni campi di studio della matematica, ma anche della cosmologia, della crittografia, e della meccanica statistica, risulta necessario tenere sotto controllo numeri interi e reali molto grandi. Con la precedente espressione sono da intendere numeri superiori a quelli identificabili servendosi di un'espressione della forma  $10^n$  con  $n$  non grandissimo come il numero delle cellule del corpo umano ( $10^{14}$ ), il [[numero di Avogadro]] ( $6.022 \cdot 10^{23}$ ) o il diametro dell'universo esplorabile in metri ( $8.8 \cdot 10^{26}$ ). Per questi studi si rendono necessari, innanzi tutto, espressioni e denominazioni. In questo senso risultano utili espressioni come  $n!$ ,  $n^n$ ,  $\text{Sfact}(n)$  e  $\text{Hfact}(n)$ . Segnaliamo poi il termine **Googol** per la costante  $10^{100}$ , e il termine **googolplex** pari a  $10^{\text{Googol}} = 10^{10^{100}}$ ; queste due costanti sono state introdotte da [[Edward Kasner]]. Segnaliamo anche i [[numeri di Skewes]] usati in teoria dei numeri:  $10^{10^{10^{34}}}$  e  $10^{10^{10^{963}}}$ .

**D20:a.08** A questo punto è opportuno ricordare una importante attività di documentazione della matematica che si serve del Web, la [[On-line Encyclopedia of Integer Sequences]], in sigla OEIS.

Si tratta di un archivio disponibile all'indirizzo [oeis.org](http://oeis.org) dedicato alle successioni di numeri interi. Questo archivio è stato avviato da Neil Sloane fin dal 1965 (utilizzava schede perforate) e successivamente posto in rete e diventato rapidamente il riferimento più esteso e consultato per queste entità. Nell'aprile del 2012 trattava più di 210 000 successioni.

Esso per ogni successione di interi fornisce le prime componenti, le interpretazioni enumerative e altri significati matematici, numerose citazioni della letteratura, programmi di calcolo, informazioni sui problemi aperti.

Ciascuna delle successioni è identificata con una sigla. Per le successioni descritte in questa sezione: fattoriali A000142, doppi fattoriali A006882, superfattoriale A000178, iperfattoriali A002109, numeri delle endofunzioni A000312.

## D20:b. Coefficienti binomiali

**D20:b.01** In questa sezione esaminiamo due matrici del genere  $\{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}\}$  strettamente connesse i cui valori hanno importanti significati enumerativi. Per definire tali matrici ci serviamo di particolari cammini nel piano combinatorio  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , l'insieme dei punti del piano cartesiano aventi entrambe le coordinate date da interi naturali, cioè l'insieme dei punti individuati come  $\langle h, k \rangle$  con  $h, k \in \mathbb{Z}$ ; questo piano qui lo presentiamo nella cosiddetta visualizzazione geografica (v. B21:).

Questi cammini, come vari altri che incontreremo in seguito, possono essere visualizzati con evidenza, caratteristica che aiuta a comprendere il significato di molte formule di enumerazione.

Ricordiamo che nel piano  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  diciamo **passo WE** ogni segmento orientato avente come estremi due punti della forma  $\langle h, k \rangle$  e  $\langle h+1, k \rangle$ , cioè ogni passo verso destra; diciamo **passo SN** ogni segmento orientato avente come estremi due punti della forma  $\langle h, k \rangle$  e  $\langle h, k+1 \rangle$ , cioè ogni passo verso l'alto; diciamo **passo NE** ogni segmento orientato avente come estremi due punti della forma  $\langle h, k \rangle$  e  $\langle h+1, k+1 \rangle$ ;

infine diciamo **passo SE** ogni segmento orientato avente come estremi due punti della forma  $\langle h, k \rangle$  e  $\langle h + 1, k - 1 \rangle$ .

**D20:b.02** Definiamo come **cammino -ZZR non discendente**, più concisamente **cammino -ZZRnd**, ogni cammino costituito da una sequenza di passi WE e SN.

Se  $P = \langle x_P, y_P \rangle$  e  $Q = \langle x_Q, y_Q \rangle$  rappresentano due punti -ZZ, denotiamo con  $\text{PZZRnd}(P, Q)$  l'insieme dei cammini -ZZRnd che iniziano in  $P$  e terminano in  $Q$ ; conveniamo che se  $x_P > x_Q$  oppure  $y_P > y_Q$  si ha  $\text{PZZRnd}(P, Q) = \emptyset$ .

In particolare chiamiamo **cammini binomiali** i cammini -ZZRnd che iniziano nell'origine  $\langle 0, 0 \rangle$  loro estremi finali possono essere tutti i punti  $\langle h, k \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , punti con entrambe le coordinate non negative, cioè costituenti il cosiddetto primo quadrante del piano  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Per l'insieme dei cammini binomiali che terminano in  $Q$  scriviamo  $\text{Cbins}(Q) := \text{PZZRnd}(\langle 0, 0 \rangle, Q)$ .

Osserviamo anche che per ogni  $R = \langle x_r, y_r \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  la traslazione  $\text{Trsl}_R = \{ A \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid A + R \}$  pone in biiezione due insiemi di cammini  $\text{PZZRnd}(P, Q)$  e  $\text{PZZRnd}(P + R, Q + R)$  e in particolare  $\text{Cbins}(Q)$  e  $\text{PZZRnd}(R, Q + R)$ .

Definiamo dunque come **coefficiente binomiale simmetrico** relativo agli interi naturali  $h$  e  $k$  e denotiamo con  $\text{cbins}(h, k)$ , il numero dei cammini binomiali che terminano nel punto  $\langle h, k \rangle$ , ossia

$$\text{cbins}(h, k) := |\text{Cbins}(\langle h, k \rangle)|.$$

Il simbolo  $\text{cbins}$  individua una **matrice enumerativa**, cioè una funzione del genere  $\text{cbins} \in \{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\}$  i cui valori forniscono le cardinalità di insiemi finiti significativi.

**D20:b.03** Dalla definizione si ricavano facilmente e in modo naturale varie proprietà dei coefficienti binomiali simmetrici.

$$(1) \quad \forall h, k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad : \quad \text{cbins}(h, k) = \text{cbins}(k, h) \quad (\text{simmetria}).$$

Questa uguaglianza deriva dal fatto che la riflessione del piano  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  rispetto alla diagonale  $h = k$  implica una biiezione fra i cammini binomiali che terminano in  $\langle h, k \rangle$  e quelli che terminano in  $\langle k, h \rangle$ . Di conseguenza il numero dei cammini del primo di questi insiemi è uguale al numero dei cammini del secondo insieme ■

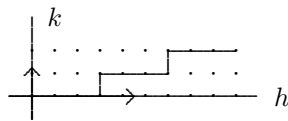
$$(2) \quad \forall h = 0, 1, 2, 3, \dots \quad : \quad \text{cbins}(h, 0) = \text{cbins}(0, h) = 1 \quad (\text{condizioni al contorno}).$$

I cammini binomiali che terminano in un punto  $\langle h, 0 \rangle$  dell'asse orizzontale si riducono ad un solo cammino, quello costituito da  $h$  passi WE. Simmetricamente è uno solo il cammino binomiale che termina in  $\langle 0, h \rangle$  ■

$$(3) \quad \forall h = 0, 1, 2, 3, \dots \quad : \quad \text{cbins}(h, 1) = \text{cbins}(1, h) = h + 1 \quad (\text{condizioni al contorno}).$$

La collezione dei cammini binomiali che terminano in un punto  $\langle h, 1 \rangle$  della linea orizzontale  $y = 1$  comprende i cammini binomiali di  $h + 1$  passi, uno solo dei quali è un passo SN; comprende quindi  $h + 1$  cammini; l'enunciato si completa per simmetria ■

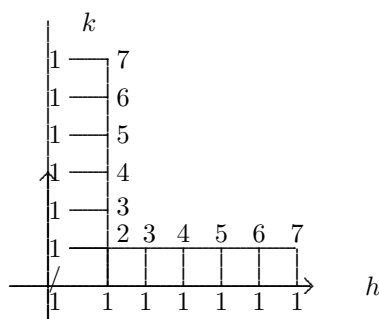
$$\text{D20:b.04} \quad (1) \quad \forall h = 0, 1, 2, 3, \dots \quad : \quad \text{cbins}(h, 2) = \text{cbins}(2, h) = \frac{(h + 2)(h + 1)}{2}.$$



La collezione dei cammini binomiali che terminano in un punto  $\langle h, 2 \rangle$  della linea orizzontale  $y = 2$  è data dall'insieme dei cammini di  $h + 2$  passi due dei quali sono passi SN, i restanti passi WE; dato che il primo dei due passi SN si può incontrare in una qualsiasi delle prime  $h + 1$  posizioni (chiamiamola posizione  $j$ ) e il secondo in una qualsiasi delle restanti  $h + 2 - j$  posizioni, il loro numero è uguale a  $(h + 1) + h + (h - 1) \dots + 2 + 1$ , cioè ad  $(h + 2)(h + 1)/2$ ; per concludere si invoca ancora la simmetria ■

$$(2) \quad \text{cbins}(h + 1, k + 1) = \text{cbins}(h, k + 1) + \text{cbins}(h + 1, k) \quad (\text{formula di addizione}).$$

Ogni cammino binomiale che termina nel punto  $T = \langle h + 1, k + 1 \rangle$  deve provenire aut dal punto  $\langle h, k + 1 \rangle$  immediatamente a sinistra di  $T$  aut da  $\langle h + 1, k \rangle$ , punto immediatamente al di sotto di  $T$ ; quindi il numero dei cammini binomiali che terminano nel punto  $T = \langle h + 1, k + 1 \rangle$  è dato dalla somma del numero dei cammini binomiali che terminano nel punto  $\langle h, k + 1 \rangle$  e del numero dei cammini binomiali che terminano nel punto  $\langle h + 1, k \rangle$ . Questo fatto e quello ottenibile per simmetria sono espresse dalla formula dell'enunciato ■



**D20:b.05** Dalle uguaglianze esprimenti le condizioni al contorno (b.02(2,3)) e l'additività (b.03(2)) segue un procedimento per individuare effettivamente i valori della funzione che porta a una tabella come la seguente

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
1	8	36	120	330	792	1716	3432	...	
1	7	28	84	210	462	924	1716	...	
1	6	21	56	126	252	462	792	...	
1	5	15	35	70	126	210	330	...	
1	4	10	20	35	56	84	120	...	
1	3	6	10	15	21	28	36	...	
1	2	3	4	5	6	7	8	...	
1	1	1	1	1	1	1	1	...	

Si tratta di una porzione di una matrice con le righe e le colonne individuate dai numeri naturali.

**D20:b.06** I coefficienti binomiali simmetrici si possono interpretare anche come cardinalità di insiemi di sequenze binarie e di collezioni di sottoinsiemi.

Ogni cammino binomiale che termina in  $\langle h, k \rangle$  si può rappresentare con una sequenza binaria di lunghezza  $h + k$  e di peso  $h$ , cioè con una sequenza di  $h + k$  bits (cifre uguali a 0 o 1) comprendente  $h$  bits uguali ad 1 (e quindi  $k$  bits uguali a 0). In effetti fra i suddetti cammini binomiali e queste sequenze binarie sussiste criptomorfismo, cioè questi due tipi di entità sono logicamente e operativamente equivalenti; le sequenze binarie si possono considerare delle codifiche concise dei cammini binomiali. Quindi il coefficiente binomiale simmetrico  $\text{cbins}(h, k)$  si può interpretare come numero delle sequenze binarie di lunghezza  $h + k$  e di peso  $h$ .

**D20:b.07** Consideriamo ora un generico insieme esplicito  $U$ , cioè un insieme finito individuato da un elenco (o lista)  $E$  dei suoi elementi; si osserva che questo elenco stabilisce un [[ordine sequenziale]] fra gli elementi di  $U$ . Ogni sottoinsieme  $S$  di  $U$  si può individuare con un sottoelenco di  $E$ , cioè con un elenco ottenuto da  $E$  eliminando gli elementi di  $U$  non appartenenti ad  $S$ . Denotiamo poi con  $h := |S|$  il numero di elementi del sottoinsieme, con  $n := |U|$  la cardinalità dell'intero  $U$ , che nelle attuali considerazioni può essere conveniente chiamare *insieme ambiente*, e con  $k$  il numero degli elementi del complementare di  $S$  in  $U$ , definendo quindi  $k := n - h$ .

Il sottoinsieme  $S$ , invece che con il sottoelenco suddetto, si può individuare con la sequenza binaria di lunghezza  $n = h + k$  e di peso  $h$  ottenuta facendo riferimento ad  $E$  e assumendo per  $i = 1, 2, \dots, n$  come bit nella posizione  $i$ -esima 0 o 1 secondo che l'elemento nella posizione  $i$  di  $E$  non appartiene oppure appartiene al sottoinsieme  $S$ . Osserviamo che questa sequenza binaria costituisce una rappresentazione della [[funzione indicatrice]] del sottoinsieme  $S$  di  $U$ ; precisamente la rappresentazione relativa alla sequenzializzazione di  $U$  fornita dall'elenco  $E$ .

**D20:b.08** A questo punto risulta individuata un'applicazione significativa dei cammini binomiali terminanti in  $\langle h, n - h \rangle$ : ciascuno di essi consente di individuare biunivocamente un sottoinsieme  $S$  di  $h$  elementi di un insieme ambiente  $U$  di  $n$  elementi ( $n = h, h + 1, \dots$ ), quando si faccia riferimento ad un elenco esplicito  $E$  degli elementi dell'ambiente. Si osserva che un cammino binomiale di lunghezza  $n$  potrebbe servire per descrivere visivamente un processo consistente nello scorrere l'elenco  $E$  degli elementi di  $U$  per decidere per ciascuno di essi se va incluso o meno in un sottoinsieme  $S$  che si vuole costituito da elementi da privilegiare in quanto soddisfano una qualche condizione, ovvero che si devono selezionare per una qualche applicazione.

Risulta inoltre disponibile un'altra interpretazione dei coefficienti binomiali simmetrici, forse la più rilevante:  $\text{cbins}(h, k)$  fornisce il numero dei sottoinsiemi con  $h$  elementi di un insieme di cardinalità  $h + k$ .

Si osserva anche che ogni sottoelenco che fornisce un sottoinsieme  $S$  di  $h$  elementi di un ambiente  $U$  di  $h + k$  elementi dato mediante un elenco esplicito non è che una combinazione senza ripetizioni (B13e12) di  $h$  degli  $h + k$  contrassegni degli elementi di  $S$ . Quindi  $\text{cbins}(h, k)$  fornisce anche il numero delle combinazioni senza ripetizioni di lunghezza  $h$  che si possono ottenere servendosi di  $h + k$  elementi. Per il numero di queste sequenze si trova che è fornito dal numero delle disposizioni di  $h + k$  oggetti di lunghezza  $h$  diviso per  $h!$ ; quindi

$$(1) \quad \forall h, k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad : \quad \text{cbins}(h, k) = \frac{(h+k)^h}{h!} = \frac{(h+k)!}{h! k!} .$$

**D20:b.09** Introduciamo ora i **coefficienti binomiali** usuali come varianti dei simmetrici mediante la seguente formula

$$(1) \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots \wedge h = 0, 1, 2, \dots, n \quad : \quad \binom{n}{h} := \text{cbin}(n, h) := \text{cbins}(h, n - h) ;$$

in essa i coefficienti binomiali sono individuati sia con la usuale notazione a due livelli introdotta da Albert von Ettinghausen che può leggersi “ $n$  binomiale  $h$ ” oppure “scelte di  $h$  entro  $n$ ”, sia con una notazione mediante lettere. Per il collegamento inverso serve la formula

$$(2) \quad \forall h, k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad : \quad \text{cbins}(h, k) = \binom{h+k}{h} .$$

**D20:b.10** A questo punto può essere utile riscrivere per i coefficienti binomiali usuali i risultati trovati

in precedenza:

$$(1) \quad \forall n = 0, 2, 3, \dots, k = 0, 1, 2, \dots, n : \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$$

$$(2) \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots : \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$$

$$(3) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots : \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n;$$

$$(4) \quad \forall n = 2, 3, 4, \dots : \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2};$$

$$(5) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots, k = 1, 2, \dots, n : \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1};$$

$$(6) \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, k = 0, 2, \dots, n : \binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Può anche essere inoltre utile esplicitare le interpretazioni di queste formule in termini di insiemi e sottoinsiemi.

**D20:b.11** La tavola numerica dei coefficienti simmetrici viene riferita ai due assi delle variabili  $h$  e  $k$ ; i punti che corrispondono ai sottoinsiemi di un ambiente di  $n = h + k$  oggetti relativi a diversi valori di  $h$  e  $k = n - h$  si trovano allineati sulla linea di equazione cartesiana  $x + y = n$ . Per ottenere i valori dei coefficienti binomiali riferiti agli assi delle variabili  $n$  ed  $h$  (o  $k$ ) basta modificare la tabella precedente facendo slittare la seconda linea dal basso, relativa a  $k = 1$ , di una posizione a destra, la linea relativa a  $k = 2$  di due posizioni e così via. Si ottiene quindi la tabella triangolare

							1	...
						1	8	...
					1	7	28	...
				1	6	21	56	...
			1	5	15	35	70	...
		1	4	10	20	35	56	...
	1	3	6	10	15	21	28	...
1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	1	1	1	1	1	1	1	...

In questo quadro non è difficile individuare una variante nel solo aspetto del [[triangolo di Chou-Tartaglia-Pascal]], ottenibile con una sorta di rotazione della suddetta tabella.

**D20:b.12** Sommando i valori che si trovano nelle successive colonne si ottiene la successione delle potenze di 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ... . In effetti gli interi positivi nella colonna relativa a un dato valore di  $n$  forniscono i numeri dei sottoinsiemi di un ambiente di  $n$  elementi aventi, risp.,  $h = 0, 1, 2, \dots, n - 1, n$  elementi. La somma di queste cardinalità fornisce il numero complessivo dei sottoinsiemi di un ambiente di  $n$  elementi: questo coincide con il numero delle sequenze binarie di lunghezza  $n$  che, come abbiamo visto, si possono porre in corrispondenza biunivoca con i suddetti sottoinsiemi (sono le rispettive funzioni indicatrici) e tale numero è chiaramente pari a  $2^n$  (coincide con il numero delle disposizioni con ripetizioni (B13e01) di lunghezza  $n$  di 2 oggetti).

Risulta quindi dimostrata la seguente **formula di sommazione per i coefficienti binomiali**:

$$(1) \quad \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} = 2^n .$$

Questa identità si può anche ricavare come caso particolare dello sviluppo del binomio di Newton, formula che vedremo in :b.11 e che esprime un fatto più elaborato del precedente.

Conviene osservare che la formula di sommazione per un dato  $n$  corrisponde alla distribuzione dei nodi del [[reticolo booleano]] dei sottoinsiemi di un ambiente di  $n$  elementi sui diversi livelli (ranghi) di tale reticolo graduato. Inoltre la formula precedente può essere utilmente considerata da un punto di vista probabilistico in relazione alla cosiddetta [[distribuzione binomiale]].

**D20:b.13** I coefficienti binomiali si trovano soddisfare una grande varietà di identità. Prima di presentare le più importanti, conviene effettuare una prima estensione dei coefficienti binomiali ponendo

$$(1) \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, k = n + 1, n + 2, \dots : \binom{n}{k} := 0 .$$

La :b.10(6), isolando i primi fattori del numeratore e del denominatore, implica

$$(2) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots, k = 1, 2, \dots, n : \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \blacksquare$$

$$(3) \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, k = 0, 1, 2, \dots, n : \sum_{h=0}^n \binom{h}{k} = \binom{n+1}{k+1} .$$

**Dim.:** Si ottiene applicando più volte la formula di addizione :b.09(5):

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k+1} \\ &= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \dots + \binom{k+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \dots + \binom{k}{k} + \binom{k}{k+1} . \end{aligned}$$

Per la (1) l'ultimo addendo vale 0, come ogni  $\binom{k}{m}$  per  $k < m$  ■

$$(4) \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots, m = 0, 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, 2, \dots, m : \binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$$

**Dim.:** Entrambi i membri dell'uguaglianza sono uguali a  $\frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}$  ■

**D20:b.14 Prop. (sviluppo del binomio di Newton)** Siano  $x$  e  $y$  due variabili nel campo dei numeri razionali. Vale la seguente identità fra polinomi nelle due variabili

$$(1) \quad (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} .$$

**Dim.:** Dimostriamo la formula per induzione. Chiaramente essa vale per  $n = 0$  (e per  $n = 1$ ).

Supponiamola vera per un generico esponente  $n$  intero positivo e dimostriamo che vale la

$$(x + y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

Questa si ottiene dal seguente sviluppo  $(x + y)(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} =$



$$\begin{aligned}
 x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} &= \\
 x^{n+1} + \sum_{h=1}^n \binom{n}{h-1} x^h y^{n-h+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} &= \\
 x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} \blacksquare
 \end{aligned}$$

**D20:b.15** Si osserva che :b.11(1) si ottiene dalla :b.14(1) ponendo  $x = y = 1$ .  
 Se invece si pone  $y = 1$  si ottiene

$$(1) \quad (x + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k .$$

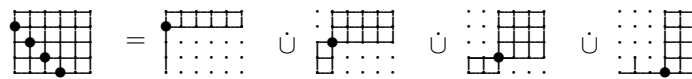
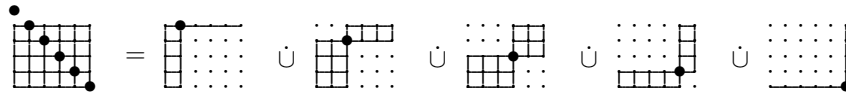
Inoltre se nella precedente si modifica  $y$  in  $-y$  si ottiene

$$(2) \quad (x - y)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} .$$

**D20:b.16 (formula di convoluzione di Chu-Vandermonde)**

$$(1) \quad \forall n \leq r + s : \quad \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n} .$$

**Dim.:** Anche questa formula si dimostra considerando insiemi di cammini -ZZRnd e loro cardinalità. Può essere utile fare riferimento alle seguenti figure riguardanti partizioni di insiemi di cammini -ZZRnd. Entrambe le partizioni riguardano l'insieme dei cammini relativi ad  $r = 5$  ed  $s = 4$ , ma la prima concerne  $n = 3$ , la seconda  $n = 5$ .



Sul piano generale consideriamo l'insieme  $\mathcal{C}$  dei cammini -ZZRnd che si concludono in  $\langle n, r + s - n \rangle$  ed il segmento -ZZ obliquo  $\mathcal{S} = \{k = 0, \dots, r : \langle k, r - k \rangle\}$  (una scala SE). Ogni cammino di  $\mathcal{C}$  passa da uno ed uno solo degli  $r + 1$  punti di  $\mathcal{S}$ . Quindi  $\mathcal{C}$  si può ripartire in  $r + 1$  sottoinsiemi  $C_k$  ( $k = 0, 1, \dots, r$ ), il  $k$ -esimo dei quali comprendente i cammini passanti per il punto  $P_k = \langle k, r - k \rangle \in \mathcal{S}$ . Ciascuno dei cammini in  $C_k$  si ottiene giustappoendo un qualsiasi cammino binomiale di  $\text{Cbins}(P_k)$  ad un qualsiasi cammino -ZZRnd che inizia in  $P_k$  e termina in  $\langle n, r + s - n \rangle$ .

Evidentemente il numero dei primi è  $\binom{r}{k}$ .

La traslazione che porta  $\langle k, r - k \rangle$  nell'origine pone  $\text{PZZRnd}(P_k, \langle n, r + s - n \rangle)$  in biiezione con 'insieme  $\text{Cbins}(\langle n - k, s - (n - k) \rangle)$  : quindi questi cammini sono in numero di  $\binom{s}{n - k}$ .

Se ne conclude  $C_k$  è in biiezione con  $\text{Cbins}(r, k) \times \text{Cbins}(\langle n - k, s - (n - k) \rangle)$  e di conseguenza  $|C_k| = \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n - k}$ . La formula di convoluzione si ottiene passando dalla relazione di partizione  $\mathcal{C} = \dot{\cup}_{k=0}^r C_k$  alle relative cardinalità ■

Osserviamo che se  $n < r$  o  $n < s$  alcuni  $S_k$  sono vuoti; questo conferma l'opportunità di assegnare il valore 0 ai coefficienti  $\binom{s}{n - k}$  quando  $n - k < 0$  o  $s < n - k$ .

Dunque estendiamo la definizione dei coefficienti binomiali ponendo

$$(2) \quad \forall k \in \{\dots, -3, -2, -1, n + 1, n + 2, n + 3, \dots\} : \binom{n}{k} := 0 .$$

### D20:c. Multinsiemi

**D20:c.01** Definiamo formalmente **multinsieme** (o multiinsieme) una coppia  $\langle A, m \rangle$  con  $A$  insieme finito ed  $m \in \{A \mapsto \mathbb{P}\}$ .

L'insieme  $A$  viene chiamato **terreno** del multinsieme e la funzione  $m$  **molteplicità** dello stesso. Il multinsieme  $\langle A, m \rangle$  si potrebbe anche individuare con l'espressione  $\langle \text{dom}(m), m \rangle$ ; esso infatti si può identificare limitandosi a fornire la sua molteplicità.

Due esempi di multinsiemi sono:

$$M_1 = \left\downarrow \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right\downarrow \quad \text{e} \quad M_2 = \left\downarrow \begin{array}{ccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \\ 3 & 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{array} \right\downarrow .$$

Quando si può sottintendere un ordinamento per il terreno  $A$  un multinsieme si può identificare con la sequenza dei corrispondenti valori della molteplicità: in particolare i due precedenti multinsiemi si potrebbero identificare, risp., con le sequenze  $\langle 2, 1, 5, 3, 2, 3 \rangle$  e  $\langle 3, 1, 4, 4, 2, 1, 6, 4 \rangle$ .

Nella pratica, per individuare multinsiemi con molteplicità inferiori a 10 sono sufficienti stringhe di cifre decimali positive: nei due esempi alle scritture concise 215323 e 31442164 . interi

**D20:c.02** Denoteremo con  $\text{Mset}_A$  l'insieme dei multinsiemi sul terreno  $A$ .

Nelle considerazioni generali sui multinsiemi è possibile limitarsi a quelli aventi come terreno un intervallo della forma  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ , come il precedente  $M_1$ . In effetti ogni insieme finito di  $n$  elementi si può porre in biiezione con un tale intervallo e le considerazioni che prescindono dalle caratteristiche costruttive degli elementi di  $A$  possono ricondursi al caso del dominio numerico suddetto, l'ordinamento di quest'ultimo essendo spesso solo utile per chiarire una situazione specifica.

L'insieme dei multinsiemi su  $[n]$  lo denoteremo semplicemente con  $\text{Mset}_n$ . Nel seguito della sezione tratteremo soprattutto questi multinsiemi.

Va tuttavia segnalato che i multinsiemi sono ampiamente utilizzati per caratterizzare configurazioni ottenute con costruzioni ben definite che si basano su strutture specifiche. In particolare essi servono per individuare:

- le fattorizzazioni mediante fattori primi degli interi positivi (B26b);
- la caratterizzazione mediante cicli delle permutazioni di un insieme finito (D25:g) e le classi di coniugio di un gruppo finito (B14e10);
- le radici di un'equazione polinomiale, da caratterizzare con le relative molteplicità;

- le rappresentazioni dei gruppi di permutazioni e le relative tavole dei caratteri.

La nozione di multinsieme si può confrontare con quella di funzione caratteristica di un insieme, questa essendo una funzione vincolata ad assumere i valori 0 e 1.

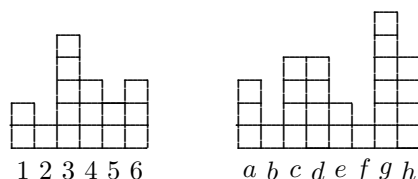
Può servire anche collegare la nozione di multinsieme a quella di successione di interi positivi, funzione avente come dominio un sottoinsieme di  $\mathbb{P}$  oppure di  $\mathbb{N}$ .

Questa nozione, come vedremo, è strettamente collegata a quella di coefficiente binomiale.

**D20:c.03** Un multinsieme  $\langle A, m \rangle$ , quando si sia fissato un ordine totale per gli elementi del suo dominio  $A$  (per i multinsiemi aventi come terreno un intervallo  $[n]$  considerando come ordine canonico  $\leq$ ) si può rappresentare con una sequenza costituita dagli elementi del suo dominio considerati secondo l'ordine e replicando ciascun elemento  $a$   $m(a)$  volte. Ad esempio  $M_1$  si può rappresentare con 1123333344455666 ed  $M_2$  con *aaabccccdddeefggggghhhh*.

Questa rappresentazione la chiameremo **sequenza non decrescente** del multinsieme. Si tratta di una rappresentazione fedele: infatti si individuano facilmente due algoritmi che realizzano, risp., la trasformazione di una funzione molteplicità nella sequenza non decrescente associata e la trasformazione inversa.

Un multinsieme con il terreno ordinato totalmente si può anche raffigurare, spesso con efficacia, mediante un istogramma ottenuto affiancando le basi di barre verticali costituite da quadratini sovrapposti in modo da visualizzare le successive molteplicità. Per  $M_1$  ed  $M_2$  si ha



Talune di queste sequenze si possono rappresentare più convenientemente con le cosiddette **notazioni esponenziali**: per i due esempi considerati si avrebbero  $1^2 2^3 3^5 4^3 5^2 6^3$  e  $a^3 b c^4 d^4 e^2 f g^6 h^4$ .

L'interpretazione delle sequenze non decrescenti come liste di elementi del terreno replicati secondo le richieste della molteplicità induce a definire **cardinalità** di  $M = \langle A, m \rangle$  il numero di questi elementi replicati, ovvero il numero dei quadratini nella corrispondente raffigurazione mediante istogramma. Termine equivalente è **molteplicità complessiva** del multinsieme.

Per i due esempi precedenti, servendoci dell'usuale notazione per le cardinalità, possiamo quindi scrivere  $|M_1| = 16$  e  $|M_2| = 25$ .

**D20:c.04** Consideriamo il multinsieme  $M = \langle A, m \rangle$  con  $A = [n]$  e denotiamo con  $k$  la sua cardinalità. La sequenza non decrescente associata si può raffigurare con un cammino -ZZRnd che inizia con il passo SN da  $\langle 0, 0 \rangle$  a  $\langle 0, 1 \rangle$  e termina con il passo WE da  $\langle k - 1, n \rangle$  a  $\langle k, n \rangle$  e non presenta mai due passi SN consecutivi.

Un tale cammino si può codificare fedelmente con la sequenza non decrescente delle ordinate dei successivi nodi ad esclusione del primo e dell'ultimo, evidentemente superflui. Per  $M_1$  abbiamo la sequenza  $\langle 2, 3, 8, 11, 13, 16 \rangle$ . Per il multinsieme ottenuto da  $M_2$  sostituendo le successive lettere con i successivi interi positivi abbiamo  $\langle 3, 4, 8, 12, 14, 15, 21, 25 \rangle$ .

È dunque evidente la biiezione fra multinsiemi e funzioni -ZZ non decrescenti.

**D20:c.05** Denotiamo con  $Mset_{n;k}$  l'insieme dei multinsiemi aventi come terreno  $[n]$  e cardinalità  $k$ .

Diamo ora una formula per il numero dei multinsiemi con le suddette caratteristiche.

Per questo numero viene usata una notazione su due livelli che richiama quella dei coefficienti binomiali; insieme ad essa proponiamo una equivalente notazione mediante caratteri. Definiamo dunque

$$(1) \quad \text{nMset}(n, k) := \left( \binom{n}{k} \right) := |\text{Mset}_{n;k}|.$$

Per la notazione su due livelli viene proposta la lettura “ $n$  multiscelta  $k$ ”.

Il numero richiesto è uguale al numero delle combinazioni con ripetizioni di  $k$  oggetti estratti da un insieme di  $n$  elementi (B13e10). Quindi per il numero dei multinsiemi si trova l’espressione

$$(2) \quad \left( \binom{n}{k} \right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Può essere utile per la sua memorizzazione l’espressione di questi numeri che si serve dei fattoriali crescenti e paragonarla all’espressione dei coefficienti binomiali che si serve dei fattoriali decrescenti:

$$(3) \quad \left( \binom{n}{k} \right) = \frac{n^{\bar{k}}}{k!}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.$$

**D20:c.06** Può essere utile sviluppare lo studio dei coefficienti multinsiemistici in modo più autonomo basandosi sugli insiemi dei multinsiemi.

Per questo introduciamo la notazione  $\left( \binom{A}{k} \right)$  per l’insieme dei multinsiemi aventi come terreno l’insieme  $A$  ed aventi cardinalità  $k$ . Si osserva inoltre che per la loro cardinalità  $\left| \left( \binom{A}{k} \right) \right| = \left( \binom{|A|}{k} \right)$ .

Considerando il terreno  $A \cup \{\nu\}$  di  $n+1$  elementi ed il fatto che la collezione dei suoi multinsiemi si bipartisce nella collezione dei sottomultinsiemi che contengono  $\nu$  e di quella dei sottomultinsiemi che non la contengono si ottiene la biiezione

$$(1) \quad \left( \binom{A \cup \{\nu\}}{k+1} \right) \longleftrightarrow \left( \binom{A}{k+1} \right) \dot{\cup} \left( \binom{A \cup \{\nu\}}{k} \right).$$

Da questa per le ardinaltà si ottiene la ricorrenza

$$(2) \quad \left( \binom{n+1}{k+1} \right) = \left( \binom{n}{k+1} \right) \dot{\cup} \left( \binom{n+1}{k} \right).$$

Si hanno inoltre le condizioni iniziali

$$(3) \quad \left( \binom{n}{0} \right) = 1 \quad \text{e} \quad \left( \binom{0}{k} \right) = 0^k.$$

**D20:c.07** Diamo infine la tabella dei valori dei coefficienti multinsiemistici  $\left( \binom{n}{k} \right)$ , evidentemente una

variante della tabella dei coefficienti binomiali (:b.05).

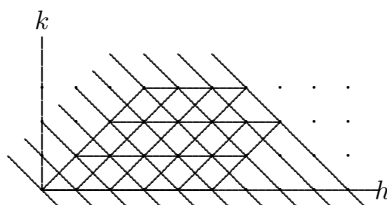
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	⋯	
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	⋯	
6	1	6	21	56	126	252	462	792	⋯	
5	1	5	15	35	70	126	210	330	⋯	
4	1	4	10	20	35	56	84	120	⋯	
3	1	3	6	10	15	21	28	36	⋯	
2	1	2	3	4	5	6	7	8	⋯	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	⋯	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	⋯	
$n$										
	$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	⋯

### D20:d. Numeri di Fibonacci

**D20:d.01** Diciamo **cammino di Fibonacci** ogni cammino nel piano  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  che inizia nell'origine e che presenta solo passi WE e NE . I cammini di Fibonacci si possono codificare fedelmente, ossia rappresentare fedelmente e concisamente, con le sequenze di numeri 1 e 2, ogni 1 rappresentando un passo WE ed ogni 2 un passo NE.

Per ogni  $n$  intero naturale denotimo con  $FIB_{n+1}$  l'insieme dei cammini di Fibonacci che hanno come estremità finale un punto  $\langle h, k \rangle$  con  $h + k = n$  ed  $h \geq k$  . Per i valori da 1 a 6 di  $n$  abbiamo i seguenti insiemi di cammini:  $FIB_1 = \{\epsilon\}$ ,  $FIB_2 = \{1\}$ ,  $FIB_3 = \{11, 2\}$ ,  $FIB_4 = \{111, 12, 21\}$ ,  $FIB_5 = \{1111, 112, 121, 211, 22\}$  e  $FIB_6 = \{11111, 1112, 1121, 1211, 2111, 122, 212, 221\}$ .

Osserviamo esplicitamente che  $FIB_1$  è costituito solo dal cammino di lunghezza zero, l'unico da  $\langle 0, 0 \rangle$  a  $\langle 0, 0 \rangle$ .



Osserviamo anche che i cammini di  $FIB_{n+1}$  si concludono in un punto  $-ZZ$  della retta  $y = n - x$  (tratteggiata in figura).

I cammini di  $FIB_{n+1}$  si dicono anche **cammini di peso  $n$** .

**D20:d.02** Definiamo come **numero di Fibonacci** con indice  $n$   $Fib_n := |FIB_n|$  , cioè il numero di cammini di Fibonacci che terminano in uno dei punti  $\langle h, n - h - 1 \rangle$  per  $h = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ .

Si osserva che per  $n = 3, 4, 5, \dots$  l'insieme  $FIB_n$  è costituito da due tipi di cammini: quelli che si concludono con un passo NE e che iniziano con uno dei cammini in  $FIB_{n-2}$  e quelli che si concludono con un passo WE e che iniziano con uno dei cammini in  $FIB_{n-1}$ . Dunque

$$(1) \quad \forall n = 3, 4, 5, \dots : FIB_n = FIB_{n-2} \dot{\cup} FIB_{n-1} \quad \text{e quindi} \quad \forall n = 3, 4, 5, \dots : Fib_n = Fib_{n-2} + Fib_{n-1} .$$

Conviene inoltre porre  $\text{Fib}_0 := 0$ , in accordo con il fatto che nessuna somma di numeri 1 e 2 vale  $-1$ , ossia che l'insieme dei cammini di fibonacci di peso  $-1$  è vuoto. Con la precedente scelta la (1) vale anche per  $n = 2$ .

Più avanti (:c.11) amplieremo la successione dei numeri  $\text{Fib}_n$  ad una successione del genere  $\{\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}\}$ .

La successione dei numeri di Fibonacci  $\langle n \in \mathbb{N} : | \text{Fib}_n \rangle$  si può introdurre anche con la equivalente definizione basata sulle seguenti richieste iterative:

$$(2) \quad \text{Fib}_0 := 0 \quad , \quad \text{Fib}_1 = 1 \quad , \quad \forall n = 2, 3, 4, \dots : \text{Fib}_n := \text{Fib}_{n-2} + \text{Fib}_{n-1} .$$

Per i primi componenti della successione si trova

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} \downarrow & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & \dots \\ & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 & 144 & 233 & 377 & 610 & 987 & 1597 & 2584 & \dots \\ & \downarrow \end{array}$$

**D20:d.03 Prop.** La successione dei numeri di Fibonacci possiede una gamma sorprendentemente ampia di proprietà e queste fanno sì che essa serva per i modelli matematici di vari fenomeni e per molti procedimenti computazionali.

Nel seguito della sezione presentiamo alcune di queste proprietà e per semplificare la lettura per i numeri di Fibonacci adottiamo come notazione locale  $F_n := \text{Fib}_n$ .

Il numero  $F_n$  si può definire anche come numero di espressioni di somme aritmetiche che forniscono  $n - 1$  come somma di addendi che possono essere solo 1 o 2.

Ad esempio il numero 5 viene individuato dalle seguenti  $F_6 = 8$  espressioni:

$$1+1+1+1+1, 1+1+1+2, 1+1+2+1, 1+2+1+1, 2+1+1+1, 1+2+2, 2+1+2, 2+2+1 .$$

In effetti queste espressioni sono in corrispondenza biunivoca con le codifiche dei cammini di Fibonacci mediante stringhe di cifre 1 e 2: basta inserire in queste un segno + tra due cifre successive.

**D20:d.04** Stabiliamo ora un collegamento dei numeri di Fibonacci con i coefficienti binomiali simmetrici. Dato che i primi sono definiti mediante cammini di Fibonacci ed i secondi mediante cammini binomiali, si è indotti a stabilire un collegamento fra questi due tipi di configurazioni in  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Questo collegamento è costituito da una evidente biiezione che ad un cammino di Fibonacci associa il cammino binomiale ottenuto modificando ogni passo NE in un passo SN.

Tale trasformazione corrisponde alla trasformazione dei punti -ZZ

$$(1) \quad \left[ h, k \in \mathbb{N} : \langle h, h+k \rangle \mapsto \langle h, k \rangle \right]$$

che ad ogni punto finale di cammino di Fibonacci associa un punto finale di cammino binomiale.

Consideriamo ora i raggruppamenti dei valori dei coefficienti binomiali forniti dalla tabella precedente che corrispondono ai punti -ZZ su ciascuna delle rette -ZZ oblique individuate dalle equazioni  $y = -x+n$  per  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Il raggruppamento relativo a un dato  $n$  contiene  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  elementi e per la successione delle somme si trovano i valori

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

cioè i valori iniziali della successione dei numeri di Fibonacci  $\langle n \in \mathbb{P} : | F_n \rangle$ .

Questo fatto si dimostra considerando che la proprietà di additività comporta che ciascuno dei valori del raggruppamento relativo a  $n$  è ottenuto da uno dei valori dei due raggruppamenti immediatamente precedenti o dalla somma di due di tali valori. Si trova quindi

$$(2) \quad F_n = \sum_{h=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \text{cbins}(n-2h, h) = \sum_{h=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-h}{h} .$$

**D20:d.05 Prop.** (identità di Gian Domenico Cassini)

$$(1) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots : F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

**Dim.:** Procediamo ad una dimostrazione per induzione.

Per  $n = 1$  la relazione diventa  $F_2F_0 - F_1^2 = (-1)^1$ , cioè  $-(1^2) = -1$ , verificata.

Supponiamo vera la precedente uguaglianza (1) fino ad un determinato valore  $n$  dell'indice e deduciamo quella che si ottiene da essa sostituendo  $n$  con  $n + 1$ , cioè la  $F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$  [a] .

Grazie all'uguaglianza fondamentale, nella (1) è possibile sostituire  $F_{n-1}$  con  $F_{n+1} - F_n$  ottenendo  $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$  [b] , ovvero  $F_n(F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$  [c]; ma questa, grazie alla  $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$  , equivale alla [a] ■

**D20:d.06** È utile derivare dall'identità di Cassini la seguente.

**Prop.**

$$(1) \quad \forall n = 2, 3, \dots : \frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n} .$$

Al crescere di  $n$  il valore assoluto della differenza fra due successivi rapporti di numeri di Fibonacci,  $1/F_{n-1}F_n$ , diminuisce piuttosto rapidamente e questo induce a considerare la successione di intervalli

$$-QQ \left\langle h = 1, 2, 3, \dots : \left[ \frac{F_{2h}}{F_{2h-1}} :: \frac{F_{2h+1}}{F_{2h}} \right] \right\rangle:$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{F_2}{F_1} :: \frac{F_3}{F_2} \right] &= [1 :: 2] \\ \left[ \frac{F_4}{F_3} :: \frac{F_5}{F_4} \right] &= [1.5 :: 1.6666666] \\ \left[ \frac{F_6}{F_5} :: \frac{F_7}{F_6} \right] &= [1.6 :: 1.625] \\ \left[ \frac{F_8}{F_7} :: \frac{F_9}{F_8} \right] &= [1.6153846 :: 1.6190476] \\ &\dots \end{aligned}$$

Evidentemente, come aveva osservato anche [[Johannes Kepler]], si tratta di una successione di intervalli annidati sempre più stretti. Come vedremo si dimostra che tale successione individua un unico numero reale uguale a  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.608\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848\dots$ , cioè l'importante costante matematica chiamata **sezione aurea** o **numero di Fidia**.

**D20:d.07 Prop.**

$$(1) \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots : F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

**Dim.:** Diamo due dimostrazioni.

Per la prima si procede per induzione: si constata che  $F_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - F_1$  e che  $F_0 + F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1$  ; quindi si assume come vera la identità da dimostrare, si somma  $F_{n+1}$  ad entrambi i suoi membri e si trova l'identità corrispondente ad  $n + 1$ :

$$F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1 \blacksquare$$

La seconda dimostrazione si basa sull'interpretazione dei due membri dell'uguaglianza (1) come cardinalità di un insieme di cammini -ZZ e di una sua partizione. Il secondo membro della (1) fornisce il numero dei cammini di Fibonacci di peso  $n + 1$  che contengono almeno un passo NE. Il loro insieme è dato dall'unione disgiunta per  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  degli insiemi di cammini che contengono il passo

NE da  $\langle h, 0 \rangle$  a  $\langle i + 1, 1 \rangle$ ; si osserva poi che i cammini contenenti questo passo sono in biiezione con i cammini di Fibonacci di peso  $n - i$  e quindi sono  $F_{n-i-1}$ ; infine si osserva che

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_{n-i-1} = \sum_{j=1}^n F_j = \sum_{j=0}^n F_j \quad \blacksquare$$

**D20:d.08 Prop.**

$$(1) \quad F_1 + 2F_2 + 3F_3 + \dots + nF_n = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2 .$$

**Dim.:** Questa identità si ottiene uguagliando due espressioni per il numero  $N$  dei cammini di Fibonacci che presentano almeno un passo NE e che hanno uno dei pesi  $-1, 0, 1, 2, \dots$  o  $n + 1$ . Dalla :d.07(1) si ricava

$$N = F_0 + [F_1 - 1] + [F_2 - 1] + \dots + [F_{n+1} - 1] + [F_{n+2} - 1] = [F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_{n+1}] + F_{n+2} - (n + 2) = F_{n+3} + F_{n+2} - (n + 2) .$$

La stessa :d.07(1) dice che i cammini di Fibonacci con almeno un passo NE sono

$$\begin{aligned} & F_0 + F_1 + \dots + F_{n-1} + F_n \text{ aventi peso } n + 1, \\ & F_0 + F_1 + \dots + F_{n-1} \text{ aventi peso } n, \\ & F_0 + F_1 \text{ aventi peso } 0, \\ & F_0 \text{ aventi peso } -1. \end{aligned}$$

Sommando queste espressioni per il numero complessivo si ha

$$N = (n + 1)F_0 + nF_1 + (n - 1)F_2 + \dots + 2F_{n-1} + F_n .$$

Uguagliando le due espressioni si ha

$$(n + 1)F_0 + nF_1 + (n - 1)F_2 + \dots + 2F_{n-1} + F_n = F_{n+3} + F_{n+2} - (n + 2) .$$

Ora si considera la :d.07(1) con entrambi i membri moltiplicati per  $n + 1$  e dai suoi due membri si sottraggono i due membri della precedente ottenendo

$$F_1 + 2F_2 + \dots + nF_n = -F_{n+3} + nF_{n+2} + 2 \quad \blacksquare$$

**D20:d.09 Prop.**

$$(1) \quad F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1} .$$

**Dim.:** La dimostrazione si conduce facilmente con considerazioni geometriche che fanno riferimento alla progressiva costruzione della cosiddetta **successione dei rettangoli di Fibonacci** per progressivo accostamento di quadrati aventi lati di lunghezza  $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, \dots$ . Ogni nuovo quadrato di lato  $F_n$  viene accostato ad un rettangolo avente lati delle lunghezze  $F_n$  e  $F_{n-1}$  e quindi porta ad un rettangolo avente i lati delle lunghezze  $F_n$  e  $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$  ■

La costruzione precedente può significativamente completarsi con il progressivo tracciamento della cosiddetta **spirale di Fibonacci**. Nei primi due quadrati accostati, entrambi di lato  $1 = F_1 = F_2$ , si traccia una semicirconferenza di raggio 1; nel terzo quadrato di lato  $2 = F_3$  si continua la curva con un quarto di circonferenza di raggio 2; nel quarto quadrato di lato  $3 = F_4$  un quarto di circonferenza di raggio 3; ...; nell' $n$ -esimo quadrato di lato  $F_n$  un quarto di circonferenza di tale raggio e così via.

**D20:d.10 Eserc.** Dimostrare per induzione le identità :d.08(1) e :d.09(1).

**D20:d.11** Per molti sviluppi risulta utile estendere la definizione dei numeri di Fibonacci a deponenti negativi mantenendo valida la identità  $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ ; questa identità applicata per  $n = -1, -2, -3, \dots$  porta a tabelle come la seguente

$$\left| \begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} -10 & -9 & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \downarrow & -55 & 34 & -21 & 13 & -8 & 5 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \right|$$



Questa suggerisce l'identità che segue:

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{P} : F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n .$$

**Dim.:** Si procede per induzione constatando che  $F_1 = F_1 - F_0 = 1$  e  $F_2 = F_0 - F_{-1} = -1$ . Si assume poi che la (1) valga per indici che decrescono fino a un determinato valore  $-n$ ; infine si trova che

$$F_{-n-1} = F_{-n+1} - F_{-n} = (-1)^n F_{n-1} - (-1)^{n-1} F_n = (-1)^n [F_{n-1} + F_n] = (-1)^{(n+1)-1} F_{n+1} \blacksquare$$

A questo punto tutte le identità dimostrate in precedenza a partire dalla regola iterativa sono valide per deponenti interi qualsiasi.

**D20:d.12 Prop.**

$$(1) . \quad \forall k, n \in \mathbb{Z} : F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$$

**Dim.:** Si procede per induzione su  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  e  $k = -1, -2, -3, \dots$ . Si inizia constatando che per  $k = 0$  la (1) si riduce alla  $F_n = F_n$ , per  $k = 1$  alla  $F_{n+1} = F_{n+1}$  e per  $k = -1$  alla identità di base  $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ .

Assunta vera la (1) per  $k = 1, 2, \dots, h$  con  $h > 0$  si trova  $F_{n+h+1} = F_{n+h} + F_{n+h-1} = F_h F_{n+1} + F_{h-1} F_n + F_{h-1} F_{n+1} + F_{h-2} F_n = F_{h+1} F_{n+1} + F_h F_n$ , cioè la (1) per  $k = h + 1$ .

Simmetricamente, assunta vera la (1) per  $k = -1, -2, \dots, -h$  con  $h > 0$  si trova  $F_{n-h-1} = -F_{n-h} + F_{n-h+1} = -F_{-h} F_{n+1} - F_{-h-1} F_n + F_{-h+1} F_{n+1} + F_{-h} F_n = [-F_{-h} + F_{-h+1}] F_{n+1} + [-F_{-h-1} + F_{-h}] F_n = F_{-h-1} F_{n+1} + F_{-h-2} F_n$ , cioè la (1) per  $k = -h - 1$  ■

**D20:d.13** Dalla :d.12(1) si ricavano altri fatti interessanti.

Ponendo in essa  $k = n$  si trova una formula di duplicazione

$$(1) \quad F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n .$$

Similmente si trova una formula di triplicazione

$$(2) \quad F_{3n} = F_{2n} F_{n+1} + F_{2n-1} F_n = F_n (F_{n+1}^2 + F_{n-1} F_{n+1} + F_{2n-1}) .$$

Abbiamo trovato che sia  $F_{2n}$  che  $F_{3n}$  sono multipli di  $F_n$ ; questo fatto si può generalizzare.

**(3) Prop.:**  $F_{kn}$  è multiplo di  $F_n$ .

**Dim.:** Per dimostrarlo basta procedere per induzione per  $k = 2, 3, 4, \dots$ . Dato che la cosa è stata verificata per  $k = 2, 3$ , si assume che per ogni  $h = 2, 3, \dots, k$  sia  $F_{hn} = c_h F_n$  con  $c_h \in \mathbb{P}$  e si trova

$$F_{(k+1)n} = F_{kn} F_{n+1} + F_{kn-1} F_n = F_n (c_{kn} F_{n+1} + F_{kn-1}) \blacksquare$$

**D20:d.14** Di proprietà di divisibilità se ne dimostrano varie altre.

$$(1) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} : \text{MCD}(F_m, F_n) = F_{\text{MCD}(m,n)} .$$

**Dim.:** Poniamo  $d := \text{MCD}(m, n)$ ,  $\mu := m/d$ ,  $\nu := n/d$ ,  $D := \text{MCD}(F_m, F_n)$ .  $d :| m$  e  $d :| n$  implicano  $d :| F_m$  e  $d :| F_n$  e quindi  $d :| D$  . . . . . ■

Ad esempio:  $\text{MCD}(F_{12}, F_{18}) = \text{MCD}(144, 2584) = 8 = f_6$ .

**D20:d.15 (1) Lemma: (Yuri Matijasevich)** Sia  $m = 3, 4, \dots$ .  $F_m$  è multiplo di  $F_n^2$  sse  $m$  è multiplo di  $n F_n$

**Dim.:** Serviamoci dell'abbreviazione  $S := F_n^2$ . Occorre esaminare la successione  $\langle k \in \mathbb{P} :| F_{kn} \% F \rangle$  ed individuare il componente  $k$  multiplo di  $S$ . Si trovano le seguenti espressioni

$$\begin{aligned} F_n \% S &= F_n \neq 0 . \\ F_{2n} \% S &= (F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n) \% F = 2F_n F_{n+1} \% S . \\ F_{2n+1} \% S &= (F_{n+1}^2 + S) \% S = F_{n+1}^2 \% S . \\ F_{3n} \% S &= (F_{2n+1} F_n + F_{2n} F_{n-1}) 3F_{n+1}^2 F_n \% S . \\ F_{3n+1} \% S &= (F_{2n+1} F_{n+1} + F_{2n} F_n) \% S = F_{n+1}^3 \% S . \end{aligned}$$

Per induzione su  $k$  si dimostra

$$F_{kn} \% S = k F_n F_{n+1}^{k-1} \% S \text{ e } F_{kn+1} \% S = F_{n+1}^k \% S .$$

Dunque  $F_{n+1}$  ed  $F_n$  sono coprimi e di conseguenza

$$F_{kn} \% S = 0 \iff k F_n \% S = 0 \iff k \% S = 0 \text{ ■}$$

**D20:d.16** Sui numeri di Fibonacci si basa una interessante rappresentazione dei numeri positivi. Con Graham, Knuth e Patashnik scriviamo  $i \gg j$  per affermare  $i \geq j + 2$ .

**((di Zeckendorf)) Teorema** Ogni intero positivo  $n$  possiede una unica rappresentazione della forma  $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_r}$  ove  $k_1 \gg k_2 \gg \dots \gg k_r \gg 0$ .

**Dim.:** La precedente rappresentazione, che diciamo **notazione di Fibonacci degli interi**, si può ottenere con un procedimento "greedy", cioè attraverso successivi passi in ciascuno dei quali si aggiunge alla somma dell'enunciato come nuovo addendo il massimo dei numeri di fibonacci disponibili.

Supposto sia  $F_k \leq n < F_{k+1}$  si scrive  $n = F_k + R_1$  e per il primo "resto"  $R$  si ha  $0 \leq R \leq R < F_{k+1} - F_k = f_{k-1}$ . Se  $R = 0$  il procedimento rappresentativo è concluso; in caso contrario si prosegue per  $R$  servendosi solo di numeri di Fibonacci inferiori ad  $F_{k-1}$  ■

## D20:e. Numeri di Catalan

**D20:e.01** Consideriamo  $n$  intero naturale e denotiamo con  $\mathcal{B}_{n,n}$  l'insieme dei cammini binomiali che terminano in  $\langle n, n \rangle$ ; ciascuno di questi cammini è costituito da  $n$  passi SN e da  $n$  passi EW e, come si è visto in :b.01, il loro numero è  $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ .

Come tutti i cammini binomiali essi possono essere codificati, cioè possono essere rappresentati fedelmente e concisamente, da sequenze binarie di lunghezza  $2n$  e peso  $n$ : basta far corrispondere a ogni passo SN un bit 1 e a ogni passo WE un bit 0 (chiaramente la codifica con le cifre 0 e 1 scambiate risulta equivalente).

Tra questi cammini si distinguono i cosiddetti **cammini monotoni di Dyck** di lunghezza  $2n$ , cammini che passano solo per punti  $\langle h, k \rangle$  con  $h \leq k$ , cioè per i punti -NN che stanno sulla semiretta  $y = x$  o al di sopra di essa. Denotiamo con  $\mathcal{C}_n$  l'insieme dei cammini di Dyck di lunghezza  $2n$ .

Le codifiche di tali cammini si dicono **sequenze binarie di Dyck** di lunghezza  $2n$ ; queste sono precisamente le sequenze binarie  $b_1b_2 \cdots b_{2n-1}b_{2n}$  aventi tutti i prefissi costituiti da un numero di bits uguali ad 1 maggiore o uguale del numero dei suoi componenti uguali a 0. Identificando i cammini di Dyck con le loro codifiche binarie (fedeli), abbiamo ad esempio

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \{\mu\} \quad , \quad \mathcal{C}_1 = \{10\} \quad , \quad \mathcal{C}_2 = \{1100, 1010\} \quad , \quad \mathcal{C}_3 = \{111000, 110101, 110011, 101100, 101010\}. \\ \mathcal{C}_4 &= \{11110000, 11101000, 11100100, 11100010, 11011000, 11010100, 11010010, 11001100, 11001010, \} \\ &\quad 11001100, 11001010, 10111000, 10110101, 10110011, 10101100, 10101010\}. \end{aligned}$$

**D20:e.02** Tutti questi cammini sono chiaramente visualizzabili nel piano combinatorio. Una visualizzazione equivalente si ottiene sostituendo ogni passo SN con un passo NE e ogni passo WE con un passo SE, cioè con la la trasformazione dei passi

$$\begin{array}{cc} \downarrow SN & WE \downarrow \\ NE & SE \end{array} .$$

. Il passaggio a questa visualizzazione dalla precedente va collegato alla endofunzione invertibile non suriettiva di  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\eta := \lceil \langle h, k \rangle \mapsto \langle h+k, k-h \rangle \rceil ,$$

trasformazione che collocata in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  si ottiene con una rotazione di  $\pi/4$  in senso orario composta con una dilatazione di un fattore  $\sqrt{2}$ .

I cammini così ottenuti vengono detti **cammini di Dyck tout court**; la loro codifica più conveniente è fornita dalle sequenze aventi come componenti  $+1$  o  $-1$  ottenibili dalle codifiche binarie sostituendo ogni 0 con  $-1$ ; queste sequenze hanno tutti i prefissi che hanno somma non negativa. Denotiamo con  $\mathcal{B}'_{h,k}$  l'insieme ottenuto applicando  $\eta$  all'insieme dei cammini binomiali  $\mathcal{B}_{h,k}$  e con  $\mathcal{C}'_n$  l'insieme di cammini ottenuto applicando  $\eta$  all'insieme dei cammini di Dyck  $\mathcal{C}_n$ .

Per ogni intero naturale  $n$  definiamo come  $n$ -esimo numero di Catalan  $Ctn_n$  il numero dei cammini di Dyck di lunghezza  $2n$ ,  $Ctn_n := |\mathcal{C}_n|$ .

Dai precedenti elenchi di cammini, adottando l'abbreviazione locale  $C_n := Ctn(n)$ , si ha  $C_0 = C_1 = 1$ ,  $C_2 = 2$ ,  $C_3 = 5$ ,  $C_4 = 14$ .

Ci proponiamo ora di individuare un'espressione generale per le cardinalità  $C_n$ ; per questo serve un lemma molto generale sulle sequenze di numeri interi.

**D20:e.03 Lemma: (George Raney)** Sia  $m = 2, 3, \dots$  e sia  $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$  una sequenza di interi con  $\sum_{i=1}^m x_i = 1$  (buona parte dei quali possono presentare valori negativi). Tra le sue  $m$  permutazioni circolari se ne trova una ed una sola che presenta valori positivi per tutte le  $m$  somme iniziali

$$\sum_{i=1}^j x_i \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, m .$$

**Dim.:** La dimostrazione si ottiene con una argomentazione visualizzabile vantaggiosamente nell'ambito di  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Prolunghiamo la  $x$  giustapponendola a se stessa un opportuno numero  $r$  di volte e diamo alla sequenza ottenuta la forma  $\langle x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_M \rangle$ , per la quale si intende che sia  $M := m r$  e  $\forall k = 1, 2, \dots, M - m : x_{m+k} := x_k$ .

Consideriamo il grafico in  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  della corrispondente sequenza delle  $M$  somme iniziali

$$\left\langle j = 1, 2, \dots, M : \sum_{i=1}^j x_i \right\rangle ,$$

cioè la poligonale avente i nodi negli  $M$  punti  $-ZZ \left\langle j, \sum_{i=1}^j x_i \right\rangle$ . Questa poligonale presenta  $r$  successive

sezioni di  $m$  nodi tali che ogni sezione successiva alla prima si ottiene dalla precedente applicando ai nodi la traslazione

$$\left[ \langle h, k \rangle \mapsto \langle h + m, k + 1 \rangle \right] ;$$

infatti per  $k = 1, 2, 3, \dots, r - 1$  le ordinate degli  $m$  nodi della  $k + 1$ -esima sezione sono espresse da

$$\sum_{i=km+1}^{km+j} x_i = \sum_{i=1}^j x_i + k \quad , \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, m .$$

La poligonale grafico della sequenza delle somme iniziali quindi è tutta contenuta tra due rette  $-ZZ$  che soddisfano a due equazioni della forma  $\langle x_0, y_0 \rangle + k\langle m, 1 \rangle$  relative a due opportuni punti  $\langle x_0, y_0 \rangle$ . Quindi per una certa sezione risultano non negative tutte le ordinate dei suoi nodi. Con un eventuale arretramento si trova anche un primo nodo  $P'$  avente ordinata nulla e seguito solo da nodi con ordinate positive; a partire dal nodo successivo a questo si individua l'unica permutazione circolare della sequenza di partenza richiesta ■

**D20:e.04 (1) Prop.:**  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} .$

**Dim.:** La dimostrazione fa riferimento all'insieme di cammini  $\mathcal{B}'_{n+1,n}$ . Questo insieme è costituito da  $\binom{2n+1}{n}$  cammini e si ripartisce in classi di equivalenza per permutazione circolare; ciascuna classe è costituita da  $2n + 1$  cammini e quindi si hanno  $\frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}$  classi. A ciascuno dei cammini si può applicare il lemma di Raney; quindi in ciascuna classe di permutazione circolare si trova uno e un solo cammino che inizia nell'origine e ha tutti i nodi con ordinate positive. Ciascuno di questi cammini inizia con un passo NE e se questo viene eliminato si ottiene un cammino di Dick di  $\mathcal{C}_{2n}$ . Abbiamo quindi

$$(2) \quad C_n = |\mathcal{C}_{2n}| = \frac{1}{2n+1} |\mathcal{B}'_{n+1,n}| = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} .$$

**D20:e.05 Prop. (relazione di ricorrenza di Segner)**

$$(1) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \quad : \quad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0 .$$

**Dim.:** Segue dal fatto che ogni parola di Dyck  $w$  su  $(\ )$  avente lunghezza  $2n$  maggiore o uguale a 2 si può fattorizzare in un unico modo come  $w = (x)y$  con  $x$  e  $y$  stringhe di Dyck di lunghezza minore o uguale a  $2n - 2$  (eventualmente nulla) ■

Questa formula ha portato a soluzione il problema di Eulero della suddivisione dei poligoni in triangoli. Infatti  $C_n$  fornisce il numero di modi di suddividere un poligono convesso con  $n + 2$  lati in triangoli ottenuti tracciando segmenti rettilinei tra suoi vertici non adiacenti. Per chiarire questa interpretazione riscriviamo la (1) introducendo  $E_n := C_{n+2}$  nella forma

$$(2) \quad \forall n = 3, 4, 5, \dots \quad : \quad E_n = E_2 E_{n-1} + E_3 E_{n-2} + \dots + E_{n-1} E_2 .$$

**D20:e.06 Eserc.** Dimostrare che

$$(1) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \quad : \quad C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} ;$$

$$(2) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \quad : \quad C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n ;$$

$$(3) \quad C_n = \frac{(4n-2)!!}{(n+1)!} = \frac{2^n(2n-1)!!}{(n+1)!} .$$

## D20:f. Numeri di Stirling

**D20:f.01** Il termine **numeri di Stirling**, così chiamati in onore di [[James Stirling]], viene usato per denotare i numeri interi naturali che costituiscono due matrici enumerative e che si incontrano in molti problemi combinatorici. Le due matrici sono qui considerate come funzioni del genere  $\{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}\}$  e riguardano quelli che sono detti, risp., i numeri di Stirling di prima e di seconda specie. Per ciascuno di questi schieramenti di numeri presentiamo tre notazioni. La prima, quella che useremo prevalentemente, è dovuta a Jovan Karamata ed è stata sostenuta da Donald Knuth; essa si avvicina a quella dei coefficienti binomiali e consente di presentare formule che mettono in evidenza proprietà che sono assimilabili ad alcune dei coefficienti binomiali. Le altre due si servono di identificatori di funzione, ma una utilizza semplici lettere, viene usata abbastanza spesso ma non può avere portata globale, mentre l'altra si serve di un identificatore specifico che potrebbe avere portata globale, ma è usata solo qui.

Più precisamente per i numeri di Stirling di prima specie proponiamo le notazioni

$$(1) \quad \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = s(n, k) = \text{StrnI}(n, k) ;$$

per i numeri di Stirling di seconda specie le notazioni

$$(2) \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = S(n, k) = \text{StrnII}(n, k) .$$

**D20:f.02** Per  $n$  e  $k$  interi naturali definiamo come **numero di Stirling di prima specie**  $\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$  il numero di **arrangiamenti** di  $n$  oggetti distinguibili in  $k$  cicli.

Usiamo la notazione  $\langle_{cy} a, b, c, d \rangle$  per denotare la **classe ciclica** contenente la sequenza  $\langle a, b, c, d \rangle$  e le sequenze ottenute da questa per permutazione circolare; si ha quindi

$$\langle_{cy} a, b, c, d \rangle = \langle_{cy} b, c, d, a \rangle = \langle_{cy} c, d, a, b \rangle = \langle_{cy} d, a, b, c \rangle .$$

Un esempio di arrangiamento degli oggetti distinguibili  $a, b, c, d, e, f, g$  in 2 classi cicliche è  $\{\langle_{cy} a, b, c, d \rangle, \langle_{cy} e, f, g \rangle\}$ ; tale entità si può rappresentare con la scrittura più concisa  $abcd/efg$  e va inteso che essa coincida con la entità denotata con  $efg/abcd$ .

Possiamo quindi dire che gli arrangiamenti dei 4 oggetti 1, 2, 3 e 4 in 2 cicli sono le seguenti

$$\begin{array}{cccc} 123/4 & 124/3 & 134/3 & 234/1 , \\ 132/4 & 142/3 & 143/2 & 243/1 , \\ 12/34 & 13/24 & 14/23 ; \end{array}$$

di conseguenza abbiamo  $\left[ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right] = 11$  .

La notazione  $\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$  può leggersi “ $n$  cicli  $k$ ”.

**D20:f.03** Con  $n$  oggetti distinguibili si possono formare  $n!$  sequenze (o permutazioni), ciascuna di queste fa parte di una classe ciclica di  $m$  elementi e quindi il numero di tali classi cicliche è  $m!/m = (m-1)!$ .

Quindi abbiamo

$$(1) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots : \left[ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = (n - 1)! .$$

Gli arrangiamenti di  $n$  oggetti  $1, 2, \dots, n$  in  $n$  classi cicliche se ne può costruire una sola, la  $1/2/\dots/n$  costituita dalle  $n$  classi cicliche di un solo oggetto. Quindi

$$(2) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots : \left[ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right] = 1 .$$

Gli arrangiamenti di  $n$  oggetti  $1, 2, \dots, n$  in  $n - 1$  classi cicliche sono in biiezione con le classi cicliche di due elementi dell'insieme dei primi  $n$  interi positivi, ovvero con i sottoinsiemi di due elementi di tale insieme. Quindi

$$(3) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots : \left[ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right] = \binom{n}{2} .$$

Si osserva inoltre che non si ha alcun arrangiamento di un numero positivo di oggetti in 0 classi cicliche, nè in un numero di classi cicliche superiori al numero degli oggetti, cioè

$$(4) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \wedge \forall k = 0, n + 1, n + 2, \dots : \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = 0 .$$

**D20:f.04 Prop.**

$$(1) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots : \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = (n - 1) \left[ \begin{matrix} n - 1 \\ k \end{matrix} \right] + \left[ \begin{matrix} n - 1 \\ k - 1 \end{matrix} \right] .$$

**Dim.:** Questa identità prende in considerazione i diversi modi di ottenere un arrangiamento di  $n$  oggetti in  $k$  classi cicliche aggiungendo un nuovo elemento ad arrangiamenti di  $n - 1$  oggetti. Vi sono arrangiamenti ottenibili dagli  $\left[ \begin{matrix} n - 1 \\ k \end{matrix} \right]$  arrangiamenti di  $n - 1$  oggetti con  $k$  classi cicliche collocando il nuovo oggetto in una delle classi cicliche già presenti. Si osserva che da una classe ciclica di  $h$  oggetti, per aggiunta di un nuovo elemento si ricavano  $h$  classi cicliche di  $h + 1$  oggetti: ad esempio da  $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle_{cy}$  si ottengono le 4 classi  $\langle_{cy} 1, 5, 2, 3, 4 \rangle$ ,  $\langle_{cy} 1, 2, 5, 3, 4 \rangle$ ,  $\langle_{cy} 1, 2, 3, 5, 4 \rangle$  e  $\langle_{cy} 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$ .

Da ciascuno degli arrangiamenti suddetti quindi si ricavano nuovi arrangiamenti in numero uguale a  $n - 1$ . Il numero di questi arrangiamenti è dato dal primo addendo del secondo membro della (1).

Un altro gruppo di nuovi arrangiamenti si ottiene dagli  $\left[ \begin{matrix} n - 1 \\ k - 1 \end{matrix} \right]$  arrangiamenti di  $n - 1$  oggetti con  $k - 1$  classi cicliche aggiungendo la classe costituita dal solo nuovo oggetto; da ciascuno dei suddetti arrangiamenti di  $n - 1$  oggetti si ricava uno dei nuovi arrangiamenti e tale numero corrisponde al secondo addendo del secondo membro della (1).

La considerazione che nessun altro tipo di nuovo arrangiamento si può ottenere conclude la dimostrazione ■

Dalle considerazioni precedenti si ricava anche che gli arrangiamenti di  $n$  oggetti con  $k$  classi cicliche individuano biunivocamente le permutazioni di  $n$  oggetti che presentano esattamente  $k$  cicli. Il numero di Stirling  $\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ , quindi, fornisce anche numero di tali permutazioni. Inoltre sommando questi numeri per tutti i possibili valori di  $k$  si ottiene il numero di tutte le permutazioni di  $n$  oggetti, cioè

$$(2) \quad \sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = n! .$$

**D20:f.05** Le uguaglianze :f.03(1), :f.03(2) ed :f.03(4) esprimenti le condizioni al contorno e la formula di additività :f.04(1) comportano la possibilità di procedere iterativamente per individuare effettivamente i valori della matrice dei numeri di Stirling di prima specie, cioè una tabella come la seguente

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	36	...
0	0	0	0	0	0	0	1	28	546	...	
0	0	0	0	0	0	1	21	322	4536	...	
0	0	0	0	1	15	175	1960	22449	...		
0	0	0	1	10	85	735	6769	67284	...		
0	0	1	6	35	225	1624	13132	118124	...		
0	0	1	3	11	50	274	1764	13068	109584	...	
0	1	1	2	6	24	120	720	5040	43200	...	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	

**D20:f.06** Se  $N$  e  $k$  sono due interi naturali, si definisce come **numero di Stirling di seconda specie** e si denota con  $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$  il numero delle partizioni di un insieme di  $n$  oggetti in  $k$  parti, cioè in  $k$  sottoinsiemi non vuoti. Ad esempio le partizioni di  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  in 4 parti sono individuate da

$$\begin{aligned} &\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\} \quad \{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\} \quad \{1, 4\}, \{2\}, \{3\}, \{5\} \quad \{1, 5\}, \{2\}, \{3\}, \{4\} \\ &\quad \{2, 3\}, \{1\}, \{4\}, \{5\} \quad \{2, 4\}, \{1\}, \{3\}, \{5\} \quad \{2, 5\}, \{1\}, \{3\}, \{4\} \\ &\quad \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{5\} \quad \{3, 5\}, \{1\}, \{2\}, \{4\} \quad \{4, 5\}, \{1\}, \{2\}, \{3\} . \end{aligned}$$

Quindi  $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 10$  .

**D20:f.07** Si osserva che ogni insieme di uno o due elementi corrisponde ad una sola classe ciclica, mentre ad ogni insieme di 3 o più elementi corrispondono più classi cicliche. Si ottengono quindi facilmente le seguenti formule.

$$(1) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots : \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1 \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0 \quad , \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots : \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1 .$$

$$(2) \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots \wedge k = n + 1, n + 2, \dots : \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0 .$$

$$(3) \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots \wedge k = n + 1, n + 2, \dots : \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \leq \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] .$$

$$(5) \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots : \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1 .$$

**D20:f.08 Prop.**

$$(1) \quad \forall n = 1, 1, 2, 3, \dots \wedge k = 1, 2, \dots, n : \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} .$$

**D20:f.09** Le uguaglianze esprimenti le condizioni al contorno e l'additività consentono di individuare effettivamente ciascuno dei i valori della matrice dei numeri di Stirling di seconda specie. Si ottiene

quindi una tabella come la seguente:

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	36	...
0	0	0	0	0	0	0	0	1	28	462	...
0	0	0	0	0	0	1	21	266	2646	...	...
0	0	0	0	1	15	140	1050	6951	...	...	...
0	0	0	1	10	65	350	1701	7770	...	...	...
0	0	1	6	25	90	301	966	3025	...	...	...
0	0	1	3	7	15	31	63	127	255	...	...
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	...
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...

### D20:g. Numeri euleriani

**D20:g.01** Consideriamo una sequenza di numeri interi avente lunghezza  $s$   $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_s \rangle$ . Si dicono **salite** di questa sequenza le coppie  $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$  con  $x_i < x_{i+1}$  e si dicono **discese** della  $x$  le coppie  $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$  con  $x_i > x_{i+1}$ ; si dicono inoltre **uguaglianze** le coppie  $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$  con  $x_i = x_{i+1}$ . Ciascuna sequenza  $x$  può essere caratterizzata dal numero delle salite, che denotiamo con  $asc(x)$  e dal numero delle discese che scriviamo  $desc(x)$ .

Evidentemente il numero delle uguaglianze della  $x$  è dato da  $len(x) - 1 - asc(x) - desc(x)$ . Ovvio anche che le precedenti considerazioni si possono estendere alle sequenze le cui componenti sono elementi di un insieme totalmente ordinato, mentre per le sequenze di elementi di un insieme parzialmente ordinato si dovrebbe tenere conto anche delle coppie di componenti consecutivi non confrontabili.

Ad una sequenza  $x$  sono associati il multinsieme delle sue componenti, che denotiamo con  $mset(x)$  e l'insieme di tutte le sequenze ottenibili permutando la  $x$  ovvero il suddetto multiset. Un multiset come il precedente può essere rappresentato dalla sequenza che presenta solo salite ed altopiani. Ad esempio  $mset\langle 3, 5, 1, 8, 3, -2, 5, 1, 1 \rangle$  può essere rappresentato da  $\langle -2, 1, 1, 1, 3, 3, 5, 8, 8 \rangle$ .

Denotiamo inoltre con  $Perm_{mset(x)}$  l'insieme delle permutazioni del multiset  $mset(x)$ ; un tale insieme si può anche individuare come  $Permy$ , ove  $y$  è una qualsiasi delle permutazioni relative al dato multiset.

Di questo insieme si può considerare la partizione costituita dagli insiemi caratterizzati dai diversi possibili valori delle salite e delle discese. Una partizione più fine della precedente viene costituita dagli insiemi delle permutazioni caratterizzate da diverse collocazioni tra le coppie di componenti consecutive delle relazioni  $< e >$ .

**D20:g.02** Le precedenti nozioni si semplificano nel caso delle permutazioni di un insieme totalmente ordinato. Se denotiamo con  $p = \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$  la generica di queste permutazioni deve essere  $desc(p) = n - 1 - asc(p)$ , e la prima delle partizioni delineate per l'insieme  $Perm_p$  è costituita da sottoinsiemi caratterizzabili con i soli numeri delle salite.

La lista dei valori trasformati di ciascuna di queste permutazione si può agevolmente arricchire con  $n - 1$  segni delle relazioni  $< e >$  che sussistono tra due valori consecutivi: si ottengono in tal modo, ad esempio, la scrittura  $2 < 4 > 1 < 3$  da una permutazione di  $Sym_4$  e  $3 < 6 > 2 < 5 > 1 < 4$  da una permutazione di  $Sym_6$ . Si dicono **salite** della permutazione  $p$  le coppie  $\langle p_i, p_{i+1} \rangle$  con  $p_i < p_{i+1}$



e si dicono **discese** le coppie  $\langle p_i, p_{i+1} \rangle$  con  $p_i > p_{i+1}$ . La precedente permutazione di  $\mathbf{Perm}_4$  presenta 2 salite e una discesa, mentre quella di  $\mathbf{Perm}_6$  presenta 3 salite e 2 discese. Le permutazioni di ogni  $\mathbf{Perm}_n$  si ripartiscono facilmente nei sottoinsiemi caratterizzati da un dato numero  $a$  di salite (ovvero da  $n - a - 1$  discese). Denotiamo con  $\mathbf{Perm}_{n,a/}$  l'insieme delle permutazioni di  $\{1, 2, \dots, n\}$  con  $a$  salite, dove  $a \in \{0, 1, \dots, n - 1\} = [n]$ . Ad esempio per  $\mathbf{Perm}_4$  si hanno le seguenti 4 parti:

- $\mathbf{Perm}_{4,3/}$  : 1234 ;
- $\mathbf{Perm}_{4,2/}$  : 1243 , 1324 , 1342 , 1423 , 2134 , 2314 , 2341 , 2413 , 3124 , 3412 , 4123 ;
- $\mathbf{Perm}_{4,1/}$  : 1432 , 2143 , 2431 , 3142 , 3214 , 3241 , 3421 , 4132 , 4213 , 4231 , 4312 ;
- $\mathbf{Perm}_{4,0/}$  : 4321 .

**D20:g.03** Si dice **numero euleriano di prima specie** relativo ai primi  $n$  interi e ad  $a$  salite, con  $a \leq n - 1$  la cardinalità dell'insieme  $\mathbf{Perm}_{n,a}$ . Si può subito osservare che per ogni  $n \in \mathbb{P}$  nelle permutazioni di  $\mathbf{Perm}_n$  si possono avere da 0 a  $n - 1$  salite.

Per trattare queste cardinalità ci serviamo di una funzione del genere  $\{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}\}$  per la quale vengono usate due notazioni, una letterale e l'altra a due piani.

Cominciamo con il porre

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{P} \wedge a = 0, 1, \dots, n - 1 : \text{neul1}(n, a) := \left\langle \begin{matrix} n \\ a \end{matrix} \right\rangle := |\mathbf{Perm}_{n,a/}| .$$

**D20:g.04** Si ottiene quindi una tabella come la seguente:

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	⋯
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	502	⋯
0	0	0	0	0	0	0	1	247	14608	⋯	⋯
0	0	0	0	0	1	120	4293	88234	88234	⋯	⋯
0	0	0	0	1	57	1191	15619	156190	156190	⋯	⋯
0	0	0	1	26	302	2416	15619	88234	88234	⋯	⋯
0	0	1	11	66	302	1191	4293	14608	14608	⋯	⋯
0	0	1	4	11	26	57	120	247	502	⋯	⋯
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	⋯	⋯
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯

**D20:g.05** Si dice **numero euleriano di seconda specie** relativo ai primi  $n$  interi e ad  $a$  salite, con  $a \leq n - 1$  la cardinalità dell'insieme delle permutazioni di  $\langle 1, 1, 2, 2, \dots, n, n \rangle$  che presentano  $a$  salite e che per  $m = 1, 2, \dots, n$  tra le due occorrenze di  $m$  abbiamo solo interi superiori ad  $m$  stesso. Queste permutazioni sono state individuate da Gessel e Viennot e denotiamo con  $\mathbf{Perm}^{GV}_{2n,a/}$  il loro insieme relativo ad  $n$  ed  $a$ .

Ad esempio per  $n = 3$  si hanno i seguenti insiemi di liste

- $\mathbf{Perm}^{GV}_{6,0/}$  : 332211 ;
- $\mathbf{Perm}^{GV}_{6,1/}$  : 221133 , 221331 , 223311 , 233211 , 113322 , 133221 , 331122 , 331221 ;
- $\mathbf{Perm}^{GV}_{6,2/}$  : 112233 , 122133 , 112332 , 123321 , 133122 , 122331 .

**D20:g.06** Anche per queste cardinalità si utilizza una funzione del genere  $\{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}\}$  per la quale si possono utilizzare due notazioni equivalenti:

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{P} \wedge a = 0, 1, \dots, n - 1 : \text{neul2}(n, a) := \left\langle\left\langle \begin{matrix} n \\ a \end{matrix} \right\rangle\right\rangle := |\mathbf{Perm}^{GV}_{2n,a/}| .$$

Conviene inoltre estendere la definizione ponendo

$$(2) \quad \forall a \in \mathbb{Z} : \text{neul2}(0, a) = \delta_K(0, a) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{P} \wedge a = n, n+1, \dots : \text{neul2}(0, a) = 0 .$$

**D20:g.07** Si dimostra che la precedente funzione soddisfa la seguente relazione di ricorrenza:

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{P} \wedge a = 0, 1, \dots, n-1 : \text{neul2}(n, a) = (2n-a-1) \text{neul2}(n-1, a-1) + (m+1) \text{neul2}(n-1, a) .$$

**D20:g.08** È quindi possibile procedere alla costruzione della matrice che rappresenta la funzione  $\text{neul2}$  del genere  $\left\{ [-1:]^{\times 2} \mapsto \mathbb{N} \right\}$  producendo tabelle come la seguente:

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
0	0	0	0	0	0	0	0	40320	0	...
0	0	0	0	0	0	0	5040	341136	0	...
0	0	0	0	0	0	720	33984	785304	0	...
0	0	0	0	0	120	3708	58140	644020	0	...
0	0	0	0	24	444	4400	32120	195800	0	...
0	0	0	6	58	328	1452	5610	19950	0	...
0	0	2	8	22	52	114	240	494	0	...
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...

### D20:h. Numeri di Lah

**D20:h.01** Consideriamo un insieme di  $n$  elementi che per semplicità possiamo identificare con gli interi  $1, 2, \dots, n$ ; di questo insieme si possono considerare le diverse partizioni; fissata una partizione, ciascuna delle sue parti  $S$  può essere presentata con una delle  $|S|!$  liste dei suoi elementi.

Diciamo **presentazione di Lah** di  $[n]$  relativa ad una sua partizione in blocchi ordinati una elencazione dei suoi elementi nella quale gli elementi in ciascun blocco compaiono in posizioni consecutive.

Una presentazione di Lah di  $[n]$  si ottiene da una lista nonripetitiva degli interi  $1, 2, \dots, n$  tra i quali sono inserite repliche di un segno di separazione “/” in numero da  $0$  a  $n-1$  in posizioni non consecutive. Ad esempio le presentazioni di Lah di  $\{1, 2, 3\}$  relative alle partizioni in 2 blocchi sono rappresentate dalle sequenze

$$1/23 \quad , \quad 1/32 \quad , \quad 2/13 \quad , \quad 2/31 \quad , \quad 3/12 \quad , \quad 3/21$$

**D20:h.02** Introduciamo una funzione che denotiamo con  $\text{nlah}$  del genere  $\{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}\}$  chiedendo che per ogni  $n = 1, 2, 3, \dots$  e  $p = 1, 2, \dots, n$   $\text{nlah}(n, p)$  esprima il numero delle presentazioni di Lah di  $[n]$  relative alle partizioni in  $p$  parti. A  $\text{nlah}(n, p)$  si dà il nome di **numero di Lah senza segno** relativo ad  $n$  e  $p$ .

Per avere formule più compatte risulta conveniente estendere la definizione ponendo

$$(2) \quad \forall n \in \mathbb{P} \wedge p = 0, n+1, n+2, \dots : \text{nlah}(n, p) := 0 \quad \text{e} \quad \forall k \in \mathbb{Z} : \text{nlah}(0, p) = \delta_K(0, p) .$$

Dalla interpretazione precedente si ottengono subito uguaglianze che per la matrice vanno considerate come condizioni al contorno:

$$(1) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots : \text{nlah}(n, 1) = n! \quad \text{e} \quad \text{nlah}(n, n) = 1 .$$

Si trovano inoltre senza difficoltà le espressioni che seguono:

$$(3) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \quad : \quad \text{nlah}(n, 2) = \frac{(n-1)n!}{2}, \quad \text{nlah}(n, 3) = \frac{(n-2)(n-1)n!}{12}, \quad \text{nlah}(n, n-1) = n(n-1).$$

**D20:h.03** Si trova inoltre la formula di ricorrenza

$$(1) \quad \forall n, p = 1, 2, 3, \dots \quad : \quad \text{nlah}(n, p+1) = \frac{n-p}{p(p+1)} \text{nlah}(n, p).$$

Da questa si giunge all'espressione chiusa

$$(2) \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \wedge p = 1, 2, \dots, n \quad : \quad \text{nlah}(n, p) = \binom{n-1}{k-1} \frac{n!}{p!} = \binom{n}{p} \frac{(n-1)!}{(p-1)!}.$$

**D20:h.04** Per la matrice del genere  $\{\mathbb{P} \times \mathbb{P} \mapsto \mathbb{N}\}$  che rappresenta la funzione **nlah** si ottengono porzioni iniziali come la seguente:

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	...	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	132	...	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	110	7260	...	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	90	4950	217800	...	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	30	3240	11880	3920400	...	
0	0	0	0	0	0	0	1	56	630	60480	1663200	43908480	...	
0	0	0	0	0	1	30	1176	11760	635040	13970880	307359360	...		
0	0	0	0	1	30	630	11760	211680	3810240	69854400	1317254400	...		
0	0	0	1	20	300	4200	58800	846720	12700800	199584000	3293136000	...		
0	0	1	12	120	1200	12600	141120	1693440	21772800	299376000	4390848000	...		
0	1	6	36	240	1800	15120	141120	1451620	16329600	199584000	2634508800	...		
1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800	39916800	479001600	...		

**D20:h.05** Risultano utili anche i cosiddetti **numeri di Lah con segno** definiti da

$$(1) \quad \forall n, p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad : \quad \text{nlah}'(n, p) := (-1)^n \text{nlah}(n, p)$$

Come vedremo parlando di successioni di polinomi collegabili a matrici infinite triangolari, i numeri di Lah sono i coefficienti di connessione fra polinomi fattoriali crescenti e polinomi fattoriali decrescenti. Essi sono strettamente collegati anche con i polinomi di Bell.

Le varie componenti di questo testo sono accessibili in <http://www.mi.imati.cnr.it/~alberto>