Capitolo D16:
Strutture algebriche con più sostegni

D16:0.01 Questo capitolo può considerarsi la continuazione del capitolo ?sTALa???? e presenta le strutture algebriche che possono considerarsi varianti degli spazi vettoriali.

D16:a. Moduli e spazi vettoriali

D16:a.01 Consideriamo l'anello $\boldsymbol{R} = \langle R, +, -, 0, \cdot, 1\rangle$; si dice **modulo a sinistra** su $\boldsymbol{R}$ una struttura della forma $\boldsymbol{M} = \langle M, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}, \perp\rangle$ dove $\langle M, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}\rangle$ è un gruppo abeliano, mentre $\perp$ denota una cosiddetta **legge di composizione esterna** per la quale si chiedono il genere $\perp \in \{R \times M \longmapsto M\}$ e le proprietà

$$\forall a, b \in R, \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in M \;\vdots\; a \perp (\boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{w}) = (a \perp \boldsymbol{v}) \boldsymbol{+} (a \perp \boldsymbol{w}) \;, \qquad (a+b) \perp \boldsymbol{v} = (a \perp \boldsymbol{v}) \boldsymbol{+} (b \perp \boldsymbol{v}) \;,$$
$$(a \cdot b) \perp \boldsymbol{v} = a \perp (b \perp \boldsymbol{v}) \;, \qquad 1 \perp \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \;.$$

Denotiamo $\mathsf{Mdl}_{\boldsymbol{R}}$ la classe dei moduli a sinistra sull'anello $\boldsymbol{R}$.

D16:a.02 Simmetricamente si dice **modulo a destra** su $\boldsymbol{R}$ una struttura della forma $\boldsymbol{M} = \langle M, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}, \perp\rangle$ dove $\langle M, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}\rangle$ è un gruppo abeliano, mentre $\perp$ denota una **legge di composizione esterna** per la quale si chiedono il genere $\perp \in \{M \times R \longmapsto M\}$ e le proprietà

$$\forall a, b \in R, \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in M \;\vdots\; (\boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{w}) \perp a = (\boldsymbol{v} \perp a) \boldsymbol{+} (\boldsymbol{w} \perp a) \;, \qquad \boldsymbol{v} \perp (a+b) = (\boldsymbol{v} \perp a) \boldsymbol{+} (\boldsymbol{v} \perp b) \;,$$
$$\boldsymbol{v} \perp (a \cdot b) = (\boldsymbol{v} \perp a) \perp b \;, \qquad \boldsymbol{v} \perp 1 = \boldsymbol{v} \;.$$

Denotiamo $Mdlrt_{\boldsymbol{R}}$ la classe dei moduli a destra sull'anello $\boldsymbol{R}$.
La distinzione fra le due specie di moduli ha interesse solo per gli anelli non commutativi.

D16:a.03 Consideriamo il campo $\boldsymbol{F} = \langle F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1\rangle$; si dice **spazio vettoriale** sul campo $\boldsymbol{F}$ una struttura della forma $\boldsymbol{V} = \langle V, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}, \perp\rangle$, dove $\langle V, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}\rangle$ è un gruppo abeliano e $\perp \in \{R \times F \longmapsto V\}$ t.c.

$$\forall a, b \in F, \quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \;\vdots\; a \perp (\boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{w}) = (a \perp \boldsymbol{v}) \boldsymbol{+} (a \perp \boldsymbol{w}) \;, \qquad (a+b) \perp \boldsymbol{v} = (a \perp \boldsymbol{v}) \boldsymbol{+} (b \perp \boldsymbol{v}) \;,$$
$$(a \cdot b) \perp \boldsymbol{v} = a \perp (b \perp \boldsymbol{v}) \;, \qquad 1 \perp \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \;.$$

Relativamente allo spazio vettoriale precedente gli elementi di V si dicono **vettori**, gli elementi di F **scalari** e la legge di composizione esterna $\perp$ **prodotto esterno** di $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{V}$. Spesso i segni di prodotto "$\cdot$" e "$\perp$" si possono sottintendere senza portare ad ambiguità.

Con Spv_F si denota la classe degli spazi vettoriali sul campo $\boldsymbol{F}$.

D16:a.04 Consideriamo un intero positivo d e l'insieme delle sequenze di lunghezza d di elementi del supporto R di un anello, $R^d = \{(d] \longmapsto R\}$. Se $\boldsymbol{v} = \langle v_1, ..., v_d\rangle$ e $\boldsymbol{w} = \langle w_1, ..., w_d\rangle$ sono due elementi di tale insieme, consideriamo la **somma termine a termine** di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ $\;\boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{w} := \langle v_1 + w_1, ..., v_d + w_d\rangle$, il passaggio alla sequenza opposta di $\boldsymbol{v}$: $\;\boldsymbol{-}\boldsymbol{v} := \langle -v_1, ..., -v_d\rangle$, il **vettore nullo** $\mathbf{0} := 0^{seq_d} := \langle 0, ..., 0\rangle \in R^d$. Come si è già notato parlando di prodotti diretti di gruppi, $\langle R^d, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}\rangle$ costituisce un gruppo abeliano.

Considerando anche il prodotto esterno $a \lrcorner \boldsymbol{v} := \langle a \cdot v_1, ..., a \cdot v_d \rangle$ si verifica che $\langle R^d, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}, \lrcorner \rangle$ costituisce un modulo a sinistra; esso è chiamato **modulo delle sequenze su** R **di dimensione** d. Esso si denota $\mathsf{Mdl}_d(\boldsymbol{R})$ o più semplicemente $\mathsf{Mdl}_d(R)$.
Se al posto di un anello $\boldsymbol{F}$ si ha un campo $\boldsymbol{F}$ si ottiene uno spazio vettoriale chiamato **spazio vettoriale delle sequenze su** F **di dimensione** d. Esso si denota $\mathsf{Spv}_d(\boldsymbol{F})$ o più semplicemente $\mathsf{Spv}_d(R)$.
Particolarmente utili sono gli spazi $\mathsf{Spv}_d(\mathbb{Q})$, $\mathsf{Spv}_d(\mathbb{R})$, $\mathsf{Spv}_d(\mathbb{C})$ e gli infiniti spazi $\mathsf{Spv}_d(\mathbb{Z}_p)$ relativi ai numeri primi p.

D16:a.05 Della precedente costruzione si ha una estesa generalizzazione costruendo, per un insieme qualsiasi X, lo spazio vettoriale avente come sostegno l'insieme di funzioni $\{X \longmapsto F\}$. Munendo tale insieme dell'operazione binaria di somma di funzioni, dell'operazione di passaggio alla funzione opposta e dell'operazione nullaria $0^{funX} := \lceil x \in X \;\|\!\!\!\triangleright\; 0 \rceil$, cioè la funzione che assume il valore costante 0 per ogni elemento di X, si ha un gruppo abeliano.
Consideriamo poi il prodotto esterno

$$\lrcorner := \cdot^{actfX} := \lceil a \in F, f \in \{X \longmapsto F\} \;\|\!\!\!\triangleright\; \lceil x \in X \;\|\!\!\!\triangleright\; a \cdot f(x) \rceil \rceil \;.$$

Si verifica che $\langle \{X \longmapsto F\}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}, \lrcorner \rangle$ è uno spazio vettoriale su $\boldsymbol{F}$, detto **spazio delle funzioni** di X nel campo $\boldsymbol{F}$.

Oltre agli spazi delle sequenze finite, delle diverse lunghezze, possono risultare utili molti spazi di funzioni ottenuti chiedendo che le funzioni del sostegno soddisfino determinate proprietà. Lo studio degli spazi di funzioni è alla base dell'analisi funzionale.

D16:a.06 Esercizio Precisare le componenti degli spazi aventi come sostegno i seguenti insiemi di funzioni:
(a) $\{\mathbb{N} \longmapsto F\}$ (spazi delle successioni);
(b) $\{\mathbb{Z} \longmapsto F\}$ (spazi delle successioni bilatere);
(c) spazi di matrici finite ed infinite su F;
(d) spazi delle funzioni di una variabile reale o complessa;
(e) spazi delle funzioni di due variabili reali o complesse.

D16:a.07 Introduciamo la nozione di sottostruttura per i moduli e gli spazi vettoriali.
Si dice **sottomodulo** di un modulo a sinistra $\boldsymbol{V} = \langle V, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}, \lrcorner \rangle$ ogni $S \subseteq V$ che, munito delle restrizioni delle operazioni definite per $\boldsymbol{V}$, costituisce un modulo a sinistra. Questo equivale a chiedere che S sia chiuso rispetto alle operazioni $\boldsymbol{+}$ e $\boldsymbol{-}$, che contenga $\boldsymbol{0}$ e che sia stabile rispetto alla moltiplicazione per qualsiasi elemento del campo.

Similmente si dice **sottospazio** di uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V} = \langle V, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}, \lrcorner \rangle$ ogni $S \subseteq V$ che, munito delle restrizioni delle operazioni definite per $\boldsymbol{V}$, costituisce uno spazio vettoriale. Questo equivale a chiedere che S sia chiuso rispetto alle operazioni $\boldsymbol{+}$ e $\boldsymbol{-}$, che contenga 0 e che sia stabile rispetto alla moltiplicazione per qualsiasi elemento del campo.

In formula $\langle S, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}_{|S \times S}, \boldsymbol{-}_{|S \times S}, \boldsymbol{0}, \lrcorner_{|\boldsymbol{F} \times S} \rangle \in \mathfrak{Vsp}_F$; questo sottospazio si denota $\boldsymbol{V}_{|S}$.
Equivalentemente si trova che S è sottospazio di $\boldsymbol{V}$ sse $\forall a, b \in \boldsymbol{F}$ e $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V} \;\vdots\; a \lrcorner \boldsymbol{v} \boldsymbol{+} b \lrcorner \boldsymbol{w} \in S$.

D16:a.08 Esercizio Considerare lo spazio delle funzioni reali che ha come sostegno $\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$. Dimostrare che definiscono suoi sottospazi i seguenti insiemi di funzioni reali:
(a) funzioni simmetriche;
(b) funzioni antisimmetriche;
(c) funzioni che si annullano in un determinato sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

D16:a.09 Denotiamo $\boldsymbol{Subvsp}(\boldsymbol{V})$ l'insieme dei sottospazi vettoriali di $\boldsymbol{V}$. In questo insieme si trovano, in particolare, il **sottospazio zero** $\{\mathbf{0}\}$ e l'intero $\boldsymbol{V}$(sottospazio improprio); i sottospazi rimanenti si dicono **sottospazi propri non banali**.
Per indicare che $\boldsymbol{W}$ è sottospazio (proprio) di $\boldsymbol{V}$ scriviamo $\boldsymbol{W} \leq_{Vsp} \boldsymbol{V}$ ($\boldsymbol{W} <_{Vsp} \boldsymbol{V}$).

Per un qualsiasi $\boldsymbol{V} \in \mathsf{Spv}$ e per ogni suo vettore v non nullo $\{a \in F :| a \cdot \mathsf{v}\}$ sottende un sottospazio che in breve può denotarsi $F \cdot \mathsf{v}$ o $\boldsymbol{span}(\mathsf{v})$. Questo sottospazio si chiama anche **raggio** (*array*) di $\boldsymbol{V}$.

D16:a.10 $\boldsymbol{Subvsp}(\boldsymbol{V})$, come ogni collezione di sottostrutture di una data struttura, è ordinato parzialmente dall'inclusione.

(1) Prop. Se S e T sono sottospazi di $\boldsymbol{V}$, lo è anche $S \cap T$; più precisamente questo è il più esteso dei sottospazi contenuti sia in S che in T. ▮

D16:a.11 Accade invece, in generale, che $S \cup T$ non è sottospazio di $\boldsymbol{V}$.
(1) Prop. $S \cup T$ è sottospazio di $\boldsymbol{V}$ sse $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$ ▮

D16:a.12 Si dice **somma** dei sottospazi S e T: $S \boldsymbol{+}_{\mathsf{B}} T := \{\boldsymbol{v} \in S,\ \boldsymbol{w} \in T :| \boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{w}\}$.
Evidentemente $S \boldsymbol{+}_{\mathsf{B}} T = T \boldsymbol{+}_{\mathsf{B}} S$.
(1) Prop. $S \boldsymbol{+}_{\mathsf{B}} T$ è un sottospazio di $\boldsymbol{V}$ e più precisamente è il più ridotto sottospazio contenente $S \cup T$
▮

Abbiamo quindi che $\boldsymbol{Subvsp}(\boldsymbol{V})$ è un insieme ordinato, reticolato dall'inclusione e che $\langle \boldsymbol{Subvsp}(\boldsymbol{V}), \cap, \boldsymbol{+} \rangle$ è un reticolo dotato di minimo ($\{\mathbf{0}\}$) e di massimo ($\boldsymbol{V}$). Esso si dice **reticolo dei sottospazi** di $\boldsymbol{V}$.

D16:a.13 Se $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S} \boldsymbol{+}_{\mathsf{B}} \boldsymbol{T}$ e $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, $\boldsymbol{T}$ è chiamato **sottospazio complemento** di $\boldsymbol{S}$ in $\boldsymbol{V}$; simmetricamente $\boldsymbol{S}$ è sottospazio complemento di $\boldsymbol{T}$ in $\boldsymbol{V}$; la complementazione di sottospazi è una relazione simmetrica.
In generale, ogni sottospazio proprio di uno spazio vettoriale possiede più complementi.
Ad es. in $\mathbb{R}^2$ tre vettori come $\langle 1,0\rangle$, $\langle 0,1\rangle$ e $\langle 1,1\rangle$ consentono di scrivere $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \cdot \langle 1,0\rangle \boldsymbol{+}_{\mathsf{B}} \mathbb{R} \cdot \langle 0,1\rangle = \mathbb{R} \cdot \langle 1,0\rangle \boldsymbol{+}_{\mathsf{B}} \mathbb{R} \cdot \langle 1,1\rangle = \mathbb{R} \cdot \langle 0,1\rangle \boldsymbol{+}_{\mathsf{B}} \mathbb{R} \cdot \langle 1,1\rangle$.

D16:a.14 Se E è un sottoinsieme di V, si scrive $\boldsymbol{span}_{\boldsymbol{F}}(E)$ per indicare l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori di E. In formula:

$$\boldsymbol{span}_{\boldsymbol{F}}(E) := \{h \in \mathbb{P}\ ,\ a_1, ...a_h \in \boldsymbol{F}\ ,\ \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{S} :| a_1\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{+} \cdots \boldsymbol{+} a_h\boldsymbol{v}_h\}\ .$$

D16:a.15 Un insieme di vettori E di $\boldsymbol{V}$ si dice **generatore** di $\boldsymbol{V}$ sse $\boldsymbol{span}_{\boldsymbol{F}}(E) = \boldsymbol{V}$.
Un **insieme di vettori** I di $\boldsymbol{V}$ si dice **linearmente indipendente** sse per ogni $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_h \subseteq I$ si ha: $a_1\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{+} \cdots \boldsymbol{+} a_h\boldsymbol{v}_h = 0 \implies a_1 = \cdots = a_h = 0$.
Anche i suoi **vettori** si dicono **linearmente indipendenti**. In caso contrario si parla di **vettori linearmente dipendenti**.

D16:a.16 Prop. Un $I \subseteq V$ è linearmente indipendente sse ogni $\mathsf{v} \in \boldsymbol{span}(I)$ si può esprimere in un solo modo come combinazione lineare di elementi di I sse nessuno tra i vettori di I è combinazione lineare dei rimanenti ▮

D16:a.17 Ogni insieme $B \subseteq \boldsymbol{V}$ è detto **base dello spazio vettoriale** $\boldsymbol{V}$ sse B è linearmente indipendente e $\boldsymbol{span}(B) = \boldsymbol{V}$.
Si dice **base standard** dello spazio delle d-sequenze $\boldsymbol{F}^d$:

$$\{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, ..., \mathsf{e}_d\} \quad \text{dove} \quad \mathsf{e}_1 = \langle 1, 0, ..., 0\rangle, \ \mathsf{e}_2 = \langle 0, 1, ..., 0\rangle, \cdots, \ \mathsf{e}_d = \langle 0, 0, ..., 1\rangle \ .$$

D16:a.18 Prop. Ogni spazio vettoriale che non si riduca al vettore zero, possiede una base e tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno la stessa cardinalità ▮

La cardinalità delle basi di uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ si dice **dimensione** dello spazio e si denota con $\dim(\boldsymbol{V})$.

Si dice **spazio vettoriale finito–dimensionale** uno spazio ridotto al vettore zero oppure uno spazio che possieda una base finita. In caso contrario, si parla di **spazio vettoriale infinito–dimensionale**.

D16:a.19 L'insieme dei numeri complessi si può considerare sostegno di uno spazio monodimensionale sul campo dei complessi o sostegno di uno spazio bidimensionale sul campo dei reali.

I polinomi a coefficienti reali in una variabile di grado non superiore ad n sono sostegno di uno spazio vettoriale sul campo dei reali ad $n+1$ dimensioni.
I polinomi a coefficienti complessi in una variabile di grado non superiore ad n sono sostegno di uno spazio vettoriale sul campo dei complessi ad $n+1$ dimensioni.
I polinomi a coefficienti complessi in una variabile di grado non superiore ad n sono sostegno di uno spazio vettoriale sul campo dei reali ad $2n+2$ dimensioni.
I polinomi a coefficienti reali o complessi in una o più variabili sono sostegno di spazi infinito–dimensionali.

Le funzioni di una variabile reale sono sostegno di spazi infinito–dimensionali con basi più che numerabili.

D16:a.20 Le matrici 2×2 su un campo $\boldsymbol{F}$ sono sostegno di uno spazio vettoriale a 4 dimensioni su $\boldsymbol{F}$.
Le matrici $n \times m$ di uno spazio vettoriale a $n \cdot m$ dimensioni.
Ogni matrice quadrata di ordine d si può scrivere:

$$M = \frac{1}{2}(M + M^{\mathsf{T}}) + \frac{1}{2}(M - M^{\mathsf{T}}) \ ;$$

Ad es. e si verifica facilmente che il primo addendo è una matrice simmetrica ed il secondo, una matrice antisimmetrica.
Le matrici $d \times d$ simmetriche sono sostegno di uno spazio a $d \cdot (d+1)/2$ dimensioni, mentre le matrici $d \times d$ antisimmetriche sono sostegno di uno spazio a $d \cdot (d-1)/2$ dimensioni.
La formula precedente mostra che lo spazio d^2-dimensionale di tutte le matrici $d \times d$ è esprimibile come somma dello spazio delle matrici simmetriche e di quello delle antisimmetriche; questi due spazi sono sottospazi complementari.

D16:a.21 Prop. Se S e T sono sottospazi di uno spazio vettoriale finito–dimensionale, allora:

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(S \mathbin{\boldsymbol{+}}_{\mathsf{B}} T) + \dim(S \cap T) \ . \ ▮$$

D16:a.22 Introduciamo ora i morfismi per le strutture di spazio vettoriale.
Consideriamo due spazi vettoriali sullo stesso campo:
$\boldsymbol{V} = \langle V, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}_V, \boldsymbol{-}_V, \mathbf{0}_V, \perp_V\rangle$
$\boldsymbol{W} = \langle W, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}_W, \boldsymbol{-}_W, \mathbf{0}_W, \perp_W\rangle$.

Si dice **trasformazione lineare** da $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{W}$ una funzione $\tau \in \{V \longmapsto W\}$ tale che per $a, b \in \boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ si ha: $\tau(a \perp_V \boldsymbol{u} \ \boldsymbol{+}_V \ b \perp_V \boldsymbol{v}) = a \perp_W \tau(\boldsymbol{u}) \ \boldsymbol{+}_W \ b \perp_W \tau(\boldsymbol{v})$.

Indichiamo con $\mathsf{Lintr}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ l'insieme delle trasformazioni lineari da $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{W}$; abbreviamo $\mathsf{Lintr}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})$, l'insieme delle trasformazioni lineari da $\boldsymbol{V}$ in sè, con $\mathsf{Lintr}(\boldsymbol{V})$.
Invece che di trasformazioni lineari, si parla anche di **operatori lineari**; questi sono gli omomorfismi tra spazi vettoriali.

Si dice **trasformazione lineare nulla** da $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{W}$: $\mathbf{0}_w{}^{\text{cnst}}$.

D16:a.23 Munendo l'insieme delle trasformazioni lineari $\mathsf{Lintr}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ della somma $+_W{}^{\text{fun}}$ e della differenza $-_W{}^{\text{fun}}$ tra funzioni a valori in W e del prodotto $\cdot_W{}^{\text{fun}}$ per elementi del campo, si ottiene uno spazio vettoriale:

$$\langle \mathsf{Lintr}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}), \boldsymbol{F}, +_W{}^{\text{fun}}, -_w{}^{\text{fun}}, \mathbf{0}_w{}^{\text{cnst}}, \cdot_W{}^{\text{fun}}\rangle \ .$$

Si trova facilmente che se $\boldsymbol{X}$ è un terzo spazio vettoriale su $\boldsymbol{F}$, la composizione di $\tau \in \mathsf{Lintr}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ e di $\sigma \in \mathsf{Lintr}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{X})$ è $\tau \circ \sigma \in \mathsf{Lintr}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{X})$.
Inoltre, se τ è una applicazione biunivoca, $\tau^{-1} \in \mathsf{Lintr}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{V})$.

D16:a.24 Vediamo ora come costruire nuovi sottospazi a partire da spazi noti.
Per k intero $k \geq 2$ consideriamo k spazi vettoriali su $\boldsymbol{F}$ $\boldsymbol{V}_i = \langle V_i, \boldsymbol{F}, +_i, -_i, \mathbf{0}_i, \cdot_i\rangle$ per $i = 1, ..., k$ e il loro prodotto cartesiano $V_1 \times \cdots \times V_k$.
Presi $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i \in \boldsymbol{V}_i$ per $i = 1, ..., k$ ed $a \in \boldsymbol{F}$ si definiscono:
$\langle \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k\rangle + \langle \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_k\rangle := \langle \boldsymbol{v}_1 +_1 \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{v}_k +_k \boldsymbol{w}_k\rangle$;
$\langle \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k\rangle - \langle \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_k\rangle := \langle \boldsymbol{v}_1 -_1 \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{v}_k -_k \boldsymbol{w}_k\rangle$;
$a \cdot \langle \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k\rangle := \langle a \cdot_1 \boldsymbol{v}_1, ..., a \cdot_k \boldsymbol{v}_k\rangle$;
$\mathbf{0} := \langle \mathbf{0}_1, ..., \mathbf{0}_k\rangle$.
Si dice **somma diretta** degli spazi $\boldsymbol{V}_1$, ... , $\boldsymbol{V}_k$:

$$\boldsymbol{V}_1 \oplus \boldsymbol{V}_2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{V}_k := \left\langle \boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2 \times \cdots \times \boldsymbol{V}_k, \boldsymbol{F}, +, -, \langle \mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2, ..., \mathbf{0}_k\rangle, \cdot \right\rangle \ .$$

D16:b. Algebre su campo

D16:b.01 Vediamo ora un ulteriore arricchimento della specie degli spazi vettoriali. Si dice **algebra [lineare]** sul campo $\boldsymbol{F}$ una struttura della forma $\boldsymbol{A} = \langle A, \boldsymbol{F}, +, -, \mathbf{0}, \cdot, \odot\rangle$, dove $\langle A, \boldsymbol{F}, +, -, \mathbf{0}, \cdot\rangle$ è uno spazio vettoriale su $\boldsymbol{F}$ e $\odot$ è una **operazione binaria bilineare** su A, cioè una funzione $\odot \in \{A \times A \longmapsto A\}$ t.c.

$$\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in A,\ \forall a, b \in F \ \ \vdots \ \ (a \cdot \boldsymbol{v} + b \cdot \boldsymbol{w}) \odot \boldsymbol{y} = a \cdot (\boldsymbol{v} \odot \boldsymbol{y}) + b \cdot (\boldsymbol{w} \odot \boldsymbol{y}) \ ,$$
$$\boldsymbol{v} \odot (a \cdot \boldsymbol{y} + b \cdot \boldsymbol{z}) = a \cdot (\boldsymbol{v} \odot \boldsymbol{y}) + b \cdot (\boldsymbol{v} \odot \boldsymbol{z}) \ .$$

L'operazione $\odot$ si dice **prodotto tra i vettori** dell'algebra.

Un'**algebra** si dice **commutativa** o **abeliana** sse il prodotto dei suoi vettori è commutativo.
Si dice **algebra-unitale** una struttura ottenuta arricchendo un'algebra con un vettore particolare che costituisce l'unità per il prodotto fra vettori.

Denotiamo con **Alg** la classe delle algebre e con **Algu** la classe delle algebre-unitali. Denotiamo inoltre **AlguAb** e **AlguNab** le classi delle algebre unitali risp. abeliane e nonabeliane.

D16:b.02 Un primo esempio fondamentale di algebra-unitale si ottiene arricchendo lo spazio vettoriale $\mathsf{Lintr}(\boldsymbol{V})$ della composizione di funzioni e della trasformazione identità di $\boldsymbol{V}$.

In tal modo, si ottiene un'algebra-unitale non commutativa:

$$\langle \mathsf{\mathbf{Lintr}}(\boldsymbol{V}), \boldsymbol{F}, \mathbf{+}_v, \mathbf{-}_v, \mathbf{0}_v, {\scriptstyle\perp}_v, \mathrm{Id}_v \rangle \ .$$

D16:b.03 Esempi di algebre unitali-commutative sono l'**algebra dei polinomi**, l'**algebra delle serie formali** e le algebre delle matrici quadrate. Queste ultime si ottengono dalle algebre di operatori lineari facendo riferimento a ben determinate basi dello spazio $\boldsymbol{V}$

D16:b.04 Si dice **semialgebra** una struttura simile all'algebra, ma costruita non su un campo ma su un semianello. Si dice invece **semialgebra-unitale** una struttura simile alla precedente ma costruita sopra un semianello-unitale. Esempi di semialgebre-unitali non commutative sono le algebre delle serie formali di variabili non commutative.

D16:c. Polinomi e serie formali

D16:c.01 Algebre di grande interesse sono costituite dai polinomi in una o più variabili e dalle serie formali di potenze in una o più variabili.

D16:d. Spazi con prodotto interno e spazi metrici

D16:d.01 In questo paragrafo consideriamo spazi vettoriali $\boldsymbol{V}$ su un campo $\boldsymbol{F}$, pensando soprattutto ai campi dei reali $\mathbb{R}_f$, dei complessi $\mathbb{C}_f$ e delle classi di resti modulo p per p numero primo $\mathbb{Z}_p$ sui quali è definito un tipo di funzione particolarmente utile.

Consideriamo una funzione $B \in \{V \times V \longmapsto F\}$; per tale funzione si usa spesso il termine tradizionale **forma**.
Si dice che B è **lineare nel primo argomento** sse
$\forall \mathsf{u}, \mathsf{v}, \mathsf{w} \in V,\ a, b \in F\ :\ B(a\mathsf{u} + b\mathsf{v}, \mathsf{w}) = aB(\mathsf{u}, \mathsf{w}) + bB(\mathsf{v}, \mathsf{w})$.
Se $\boldsymbol{F} = \mathbb{C}$, si dice che B gode della **linearità coniugata nel primo argomento** sse
$\forall \mathsf{u}, \mathsf{v}, \mathsf{w} \in V,\ a, b \in \mathbb{C}\ :\ B(a\mathsf{u} + b\mathsf{v}, \mathsf{w}) = a^*B(\mathsf{u}, \mathsf{w}) + b^*B(\mathsf{v}, \mathsf{w})$.
Si dice che B gode della **linearità nel secondo argomento** sse
$\forall \mathsf{u}, \mathsf{w}, \mathsf{z} \in V,\ c, d \in F\ :\ B(\mathsf{u}, c\mathsf{w} + d\mathsf{z}) = cB(\mathsf{u}, \mathsf{w}) + dB(\mathsf{u}, \mathsf{z})$.
Se $\boldsymbol{F} = \mathbb{C}$, si dice che B gode della **linearità hermitiana (o coniugata) nel secondo argomento** sse
$\forall \mathsf{u}, \mathsf{w}, \mathsf{z} \in V,\ c, d \in \mathbb{C}\ :\ B(\mathsf{u}, c\mathsf{w} + d\mathsf{z}) = c^*B(\mathsf{u}, \mathsf{w}) + d^*B(\mathsf{u}, \mathsf{z})$.
Si dice **forma bilineare** sse è lineare nel primo e nel secondo argomento.

Se $\boldsymbol{F} = \mathbb{C}$, si dice **forma sesquilineare** sse è lineare nel primo argomento e lineare hermitiana nel secondo argomento. (Si osservi che sesquilineare significa "lineare una volta e mezza").

Se $\boldsymbol{F} = \mathbb{C}$, si dice **forma co–sesquilineare** sse è lineare hermitiana nel primo argomento e lineare nel secondo.
B si dice **forma simmetrica** sse $\forall \mathsf{u}, \mathsf{v} \in V\ :\ B(\mathsf{u}, \mathsf{v}) = B(\mathsf{v}, \mathsf{u})$.
Se $\boldsymbol{F} = \mathbb{C}$, B si dice **forma simmetrica hermitiana** sse $\forall \mathsf{u}, \mathsf{v} \in V\ :\ B(\mathsf{u}, \mathsf{v}) = B(\mathsf{v}, \mathsf{u})^*$.
Si dice **forma definita positiva** sse $\forall \mathsf{v} \in V\ :\ B(\mathsf{v}, \mathsf{v}) \geq 0$ e $B(\mathsf{v}, \mathsf{v}) = 0 \Longleftrightarrow \mathsf{v} = \mathbf{0}$.

D16:d.02 Si dice **prodotto interno** di uno spazio vettoriale sui reali una funzione di $\{V \times V \longmapsto \mathbb{R}\}$ simmetrica, lineare nel primo argomento (e quindi bilineare) e definita positiva.

Si dice **prodotto interno** di uno spazio vettoriale sui complessi una funzione di $\{V \times V \longmapsto \mathbb{C}\}$ definita positiva, simmetrica hemitiana e lineare nel primo argomento (e quindi sesquilineare).

Per il prodotto interno di due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ useremo in genere notazioni parentesizzate alla Dirac come $\big\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \big\rangle$.

D16:d.03 Se d denota un intero positivo, consideriamo in particolare gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{C}^d$ delle sequenze di lunghezza d di numeri risp. reali e complessi. Per i vettori di questi spazi useremo notazioni quali $\mathbf{v} = \langle x_1, ..., x_d \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, ..., w_d \rangle$.
Si dice **prodotto interno canonico** di $\mathbb{R}^d$ la funzione

$$\left\lceil \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \sum_{i=1}^{d} v_i w_i \right\rceil$$

Si dice **prodotto interno canonico** di $\mathbb{C}^d$ la funzione

$$\left\lceil \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \mapsto \sum_{i=1}^{d} v_i {w_i}^* \right\rceil$$

D16:d.04 Si vede facilmente che restringendo una funzione del tipo $V \times V \longmapsto F$ ad un sottospazio di $\boldsymbol{V}$ si mantengono le varie proprietà viste in pecedenza, linearità, linearità hermitiana, bilinearità, sesquilinearità, simmetria, simmetria hermitiana, definitezza positiva. Quindi restringendo uno spazio con prodotto interno ad un suo sottospazio si ottiene un sottospazio a prodotto interno.

D16:d.05 Per il prodotto interno vale una proprietà di cancellazione.

D16:14.5'a Prop. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vettori di uno spazio vettoriale a prodotto interno $\boldsymbol{V}$. $\forall \mathbf{x} \in V \;\vdots\; \big\langle \mathbf{u} | \mathbf{x} \big\rangle = \big\langle \mathbf{v} | \mathbf{x} \big\rangle \implies \mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Dim.: Da $\big\langle \mathbf{u} | \mathbf{x} \big\rangle = \big\langle \mathbf{v} | \mathbf{x} \big\rangle$ per la linearità nel primo argomento segue $\big\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} | \mathbf{x} \big\rangle = 0$; per l'arbitrarietà di $\mathbf{x}$ segue $\big\langle \mathbf{u} - \mathbf{v} | \mathbf{u} - \mathbf{v} \big\rangle = 0$; infine per la positiva definitezza $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ▮

D16:d.06 Si dice **norma** di uno spazio vettoriale V sul campo $\boldsymbol{F}$ dei reali o dei complessi una funzione $N \in \{V \longmapsto \mathbb{R}\}$ t.c.:
(Na) $\forall \mathbf{v} \in V \;\vdots\; N(\mathbf{v}) \geq 0 \;\;\wedge\;\; N(\mathbf{v}) = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (positività della norma)
(Nb) $\forall r \in F,\ \mathbf{v} \in V \;\vdots\; N(r\mathbf{v}) = |r|\ N(\mathbf{v})$ (omogeneità della norma)
(Nc) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \;\vdots\; N(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq N(\mathbf{u}) + N(\mathbf{v})$ (disuguaglianza triangolare per la norma).

D16:d.07 Uno spazio vettoriale munito di norma si dice **spazio normato**. Spesso per indicare la norma di un vettore $\mathbf{v}$ si usa una scrittura come $\|\mathbf{v}\|$.

In ogni spazio con prodotto interno si può introdurre una norma ponendo $\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\big\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \big\rangle}$. Tale norma si dice anche **lunghezza**. Uno spazio con prodotto interno quindi può essere trasformato in uno spazio normato.

D16:d.08 Prop. In uno spazio normato $\boldsymbol{V}$ sul campo $\boldsymbol{F}$, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ e $\forall r \in F$, valgono le seguenti proprietà:
(a) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$;
(b) $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (proprietà di annullamento) ;
(c) $\|\mathbf{v}\| = |r| \|\mathbf{v}\|$ (proprietà di omogeneità) ;

(d) $|(\mathsf{v}, \mathsf{u})| \ \leq \ \|\mathsf{v}\| \ \|\mathsf{u}\|$ (disuguaglianza di Cauchy – Schwarz) ;
(e) $\|\mathsf{v} + \mathsf{u}\| \ \leq \ \|\mathsf{v}\| + \|\mathsf{u}\|$ (disuguaglianza triangolare) ;
(f) $| \ \|\mathsf{v}\| \ - \ \|\mathsf{u}\| \ | \ \leq \ \|\mathsf{v} - \mathsf{u}\|$;
(g) $\|\mathbf{v} + \mathbf{u}\|^{\mathbf{2}} \ + \ \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^{\mathbf{2}} \ = \ \mathbf{2}\|\mathsf{v}\|^{\mathbf{2}} \ + \ \mathbf{2}\|\mathsf{u}\|^{\mathbf{2}}$ (legge del parallelogramma) .

D16:d.09 Consideriamo un insieme non vuoto S; si dice **distanza** o **metrica** su S una funzione $\boldsymbol{d} \in \{S \times S \longmapsto \mathbb{R}_{0+}\}$ per la quale valgono le seguenti proprietà, $\forall x, y, z \in S$:
(d1) $\boldsymbol{d}(x, y) \geq 0$;
(d2) $\boldsymbol{d}(x, y) = 0 \iff \mathsf{x} = \mathsf{y}$ (proprietà di annullamento) ;
(d3) $\boldsymbol{d}(x, y) \ = \ \boldsymbol{d}(y, x)$ (simmetria) ;
(d4) $\boldsymbol{d}(x, y) \ \leq \ \boldsymbol{d}(x, z) \ + \ \boldsymbol{d}(z, y)$ (proprietà triangolare) .

La coppia $(S, \boldsymbol{d})$, formata da un insieme non vuoto S e da una distanza $\boldsymbol{d}$, è chiamata **spazio metrico**.

Sia $S = \mathbb{R}^d$ e siano $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{R}^d$, $\mathsf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$, $\mathsf{y} = (y_1, y_2, ..., y_d)$. Sia $\boldsymbol{d}$ la funzione :

$$\boldsymbol{d}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) := \|\mathsf{x} \ - \ \mathsf{y}\| \ = \ \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i \ - \ y_i) \right\}^{1/2} .$$

La distanza $\boldsymbol{d}$ viene chiamata **metrica euclidea** o **distanza euclidea** in $\mathbb{R}^d$.