1

Capitolo D20
successioni e matrici enumerative [1]

Contenuti delle sezioni

a. successione dei fattoriali e varianti p. 2
b. coefficienti binomiali p. 5
c. multiinsiemi [2] p. 14
d. numeri di Fibonacci p. 20
e. numeri di Catalan p. 26
f. numeri di Stirling p. 29
g. numeri euleriani p. 33
h. numeri di Lah p. 36
i. numeri di Bell p. 38

39 pagine

D200.01 In questo capitolo esaminiamo alcune successioni di interi naturali, cioè alcune funzioni del genere $\lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N} \rceil$, e alcune matrici del genere $\lceil \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N} \rceil$ che hanno importanti interpretazioni enumerative, cioè che assumono valori che si possono interpretare come cardinali di insiemi di oggetti utilizzabili per affrontare vari problemi.
Queste funzioni enumerative si incontrano in moltissime formule della matematica (in algebra, analisi infinitesimale, geometria, probabilità e statistica, ...), della fisica, della chimica, delle tecnologie, dell'economia, ...
Il loro studio oggi viene inquadrato nella combinatorica, cioè nella strumentazione teorica della matematica delle configurazioni discrete.

D20 a. successione dei fattoriali e varianti

D20a.01 Se n è un intero positivo, si definisce come n **fattoriale**, e si denota con $n!$, il prodotto dei primi n numeri interi positivi.

$$n! \;:=\; \prod_{k=1}^{n} k \;=\; 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n \quad . \tag{1}$$

Si chiede inoltre che $0! := 1$, in accordo con la convenzione che il prodotto di zero fattori, il cosiddetto **prodotto vuoto**, come la potenza nulla di un intero positivo, sia uguale ad 1.

Dal punto di vista enumerativo il fattoriale di n fornisce il numero delle sequenze (ordinate) formate da n oggetti distinti, ovvero il numero delle permutazioni di n oggetti, ovvero il numero delle stringhe formate da n caratteri diversi e che non presentano ripetizioni.

D20a.02 In modo equivalente la successione dei fattoriali può essere definita iterativamente richiedendo:

$$0! := 1 \quad , \quad \forall n = 1,2,3,... \;\vdots\; n! \;:=\; n(n-1)!\ . \tag{2}$$

I componenti della successione dei fattoriali crescono molto rapidamente con n e il punto esclamativo della notazione $n!$ è stato adottato per evocare lo stupore che può suscitare la rapidità di tale crescita.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800	39 916 800	479 001 600	...

Osserviamo che la successione dei fattoriali cresce più rapidamente della $\left\langle 10^n \right\rangle_{\mathbb{N}} = \left\langle n \in \mathbb{N} :\mid 10^n \right\rangle$.

D20a.03 Vengono studiate varie successioni strettamente collegate a quella dei fattoriali; vediamone alcune.

Si dice **semifattoriale del naturale** n o doppio fattoriale di n, e si denota con $n!!$, la successione definita iterativamente ponendo

$$0!! \;:=\; 1 \quad , \quad 1!! \;:=\; 1 \quad , \quad \forall n = 2,3,4,... \;\vdots\; n!! \;:=\; n\cdot(n-2)!!\ . \tag{1}$$

Per questa successione si trovano i seguenti valori numerici

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
1	1	2	3	8	15	48	105	384	945	3 840	10 395	135 135	46 080	645 120	...

Inoltre possono essere utili le formule seguenti

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\vdots\; n! = n!!\cdot(n-1)!!\ ; \tag{3}$$

$$\forall h \in \mathbb{P} \;\vdots\; (2h)!! = 2^h\cdot h! \quad , \quad (2h+1)!! \;=\; \frac{(2h+1)!}{(2h)!!} \;=\; \frac{(2h+1)!}{2^h h!}\ . \tag{4}$$

D20a.04 Si definisce come **superfattoriale dell'intero naturale** n

$$\mathsf{Sfact}(n) \;:=\; \prod_{i=1}^{n} i! \;=\; 1^n\,2^{n-1}\,3^{n-2}\,\cdots\,(n-1)^2\,n \;=\; \prod_{i=1}^{n} i^{n-i+1}\ .$$

La equivalente definizione iterativa di questa successione si ottiene ponendo

$$\mathsf{Sfact}(0) := 1 \quad , \quad \forall n = 1,2,3,... \;\vdots\; \mathsf{Sfact}(n) \;:=\; \mathsf{Sfact}(n-1)\cdot n!\ .$$

Questa successione cresce molto più rapidamente dello stesso fattoriale

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 12 & 288 & 34\,560 & 24\,883\,200 & 125\,411\,328\,000 & 5\,056\,584\,744\,960\,000 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{cc} 9 & \ldots \\ 1\,834\,933\,472\,251\,084\,800\,000 & \ldots \end{array}\right|$$

D20a.05 La precedente è una delle successioni alle quali si fa riferimento quando si studiano numeri estremamente grandi; vediamone alcune altre.

La successione

(1) $\langle n = 1, 2, 3, ... :| \; n^n \rangle = \langle 1, 4, 27, 256, 3125, 46656, 823543, 16777316, 387420489, 10^{10}, ... \rangle$,

ha la componente n-esima che esprime il numero delle endofunzioni di un insieme di n elementi.

Si definisce come **iperfattoriale** dell'intero naturale n

(2) $$\mathsf{Hfact}(n) := prod_{i=1}^n i^i \ .$$

Equivalentemente si può dare la seguente definizione iterativa:

(3) $$\mathsf{Hfact}(0) := \mathsf{Hfact}(1) := 1 \quad , \quad \forall n = 2, 3, 4, ... \; : \; \mathsf{Hfact}(n) := \mathsf{Hfact}(n-1) \cdot n^n \ .$$

Anche questa successione cresce molto più rapidamente della successione fattoriale:

$$\left|\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ 1 & 1 & 4 & 108 & 27\,648 & 864 \cdot 10^5 & 40310784 \cdot 10^5 & 33197663987712 \cdot 10^5 & \ldots \end{array}\right|$$

Segnaliamo anche che $\mathsf{Hfact}(14) \approx 0.1847 \; 10^{100} < 10^{100} < \mathsf{Hfact}(15) \approx 8.0896 \; 10^{117}$.

D20a.06 Confrontiamo le successioni precedentemente introdotte.

(1) Prop.: $\forall n = 3, 4, ... \; : \; \mathsf{Sfact}(n) < \mathsf{Hfact}(n)$.

Dim.: Procediamo per induzione. $\mathsf{Sfact}(3) = 12 < 108 = \mathsf{Hfact}(3)$. Supponiamo poi che per un intero positivo n sia $\mathsf{Sfact}(n) < \mathsf{Hfact}(n)$ e dimostriamo che $\mathsf{Sfact}(n+1) < \mathsf{Hfact}(n+1)$. In effetti: $\mathsf{Sfact}(n+1) = (n+1)! \; \mathsf{Sfact}(n) < (n+1)^{n+1} \; \mathsf{Hfact}(n) = \mathsf{Hfact}(n+1)$ ▮

D20a.07 In alcuni campi di studio della matematica e della fisica, in particolare nella crittografia, nella meccanica statistica e nella cosmologia, risulta necessario tenere sotto controllo numeri interi e reali enormemente grandi.

Con questa espressione sono da intendere numeri superiori a quelli identificabili servendosi di un'espressione della forma 10^n con n non grandissimo come il numero delle cellule del corpo umano (10^{14}), il `numero di Avogadro (wi)` ($6.022\,10^{23}$) o il diametro dell'universo esplorabile in metri ($8.8 \; 10^{26}$).

Per questi studi si rendono necessari, innanzi tutto, termini e formule. In questo senso risultano utili espressioni come $n!$, n^n, $\mathsf{Sfact}(n)$ e $\mathsf{Hfact}(n)$.

Segnaliamo anche il termine **Googol** adottato per la costante 10^{100} e il termine **Googolplex** pari a $10^{\text{Googol}} = 10^{10^{100}}$; queste due costanti sono state introdotte da Edward Kasner.

Segnaliamo anche i **numeri di Skewes** usati in teoria dei numeri: $10^{10^{10^{34}}}$ e $10^{10^{10^{963}}}$.

D20a.08 A questo punto è opportuno ricordare una importante attività di documentazione della matematica che si serve del Web, la `On-line Encyclopedia of Integer Sequences (we)`, in sigla OEIS.

Si tratta di un archivio disponibile all'indirizzo `oeis.org` dedicato alle successioni di numeri interi. Questo archivio è stato avviato da Neil Sloane fin dal 1965 (utilizzando schede perforate) e successivamente posto in rete e diventato rapidamente il riferimento più esteso e consultato per queste entità. Nel novembre del 2020 presentava più di 385 000 successioni.

Esso per ogni successione di interi fornisce le prime componenti, le interpretazioni enumerative e altri significati matematici, numerose citazioni della letteratura, programmi di calcolo, informazioni sui problemi aperti.

Ciascuna delle successioni è identificata con una sigla. Per le successioni descritte in questa sezione: fattoriali A000142, doppi fattoriali A006882, superfattoriale A000178, iperfattoriali A002109, numeri delle endofunzioni A000312.

D20 b. coefficienti binomiali

D20b.01 In questa sezione esaminiamo due matrici del genere $\lceil \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \rceil$ strettamente connesse i cui valori hanno importanti significati enumerativi.
Per definire tali matrici ci serviamo di particolari cammini nel piano combinatorio $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'insieme i cui elementi, i punti-ZZ, sono individuati da coppie di interi naturali $\langle h,k\rangle$.
Questo piano qui lo presentiamo nella cosiddetta visualizzazione geografica [B21], secondo la quale l'asse delle ascisse h è disposto orizzontalmente con h crescente da sinistra a destra e l'asse delle ordinate k, è disposto verticalmente con k crescente dal basso verso l'alto.

Ricordiamo che nel piano-ZZ diciamo passo-WE ogni segmento orientato avente come estremi due punti della forma $\langle h,k\rangle$ e $\langle h+1,k\rangle$, cioè ogni passo verso destra; diciamo passo-SN ogni segmento orientato avente come estremi due punti della forma $\langle h,k\rangle$ e $\langle h,k+1\rangle$, cioè ogni passo verso l'alto; diciamo passo-NE ogni segmento orientato avente come estremi due punti della forma $\langle h,k\rangle$ e $\langle h+1,k+1\rangle$; infine diciamo -passo-SE ogni segmento orientato avente come estremi due punti della forma $\langle h,k\rangle$ e $\langle h+1,k-1\rangle$.

D20b.02 Definiamo come **cammino-EorN** ogni cammino-ZZR costituito da una sequenza di passi-WE e di passi-SN. Se $P = \langle x_P, y_P\rangle$ e $Q = \langle x_Q, y_Q\rangle$ sono due punti-ZZ, denotiamo con $\mathsf{Path}_{EorN}(P,Q)$ l'insieme dei cammini-EorN che iniziano in P e terminano in Q; conveniamo che se $x_P > x_Q$ oppure $y_P > y_Q$ si ha $\mathsf{Path}_{EorN}(P,Q) = \emptyset$.

In particolare interessano i cammini-ZZ di $\mathsf{Path}_{EorN}(\mathbf{0}_2,Q)$, i cammini-ZZ che iniziano nell'origine $\mathbf{0}_2 = \langle 0,0\rangle$ e che possono avere come estremi finali tutti i punti $\langle h,k\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, cioè tutti i punti-ZZ del primo quadrante del piano $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Questi cammini li chiamiamo **cammini-O-EorN** e abbreviamo $\mathsf{Path}_{EorN}(\mathbf{0}_2,\langle h,k\rangle)$ con $\mathsf{PathO}_{EorN}(h,k)$.

Osserviamo anche che per ogni $R = \langle x_R, y_R\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ la traslazione $\boldsymbol{Trsl}_R := \lceil A \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mapsto A + R \rceil$ pone in biiezione due insiemi di cammini $\mathsf{Path}_{EorN}(P,Q)$ e $\mathsf{Path}_{EorN}(P+R,Q+R)$ e in particolare $\mathsf{PathO}_{EorrN}(h,k)$ e $\mathsf{Path}_{EorN}(R,R+\langle h,k\rangle)$.

Definiamo dunque come **coefficiente binomiale simmetrico** relativo agli interi naturali h e k e denotiamo con $\mathsf{bnmc}(h,k)$, il numero dei cammini-EorN che terminano nel punto $\langle h,k\rangle$, ossia

$$\mathsf{bnmc}(h,k) \;:=\; |\mathsf{PathO}_{EorN}(h,k)| \;=\; |\mathsf{Path}_{EorN}(\mathbf{0}_2,\langle h,k\rangle)| \;.$$

Il simbolo bnmc individua una **matrice enumerativa**; con questo termine intendiamo una funzione del genere $\lceil \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \rceil$ e in particolare del genere $\lceil \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N} \rceil$, calcolabile e i cui valori forniscono i cardinali di insiemi finiti significativi.

Segnaliamo che i cammini-ZZ, in particolare quelli di ogni $\mathsf{Path}_{EorN}(P,Q)$ possono essere evidenziati nelle raffigurazioni di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ in modo da facilitare la comprensione del significato di molte formule enumerative.

D20b.03 Dalla definizione si ricavano facilmente e in modo naturale varie proprietà dei coefficienti binomiali simmetrici.

(1) $\quad \forall h,k = 0,1,2,3,... \;:\; \mathsf{bnmc}(h,k) = \mathsf{bnmc}(k,h)$ $\quad$ (simmetria).
Questa uguaglianza deriva dal fatto che la riflessione del piano $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ rispetto alla diagonale principale $h=k$ implica una biiezione tra i cammini-EorN dall'origine a $\langle h,k\rangle$ e quelli dall'origine a $\langle k,h\rangle$. Di conseguenza il numero dei cammini del primo di questi insiemi è uguale al numero dei cammini del secondo insieme ▮

(2) $\forall h = 0, 1, 2, 3, ...$: $\mathsf{bnmc}(h, 0) = \mathsf{bnmc}(0, h) = 1$ (condizioni al contorno).
I cammini-EorN dall'origine a un punto $\langle h, 0\rangle$ dell'asse orizzontale si riducono a un solo cammino, quello costituito da h passi-WE. Simmetricamente è uno solo il cammino-EorN dall'origine a un $\langle 0, h\rangle$ ∎

(3) $\forall h = 0, 1, 2, 3, ...$: $\mathsf{bnmc}(h, 1) = \mathsf{bnmc}(1, h) = h + 1$ (condizioni al contorno).
La collezione dei cammini-EorN dall'origine a un punto $\langle h, 1\rangle$ della retta-ZZ orizzontale $y = 1$ comprende i cammini di $h + 1$ passi, h dei quali passi-WE ed uno dei quali è un passo SN; quindi questa collezione comprende $h + 1$ cammini; l'enunciato si completa per simmetria-xy ∎

D20b.04 (1) $\forall h = 0, 1, 2, 3, ...$: $\mathsf{bnmc}(h, 2) = \mathsf{bnmc}(2, h) = \dfrac{(h + 2)(h + 1)}{2}$.

//input pD20b04

Ciascuno dei cammini-EorN dall'origine a un punto $\langle h, 2\rangle$ della retta-ZZ orizzontale $y = 2$ è costituito da $h+2$ passi, due dei quali sono passi-SN, i restanti passi-WE; più precisamente questi cammini sono in biiezione con le coppie di questi passi-SN.
Dato che il primo dei due passi-SN può iniziare in uno qualsiasi dei punti $\langle i, 0\rangle$ con $i = 0, 1, ..., h$ e il secondo in uno qualsiasi dei punti $\langle j, 2\rangle$ con $j = i, i + 1, ..., h$, il numero delle coppie di passi-SN, cioè il numero dei cammini di $\mathsf{PathO}_{EorN}(2, h)$ è uguale a $(h + 1) + h + (h - 1)... + 2 + 1$, cioè uguale a $\dfrac{(h + 2)(h + 1)}{2}$. Per concludere si invoca ancora la simmetria ∎

(2) $\mathsf{bnmc}(h + 1, k + 1) = \mathsf{bnmc}(h, k + 1) + \mathsf{bnmc}(h + 1, k)$ (formula di addizione).
Ogni cammino-O-EorN che termina nel punto $T = \langle h+1, k+1\rangle$ deve provenire aut dal punto $\langle h, k+1\rangle$ immediatamente a sinistra di T aut da $\langle h + 1, k\rangle$, punto immediatamente al di sotto di T; quindi il numero dei cammini-O-EorN che terminano nel punto $T = \langle h + 1, k + 1\rangle$ è dato dalla somma del numero dei cammini-O-EorN che terminano nel punto $\langle h, k + 1\rangle$ e del numero dei cammini-O-EorN che terminano nel punto $\langle h + 1, k\rangle$ ∎

//input pD20b04B

D20b.05 Dalle uguaglianze esprimenti le condizioni al contorno [b02(2,3)] e l'additività [b03(2)] segue un procedimento che consente di procedere illimitatamente ad individuare i valori della funzione bnmc. Possiamo quindi presentare una tabella come la seguente

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
1	8	36	120	330	792	1716	3432	⋯
1	7	28	84	210	462	924	1716	⋯
1	6	21	56	126	252	462	792	⋯
1	5	15	35	70	126	210	330	⋯
1	4	10	20	35	56	84	120	⋯
1	3	6	10	15	21	28	36	⋯
1	2	3	4	5	6	7	8	⋯
1	1	1	1	1	1	1	1	⋯

Si tratta di una porzione di una matrice con le righe e le colonne individuate dai numeri naturali. Si osserva che ruotandola in modo da mandare la diagonale principale nella semiretta verticale rivolta verso il basso risulta equivalente al ben noto triangolo di Tartaglia-Pascal [B55d08].

D20b.06 I coefficienti binomiali simmetrici si possono interpretare anche come cardinali di insiemi di sequenze binarie e quindi di collezioni di sottoinsiemi.

Ogni cammino binomiale che termina in $\langle h, k\rangle$ si può rappresentare con una sequenza binaria di lunghezza $h + k$ e di peso h, cioè con una sequenza di $h + k$ bits (cifre uguali a 0 o 1) comprendente h bits uguali ad 1 (e quindi k bits uguali a 0).
In effetti tra i suddetti cammini binomiali e queste sequenze binarie sussiste un criptomorfismo, cioè questi due tipi di entità sono equivalenti in tutte le argomentazioni e in tutte le costruzioni. In altre parole le sequenze binarie costituiscono codifiche concise dei cammini binomiali.

Quindi il coefficiente binomiale simmetrico $\mathsf{bnmc}(h, k)$ si può interpretare come numero delle sequenze binarie di lunghezza $h + k$ e di peso h.

D20b.07 Consideriamo ora un generico insieme esplicito U, cioè un insieme finito individuato da una lista E dei suoi elementi; si osserva che questo elenco stabilisce un `ordine sequenziale (wi)` tra gli elementi di U.
Ogni sottoinsieme S di U si può individuare con un sottoelenco di E, precisamente dall'elenco ottenuto eliminando da E gli elementi di U non appartenenti ad S.

Denotiamo poi con $h := |S|$ il numero di elementi del sottoinsieme, con $n := |U|$ il cardinale dell'intero U, che nelle attuali considerazioni può essere conveniente chiamare *insieme ambiente*, e con k il numero degli elementi del complementare di S in U, ossia definiamo $k := n - h$.

Il sottoinsieme S, invece che con il sottoelenco suddetto, si può individuare con la sequenza binaria di lunghezza $n = h + k$ e di peso h ottenuta facendo riferimento ad E e assumendo per $i = 1, 2, ..., n$ come bit nella posizione i-esima 0 o 1 secondo che l'elemento nella posizione i di E non appartiene oppure appartiene al sottoinsieme S.
Osserviamo che questa sequenza binaria costituisce una rappresentazione della `funzione indicatrice (wi)` del sottoinsieme S di U; precisamente la rappresentazione relativa alla sequenzializzazione di U fornita dall'elenco E.

D20b.08 A questo punto risulta individuata un'applicazione significativa dei cammini binomiali terminanti in $\langle h, n - h\rangle$: ciascuno di essi consente di individuare biunivocamente un sottoinsieme S di h elementi di un insieme ambiente U di n elementi ($n = h, h + 1, ...$), quando si faccia riferimento a un elenco esplicito E degli elementi dell'ambiente.

Si osserva che un cammino binomiale di lunghezza n potrebbe servire per descrivere visivamente un processo consistente nello scorrere l'elenco E degli elementi di U per decidere per ciascuno di essi se va incluso o meno in un sottoinsieme S che si vuole costituito da elementi da evidenziare in quanto soddisfano una qualche condizione, ovvero che si devono selezionare seguendo un criterio dettato da una qualche applicazione.

Risulta inoltre disponibile un'altra interpretazione dei coefficienti binomiali simmetrici, forse la più rilevante: $\mathsf{bnmc}(h, k)$ fornisce il numero dei sottoinsiemi con h elementi di un insieme di cardinale $h + k$.

Si osserva anche che ogni sottoelenco che fornisce un sottoinsieme S di h elementi di un ambiente U di $h+k$ elementi dato mediante un elenco esplicito non è che una combinazione senza ripetizioni [B13e12] di h degli $h + k$ contrassegni degli elementi di S.
Quindi $\mathsf{bnmc}(h, k)$ fornisce anche il numero delle combinazioni senza ripetizioni di lunghezza h che si possono ottenere servendosi di $h + k$ elementi.

Per il numero di queste sequenze si è trovato [B13f] che è fornito dal numero delle disposizioni di $h+k$ oggetti di lunghezza h diviso per $h!$; si può quindi affermare:

(1) $$\forall h,k=0,1,2,3,... \;\vdots\; \mathsf{bnmc}(h,k) \;=\; \frac{(h+k)^{\underline{h}}}{h!} \;=\; \frac{(h+k)!}{h!\;k!}\;.$$

D20b.09 Ci proponiamo ora di introdurre dei cammini-ZZ simili ai cammini-EorN e tali che conviene trattare in parallelo. Inoltre questi oggetti, come molti altri cammini-ZZ, conviene collocarli entro digrafi numerabili con precise caratteristiche.

Se P e Q denotano due punti-ZZ diciamo cammino-EorNE ogni cammino-ZZ costituito da una sequenza di passi-WE e di passi-NE che vanno da P a Q.
I cammini-EorNE si possono considerare cammini immersi nella cosiddetto digrafo-N-EorN, coppia di insiemi numerabili della forma

(1) $$\Big\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\;,\;\{i,j\in\mathbb{Z}\;:|\;\big\langle\langle i,j\rangle\langle i+1,j\rangle\big\rangle,\big\langle\langle i,j\rangle,\langle i+1,j+1\rangle\big\rangle\Big\rangle\;.$$

Questa struttura si può immaginare in termini materiali come costituita da nodi $\langle i,j\rangle$ e da barrette semirigide corrispondenti a tutti i collegamenti elementari mediante passi-WE e passi-NE.

Consideriamo anche il cosiddetto digrafo-N-EorNE, coppia di insiemi numerabili della forma

(2) $$\Big\langle \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\;,\;\{i,j\in\mathbb{Z}\;:|\;\big\langle\langle i,j\rangle\langle i+1,j\rangle\big\rangle,\big\langle cpij,\langle i+1,j+1\rangle\big\rangle\Big\rangle\;.$$

Anche questa struttura si può immaginare in termini materiali come costituita da nodi $\langle i,j\rangle$ e da barrette corrispondenti a tutti i cammini costituiti da passi-WE e passi-NE.

Questo secondo digrafo numerabile si può pensare ottenuto dal digrafo-N-EorN facendo slittare le sue rette-ZZ orizzontali in modo da trasformare i passi-SN in passi-NE come dalla figura seguente.

//input pD20bo9

Questa trasformazione si definisce

(3) $$\boldsymbol{T}_{Bnm} \;:=\; \Big\lceil\;\langle i,j\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mapsto\langle i+j,j\rangle\;\Big\rceil \;\in\; \big\lceil\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\longleftrightarrow\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\big\rceil\;.$$

Diciamo quindi **cammino-EorNE** ogni cammino facente parte del digrafo-N-EorNE, cioè ogni cammino-ZZ costituito da passi-WE e da passi-NE.

D20b.10 Denotiamo con $\mathsf{Path}_{EorNE}(P,Q)$ l'insieme dei cammini-EorNE dal punto-ZZ P al punto-ZZ Q e in particolare chiamiamo **cammino binomiale** che termina in $\langle n,k\rangle$ ogni cammino-EorNE che va dall'origine a $\langle n,k\rangle$, ossia ciascuno dei cammini di $\mathsf{Path}_{EorNE}(\mathbf{0}_2,\langle n,k\rangle)$.

Denotiamo questo insieme anche con $\mathsf{PathBnm}(n,k)$, chiamiamo il suo cardinale **coefficiente binomiale** n su k e per questo valore adottiamo le notazioni

(1) $$\binom{n}{k} \;:=\; \mathsf{bnmc}(n,h) \;:=\; |\mathsf{PathBnm}(n,k)| \;=\; |\mathsf{Path}_{EorNE}(\mathbf{0}_2,\langle n,k\rangle)|\;.$$

I coefficienti binomiali, in forza della biiezione D20b09(3), si collegano ai coefficienti dei simmetrici mediante la seguente formula

(1) $$\forall\; n=0,1,2,3,...\;\wedge\; k=0,1,2,...,n \;\;\vdots\;\; \binom{n}{k} \;:=\; \mathsf{bnmc}(k,n-k)\;.$$

In essa i coefficienti binomiali sono individuati sia con la usuale notazione a due livelli introdotta da von Ettingshausen che può leggersi "n binomiale h" oppure "scelte di h entro n", sia con una notazione mediante lettere, nello stile qui adottato per numerose funzioni.

Per il collegamento inverso serve la formula

(2) $$\forall h,k = 0,1,2,3,... \; : \; \mathsf{bnmc}(h,k) \; = \; \binom{h+k}{h} \; .$$

D20b.11 A questo punto conviene riscrivere per i coefficienti binomiali usuali i risultati trovati in precedenza:

(1) $$\forall n = 0,1,2,3,... \; , \; k = 0,1,2,...,n \; : \; \binom{n}{k} \; = \; \binom{n}{n-k} \; ;$$

(2) $$\forall n = 0,1,2,3,... \; : \; \binom{n}{0} \; = \; \binom{n}{n} \; = \; 1 \; ;$$

(3) $$\forall n = 1,2,3,... \; : \; \binom{n}{1} \; = \; \binom{n}{n-1} \; = \; n \; ;$$

(4) $$\forall n = 2,3,4,... \; : \; \binom{n}{2} \; = \; \binom{n}{n-2} \; = \; \frac{n(n-1)}{2} \; ;$$

(5) $$\forall n = 1,2,3,... \; , \; k = 1,2,...,n \; : \; \binom{n}{k} \; = \; \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \; ;$$

(6) $$\forall n = 0,1,2,3,... \; , \; k = 0,1,2,...,n \; : \; \binom{n}{k} \; = \; \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \; = \; \frac{n!}{k! \; (n-k)!} \; .$$

Può anche essere utile esplicitare le interpretazioni di queste formule in termini di insiemi e sottoinsiemi.

D20b.12 La tavola numerica dei coefficienti simmetrici viene riferita ai due assi delle variabili h e k; i punti che corrispondono ai sottoinsiemi di un ambiente di $n = h + k$ oggetti relativi a diversi valori di h e $k = n - h$ si trovano allineati sulla linea di equazione cartesiana $x + y = n$. Per ottenere i valori dei coefficienti binomiali riferiti agli assi delle variabili n ed h (o k) basta modificare la tabella precedente facendo slittare la seconda linea dal basso, relativa a $k = 1$, di una posizione a destra, la linea relativa a $k = 2$ di due posizioni e così via, in pieno accordo con la biiezione $\boldsymbol{T}_{Bnm}$ [b09(3)].

Si ottiene quindi la tabella triangolare

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & \cdots \\
 & & & & & & & 1 & 8 & \cdots \\
 & & & & & & 1 & 7 & 28 & \cdots \\
 & & & & & 1 & 6 & 21 & 56 & \cdots \\
 & & & & 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & \cdots \\
 & & & 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & \cdots \\
 & & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & \cdots \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots
\end{array}$$

In questo quadro non è difficile individuare una variante nel solo aspetto del **triangolo di Tartaglia-Pascal** [B55e08], ottenibile con una sorta di rotazione della suddetta tabella.

D20b.13 Sommando i valori che si trovano nelle successive colonne della tabella precedente si ottiene la successione delle potenze di 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ... In effetti gli interi positivi nella colonna relativa a un dato valore di n forniscono i numeri dei sottoinsiemi di un ambiente di n elementi aventi, risp., $h = 0, 1, 2, ..., n-1, n$ elementi.

La somma di questi cardinali fornisce il numero complessivo dei sottoinsiemi di un ambiente di n elementi: questo coincide con il numero delle sequenze binarie di lunghezza n che, come abbiamo visto, si possono porre in corrispondenza biunivoca con i suddetti sottoinsiemi (sono le rispettive funzioni indicatrici) e tale numero è chiaramente pari a 2^n (coincide con il numero delle disposizioni con ripetizioni [B13e01] di lunghezza n di 2 tipi di oggetti).

Risulta quindi dimostrata la seguente **formula di sommazione per i coefficienti binomiali**:

(1) $$\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} = 2^n .$$

Questa identità si può anche ricavare come caso particolare dello sviluppo del binomio di Newton, formula che vedremo in b14 e che esprime un fatto più elaborato del precedente.

Conviene segnalare che la formula di sommazione per un dato n corrisponde alla distribuzione dei nodi del `reticolo booleano (wi)` dei sottoinsiemi di un ambiente di n elementi sui diversi livelli (ranghi) di tale reticolo graduato.
Inoltre la formula precedente può essere utilizzata per valutazioni probabilistiche in relazione alla cosiddetta `distribuzione binomiale (wi)`.

D20b.14 I coefficienti binomiali si trovano soddisfare una grande varietà di identità. Prima di presentare le più importanti, conviene effettuare una prima estensione dei coefficienti binomiali ponendo

(1) $$\forall n = 0, 1, 2, ... \, , \; k = n+1, n+2, ... \quad ⁝ \quad \binom{n}{k} := 0 .$$

Si osserva che questa estensione si può interpretare come l'affermazione: "il numero di sottoinsiemi con $h > n$ elementi di un insieme con n elementi è 0" o come .

Per argomentare sugli insiemi di cammini collegati ai coefficienti binomiali conviene introdurre anche le seguenti nozioni per la geometria di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Dati due punti-ZZ $P = \langle x_P, y_P \rangle$ e $Q = \langle x_Q, y_Q \rangle$ diciamo **rettangolo-hv** di estremi P e Q l'insieme

(2) $$\mathsf{Rctng}_{hv}(P, Q) := \{\langle i, j \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \; ⁆ \; x_P \le i \le x_Q \;\wedge\; y_P \le j \le y_Q\} .$$

Evidentemente questo insieme è vuoto sse $x_Q < x_P$ oppure $y_Q < Y_P$.

Diciamo invece **parallelogramma binomiale** di estremi P' e Q' l'insieme di punti-ZZ

(3) $$\mathsf{Prlgrm}_{Bnm}(P', Q') := \{\langle i, j \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \; ⁆ \; x_{P'} + y_{P'} \le i + j \le x_{Q'} + y_{Q'} \;\wedge\; y_P \le j \le Y_Q\} .$$

Si osserva che questo insieme si ottiene applicando $\boldsymbol{T}_{Bnm}$ a $\mathsf{Rctng}_{hv}(P, Q)$, dove $P := {\boldsymbol{T}_{Bnm}}^{\mathbf{-1}}(P')$ e $Q := {\boldsymbol{T}_{Bnm}}^{\mathbf{-1}}(Q')$.

D20b.15 **Prop.** (**sviluppo del binomio di Newton**) Siano x e y due variabili nel campo dei numeri razionali. Vale la seguente identità tra polinomi nelle due variabili

(1) $$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k} .$$

Dim.: Dimostriamo la formula per induzione cominciando con l'osservare che essa vale per $n = 0$ $(1 = 1)$ e per $n = 1$ $(x + y = x + y)$.

Supponiamola vera per un generico esponente n intero positivo e dimostriamo che vale la

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k\, y^{n+1-k}$$

Questa si ottiene dal seguente sviluppo

$$\begin{aligned}(x+y)(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}\, y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1}\, y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k+1} + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} x^h\, y^{n-h+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k+1} + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k\, y^{n+1-k} + y^{n+1} \;=\; \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k\, y^{n+1-k} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

D20**b.16** Occorre segnalare che l'uguaglianza trovata vale in situazioni più generali di quelle segnalate, molto circoscritte; le due variabili possono anche essere variabili formali o variabili in campi qualsiasi.

Si osserva che b12(1) si ottiene dalla b15(1) ponendo $x = y = 1$.

Se invece si pone $y = 1$ si ottiene una formula di frequente uso:

(1) $$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \; .$$

Inoltre se nella precedente si modifica y in $-y$ si ottiene un'altra formula molto usata:

(2) $$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k} \; .$$

D20**b.17** La b11(6), isolando i primi fattori del numeratore e del denominatore, implica

(1) $$\forall n = 1,2,3,\ldots\ ,\ k = 1,2,\ldots,n \quad : \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \; .$$

(2) $$\forall n = 0,1,2,3,\ldots\ ,\ m = 0,1,2,\ldots,n\ ,\ k = 0,1,2,\ldots,m \quad : \quad \binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

Dim.: Entrambi i membri dell'uguaglianza sono uguali a $\dfrac{n!}{k!\,(m-k)!\,(n-m)!}$ ∎

D20**b.18** **Prop.** Vale la seguente formula di decomposizione

(3) $$\forall n = 0,1,2,3,\ldots\ ,\ k = 0,1,2,\ldots,n \quad : \quad \sum_{h=0}^{n-k} \binom{h+k}{k} = \binom{n+1}{k+1} \; .$$

Dim.: Si ottiene applicando più volte la formula di addizione b10(5):

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k+1}$$
$$= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k} + \binom{k}{k+1}.$$

Per la (1) l'ultimo addendo vale 0, come ogni $\binom{k}{m}$ per $k < m$ ▮

Conviene presentare anche una dimostrazione più geometrica della formula precedente.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $k \in [n]$ consideriamo il punto-ZZ $\langle n+1, k+1\rangle$ e il parallelogramma binomiale $\mathsf{Prlgrm}_{Bnm}(\mathbf{0}, \langle n+1, k+1\rangle)$.

//input pD20b18

L'insieme dei cammini binomiali $\mathsf{PathBnm}(n+1, k+1)$ si ripartisce nell'unione disgiunta degli insiemi dei cammini che percorrono, risp., i passi-NE $\big\langle\langle k+h, k\rangle, \langle k+h+1, k+1\rangle\big\rangle$ per $h = 0, 1, 2, ..., n-k$ e che chiamiamo C_h.
Ciascuno dei cammini in C_h è costituito da un cammino del parallelogramma $\mathsf{Prlgrm}_{Bnm}(\mathbf{0}, \langle k+h, k\rangle)$ giustapposto all'unico cammino che porta a $\langle n+1, k+1\rangle$.
Quindi il numero dei cammini di $\mathsf{PathBnm}(n+1, k+1)$, cioè $\binom{n+1}{k+1}$, è dato dalla somma, per $h = 0, 1, 2, ..., n-k$ dei cardinali $|\mathsf{Prlgrm}_{Bnm}(\mathbf{0}, \langle k+h, k\rangle)| = \binom{k+h}{k}$ e quindi vale la uguaglianza enunciata ▮

D20b.19 Diamo un'altra formula di partizione dei coefficienti binomiali ottenibile naturalmente da considerazioni sopra cammini-ZZ.

Consideriamo gli interi naturali r e s, poniamo $n := r+s$ e un m variabile da 0 a n e prendiamo in considerazione i cammini binomiali di $\mathsf{PathBnm}(r+s, r)$ e il corrispondente $\mathsf{Prlgrm}_{Bnm}(\mathbf{0}, \langle r+s, r\rangle)$.

//input pD20b19

Per ogni $m = 0, 1, 2, ..., r+s$ consideriamo l'insieme di punti allineati verticalmente

$$V_m := \{k \in [\max(0, m-s) : \min(r, m)] :| \langle m, k\rangle\} ,$$

ossia l'insieme dei punti-ZZ $\{k = 0, 1, ..., r :| \langle m, k\rangle\}$ privato dei punti non toccati dai cammini di $\mathsf{PathBnm}(r+s, r)$.

I punti di V_m caratterizzano una partizione di $\mathsf{PathBnm}(r+s, r)$: per ogni $\langle m, k\rangle$ passano i cammini ottenuti giustapponendo un cammino di $\mathsf{Prlgrm}_{Brm}(\mathbf{0}\ ,\ \langle m, kr+s, r\rangle)$ e un cammino di $\mathsf{Prlgrm}_{Brm}(\langle m, k\rangle\ ,\ \langle r+s, r\rangle)$. Passando ai cardinali abbiamo quindi

$$(1) \qquad \binom{r+s}{r} = \sum_{k=\max(0,m-s)}^{\min(r,m)} \binom{r+s-k}{r+s-m} \cdot \binom{m}{k} .$$

Questa formula risulta appesantita dai limiti imposti alla corsa della variabile k.
Essa si può semplificare ampliando la corsa della k, ma con lo svantaggio di inserire coefficienti binomiali di valore 0.

Ricordiamo quindi che si è ampliata la definizione dei coefficienti binomiali ponendo

$$\forall k \in \{\ \ldots, -3, -2, -1\ ,\ n+1, n+2, n+3,\ \ldots\ \}\ \ \vdots\ \ \binom{n}{k}\ :=\ 0\ . \tag{2}$$

Sgiunge quindi alla più compatta formula equivalente

$$\binom{r+s}{r}\ =\ \sum_{k=0}^{r} \binom{r+s-k}{r+s-m} \cdot \binom{m}{k}\ . \tag{2}$$

Abbiamo individuato una possibilità di scegliere tra formule equivalenti che si presenta spesso negli studi enumerativi.
Da una parte si può disporre di una formula semplice a leggersi e a riutilizzare per sviluppi successivi, ma che per calcoli particolari richiede di precisare riduzioni preliminari specifici e dall'altra una formula appesantita da dettagli ma utilizzabile più direttamente per calcoli in situazioni specifiche.

D20b.20 La formula di partizione precedente si generalizza facilmente considerando ancora insiemi di cammini binomiali e corrispondenti cardinali.

Prop. (**formula di convoluzione di Chu-Vandermonde**)

$$\forall r, s \in \mathbb{N}\ ,\ t \in [r+s]\ \ \vdots\ \ \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{t-k} = \binom{r+s}{t}\ . \tag{1}$$

Dim.: Consideriamo le seguenti figure riguardanti diverse scelte di valori per r, s e t.

//input pD20b20

In ciascuna di esse si individuano una o due sequenze di punti-ZZ della forma $\left\langle 0 \le k \le r :| \langle r, k\rangle \right\rangle$, che determinano una partizione dell'insieme **PathBnm**$(r+s, t)$ in insiemi di cammini corrispondenti a due parallelogrammi binomiali e passando ai cardinali si ottiene l'uguaglianza enunciata ▮

D20 c. multiinsiemi [2]

D20c.01 Riprendiamo la nozione di multiinsieme introdotta in B13f16 e B13f17.

Con il termine **multiinsieme** (o con i sinonimi multiset e bag) intendiamo una coppia $\mathsf{m} = \langle A, m\rangle$ con A insieme finito ed $m \in \lceil A \longmapsto \mathbb{N} \rceil$.
L'insieme A viene chiamato **terreno del multiinsieme m** e la funzione m **molteplicità del multiinsieme**.
Denoteremo con Mset_A o con $\mathsf{Mset}[A]$ l'insieme dei multiinsiemi sul terreno A.

Due esempi di multiinsiemi sono:

$$\mathsf{m}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \mathsf{m}_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ 3 & 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} .$$

Si dice **multiinsieme canonico** ogni multiinsieme avente come terreno un intervallo della forma $(n\,] = \{1, 2, ..., n\}$; è canonico il multiinsieme m_1, non lo è m_2.
Per ogni $n \in \mathbb{P}$ i multiinsiemi canonici su $(n\,]$ si possono identificare con le n-uple delle rispettive molteplicità: $\mathsf{m} = \langle (n\,], m\rangle$ si può identificare con $\langle m(1), m(2), ..., m(m)\rangle$. In particolare m_1 si può identificare con $\langle 2, 1, 5, 3, 2, 3\rangle$,
L'insieme dei multiinsiemi canonici su $(n\,]$ lo denoteremo con Mset_n, abbreviazione di $\mathsf{Mset}[(n\,]]$.

Un multiinsieme si può identificare con la sequenza dei corrispondenti valori della molteplicità quando si può sottintendere un ordinamento del suo terreno.
Nella pratica, per individuare multiinsiemi canonici con molteplicità inferiori a 10 sono sufficienti stringhe di cifre decimali positive: per individuare m_1 basta la stringa 215323 .

Per completare la definizione di multiinsieme si conviene che Mset_0 sia costituito dalla sola coppia $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$, il secondo membro da intendere come la funzione vuota.

D20c.02 Due multiinsiemi $\langle A, m_A\rangle$ e $\langle B, m_B\rangle$ si dicono **multiinsiemi isomorfi** sse si trova una biiezione $\beta \in \lceil A \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright B \lceil$ tale che $\forall a \in A \;\vdots\; m_B(\beta(a)) = m_A(a)$.

Sono isomorfi m_2 e

$$\mathsf{m}_3 = \begin{vmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 6 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} , \quad \text{grazie alla} \quad \beta = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ H & D & F & C & B & G & E & A \end{vmatrix} .$$

Dunque ogni multiinsieme è isomorfo a un multiinsieme canonico.

Tra le considerazioni che si possono svolgere sui multiinsiemi è opportuno distinguere quelle nelle quali ha importanza in qual modo è stato individuato o costruito il terreno da quelle nelle quali le peculiarità costruttive del terreno non hanno influenza.
Queste seconde "considerazioni astratte", se riguardano multiinsiemi a se stanti, che non vengono posti in collegamento, possono limitarsi ai soli multiinsiemi canonici. In particolare le considerazioni astratte su m_2 possono essere sostituite dalle considerazioni sul multiinsieme canonico individuato come $\mathsf{m}_4 := 31442164$.

Si osserva che per operare con un multiinsieme occorre presentare il suo terreno, denotiamolo con A, come insieme ordinato totalmente e, ovviamente, ogni insieme ordinato totalmente di n elementi è chiaramente collegabile con $\{1, 2, ..., n\}$.
Se ad A si attribuisse un diverso ordinamento si avrebbe un multiinsieme diverso, ma isomorfo.

Nel seguito della sezione priviligeremo i multiinsiemi canonici.

Va tuttavia segnalato che i multiinsiemi sono ampiamente utilizzati per caratterizzare configurazioni ottenute con costruzioni ben definite o derivate da precise argomentazioni e quindi aventi terreni che sono da inquadrare in ambienti specifici ben caratterizzati.

In particolare si incontrano multiinsiemi che servono per individuare:
- le fattorizzazioni mediante fattori primi degli interi positivi [B26b];
- le radici di un'equazione polinomiale, da caratterizzare con le relative molteplicità;
- la caratterizzazione mediante cicli delle permutazioni di un insieme finito [D25g] e le classi di coniugio di un gruppo finito [B14e10];
- le rappresentazioni dei gruppi di permutazioni e le relative tavole dei caratteri.

Si osserva inoltre che la nozione di multiinsieme generalizza quella di funzione caratteristica di un insieme finito e ordinato; quest'ultima si può definire come molteplicità di multiinsieme vincolata ad assumere solo i valori 0 e 1.

D20c.03 Un multiinsieme si può presentare fedelmente con la sua cosiddetta **notazione replicativa del multiinsieme**, stringa ottenuta replicando i successivi elementi del terreno tante volte quante richieste dalle rispettive molteplicità.
Ad esempio per m_1 e m_2 abbiamo le notazioni replicative

$$1123333344455666 \quad \text{e} \quad aaabccccddddeefgggggghhhh \ .$$

Una variante della notazione sequenziale è la **notazione monomiale**, ottenuta dalla precedente trattando la giustapposizione dei segni degli elementi del terreno come un prodotto, ossia adottando la semplificazione delle potenze per gli elementi ripetuti.
Per m_1 e m_2 abbiamo le notazioni monomiali

$$1^2\ 2\ 3^5\ 4^3\ 5^2\ 6^3 \quad \text{e} \quad a^3\, b\, c^4\, d^4\, e^2\, f\, g^6\, h^4 \ .$$

Quando si può considerare implicito l'ordinamento del terreno, oppure quando questo è stato presentato con evidenza, con una notazione della forma $A = \big\langle a_1, a_2, ..., a_n \big\rangle$, un multiinsieme $\langle A, m\rangle$ si può presentare con la semplice sequenza delle molteplicità con la scrittura della forma

$$\langle m(a_1), m(a_2), ..., m(a_n)\rangle \ .$$

Tutte le notazioni introdotte sono delle rappresentazioni fedeli dei multiinmsiemi: infatti si individuano facilmente algoritmi che realizzano le trasformazioni tra le diverse notazioni.

Un multiinsieme con il terreno ordinato totalmente si può anche raffigurare, spesso con efficacia, mediante un istogramma ottenuto affiancando le basi di barre verticali costituite da quadratini sovrapposti in modo da visualizzare le successive molteplicità. Per m_1 ed m_2 si ha

//input pD20c03

Gli istogrammi dei multiinsiemi precedenti sono particolari poliomini.
Osserviamo esplicitamente che mediante istogrammi si possono rappresentare anche multiinsiemi relativi a un terreno con elementi non rappresentati. Ad esempio, supposto si tratti del terreno $\{a, b, c, d, e\}$ il multiinsieme con motazione ripetitiva *aaacceeee* viene raffigurato dall'istogramma che segue e che non costituisce un poliomino.

//input D20 c03B

Le raffigurazioni mediante istogrammi inducono a definire **cardinale del multiinsieme** $\mathbf{m} = \langle A, m\rangle$ e a denotare con $|\mathbf{m}|$ la lunghezza delle sequenza replicativa, ovvero il numero dei quadratini nel corrispondente istogramma.
Termini equivalenti di cardinale di un multiinsieme sono molteplicità totale e peso del multiinsieme.
Per i due esempi precedenti possiamo quindi scrivere $|\mathbf{m}_1| = 16$ ed $|\mathbf{m}_2| = 25$.

D20c.04 Consideriamo il multiinsieme canonico $\mathbf{m} = \langle A, m\rangle$ con $A = (n\,]$ e denotiamo con k il suo cardinale.
Esso si può rappresentare fedelmente con la sequenza crescente che chiamiamo **notazione delle molteplicità cumulate**.

(1) $$\left\langle m(1), m(1)+m(2), ..., \sum_{i=1}^{j} m(i), ..., \sum_{i=1}^{n} m(i)\right\rangle .$$

Per $\mathbf{m}_1$ abbiamo la notazione $\langle 2, 3, 8, 11, 13, 16\rangle$. Per il multiinsieme ottenuto da $\mathbf{m}_2$ sostituendo le successive lettere con i successivi interi positivi abbiamo $\langle 3, 4, 8, 12, 14, 15, 21, 25\rangle$.

La trasformazione tra notazione delle molteplicità e notazione delle molteplicità cumulate conduce a una evidente biiezione tra multiinsiemi e funzioni-NtN nondecrescenti.

La sequenza delle molteplicità cumulate a sua volta si può raffigurare con un istogramma crescente, ovvero con un cammino-EorN che inizia in $\langle 0, 0\rangle$, termina in $\langle n, k\rangle$ a $\langle k, n\rangle$ e non presenta mai due passi-WE consecutivi.

//input pD20c04

Questi istogrammi sono dei poliomini, anzi sono in biiezione con tavole di Ferrers.

D20c.05 Per n e k interi positivi denotiamo con $\mathsf{Mset}_{n,k}$ l'insieme dei multiinsiemi aventi come terreno $(n\,]$ e cardinale k.
Ampliamo inoltre questa definizione per consentire che n e k possano correre su tutti i numeri naturali convenendo quanto segue.
$\mathsf{Mset}_{n,0}$, in quanto insieme dei multiinsiemi di cardinale 0 per n oggetti, è vuoto per ogni $n \in \mathbb{P}$, mentre si riduce alla funzione vuota per $n = 0$.
$\mathsf{Mset}_{0,k}$, in quanto insieme dei multiinsiemi di 0 oggetti, si riduce alla funzione vuota per ogni $k \in \mathbb{P}$.

Diamo ora una formula per il numero dei multiinsiemi con le suddette caratteristiche.
Per questo numero viene usata una notazione su due livelli che richiama quella dei coefficienti binomiali; insieme a essa proponiamo una equivalente notazione caratterizzata da una stringa di caratteri con il ruolo di nome. Definiamo dunque

(1) $$\mathsf{MsetN}(n, k) \;:=\; \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) \;:=\; |\mathsf{Mset}_{n,k}| .$$

Questi valori interi naturali dipendenti da due indici interinaturali li chiamiamo **coefficienti multiinsiemistici**.
Per la notazione su due livelli proponiamo la lettura "n multiscelta k".

Il numero richiesto è uguale al numero delle combinazioni con ripetizioni di k oggetti ciascuno attribuibile a un tipo facente parte di un insieme di n tipi [B13e10].
Quindi per il numero dei multiinsiemi si trovano le espressioni

(2) $$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) \;:=\; \binom{n+k-1}{k} \;=\; \binom{n+k-1}{n-1} \;=\; \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} .$$

Può essere utile per la sua memorizzazione l'espressione di questi numeri che si serve dei fattoriali crescenti e paragonarla all'espressione dei coefficienti binomiali che si serve dei fattoriali decrescenti:

(3) $$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \frac{n^{\overline{k}}}{k!} \quad , \quad \binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k} .$$

D20c.06 Può essere utile studiare i coefficienti multiinsiemistici facendo riferimento il più possibile agli insiemi di multiinsiemi.

Per questo introduciamo la notazione $\left(\!\!\binom{A}{k}\!\!\right)$ per l'insieme dei multiinsiemi aventi come terreno l'insieme A ed aventi cardinale k. Si osserva che per il loro cardinale

$$\left|\left(\!\!\binom{A}{k}\!\!\right)\right| = \left(\!\!\binom{|A|}{k}\!\!\right) .$$

Considerando il terreno $\overline{A} := A \,\dot\cup\, \{\nu\}$ di $n+1$ elementi ed il fatto che la collezione dei suoi multiinsieme si bipartisce nella sottocollezione dei multiinsiemi che contengono ν e di quella dei multiinsiemi che non la contengono si ottiene la biiezione

(1) $$\left(\!\!\binom{A \,\dot\cup\, \{\nu\}}{k+1}\!\!\right) \longleftrightarrow \left(\!\!\binom{A}{k+1}\!\!\right) \dot\cup \left(\!\!\binom{A \,\dot\cup\, \{\nu\}}{k}\!\!\right) .$$

Da questa per i cardinali si ottiene la ricorrenza

(2) $$\left(\!\!\binom{n+1}{k+1}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n}{k+1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n+1}{k}\!\!\right) .$$

Si hanno inoltre le condizioni iniziali

(3) $$\left(\!\!\binom{n}{0}\!\!\right) = 1 \quad \text{e} \quad \left(\!\!\binom{0}{k}\!\!\right) = \delta_{0,k} .$$

D20c.07 Diamo infine la tabella dei valori dei coefficienti multiinsiemistici $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$, evidentemente una rappresentazione della funzione-NNtN $\mathsf{MsetN}(n,k)$ confrontabile con la tabella dei coefficienti binomiali [b05].

		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
8		1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	⋯
7		1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	⋯
6		1	6	21	56	126	252	462	792	1287	⋯
5		1	5	15	35	70	126	210	330	495	⋯
4		1	4	10	20	35	56	84	120	165	⋯
3		1	3	6	10	15	21	28	36	45	⋯
2		1	2	3	4	5	6	7	8	9	⋯
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	⋯
0		1	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯
n											
	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	⋯

D20c.08 Nell'insieme dei multiinsiemi Mset si possono definire varie composizioni e relazioni. Alcune di queste sono delle evidenti generalizzazioni di composizioni e di relazioni degli insiemi.

Consideriamo due multiinsiemi sullo stesso terreno $\mathsf{m} = \langle A, m\rangle$ e $\mathsf{n} = \langle A, n\rangle$.

Si dice che m è **sottomultiinsieme** di n e si scrive $\mathsf{m} \subseteq_{ms} \mathsf{n}$, sse $\forall a \in A \;\colon\; m(a) \leq n(a)$. Anche questa relazione è una relazione d'ordine parziale.

Si dice **unione dei multiinsiemi m** e **n** il multiinsieme $\mathbf{m} \cup \mathbf{n} := \left\langle A, \lceil a \in A \mid\!\!\!\!\rightarrow \max(m(a), n(a)) \rceil \right\rangle$.

Si dice **intersezione dei multiinsiemi m** e **n** il multiinsieme $\mathbf{m} \cap \mathbf{n} := \left\langle A, \lceil a \in A \mid\!\!\!\!\rightarrow \min(m(a), n(a)) \rceil \right\rangle$.

Si dice **somma dei multiinsiemi m** e **n** il multiinsieme $\mathbf{m} + \mathbf{n} := \left\langle A, \lceil a \in A \mid\!\!\!\!\rightarrow m(a) + n(a) \rceil \right\rangle$.

Altre composizioni e relazioni si possono definire per multiinsiemi con terreni non necessariamente coincidenti e in genere accade che molte applicazioni richiedono di trattare i multiinsiemi con elavata elasticità.
Per rendere più agevole le elaborazioni che si servono di multiinsiemi riteniamo opportuno definire vari meccanismi elementari che li riguardano e che possono essere utilizzati congiuntamente.

D20c.09 Prendiamo ancora in considerazione due multiinsiemi $\mathbf{m} = \langle A, m \rangle$ e $\mathbf{n} = \langle B, n \rangle$

Si dice **restrizione di un multiinsieme m** ad un sottoinsieme proprio $D \subset A$ il multiinsieme $\mathbf{m}|_D := \left\langle D, m|_D \right\rangle$, cioè il multiinsieme ottenuto dalla funzione **m** riducendo il suo dominio e quindi trascurando le molteplicità in $A \setminus D$.

All'opposto diciamo **allargamento di un multiinsieme m** al dominio $S \supset A$ il multiinsieme ottenuto ampliando il suo dominio ed assegnando 0 alla molteplicità dei nuovi elementi del dominio, cioè

$$\left\langle S, \lceil a \in A \mid\!\!\!\!\rightarrow m(a) \rceil \dot\cup \langle s \in S \setminus A \mid\!\!\!\!\rightarrow 0 \rceil \right\rangle .$$

Si osserva che nelle applicazioni i singoli multiinsiemi interessano principalmente se non presentano molteplicità nulle. A questo proposito occorre segnalare che spesso si richiede che la funzione molteplicità abbia codominio contenuto in $\mathbb{P}$, non in $\mathbb{N}$.

Qui per far chiarezza manteniamo la definizione all'inizio di c01 e introduciamo la nozione che segue: si dice **restrizione positiva di un multiinsieme m** il multiinsieme $rstrPos(\mathbf{m}) := \mathbf{m}|_{(m^{-1})(0)}$, cioè il multiinsieme dal quale sono stati estromessi gli oggetti del dominio aventi molteplicità 0.

Si dicono **multiinsiemi disgiunti** due multiinsiemi aventi i corrispondenti ristretti positivi con i domini ridotti.
Evidentemente due multiinsiemi con i due domini disgiunti sono multiinsiemi disgiunti. È anche evidente che due multiinsiemi sono disgiunti sse la loro intersezione presenta tutte le molteplicità nulle.

D20c.10 Può essere utile estendere le tre operazioni di composizione introdotte in c08 a due multiinsiemi $\mathbf{m} = \langle A, m \rangle$ e $\mathbf{n} = \langle B, n \rangle$ con i terreni nonnecessariamente uguali e in particolare con i terreni disgiunti.

Si dice unione dei multiinsiemi **m** e **n** il multiinsieme

$$\mathbf{m} \cup \mathbf{n} := \left\langle A \cup B, \lceil a \in A \setminus B \mid\!\!\!\!\rightarrow m(a) \rceil \dot\cup \lceil b \in B \setminus A \mid\!\!\!\!\rightarrow n(b) \rceil \dot\cup \lceil a \in A \cap B \mid\!\!\!\!\rightarrow \max(m(a), n(b)) \rceil .\right.$$

Questa composizione si può pensare ottenuta ampliando **m** ed **n** fino ad avere i terreni coincidenti e quindi effettuare l'unione definita in c08.

Si dice intersezione dei multiinsiemi **m** e **n** il multiinsieme

$$\mathbf{m} \cap \mathbf{n} := \left\langle A \cup B, \lceil a \in A \setminus B \mid\!\!\!\!\rightarrow m(a) \rceil \dot\cup \lceil b \in B \setminus A \mid\!\!\!\!\rightarrow n(b) \rceil \dot\cup \lceil a \in A \cap B \mid\!\!\!\!\rightarrow \min(m(a), n(b)) \rceil .\right.$$

Questa composizione si può pensare ottenuta ampliando **m** ed **n** fino ad avere i terreni coincidenti e quindi effettuare l'intersezione definita in c08.

Si dice somma dei multiinsiemi **m** e **n** il multiinsieme

$$\mathbf{m} + \mathbf{n} := \left\langle A \cup B, \lceil a \in A \setminus B \mid\!\!\!\!\rightarrow m(a) \rceil \dot\cup \lceil b \in B \setminus A \mid\!\!\!\!\rightarrow n(b) \rceil \dot\cup \lceil a \in A \cap B \mid\!\!\!\!\rightarrow m(a) + n(b) \rceil .\right.$$

Questa composizione si può pensare ottenuta ampliando **m** ed **n** fino ad avere i terreni coincidenti e quindi effettuando la loro somma definita in c08.

Si dice che **m** è sottomultiinsieme di **n** sse il terreno A_r del ridotto positivo di **m** è sottoinsieme del terreno B_r del ridotto positivo di **n** e se per ogni $a \in A_r$ si ha $m(a) \le n(a)$.

D20 d. numeri di Fibonacci

D20d.01 Torniamo ad occuparci di cammini binomiali e più limitatamente di quelli che iniziano nell'origine $\mathbf{0} = \langle 0,0\rangle$.
Diciamo **cammino di Fibonacci** ogni cammino nel piano $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ che inizia nell'origine e che presenta solo passi-WE e passi-NE .
I cammini di Fibonacci si possono codificare fedelmente, ovvero si possono rappresentare concisamente e fedelmente, con le sequenze di numeri 1 e 2, ogni 1 rappresentando un passo-WE e ogni 2 un passo-NE. Queste sequenze le diciamo "notazioni-1,2 dei cammini di Fibonacci" e diciamo "peso di un cammino di Fibonacci"' la somma delle cifre che costituiscono la sua notazione-1,2.

Per ogni n intero naturale denotiamo con FIB_{n+1} l'insieme dei cammini di Fibonacci di peso n, ovvero dei cammini di Fibonacci che hanno come estremità finale un punto $\langle h,k\rangle$ con $h+k=n$ ed $h\geq k$.
Per i valori da 1 a 6 di n abbiamo i seguenti insiemi di cammini: $\mathsf{FIB}_1 = \{\mu\}$, $\mathsf{FIB}_2 = \{1\}$, $\mathsf{FIB}_3 = \{11,2\}$, $\mathsf{FIB}_4 = \{111,12,21\}$, $\mathsf{FIB}_5 = \{1111,112,121,211,22\}$ e $\mathsf{FIB}_6 = \{11111,1112,1121,1211,2111,122,212,221\}$.

Osserviamo esplicitamente che FIB_1 è costituito solo dal cammino di lunghezza zero, l'unico da $\langle 0,0\rangle$ a $\langle 0,0\rangle$.

Osserviamo anche che i cammini di FIB_{n+1} si concludono in un punto-ZZ della retta $y=n-x$ (tratteggiata in figura).

D20d.02 Definiamo come **numero di Fibonacci** con indice n $\mathsf{Fib}_n := |\mathsf{FIB}_n|$, cioè il numero di cammini di Fibonacci che terminano in uno dei punti $\langle h,n-h-1\rangle$ per $h=0,1,...,\lfloor n/2\rfloor$.
Si osserva che per $n=3,4,5,...$ l'insieme FIB_n è costituito da due tipi di cammini: quelli che si concludono con un passo NE e che iniziano con uno dei cammini in FIB_{n-2} e quelli che si concludono con un passo WE e che iniziano con uno dei cammini in FIB_{n-1}. Dunque

(1) $\forall n=3,4,5,...\ :\ \mathsf{FIB}_n = \mathsf{FIB}_{n-2}\,\dot\cup\,\mathsf{FIB}_{n-1}$ e quindi $\forall n=3,4,5,...\ :\ \mathsf{Fib}_n = \mathsf{Fib}_{n-2}+\mathsf{Fib}_{n-1}$.

Conviene inoltre porre $\mathsf{Fib}_0 := 0$, in accordo con il fatto che nessuna somma di numeri 1 e 2 vale -1, ossia che l'insieme dei cammini di Fibonacci di peso -1 è vuoto. Con la precedente scelta la (1) vale anche per $n=2$.
Più avanti [c11] amplieremo la successione dei numeri Fib_n ad una successione del genere $\lceil\,\mathbb{Z}\longmapsto\mathbb{Z}\,\rceil$.

La successione dei numeri di Fibonacci $\langle n\in\mathbb{N} :|\ \mathsf{Fib}_n\rangle$ si può introdurre anche con la equivalente definizione basata sulle seguenti richieste iterative:

(2) $\mathsf{Fib}_0 := 0 \quad , \quad \mathsf{Fib}_1 = 1 \quad , \quad \forall n=2,3,4,...\ :\ \mathsf{Fib}_n := \mathsf{Fib}_{n-2}+\mathsf{Fib}_{n-1}$.

Per i primi componenti della successione si trova

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	...

D20d.03 **Prop.** La successione dei numeri di Fibonacci possiede una gamma sorprendentemente ampia di proprietà e queste fanno sì che essa serva per i modelli matematici di vari fenomeni e per molti procedimenti computazionali.
Nel seguito della sezione presentiamo alcune di queste proprietà e per semplificare la lettura per i numeri di Fibonacci adottiamo come notazione locale $F_n := \mathsf{Fib}_n$.

Il numero F_n si può definire anche come numero di espressioni di somme aritmetiche che forniscono $n-1$ come somma di addendi che possono essere solo 1 o 2.
Per esempio il numero 5 viene individuato dalle seguenti $F_6 = 8$ espressioni:

$1+1+1+1+1$, $1+1+1+2$, $1+1+2+1$, $1+2+1+1$, $2+1+1+1$, $1+2+2$, $2+1+2$, $2+2+1$.

In effetti queste espressioni sono in corrispondenza biunivoca con le codifiche-1,2 dei cammini di Fibonacci: basta inserire in queste un segno + tra due cifre successive.

D20d.04 Stabiliamo ora un collegamento dei numeri di Fibonacci con i coefficienti binomiali simmetrici.
Dato che i primi sono definiti mediante cammini di Fibonacci e i secondi mediante cammini binomiali, si è indotti a stabilire un collegamento tra questi due tipi di configurazioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Questo collegamento è costituito da una evidente biiezione che ad un cammino di Fibonacci associa il cammino binomiale ottenuto modificando ogni passo NE in un passo SN.
Tale trasformazione corrisponde alla trasformazione dei punti-ZZ

(1) $$\ulcorner\, h,k \in \mathbb{N} : \langle h, h+k\rangle \mapsto \langle h,k\rangle \,\urcorner$$

che a ogni punto finale di cammino di Fibonacci associa un punto finale di cammino binomiale.
Consideriamo ora i raggruppamenti dei valori dei coefficienti binomiali forniti dalla tabella precedente che corrispondono ai punti-ZZ su ciascuna delle rette-ZZ oblique individuate dalle equazioni $y = -x+n$ per $n = 0, 1, 2, ...$. Il raggruppamento relativo a un dato n contiene $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ elementi e per la successione delle somme si trovano i valori

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ ...$$

cioè i valori iniziali della successione dei numeri di Fibonacci $\langle n \in \mathbb{P} :| F_n \rangle$.
Questo fatto si dimostra considerando che la proprietà di additività comporta che ciascuno dei valori del raggruppamento relativo a n è ottenuto da uno dei valori dei due raggruppamenti immediatamente precedenti o dalla somma di due di tali valori. Si trova quindi

(2) $$F_n = \sum_{h=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathsf{bnmc}(n-2h, h) = \sum_{h=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-h}{h} .$$

D20d.05 **Prop.** **(identità di Gian Domenico Cassini)**

(1) $$\forall n = 1, 2, 3, ... \ :\ F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n$$

Dim.: Procediamo a una dimostrazione per induzione.
Per $n = 1$ la relazione diventa $F_2F_0 - {F_1}^2 = (-1)^1$, cioè $-(1^2) = -1$, verificata.
Supponiamo vera la precedente uguaglianza (1) fino a un determinato valore n dell'indice e deduciamo quella che si ottiene da essa sostituendo n con $n+1$, cioè la $F_{n+2}F_n - {F_{n+1}}^2 = (-1)^{n+1}$ [a] .
Grazie all'uguaglianza fondamentale, nella (1) è possibile sostituire F_{n-1} con $F_{n+1} - F_n$ ottenendo ${F_{n+1}}^2 - F_{n+1}F_n - {F_n}^2 = (-1)^n$ [b] , ovvero $F_n(F_n + F_{n+1}) - {F_{n+1}}^2 = (-1)^{n+1}$ [c]; ma questa, grazie alla $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, equivale alla [a] ∎

D20d.06 È utile derivare dall'identità di Cassini la seguente.

Prop.

(1) $$\forall n = 2, 3, ... \ :\ \frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n} .$$

Al crescere di n il valore assoluto della differenza tra due successivi rapporti di numeri di Fibonacci, $1/F_{n-1}F_n$, diminuisce piuttosto rapidamente e questo induce a considerare la successione di intervalli-QQ $\left\langle h = 1,2,3,... :| \ \left[\dfrac{F_{2h}}{F_{2h-1}} :: \dfrac{F_{2h+1}}{F_{2h}}\right]\right\rangle$:

$$\left[\frac{F_2}{F_1} :: \frac{F_3}{F_2}\right] = [1 :: 2]$$
$$\left[\frac{F_4}{F_3} :: \frac{F_5}{F_4}\right] = [1.5 :: 1.6666666]$$
$$\left[\frac{F_6}{F_5} :: \frac{F_7}{F_6}\right] = [1.6 :: 1.625]$$
$$\left[\frac{F_8}{F_7} :: \frac{F_9}{F_8}\right] = [1.6153846 :: 1.6190476]$$
. . . .

Evidentemente, come aveva osservato anche Johannes Kepler , si tratta di una successione di intervalli annidati sempre più stretti. Come vedremo si dimostra che tale successione individua un unico numero reale uguale a $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.608\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848...$, cioè l'importante costante matematica chiamata **sezione aurea** o, un po' impropriamente, **numero di Fidia** [G34c03].

D20**d.07** Prop.

(1) $$\forall n = 0,1,2,3,... \ : \ F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Dim.: Diamo due dimostrazioni.
Per la prima si procede per induzione: si constata che $F_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - F_1$ e che $F_0 + F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1$; quindi si assume come vera la identità da dimostrare, si somma F_{n+1} a entrambi i suoi membri e si trova l'identità corrispondente ad $n+1$:

$$F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n + F_{n+1} \ = \ F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1 \ \blacksquare$$

La seconda dimostrazione si basa sull'interpretazione dei due membri dell'uguaglianza (1) come cardinale di un insieme di cammini-ZZ e di una sua partizione. Il secondo membro della (1) fornisce il numero dei cammini di Fibonacci di peso $n+1$ che contengono almeno un passo NE. Il loro insieme è dato dall'unione disgiunta per $i = 0,1,2,...,n-1$ degli insiemi di cammini che contengono il passo NE da $\langle h, 0\rangle$ a $\langle i+1, 1\rangle$; si osserva poi che i cammini contenenti questo passo sono in biiezione con i cammini di Fibonacci di peso $n-i$ e quindi sono F_{n-i-1}; infine si osserva che

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_{n-i-1} \ = \ \sum_{j=1}^{n} F_j = \sum_{j=0}^{n} F_j \quad \blacksquare$$

D20**d.08** Prop.

(1) $$F_1 + 2F_2 + 3F_3 + \cdots + nF_n = n\,F_{n+2} - F_{n+3} + 2 \ .$$

Dim.: Questa identità si ottiene uguagliando due espressioni per il numero N dei cammini di Fibonacci che presentano almeno un passo NE e che hanno uno dei pesi -1, 0, 1, 2, ... o $n+1$. Dalla d07(1) si ricava
$N = F_0 + [F_1 - 1] + [F_2 - 1] + \cdots + [F_{n+1} - 1] + [F_{n+2} - 1] = [F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_{n+1}] + F_{n+2} - (n+2) = F_{n+3} + F_{n+2} - (n+2)$.
La stessa d07(1) dice che i cammini di Fibonacci con almeno un passo NE sono
$F_0 + F_1 + \cdots + F_{n-1} + F_n$ aventi peso $n+1$,
$F_0 + F_1 + \cdots + F_{n-1}$ aventi peso n,

$F_0 + F_1$ aventi peso 0,
F_0 aventi peso -1.
Sommando queste espressioni per il numero complessivo si ha
$$N = (n+1)F_0 + nF_1 + (n-1)F_2 + \cdots + 2F_{n-1} + F_n \ .$$
Uguagliando le due espressioni si ha
$$(n+1)F_0 + nF_1 + (n-1)F_2 + \cdots + 2F_{n-1} + F_n = F_{n+3} + F_{n+2} - (n+2) \ .$$
Ora si considera la d07(1) con entrambi i membri moltiplicati per $n+1$ e dai suoi due membri si sottraggono i due membri della precedente ottenendo
$$F_1 + 2F_2 + \cdots + nF_n = -F_{n+3} + nF_{n+2} + 2 \ ▮$$

D20d.09 Prop.

(1) $$F_1{}^2 + F_2{}^2 + \cdots + F_n{}^2 = F_n\, F_{n+1} \ .$$

Dim.: La dimostrazione si conduce facilmente con considerazioni geometriche che fanno riferimento alla progressiva costruzione della cosiddetta **successione dei rettangoli di Fibonacci** per progressivo accostamento di quadrati aventi lati di lunghezza $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, ... Ogni nuovo quadrato di lato F_n viene accostato a un rettangolo avente lati delle lunghezze F_n e F_{n-1} e quindi porta a un rettangolo avente i lati delle lunghezze F_n e $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$ ▮

La costruzione precedente può significativamente completarsi con il progressivo tracciamento della cosiddetta **spirale di Fibonacci**. Nei primi due quadrati accostati, entrambi di lato $1 = F_1 = F_2$, si traccia una semicirconferenza di raggio 1; nel terzo quadrato di lato $2 = F_3$ si continua la curva con un quarto di circonferenza di raggio 2; nel terzo quadrato di lato $3 = F_4$ un quarto di circonferenza di raggio 3; ...; nell'n-esimo quadrato di lato F_n un quarto di circonferenza di tale raggio e così via.

//input p

D20d.10 Eserc.

Dimostrare per induzione le identità d08(1) e d09(1).

D20d.11

Per molti sviluppi risulta utile estendere la definizione dei numeri di Fibonacci a deponenti negativi mantenendo valida la identità $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$; questa identità applicata per $n = -1, -2, -3, ...$ porta a tabelle come la seguente

-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-55	34	-21	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Questa suggerisce l'identità che segue:

(1) $$\forall n \in \mathbb{P} \ : \ F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n \ .$$

Dim.: Si procede per induzione constatando che $F_1 = F_1 - F_0 = 1$ e $F_2 = F_0 - F_{-1} = -1$. Si assume poi che la (1) valga per indici che decrescono fino a un determinato valore $-n$; infine si trova che
$$F_{-n-1} = F_{-n+1} - F_{-n} = (-1)^n F_{n-1} - (-1)^{n-1} F_n = (-1)^n [F_{n-1} + F_n] = (-1)^{(n+1)-1} F_{n+1} \ ▮$$
A questo punto tutte le identità dimostrate in precedenza a partire dalla regola iterativa sono valide per deponenti interi qualsiasi.

D20d.12 Prop.

(1) . $$\forall k, n \in \mathbb{Z} \ : \ F_{n+k} = F_k\, F_{n+1} + F_{k-1}\, F_n$$

Dim.: Si procede per induzione su $k = 0, 1, 2, 3, ...$ e $k = -1, -2, -3, ...$ Si inizia constatando che per $k = 0$ la (1) si riduce alla $F_n = F_n$, per $k = 1$ alla $F_{n+1} = F_{n+1}$ e per $k = -1$ alla identità di base $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$.
Assunta vera la (1) per $k = 1, 2, ..., h$ con $h > 0$ si trova $F_{n+h+1} = F_{n+h} + F_{n+h-1} = F_h F_{n+1} + F_{h-1}F_n + F_{h-1}F_{n+1} + F_{h-2}F_n = F_{h+1}\,F_{n+1} + F_h\,F_n$, cioè la (1) per $k = h + 1$.
Simmetricamente, assunta vera la (1) per $k = -1, -2, ..., -h$ con $h > 0$ si trova $F_{n-h-1} = -F_{n-h} + F_{n-h+1} = -F_{-h}\,F_{n+1} - F_{-h-1}\,F_n + F_{-h+1}F_{n+1} + F_{-h}F_n = [-F_{-h} + F_{-h+1}]F_{n+1} + [-F_{-h-1} + F_{-h}]F_n = F_{-h-1}F_{n+1} + F_{-h-2}F_n$, cioè la (1) per $k = -h - 1$ ∎

D20d.13 Dalla d12(1) si ricavano altri fatti interessanti.
Ponendo in essa $k = n$ si trova una formula di duplicazione

(1) $$F_{2\,n} \;=\; F_n\,F_{n+1} + F_{n-1}\,F_n \;.$$

Similmente si trova una formula di triplicazione

(2) $$F_{3n} \;=\; F_{2n}\,F_{n+1} + F_{2n-1}F_n \;=\; F_n\left({F_{n+1}}^2 + F_{n-1}\,F_{n+1} + F_{2n-1}\right) \;.$$

Abbiamo trovato che sia F_{2n} che F_{3n} sono multipli di F_n; questo fatto si può generalizzare.

(3) Prop.: Per ogni $k = 2, 3, 4, ...$ $F_{k\,n}$ è multiplo di F_n.

Dim.: La dimostrazione procede per induzione per k.
La formula è stata verificata per $k = 2, 3$ e si assume che per ogni $h = 2, 3, ..., k$ sia $F_{hn} = c_h\,F_n$ con $c_h \in \mathbb{P}$ e si trova

$$F_{(k+1)n} = F_{kn}\,F_{n+1} + F_{kn-1}\,F_n = F_n\,(c_{kn}\,F_{n+1} + F_{kn-1}) \quad ∎$$

D20d.14 Di proprietà di divisibilità se ne dimostrano varie altre.

(1) $$\forall m, n \in \mathbb{Z} \;:\; \mathrm{MCD}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{MCD}(m,n)} \;.$$

Dim.: Poniamo $d := \mathrm{MCD}(m, n)$, $\mu := m/d$, $\nu := n/d$, $D := \mathrm{MCD}(F_m, F_n)$. $d :| \; m$ e $d :| \; n$ implicano $d :| \; F_m$ e $d :| \; F_n$ e quindi $d :| \; D$ . . . . . . ∎

Per esempio: $\mathrm{MCD}(F_{12}, F_{18}) = \mathrm{MCD}(144, 2584) = 8 = \mathsf{Fib}_5$.

D20d.15 **(1) Lemma**: (**lemma di Matijasevich**) Sia $m = 3, 4, ...$. F_m è multiplo di ${F_n}^2$ sse m è multiplo di $n\,F_n$

Dim.: Serviamoci dell'abbreviazione $\mathsf{F} := {F_n}^2$. Occorre esaminare la successione $\langle k \in \mathbb{P} :| \; F_{kn}\%\mathsf{F}\rangle$ ed individuare il componente k multiplo di F. Si trovano le seguenti espressioni

$F_n\%\mathsf{F} = F_n \neq 0$.

$F_{2n}\%\mathsf{F} = (F_n\,F_{n+1} + F_{n-1}\,F_n)\%\mathsf{F} = 2F_nF_{n+1}\%\mathsf{F}$.

$F_{2n+1}\%\mathsf{F} = ({F_{n+1}}^2 + \mathsf{F})\%\mathsf{S} = {F_{n+1}}^2\%\mathsf{F}$.

$F_{3n}\%\mathsf{F} = (F_{2n+1}\,F_n + F_{2n}\,F_{n-1})3{F_{n+1}}^2\,F_n\%\mathsf{F}$.

$F_{3n+1}\%\mathsf{F} = (F_{2n+1}\,F_{n+1} + F_{2n}\,F_n)\%\mathsf{F} = {F_{n+1}}^3\%\mathsf{F}$.

Per induzione su k si dimostra

$F_{kn}\%\mathsf{F} = kF_n\,{F_{n+1}}^{k-1}\%\mathsf{F}$ e $F_{kn+1}\%\mathsf{F} = {F_{n+1}}^k\%\mathsf{F}$.

Dunque F_{n+1} ed F_n sono coprimi e di conseguenza

$$F_{kn}\%\mathsf{F} = 0 \iff kF_n\%\mathsf{F} = 0 \iff k\%\mathsf{F} = 0 \;∎$$

D20d.16 Sui numeri di Fibonacci si basa una interessante rappresentazione dei numeri positivi. Con *Graham, Knuth e Patashnik* scriviamo $i >> j$ per affermare $i \geq j+2$.

Teorema (teorema di Zeckendorf)
Ogni intero positivo n possiede una unica rappresentazione della forma $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_r}$ ove $k_1 >> k_2 >> \cdots >> k_r >> 0$.

Dim.: La precedente rappresentazione, che diciamo **notazione alla Fibonacci degli interi**, si può ottenere con un procedimento "greedy", cioè attraverso successivi passi in ciascuno dei quali si aggiunge alla somma dell'enunciato come nuovo addendo il massimo dei numeri di Fibonacci disponibili.
Supposto sia $F_k \leq n < F_{k+1}$ si scrive $n = F_k + R_1$ e per il primo "resto" R si ha $0 \leq R \leq R < F_{k+1} - F_k = f_{k-1}$. Se $R = 0$ il procedimento rappresentativo è concluso; in caso contrario si prosegue per R servendosi solo di numeri di Fibonacci inferiori ad F_{k-1} ▮

D20 e. numeri di Catalan

D20e.01 Consideriamo n intero naturale e denotiamo con $\mathcal{B}_{n,n}$ l'insieme dei cammini-EorN che partono da $\mathbf{0}$ e terminano in $\langle n,n\rangle$; ciascuno di questi cammini è costituito da n passi-SN e da n passi-EW e, come si è visto in b01, il loro numero è $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Come tutti i cammini-o-EorN essi possono essere codificati, cioè possono essere rappresentati fedelmente e concisamente, da sequenze binarie di lunghezza $2\,n$ e peso n: si tratta di associare a ogni passo SN un bit 1 e a ogni passo WE un bit 0 (chiaramente la codifica con le cifre 0 e 1 scambiate risulta equivalente).

Tra questi cammini si distinguono i cosiddetti **cammini nondecrescenti di Dyck** di lunghezza $2n$, cammini che passano solo per punti $\langle h,k\rangle$ con $h \le k$, cioè per i punti-NN che stanno sulla semiretta-ZZ $y = x$ o al di sopra di essa. Denotiamo localmente con $\mathcal{D}_n$ l'insieme dei cammini nondecrescenti di Dyck di lunghezza $2n$.

Le codifiche di tali cammini si dicono **sequenze binarie di Dyck** di lunghezza $2n$; queste sono precisamente le sequenze binarie $b_1b_2\cdots b_{2n-1}b_{2n}$ aventi tutti i prefissi costituiti da un numero di bits uguali ad 1 maggiore o uguale del numero dei suoi componenti uguali a 0. Identificando i cammini di Dyck con le loro codifiche binarie (fedeli), abbiamo per esempio

$$\mathcal{D}_0 = \{\,\mu\,\} \quad , \quad \mathcal{D}_1 = \{10\} \quad , \quad \mathcal{D}_2 = \{1100, 1010\} \quad , \quad \mathcal{D}_3 = \{111000, 110100110010, 101100, 101010\}.$$

$$\mathcal{D}_4 = \{11110000, 11101000, 11100100, 11100010, 11011000, 11010100, 11010010, 11001100, 11001010, \}.$$
$$11001100, 11001010, 10111000, 10110101, 10110011, 10101100, 10101010\}.$$

D20e.02 Tutti questi cammini sono chiaramente visualizzabili nel piano-ZZ. Una visualizzazione equivalente si ottiene sostituendo ogni passo-SN con un passo-NE e ogni passo-WE con un passo-SE, cioè con la la trasformazione dei passi

$$\left\downarrow \begin{matrix} SN & WE \\ NE & SE \end{matrix} \right\downarrow .$$

Il passaggio a questa visualizzazione dalla precedente va collegato alla endofunzione invertibile nonsuriettiva di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$$\rho\delta \;:=\; \ulcorner\, \langle h,k\rangle \;\mapsto\; \langle h+k, k-h\rangle \,\urcorner \ ,$$

trasformazione che collocata in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ si ottiene con una rotazione di $\pi/4$ in senso orario composta con una dilatazione di un fattore $\sqrt{2}$ e che definiamo

$$[\rho\delta] \;:=\; \boldsymbol{Rot}(\mathbf{0}, 45^\circ) \circ \boldsymbol{Hmtt}_{\sqrt{2}} \ .$$

I cammini così ottenuti vengono detti **cammini di Dyck** *tout court* e appartengono al primo ottante di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Una loro codifica conveniente è fornita dalle sequenze aventi come componenti $+1$ o -1 ottenibili dalle codifiche binarie sostituendo ogni 0 con -1. Questa codifica, che si uò chiamare codifica-$\pm$ consente di descrivere i cammini parlando di altitudini dei nodi toccati ed ha la caratteristica di avere tutti i prefissi con la somma delle componenti non nonnegativa.

Denotiamo con $\mathcal{B}'_{h,k}$ l'insieme ottenuto applicando $[\rho\delta]$ all'insieme dei cammini binomiali $\mathcal{B}_{h,k}$ e con $\mathsf{PathDyck}_n$ l'insieme dei cammini ottenuto applicando la rotodilatazione $[\rho\delta]$ all'insieme dei cammini nondecrescenti di Dyck $\mathcal{D}_n$. Adottiamo anche la notazione locale $\mathcal{D}' := \mathsf{PathDyck}_n$.

Evidentemente $\mathcal{C}'_n \subset \mathsf{Path} - NE.SE\big\langle \mathbf{0}, \langle 2n, 0\rangle \big\rangle$.

Per ogni intero naturale n definiamo come n-esimo numero di Catalan Ctln_n il numero dei cammini di Dyck di lunghezza $2n$,

$$\mathsf{Ctln}_n \ := \ |\mathcal{C}_n| \ .$$

.

Dai precedenti elenchi di cammini, adottando l'abbreviazione locale $C_n := \mathsf{Ctln}(n)$, si ha $C_0 = C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$.
Ci proponiamo ora di individuare un'espressione generale per i cardinali C_n; per questo serve un lemma molto generale sulle sequenze di numeri interi.

D20e.03 **Lemma**: (**lemma di George Raney**)

Sia $m = 2, 3, ...$ e sia $\mathsf{x} = \langle x_1, x_2, ..., x_m \rangle$ una sequenza di interi con $\sum_{i=1}^{m} = 1$ (buona parte dei quali possono presentare valori negativi). Tra le sue m permutazioni circolari se ne trova una e una sola che presenta valori positivi per tutte le m somme iniziali

$$\sum_{i=1}^{j} x_1 \text{ con } j = 1, 2, ..., m \ .$$

Dim.: La dimostrazione si ottiene con una argomentazione visualizzabile vantaggiosamente nell'ambito di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Prolunghiamo la x giustapponendola a se stessa un opportuno numero r di volte e diamo alla sequenza ottenuta la forma $\langle x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_M \rangle$, per la quale si intende che sia $M := m\,r$ e $\forall k = 1, 2, ..., M - m \ : \ x_{m+k} := x_k$.
Consideriamo il grafico in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ della corrispondente sequenza delle M somme iniziali

$$\left\langle j = 1, 2, ..., M \,\vdots\!\left|\ \sum_{i=1}^{j} x_i \right.\right\rangle \ ,$$

cioè la poligonale avente i nodi negli M punti-ZZ $\left\langle j, \sum_{i=1}^{j} x_i \right\rangle$. Questa poligonale presenta r successive sezioni di m nodi tali che ogni sezione successiva alla prima si ottiene dalla precedente applicando ai nodi la traslazione

$$\ulcorner \ \langle h, k \rangle \mapsto \langle h + m, k + 1 \rangle \ \urcorner \ ;$$

infatti per $k = 1, 2, 3, ..., r - 1$ le ordinate degli m nodi della $k + 1$-esima sezione sono espresse da

$$\sum_{i=km+1}^{km+j} x_i = \sum_{i=1}^{j} x_i + k \quad , \quad \text{per} \ \ j = 1, 2, ..., m \ .$$

//input pD20e03

La poligonale grafico della sequenza delle somme iniziali quindi è tutta contenuta tra due rette-ZZ che soddisfano a due equazioni della forma $\langle x_0, y_0 \rangle + k\langle m, 1 \rangle$ relative a due opportuni punti $\langle x_0, y_0 \rangle$. Quindi si raggiunge sicuramente una sezione nella quale risultano nonnegative tutte le ordinate dei suoi nodi.

Con un eventuale arretramento si trova anche un primo nodo P' avente ordinata nulla e seguito solo da nodi con ordinate positive; a partire dal nodo successivo a questo si individua l'unica permutazione circolare della sequenza di partenza richiesta ▮

D20e.04 (1) **Prop.**: $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n} \ = \ \dfrac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$.

Dim.: La dimostrazione fa riferimento all'insieme di cammini **Path** $- EorN(\mathbf{0}, \langle n, n+1)$ e al suo trasformato da $[\rho\delta]$ **Path** $- NE.SE(\mathbf{0}, \langle 2n+1, 1\rangle)$ Ciascuno di questi insiemi è costituito da $\binom{2n+1}{n}$ cammini e si ripartisce in classi di equivalenza per permutazione circolare; ciascuna classe è costituita da $2n+1$ cammini e quindi si hanno $\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$ classi. A ciascuno dei cammini di **Path** $- NE.SE(\mathbf{0}, \langle 2n+1, 1\rangle)$ si può applicare il lemma di Raney; quindi in ciascuna classe di permutazione circolare si trova uno e un solo cammino che inizia nell'origine e ha tutti i nodi con ordinate positive. Ciascuno di questi cammini inizia con un passo NE e se questo viene eliminato si ottiene un cammino ottenuto con una traskazione da un cammino di Dyck di $\mathcal{D}_{2n}$. Abbiamo quindi

(2) $$C_n = |\mathcal{C}_{2n}| = \frac{1}{2n+1}|\textsf{Path} - NE.SE(\mathbf{0}, \langle 2n+1, 1| = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \;\blacksquare$$

D20e.05 **Prop.** (**relazione di ricorrenza di Segner**)

(1) $$\forall n = 1,2,3,... \;\; : \;\; C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} = C_0\, C_{n-1} + C_1\, c_{n-2} + \cdots + C_{n-1}\, C_0 \;.$$

Dim.: Segue dal fatto che ogni parola di Dyck w su (e) avente lunghezza $2n$ maggiore o uguale a 2 si può fattorizzare in un unico modo come $w = (x)y$ con x e y stringhe di Dyck di lunghezza minore o uguale a $2n-2$ (una delle quali eventualmente muta) ∎

Questa formula ha portato a soluzione il problema di Eulero della suddivisione dei poligoni in triangoli. Infatti C_n fornisce il numero di modi di suddividere un poligono convesso con $n+2$ lati in triangoli ottenuti tracciando segmenti rettilinei tra suoi vertici non adiacenti. Per chiarire questa interpretazione riscriviamo la (1) introducendo $E_n := C_{n+2}$ nella forma

(2) $$\forall n = 3,4,5,... \;\; : \;\; E_n = E_2 E_{n-1} + E_3 E_{n-2} + \cdots + E_{n-1} E_2 \;.$$

D20e.06 **Eserc.** Dimostrare che

(1) $$\forall n = 1,2,3,... \; : \; C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \;;$$

(2) $$\forall n = 1,2,3,... \; : \; C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n \;;$$

(3) $$C_n = \frac{(4n-2)!!}{(n+1)!} = \frac{2^n(2n-1!!}{(n+1!} \;.$$

D20 f. numeri di Stirling

D20f.01 Il termine numeri di Stirling, così chiamati in onore di James Stirling , viene usato per denotare i numeri interi naturali che costituiscono due matrici enumerative e che si incontrano in molti problemi combinatori. Le due matrici sono qui considerate come funzioni del genere $\lceil \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N} \rceil$ e riguardano quelli che sono detti, risp., i numeri di Stirling di prima e di seconda specie.

Per ciascuno di questi schieramenti di numeri presentiamo tre notazioni. La prima, quella che useremo prevalentemente, è dovuta a Jovan Karamata ed è stata sostenuta da Donald Knuth; essa si avvicina a quella dei coefficienti binomiali e consente di presentare formule che mettono in evidenza proprietà che sono assimilabili ad alcune dei coefficienti binomiali. La seconda utilizza singole lettere e viene usata abbastanza spesso ma non può avere portata globale. Qui preferiamo usare la terza che si serve di un identificatore specifico e possiamo assegnarle portata globale.

Più precisamente per i numeri di Stirling di prima specie proponiamo le notazioni

(1) $$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \mathfrak{s}(n,k) = \mathsf{Strn1}(n,k) \ ;$$

per i numeri di Stirling di seconda specie le notazioni

(2) $$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \mathfrak{S}(n,k) = \mathsf{Strn2}(n,k) \ .$$

D20f.02 Procediamo dunque a definire, per n e k interi naturali come **numero di Stirling di prima specie** $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ il numero di **arrangiamenti** di n oggetti distinguibili in k cicli.

Usiamo la notazione $\langle_{cy} a,b,c,d\rangle$ per denotare la **classe ciclica** contenente la sequenza $\langle a,b,c,d\rangle$ e le sequenze ottenute da questa per permutazione circolare; si ha quindi

$$\langle_{cy} a,b,c,d\rangle = \langle_{cy} b,c,d,a\rangle = \langle_{cy} c,d,a,b\rangle = \langle_{cy} d,a,b,c\rangle \ .$$

Un esempio di arrangiamento degli oggetti distinguibili a, b, c, d, e, f, g in 2 classi cicliche è $\{\langle_{cy} a,b,c,d\rangle \ , \ \langle_{cy} e,f,g\rangle\}$; tale entità si può rappresentare con la scrittura più concisa $abcd/efg$ che si conviene essere equivalente alla notazione $efg/abcd$ e a notazioni come $cdab/gef$ e $fge/bcda$.
Possiamo quindi dire che gli arrangiamenti dei 4 oggetti 1, 2, 3 e 4 in 2 cicli sono le seguenti

123/4 124/3 134/3 234/1 ,
132/4 142/3 143/2 243/1 ,
12/34 13/24 14/23 ;

di conseguenza abbiamo $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11$.
La notazione $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ può leggersi "n in k cicli".

D20f.03 Con n oggetti distinguibili si possono formare $n!$ sequenze (o permutazioni), ciascuna di queste fa parte di una classe ciclica di m elementi e quindi il numero di tali classi cicliche è $m!/m = (m-1)!$. Quindi abbiamo

(1) $$\forall n = 1,2,3,... : \ \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)! \ .$$

Tra gli arrangiamenti di n oggetti 1, 2, ..., n se ne può trovare uno solo, $1/2/.../n$, costituita da n classi cicliche (ciascuna di un solo oggetto). Quindi

(2) $$\forall n = 1,2,3,... : \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1 \ .$$

Gli arrangiamenti di n oggetti 1, 2, ..., n in $n-1$ classi cicliche sono in biiezione con le classi cicliche di due elementi dell'insieme dei primi n interi positivi, ovvero con i sottoinsiemi di due elementi di tale insieme. Quindi

(3) $$\forall n = 1,2,3,... : \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = \binom{n}{2} \ .$$

Si osserva inoltre che non si ha alcun arrangiamento di un numero positivo di oggetti in 0 classi cicliche, né in un numero di classi cicliche superiori al numero degli oggetti, cioè

(4) $$\forall n = 1,2,3,... \ \wedge \ \forall k = 0, n+1, n+2, .. \ : \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0 \ .$$

D20f.04 **Prop.**

(1) $$\forall n = 1,2,3,... : \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \ .$$

Dim.: Questa identità prende in considerazione i diversi modi di ottenere un arrangiamento di n oggetti in k classi cicliche aggiungendo un nuovo elemento ad arrangiamenti di $n-1$ oggetti.
Vi sono arrangiamenti ottenibili dagli $\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ arrangiamenti di $n-1$ oggetti con k classi cicliche collocando il nuovo oggetto in una delle classi cicliche già presenti. Si osserva che da una classe ciclica di h oggetti, per aggiunta di un nuovo elemento si ricavano h classi cicliche di $h+1$ oggetti: per esempio da $\langle_{cy} 1,2,3,4\rangle$ si ottengono le 4 classi $\langle_{cy} 1,5,2,3,4\rangle$, $\langle_{cy} 1,2,5,3,4\rangle$, $\langle_{cy} 1,2,3,5,4\rangle$ e $\langle_{cy} 1,2,3,4,5\rangle$.
Da ciascuno degli arrangiamenti suddetti quindi si ricavano nuovi arrangiamenti in numero uguale a $n-1$. Il numero di questi arrangiamenti è dato dal primo addendo del secondo membro della (1).
Un altro gruppo di nuovi arrangiamenti si ottiene dagli $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ arrangiamenti di $n-1$ oggetti con $k-1$ classi cicliche aggiungendo la classe costituita dal solo nuovo oggetto; da ciascuno dei suddetti arrangiamenti di $n-1$ oggetti si ricava uno dei nuovi arrangiamenti e tale numero corrisponde al secondo addendo del secondo membro della (1).
La considerazione che nessun altro tipo di nuovo arrangiamento si può ottenere conclude la dimostrazione ▮

Dalle considerazioni precedenti si ricava anche che gli arrangiamenti di n oggetti in k classi cicliche individuano biunivocamente le permutazioni di n oggetti che presentano esattamente k cicli. Il numero di Stirling $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, quindi, fornisce anche numero di tali permutazioni.
Inoltre sommando questi numeri per tutti i possibili valori di k si ottiene il numero di tutte le permitazioni di n oggectti e quindi si ha

(2) $$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n! \ .$$

D20f.05 Le uguaglianze f03(1), f03(2) e f03(4) esprimenti le condizioni al contorno e la formula di additività f04(1) comportano la possibilità di procedere iterativamente per individuare effettivamente i valori della matrice dei numeri di Stirling di prima specie, cioè una tabella come la seguente

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 36 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 546 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 21 & 322 & 4536 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & 175 & 1960 & 22449 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 85 & 735 & 6769 & 67284 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 35 & 225 & 1624 & 13132 & 118124 & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 3 & 11 & 50 & 274 & 1764 & 13068 & 109584 & \cdots \\
0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 24 & 120 & 720 & 5040 & 43200 & \cdots \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots
\end{array}
$$

D20f.06 Se n e k sono due interi naturali, si definisce come **numero di Stirling di seconda specie** e si denota con $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ il numero delle partizioni di un insieme S di n oggetti in k parti, cioè in k sottoinsiemi non vuoti. Per esempio le partizioni di $\{1,2,3,4,5\}$ in 4 parti sono individuate da

$$
\begin{gathered}
\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\} \qquad \{1,3\},\{2\},\{4\},\{5\} \qquad \{1,4\},\{2\},\{3\},\{5\} \qquad \{1,5\},\{2\},\{3\},\{4\} \\
\{2,3\},\{1\},\{4\},\{5\} \qquad \{2,4\},\{1\},\{3\},\{5\} \qquad \{2,5\},\{1\},\{3\},\{4\} \\
\{3,4\},\{1\},\{2\},\{5\} \qquad \{3,5\},\{1\},\{2\},\{4\} \qquad \{4,5\},\{1\},\{2\},\{3\} \ .
\end{gathered}
$$

Quindi $\left\{ {5 \atop 4} \right\} = 10$.

D20f.07 Si osserva che ogni sottoinsieme di S di uno o due elementi corrisponde ad una sola classe ciclica, mentre a ogni sottoinsieme di 3 o più elementi corrispondono più classi cicliche. Si ottengono quindi facilmente le seguenti formule.

(1) $$\forall n = 1,2,3,... : \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1 \quad , \qquad \left\{ {0 \atop 1} \right\} = 0 \quad , \qquad \forall n = 0,1,2,3,... : \left\{ {n \atop n} \right\} = 1 \ .$$

(2) $$\forall\ n = 0,1,2,3,... \ \land\ k = n+1, n+2, ... \ : \ \left\{ {n \atop k} \right\} = 0 \ .$$

(3) $$\forall\ n = 0,1,2,3,... \ \land\ k = n+1, n+2, ... \ : \ \left\{ {n \atop k} \right\} \leq \left[{n \atop k} \right] \ .$$

D20f.08 Prop.

(1) $$\forall\ n = 1,1,2,3,... \ \land\ k = 1,2,...,n \ : \ \left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \ .$$

Dim.: Si ottiene con considerazioni ottenute semplificandoquelle adottate per dimostrare f04(1) ▮

In particolare otteniamo le due seguenti espressioni

(2) $$\forall n = 0,1,2,3,... \ : \ \left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1 \ .$$

(3) $$\forall n = 1,2,3,4,... \ : \ \left\{ {n \atop n-1} \right\} = \frac{(n-1)n}{2} \ .$$

D20f.09 Le uguaglianze esprimenti le condizioni al contorno e l'additività consentono di individuare effettivamente ciascuno dei i valori della matrice dei numeri di Stirling di seconda specie. Si ottiene quindi una tabella come la seguente:

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	···
0	0	0	0	0	0	0	0	1	36	···
0	0	0	0	0	0	0	1	28	462	···
0	0	0	0	0	0	1	21	266	2646	···
0	0	0	0	0	1	15	140	1050	6951	···
0	0	0	0	1	10	65	350	1701	7770	···
0	0	0	1	6	25	90	301	966	3025	···
0	0	1	3	7	15	31	63	127	255	···
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	···
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	···

D20 g. numeri euleriani

D20g.01 Consideriamo una sequenza di lunghezza s di numeri interi $\mathsf{x} = \langle x_1, x_2, ..., x_s \rangle$. Si dicono **salite della sequenza di s interi** x le coppie $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ con $x_i < x_{i+1}$ e si dicono **discese della sequenza di s interi** x le coppie $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ con $x_i > x_{i+1}$; si dicono inoltre **uguaglianze della sequenza di s interi** x le coppie $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ con $x_i = x_{i+1}$.

Ciascuna sequenza x può essere caratterizzata dal numero delle salite, che denotiamo con FaSs asc(x) e dal numero delle discese che scriviamo FaSs desc(x) .

Evidentemente il numero delle uguaglianze della x è dato da $len(\mathsf{x}) - 1 - asc(\mathsf{x}) - desc(\mathsf{x})$.

Ovvio anche che le precedenti considerazioni si possono estendere alle sequenze le cui componenti sono elementi di un insieme totalmente ordinato, mentre per le sequenze di elementi di un insieme parzialmente ordinato si dovrebbe tenere conto anche delle coppie di componenti consecutivi noncomparabili.

Ad una sequenza x sono associati il multiinsieme delle sue componenti, che denotiamo con $\mathsf{mset}(\mathsf{x})$ e l'insieme di tutte le sequenze ottenibili permutando la x ovvero il suddetto multiset.

Un multiset come il precedente può essere rappresentato dalla sequenza che presenta solo salite e altopiani. Per esempio $\mathsf{mset}\langle 3, 5, 1, 8, 3, -2, 5, 1, 1 \rangle$ può essere rappresentato da $\langle -2, 1, 1, 1, 3, 3, 5, 8, 8 \rangle$.
Denotiamo inoltre con $\mathbf{Perm}_{\mathsf{mset}(\mathsf{x})}$ l'insieme delle permutazioni del multiset $\mathsf{mset}(\mathsf{x})$; un tale insieme si può anche individuare come $\mathbf{Perm}_{\mathsf{y}}$, ove y è una qualsiasi delle permutazioni relative al dato multiset.

Di questo insieme si può considerare la partizione costituita dai sottoinsiemi caratterizzati dai diversi possibili valori delle salite e delle discese.
Una partizionedi$\mathbf{Perm}_{\mathsf{mset}(\mathsf{x})}$ più fine della precedente viene costituita dai sottoinsiemi delle permutazioni caratterizzate da diverse collocazioni tra le coppie di componenti consecutive delle relazioni $<$ e $>$.

D20g.02 Le precedenti nozioni si semplificano nel caso delle permutazioni di un insieme totalmente ordinato. Se denotiamo con $\mathsf{p} = \langle p_1, p_2, ..., p_n \rangle$ la generica di queste permutazioni deve essere $desc(\mathsf{p}) = n - 1 - asc(\mathsf{p})$, e la prima delle partizioni delineate per l'insieme $\mathbf{Perm}_{\mathsf{p}}$ è costituita da sottoinsiemi caratterizzabili con i soli numeri delle salite.

La lista dei valori trasformati da una permutazione di un insieme totalmente ordinato di n elementi si può agevolmente arricchire con gli $n - 1$ segni delle relazioni $<$ e $>$ che sussistono tra due valori consecutivi: si ottengono in tal modo, per esempio, la scrittura $2 < 4 > 1 < 3$ da una permutazione di Sym_4 e $3 < 6 > 2 < 5 > 1 < 4$ da una permutazione di Sym_6.

Prevedibilmente si dicono **salite della permutazione** p le coppie $\langle p_i, p_{i+1} \rangle$ con $p_i < p_{i+1}$ e si dicono **discese della permutazione** le coppie $\langle p_i, p_{i+1} \rangle$ con $p_i > p_{i+1}$.
La precedente permutazione di $\mathbf{Perm}_4$ presenta 2 salite e una discesa, mentre quella di $\mathbf{Perm}_6$ presenta 3 salite e 2 discese.

Le permutazioni di ogni $\mathbf{Perm}_n$ si ripartiscono facilmente nei sottoinsiemi caratterizzati da un dato numero a di salite (ovvero da $n - a - 1$ discese).
Denotiamo con $\mathbf{Perm}_{n,a/}$ l'insieme delle permutazioni di $\{1, 2, ..., n\}$ con a salite, dove $a \in \{0, 1, ..., n - 1\} = [n)$. Per esempio per $\mathbf{Perm}_4$ si hanno le seguenti 4 parti:

$\mathbf{Perm}_{4,3/}$: 1234 ;

$\mathbf{Perm}_{4,2/}$: 1243 , 1324 , 1342 , 1423 , 2134 , 2314 , 2341 , 2413 , 3124 , 3412 , 4123 ;

$\mathbf{Perm}_{4,1/}$: 1432 , 2143 , 2431 , 3142 , 3214 , 3241 , 3421 , 4132 , 4213 , 4231 , 4312 ;

$\mathsf{Perm}_{4,0/}$: 4321 .

D20g.03 Si dice **numero euleriano di prima specie** relativo ai primi n interi e ad a salite, con $a \leq n-1$ il cardinale dell'insieme $\mathsf{Perm}_{n,a}$. Si può subito osservare che per ogni $n \in \mathbb{P}$ nelle permutazioni di Perm_n si possono avere da 0 a $n-1$ salite.
Per trattare questi cardinali ci serviamo di una funzione del genere $\lceil \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \rceil$ per la quale vengono usate due notazioni, una con identificatore e l'altra a due livelli.
Introduciamo quindi

(1) $$\forall n \in \mathbb{P} \ \wedge \ a = 0,1,...,n-1 \ \vdots \ \mathsf{euln1}(n,a) \ := \ \left\langle {n \atop a} \right\rangle \ := \ |\mathsf{Perm}_{n,a/}| \ .$$

D20g.04 Si ottiene quindi una tabella come la seguente:

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	···	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	502	···	
0	0	0	0	0	0	0	1	247	14608	···	
0	0	0	0	0	0	1	120	4293	88234	···	
0	0	0	0	0	1	57	1191	15619	156190	···	
0	0	0	0	1	26	302	2416	15619	88234	···	
0	0	0	1	11	66	302	1191	4293	14608	···	
0	0	1	4	11	26	57	120	247	502	···	
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	···
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	···

D20g.05 Si dice **numero euleriano di seconda specie** relativo ai primi n interi e ad a salite, con $n \geq 2$ e $a \leq n-1$, il cardinale dell'insieme delle permutazioni di $\langle 1,1,2,2,...,n,n \rangle$ che presentano a salite e che per $m = 1,2,...,n$ tra le due occorrenze di m abbiamo solo interi superiori ad m stesso. Queste permutazioni sono state individuate da Gessel e Viennot e denotiamo con $\mathsf{Perm}^{GV}{}_{2n,a/}$ il loro insieme relativo ad n ed a.

Per esempio per $n = 3$ si hanno i seguenti insiemi di liste

$\mathsf{Perm}^{GV}{}_{6,0/}$: 332211 ;

$\mathsf{Perm}^{GV}{}_{6,1/}$: 221133 , 221331 , 223311 , 233211 , 113322 , 133221 , 331122 , 331221 ;

$\mathsf{Perm}^{GV}{}_{6,2/}$: 112233 , 122133 , 112332 , 123321 , 133122 , 122331 .

D20g.06 Anche per questi cardinali si utilizza una funzione del genere $\lceil \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \rceil$ per la quale si possono utilizzare due notazioni equivalenti:

(1) $$\forall n \in \mathbb{P} \ \wedge \ a = 0,1,...,n-1 \ \vdots \ \mathsf{euln2}(n,a) \ := \ \left\langle\!\!\left\langle {n \atop a} \right\rangle\!\!\right\rangle \ := \ |\mathsf{Perm}^{GV}{}_{2n,a/}| \ .$$

Conviene inoltre estendere la definizione ponendo

(2) $$\forall a \in \mathbb{Z} \ \vdots \ \mathsf{euln2}(0,a) = \delta_K(0,a) \qquad , \qquad \forall n \in \mathbb{P} \ \wedge \ a = n, n+1, ... \ \vdots \ \mathsf{euln2}(0,a) = 0 \ .$$

D20g.07 Si dimostra che la precedente funzione soddisfa la seguente relazione di ricorrenza:

(1) $$\forall n \in \mathbb{P} \wedge a = 0,1,...,n-1 \ \vdots \ \mathsf{euln2}(n,a) = (2n-a-1)\,\mathsf{euln2}(n-1,a-1) + (m+1)\mathsf{euln2}(n-1,a) \ .$$

D20g.08 È quindi possibile procedere alla costruzione della matrice che rappresenta la funzione $\mathsf{euln2}$ del genere $\lceil [-1:)^{\times 2} \longmapsto \mathbb{N} \rceil$ producendo tabelle come la seguente:

$\mathsf{euln2}(n,a) \quad =$

$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
8		0	0	0	0	0	0	0	0	0	362 880	$\cdots$
7		0	0	0	0	0	0	0	0	40 320	3 733 920	$\cdots$
6		0	0	0	0	0	0	0	5 040	341 136	11 026 296	$\cdots$
5		0	0	0	0	0	0	720	33 984	785 304	12 440 064	$\cdots$
4		0	0	0	0	0	120	3 708	58 140	644 020	5 765 500	$\cdots$
3		0	0	0	0	24	444	4 400	32 120	195 800	1 062 500	$\cdots$
2		0	0	0	6	58	328	1 452	5 610	19 950	67 260	$\cdots$
1		0	0	2	8	22	52	114	240	494	1 004	$\cdots$
0		0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
a												
	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$

D20 **h. numeri di Lah**

D20h.01 Consideriamo un insieme di n elementi che per semplicità possiamo identificare con gli interi 1, 2, ..., n; di questo insieme si possono considerare le diverse partizioni; fissata una partizione, ciascuna delle sue parti S può essere presentata con una delle $|S|!$ liste dei suoi elementi.
Diciamo **presentazione di Lah** dell'intervallo $(n\,]$ relativa a una sua partizione in blocchi ordinati una elencazione dei suoi elementi nella quale gli elementi in ciascun blocco compaiono in posizioni consecutive.
Una presentazione di Lah di $(n\,]$ si ottiene da una lista nonripetitiva degli interi 1, 2, .., n tra i quali sono inserite repliche di un segno di separazione "/" in numero da 0 a $n-1$ in posizioni nonconsecute.
Per esempio le presentazioni di Lah di $\{1,2,3\}$ relative alle partizioni in 2 blocchi sono rappresentate dalle sequenze

1/23 , 1/32 , 2/13 , 2/31 , 3/12 , 3/21

Il complesso delle presentazioni di Lah si possono organizzare in una arborescenza-N con le partizioni di $(n\,]$ al livello n nella qiale ogni partizione di $(n\,]$ viene arricchita portando a più partizioni di $(n+1]$.

//input pD20h01

D20h.02 Introduciamo una funzione che denotiamo con nlah del genere $\lceil \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \rceil$ chiedendo che per ogni $n=1,2,3,...$ e $p=1,2,...,n$ $\mathsf{nlah}(n,p)$ esprima il numero delle presentazioni di Lah di $(n\,]$ relative alle partizioni in p parti.
A $\mathsf{nlah}(n,p)$ si da il nome di **numero di Lah senza segno** relativo ad n e p.

Per avere formule più compatte risulta conveniente estendere la definizione ponendo

(2) $\forall n \in \mathbb{P} \,\wedge\, p = 0, n+1, n+2, ... \;:\; \mathsf{nlah}(n,p) := 0 \qquad \text{e} \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \;:\; \mathsf{nlah}(0,p) = \delta_K(0,p)$.

Dalla interpretazione precedente si ottengono subito uguaglianze che per la matrice vanno considerate come condizioni al contorno:

(1) $$\forall n = 1,2,3,... \;:\; \mathsf{nlah}(n,1) = n! \qquad \text{e} \qquad \mathsf{nlah}(n,n) = 1 \ .$$

Si trovano inoltre senza difficoltà le espressioni che seguono:
(3)
$$\forall n = 1,2,3,... \;:\; \mathsf{nlah}(n,2) = \frac{(n-1)n!}{2} \ ,\ \mathsf{nlah}(n,3) = \frac{(n-2)(n-1)n!}{12} \ ,\ \mathsf{nlah}(n,n-1) = n(n-1) \ .$$

D20h.03 Si trova inoltre la formula di ricorrenza

(1) $$\forall n,p = 1,2,3,... \;:\; \mathsf{nlah}(n,p+1) = \frac{n-p}{p(p+1)}\,\mathsf{nlah}(n,p) \ .$$

Da questa si giunge all'espressione chiusa

(2) $$\forall n = 1,2,3,... \,\wedge\, p = 1,2,...,n \;:\; \mathsf{nlah}(n,p) = \binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{p!} = \binom{n}{p}\frac{(n-1)!}{(p-1)!} \ .$$

D20h.04 Per la matrice del genere $\lceil \mathbb{P} \times \mathbb{P} \longmapsto \mathbb{N} \rceil$ che rappresenta la funzione nlah si ottengono porzioni iniziali come la seguente:

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	⋯
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	132	⋯
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	110	7 260	⋯
0	0	0	0	0	0	0	0	1	90	4 950	217 800	⋯
0	0	0	0	0	0	0	1	30	3 240	11 880	3 920 400	⋯
0	0	0	0	0	0	1	56	630	60 480	1 663 200	43 908 480	⋯
0	0	0	0	0	1	30	11 76	11 760	635 040	13 970 880	307 359 360	⋯
0	0	0	0	1	30	630	11 760	211 680	3 810 240	69 854 400	1 317 254 400	⋯
0	0	0	1	20	300	4 200	58 800	846 720	12 700 800	199 584 000	3 293 136 000	⋯
0	0	1	12	120	1200	12 600	141 120	1 693 440	21 772 800	299 376 000	4 390 848 000	⋯
0	1	6	36	240	1 800	15 120	141 120	1 451 620	16 329 600	199 584 000	2 634 508 800	⋯
1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3628800	39 916 800	479 001 600	⋯

D20h.05 Risultano utili anche i cosiddetti **numeri di Lah con segno** definiti da

(1) $$\forall n, p = 0, 1, 2, 3, ... \;\; \vdots \;\; \mathsf{nlah}'(n,p) \; := \; (-1)^n \, \mathsf{nlah}(n,p)$$

Come vedremo parlando di successioni di polinomi collegabili a matrici infinite triangolari, i numeri di Lah sono i coefficienti di connessione tra polinomi fattoriali crescenti e polinomi fattoriali decrescenti.

Essi sono strettamente collegati anche con i polinomi di Bell.

D20 i. numeri di Bell

D20i.01 Per ogni n intero naturale si dice numero di Bell del cardinale n il numero delle partizioni di ogni insieme di n elementi.
Il numero di Bell di n si denota usualmente con B_n, ma qui per maggiore distinzione lo denotiamo con Bell_n.
Per studiare questi numeri possiamo limitarci a considerare le partizioni dell'insieme $(\mathrm{n}\,]$ che denotiamo con $\mathbf{Part}_n$.

Ad esempio le partizioni di $\{1,2,3\}$ sono rrappresentate dalle seguenti stringhe nelle quali il segno / fa da separatore delle parti:

$$1/2/3\ ,\ 1/23\ ,\ 2/13\ ,\ 3/12\ ,\ 123\ ;$$

quindi abbiamo $Bell_3 = 5$.

Osserviamo anche le partizioni di $\{1,2,3,4,\}$:

$$\begin{gathered}1/2/3/4\ ,\ 12/3/4\ ,\ 13/2/4\ ,\ 14/2/3\ ,\ 23/1/4\ ,\ 24/1/3\ ,\ 34/1/2\ ,\\ 12/34\ ,\ 13/24\ ,\ 14/23\ ,\ 123/4\ ,\ 124/3\ ,\ 134/2\ ,\ 234/1\ .\ 1234\end{gathered}$$

Le quali consentono di affermare $\mathsf{Bell}_4 = 15$.
Evidentemente abbiamo anche $\mathsf{Bell}_1 = 1$ e $\mathsf{Bell}_2 = 2$.
Risulta inoltre opportuno definire $\mathsf{Bell}_0 := 1$.

D20i.02 **Prop.** I numeri di Bell soddisfano la seguente relazione di ricorrenza

$$(1) \qquad \forall n = 0,1,2,3,...\ :\ \mathsf{Bell}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathsf{Bell}_k\ .$$

Questa formula si spiega considerando l'insieme delle partizioni che si ottengono eliminando da $\mathbf{Part}_{n+1}$ le parti contenenti l'elemento $n+1$.
Queste nuove partizioni si ottengono eliminando da $\mathbf{Part}_{n+1}$ tutte le parti contenenti $n+1$; rimangono allora partizioni di insiemi con numeri di elementi $k = 1,2,...,n$. Tra le partizioni di insiemi con k elementi si possono scegliere i k elementi in $\binom{n}{k}$ modi e per ciascuna scelta si hanno Bell_k partizioni ∎

Questa espressione consente Di proseguire illimitatamente l'ampliamento della successione dei numeri di Bell, ma non è molto efficiente.

Un modo di procedere più rapido si serve del seguente triangolo-N chiamato triangolo di Peirce (viene detto anche triangolo di Bell o array di Aitken):

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & \cdots \\
 & & & & & & 977 & \cdots \\
 & & & & & 253 & 724 & \cdots \\
 & & & & 52 & 151 & 573 & \cdots \\
 & & & 15 & 37 & 114 & 459 & \cdots \\
 & & 5 & 16 & 27 & 87 & 372 & \cdots \\
 & 2 & 3 & 7 & 20 & 67 & 305 & \cdots \\
1 & 1 & 2 & 5 & 15 & 52 & 253 & \cdots
\end{array}$$

Questo schieramento lo consideriamo raffigurazione della funzione $\lceil \langle c,j\rangle \mapsto x_{c,j} \rceil$ il cui dominio è $\{\langle c,j\rangle \mid c = 1,2,3,... \wedge j = 1,2,...,c\}$.
Per costruire questo schieramento si procede per colonne successive, cominciando a porre 1 nella casella inferiore a sinistra che associamo alla coppia $\langle 1,1\rangle$. Quindi in ciascuna delle colonne che seguono si

pone nella prima casella in basso associata alla coppia $\langle c, 1\rangle$ l'intero positivo collocato nella casella più in alto della colonna precedente, cioè $x_{c-1,c-1}$ e procedendo sulle caselle crescenti, nella casella $\langle c, j\rangle$ si pone la somma della casella al suo Sud e della casella suo SW, cioè $x_{c-1,j-1} + x_{c,j-1}$ (ricorrenza di aspetto NEorN).

I numeri di Bell si trovano sia sulla riga più in basso, sia sulla diagonale; più precisamente:
$$\forall n = 1, 2, 3, ... \;\vdots\; \mathsf{Bell}_n \;=\; x_{n+1,1} \;=\; x_{n,n}\ .$$

D20i.03 La successione dei numeri di Bell è stata ampiamente studiata, soprattutto servendosi delle serie formali di potenze [I35].

In particolare la sua funzione generatrice esponenziale è
$$\mathsf{Bell}(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathsf{Bell}_n}{n!}\, x^n \;=\; \mathsf{e}^{\mathsf{e}^x - 1}\ ,$$

Segnaliamo anche la **formula di Dobinski**
$$\mathsf{Bell}_n \;=\; \frac{1}{\mathsf{e}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}\ .$$

L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php