1

Capitolo C33
operatori unitivi

Contenuti delle sezioni

11 pagine

C330.01 Il capitolo è dedicato a considerazioni generali sopra alcune funzioni-StS, funzioni che mandano un sottoinsieme di un ambiente in un sottoinsieme di un secondo ambiente che può coincidere con il primo per le qiuali qui usiamo il termine locale "operatori".
Più precisamente qui interessano gli operatori che rispettano l'operazione di unione e che chiamiamo operatori unitivi.

Interessanti esempi di queste entità sono fornite dalle relazioni tra i due insiemi ambiente e in particolare dalle relazioni tra monoidi liberi.

Varie collezioni di operatori-Un tra monoidi liberi, muniti delle operazioni opportune, costituiscono delle algebre di Kleene standard [C32] e facendo riferimento a questa specie di struttura algebrica si riesce a conseguire una rilevante unificazione di molte nozioni sui linguaggi formali.

C33 a. operatori unitivi e relazioni

C33a.01 Nel seguito tratteremo vari insiemi e famiglie di insiemi. Denoteremo con E e F due insiemi ai quali affideremo il ruolo degli ambienti, mentre a G, H e Aassegnamo il ruolo dei sottoinsiemi dei suddetti ambienti.

In questo capitolo e in alcuni successivi per le funzioni-StS, le funzioni che a un insieme associano un insieme, usiamo anche il nome “operatori” e denotiamo con **Opr** la loro classe.
Più specificamente, se G ed H denotano due insiemi, con $\mathsf{Opr}_{G,H}$ denotiamo la collezione $\lceil G \longrightarrow H \rceil$ degli operatori che trasformano sottoinsiemi di G in sottoinsiemi di H e abbreviamo $\mathsf{Opr}_{G,G}$ con Opr_G.

In queste pagine per trattare l'unione di due insiemi usiamo il segno $+$ e adottiamo il termine somma e similmente per l'unione di una qualsiasi famiglia di insiemi usiamo il segno $\sum$ e ci serviamo del nome sommatoria.

Conveniamo inoltre che per introdurre famiglie di insiemi useremo espressioni della forma $\{i \in I :| E_i\} \in \mathsf{FamS}_E$, dove si intende che I sia un opportuno insieme di oggetti semplici con il ruolo degli indici o delle etichette..

Infine nelle espressioni che coinvolgono operatori prevalentemente collocheremo i simboli indicanti operatori nella posizioni suffisse rispetto ai loro argomenti.

C33a.02 Chiamiamo **operatore [completamente] unitivo** dall'insieme E nell'insieme F ogni funzione da $E^{\mathfrak{P}}$ in $F^{\mathfrak{P}}$ che rispetti l'unione e il relativo elemento neutro $\emptyset$, cioè ogni $\Omega \in \lceil E^{\mathfrak{P}} \longmapsto F^{\mathfrak{P}} \rceil$ tale che si abbia

$$\forall\{i \in I :| E_i\} \in \mathsf{FamS}_E \;\vdots\; \left(\sum_{i\in I} E_i\right) \Omega \;=\; \sum_{i\in I}(E_i\,\Omega) \quad \text{e} \quad \emptyset\,\Omega = \emptyset \;.$$

In queste pagine tali operatori in breve li chiamiamo **operatori-Un** e il loro insieme, considerando sottintesa la richiesta su $\emptyset$, si denota con

$$\lceil E^{\mathfrak{P}} \longrightarrow_{Un} F^{\mathfrak{P}} \rceil \;.$$

In modi simili definiamo le collezioni di operatori-Un

$$\lceil E^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{Un} F^{\mathfrak{P}} \rceil \quad , \quad \lceil E^{\mathfrak{P}} \longrightarrow\!\triangleright_{Un} F^{\mathfrak{P}} \rceil \quad , \quad \lceil E^{\mathfrak{P}} \longmapsto\!\triangleright_{Un} F^{\mathfrak{P}} \rceil \;.$$

Nel seguito ci occuperemo quasi esclusivamente degli operatori unitivi degli insiemi con l'ultima forma, cioè degli operatori di un insieme su un secondo insieme, convinti che le considerazioni analoghe sulle altre tre collezioni di opeatori unitivi sono facilmente deducibili.

C33a.03 **(1) Prop.**: Ogni $\Omega \in \lceil E^{\mathfrak{P}} \longmapsto\!\triangleright_{Un} F^{\mathfrak{P}} \rceil$ costituisce un morfismo di bande abeliane da $\langle E^{\mathfrak{P}}, +, \emptyset\rangle$ a $\langle F^{\mathfrak{P}}, +, \emptyset\rangle$ ∎

(2) Prop.: $\Omega \in \lceil E^{\mathfrak{P}} \longmapsto\!\triangleright_{Un} F^{\mathfrak{P}} \rceil$ sse $\forall G \subseteq E \;\vdots\; G\Omega = \sum_{g\in G} g\,\Omega$, ovvero sse l'azione di Ω è ottenuta con l'unione delle sue azioni sui singoletti del dominio , ovvero sse $\Omega = \left(\Omega\rceil_{\cup\{e\in E \,\nmid\, \{e\}\}}\right)^{be}$ ∎

Più in particolare denotiamo con $OprUn$ la classe degli operatori unitivi e usiamo la notazione $OprUn_{E,F}$ per la collezione degli operatori-Un di E in F e $OprUn_E$ per abbreviare $OprUn_{E,E}$, cioè la collezione degli operatori-Un da E in se stesso.

Dato che, se $F \setminus E \neq \emptyset$ abbiamo

$$OprUn_E \;\subset\; OprUn_{E,E\cup F} \;\subset\; OprUn_{E\cup F} \;,$$

senza ledere sostanzialmente la generalità si può scegliere di focalizzare l'attenzione solo su un $OprUn_E$ o su un $OprUn_{E,F}$. In vari sviluppi risulta più conveniente porsi in $OprUn_E$.

Con $\mathsf{Fam}(OprUn_E)$ denotiamo la collezione delle famiglie di operatori di $OprUn_E$ e con $\mathsf{Fam}(OprUn_{E,F})$ denotiamo la collezione delle famiglie di operatori di $OprUn_{E,F}$.

C33a.04 In Opr_E e in particolare in $OprUn_E$ si introducono nel modo usuale adottato per gran parte delle strutture algebriche (in particolare per i semianelli [T15h]) le operazioni **prodotto-c** (o prodotto di composizione, o prodotto relativo, o prodotto di Peirce), e **potenza-c intera naturale**, di somma, di sommatoria, di chiusura-+c e di chiusura-*c.

Consideriamo gli operatori $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathsf{Opr}_E$ e la famiglia $\lceil i \in I \nrightarrow \Omega_i \rceil \in \mathsf{FamOpr}_E$ ed introduciamo esplicitamente le costruzioni che li riguardano:

$\Omega_1 + \Omega_2 \;:=\; \left\lceil G \subseteq E \nrightarrow G_{\text{;}}\Omega_1 + G_{\text{;}}\Omega_2 \right\rceil \;;\; \sum_{i\in I} \Omega_i \;:=\; \left\lceil G \subseteq E \nrightarrow \sum_{i\in I}(G\Omega_i) \right\rceil \;;$

$\Omega_1 \circ_{lr} \Omega_2 \;:=\; \left\lceil G \subseteq E \nrightarrow (G_{\text{;}}\Omega_1)_{\text{;}}\Omega_2 \right\rceil$ (**prodotto-c di operatori**) ;

$\Omega^0 \;:=\; \mathbf{1}_\circ \;:=\; \left(E^{\mathfrak{P}}\right)^{\mathsf{Id}} \;=\; \left(E^{\mathsf{Id}}\right)^{be} \;=\; \lceil G \subseteq E \nrightarrow G \rceil$ (elemento neutro per il prodotto-c) ;

$\Omega^1 \;:=\; \Omega \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \;:\; \Omega^{n+1} \;:=\; \Omega^n \circ \Omega \;;$

$\Omega^{\oplus} \;:=\; \sum_{n\,\in\,\mathbb{P}} \Omega^n \;=\; \left\lceil G \subseteq E \nrightarrow G_{\text{;}}\Omega + G_{\text{;}}\Omega^2 + G_{\text{;}}\Omega^3 \dotplus \cdots \right\rceil \;;$

$\Omega^{\otimes} \;:=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \Omega^n \;=\; \mathbf{1}_\circ + \Omega^{\oplus} \;.$

Ricordato che si definisce $E^{\mathfrak{P}_{ne}} \;:=\; E^{\mathfrak{P}} \setminus \{\emptyset\}$, definiamo **operatore di reset relativo a un qualsiasi sottoinsieme** del dominio $H \subseteq E$ la trasformazione

$$H^{reset} \;:=\; \left\lceil A \in E^{\mathfrak{P}}_{ne} \nrightarrow H \right\rceil \;\dot\cup\; \lceil \emptyset \nrightarrow \emptyset \rceil \;.$$

Osserviamo poi che $\emptyset^{reset} \;:=\; \lceil A \subseteq E \nrightarrow \emptyset \rceil$; osserviamo anche che $\emptyset^{reset}$ è l'elemento neutro per la somma tra operatori di $\mathsf{Opr}_E = \left\lceil E \longmapsto E \right\rceil$ per ogni insieme E.

Per ogni $H \subseteq E$ si introducono i seguenti operatori in Opr_E:

intersettore $H^{\cap} \;:=\; \lceil G \subseteq E \nrightarrow G \cap H \rceil$,

unitore $H^{\cup} \;:=\; \lceil G \in E^{\mathfrak{P}_{ne}} \nrightarrow G \cup H \rceil \;\dot\cup\; \lceil \emptyset \nrightarrow \emptyset \rceil$,

eliminatore $H^{\setminus} \;:=\; \lceil G \subseteq E \nrightarrow G \setminus H \rceil = (E \setminus H)^{\cap}$.

Le seguenti uguaglianze comportano che intersettori, unitori e eliminatori sono operatori unitivi:

$$(A \cup B)H^{\cup} \;=\; (AH^{\cup}) \cup (BH^{\cup}) \quad , \quad (A \cup +B)H^{\cap} \;=\; AH^{\cap} + BH^{\cap} \quad , \quad (A + B)H^{\setminus} \;=\; AH^{\setminus} + BH^{\setminus} \;.$$

Si possono anche definire operatori analoghi riguardanti l'operazione insiemistica di differenza simmetrica

$$H^{\ominus} \;:=\; \lceil G \subseteq E \nrightarrow G \ominus H \rceil \;;$$

questi però non sono unitivi: $(AH^{\ominus}) \cup (BH^{\ominus}) = (A \cup B)H^{\ominus} \,\dot\cup\, \Big((A \cap H) \cup (B \cap H)\Big)$.

C33a.05 **Prop.** $\left\langle OprUn_E, \sum, \circ, \emptyset^{reset}, \mathbf{1}_\circ \right\rangle \;\in\; \mathsf{SKA}$.

Dim.: Consideriamo le famiglie $\lceil i \in I \nrightarrow E_i \rceil \in \mathsf{FamS}_E$, $\lceil j \in J \nrightarrow \Omega_j \rceil \in \mathsf{Fam}_{OprUn_E}$ e $\lceil k \in K \nrightarrow \Omega_k \rceil \in \mathsf{Fam}_{OprUn_E}$; Per l'insieme di indici K consideriamo una generica ripartizione $K = \dot\bigcup_{t\in T} U_t$

Cominciamo con dimostrare che $OprUn_E \in [\; \sum, \circ \;]$ considerando due qualsiasi $\Omega_1, \Omega_2 \in OprUn_E$.

$(\sum_i E_i)(\Omega_1 \circ \Omega_2) = \big(\sum_i (E_i\Omega_1)\big)\Omega_2 = \sum_i \big((E_i\Omega_1)\Omega_2\big) = \sum_i \big(E_i(\Omega_1 \circ \Omega_2)\big)$ e

$(\sum_i E_i)\,(\sum_j \Omega_j) = \sum_j \big((\sum_i E_i)\,\Omega_j\big) = \sum_j \big(\sum_i (E_i\Omega_j)\big) = \sum_i \big(\sum_j (E_i\Omega_j) = \sum_i \big(E_i(\sum_j \Omega_j)\big)$ ▮

Gli assiomi per **SKA** [SKA 1], [SKA 2], [SKA 4], [SKA 5] e [SKA 6] [v. C32b01] si verificano facilmente ▮

Per [SKA 3] : $\sum_{k\in K}\Omega_k = \sum_{t\in T}\left(\sum_{u\in U_t}\Omega_u\right) = \left\lceil G\subseteq E \mapsto \sum_{t\in T}(\sum_{u\in U_t} G\Omega_u)\right\rceil =$
$\left\lceil G\subseteq E \mapsto \sum_{u\in\{\cup\{t\in T \,\mid\, U_t\}}(G\,\Omega_u)\right\rceil = \sum_{u\in(\cup\{t\in T\,\mid\,U_t\}}\Omega_u$ ▮

Per [SKA 7] : $(\sum_{j\in J}\Omega_j)\circ(\sum_{k\in K}\Omega_k) = \left\lceil G\subseteq E \mapsto (\sum_{j\in J}G\Omega_j)(\sum_{k\in K}\Omega_k)\right\rceil =$
$\left\lceil G\subseteq E \mapsto \sum_{\langle j,k\rangle\in J\times K}\big((G\Omega_j)\Omega_k\big)\right\rceil = \sum_{\langle j,k\rangle\in J\times K} G(\Omega_j\circ\Omega_k)$ ▮

La precedente algebra di Kleene standard viene detta **SKA degli operatori-Un sull'insieme** E e si denota con **SKAc**$_E$.

C33a.06 È utile associare per ogni $E_1\subseteq E$ il seguente operatore di $OprUn_E$

$$ {E_1}^{zoc} := \begin{cases} \mathbf{1}_\circ & \text{sse } E_1\neq\emptyset \\ \emptyset^{reset} & \text{sse } E_1=\emptyset \end{cases} .$$

Va osservato il suo stretto collegamento con la funzione delta di Kronecker [B32a10]:

$$ {E_1}^{zoc} = \delta \ulcorner E_1=\emptyset \urcorner .$$

Diciamo relazione determinata da dominio e codominio, o in breve **relazione-domcod** ogni relazione definita attraverso richieste sul suo dominio e sul suo codominio. Per queste entità useremo anche il termine **operatore unitivo-domcod**

Nel seguito serviranno varie relazioni di questo genere e per esse conviene adottare notazioni specifiche. A questo scopo consideriamo gli insiemi E ed F (consentendo che si possa avere $E=F$), $e\in E$, $f\in F$ e le famiglie di insiemi $\lceil i\in I \mapsto E_i\rceil \in \mathsf{FamS}_E$ e $\lceil j\in J\mapsto F_j\rceil\in\mathsf{FamS}_F$; introduciamo quindi i seguenti operatori di $OprUn_{E,F}$:

$\big\{e \,\big|\, f\big\} := \big\{x\in E \,\big|\, f\,(\{x\}\cap\{e\})^{zoc}\big\}$.

$\big\{E_i \,\big|\, f\big\} := \sum_{e\in E_i}\big\{e\,\big|\,f\big\}$.

$\big\{e \,\big|\, F_j\big\} := \sum_{f\in F_j}\big\{e\,\big|\,f\big\}$.

$\big\{E_i \,\big|\, F_j\big\} := \sum_{\langle e,f\rangle\in E_i\times F_j}\big\{e\,\big|\,f\big\}$.

Gli $\big\{e\,\big|\,f\big\}$ si dicono **operatori unitivi basilari** e gli $\big\{E_i\,\big|\,F_j\big\}$ **operatori unitivi rettangolari** di $OprUn_{E,F}$.

C33a.07 Prop. Valgono le seguenti proprietà.

(1) $\big\{e\,\big|\,f\big\}\circ\big\{g\,\big|\,h\big\} = \begin{cases}\big\{e\,\big|\,h\big\} & \text{sse } f=g\\ \emptyset^{reset} & \text{sse } f\neq g\end{cases} = \delta_K\ulcorner f=g\urcorner$ ▮

(2) $\forall n\in\mathbb{P}$: $\big\{e\,\big|\,f\big\}^n = \delta_K\ulcorner e=f\urcorner\circ\big\{e\,\big|\,e\big\}$ ▮

(3) $\big\{E_1\,\big|\,F_1\big\}\circ\big\{E_2\,\big|\,F_2\big\} = (F_1\cap E_2)^{zoc}\circ\big\{E_1\,\big|\,F_2\big\}$ ▮

(4) $\forall n\in\mathbb{P}$: $\big\{E_1\,\big|\,F_1\big\}^n = (E_1\cap F_1)^{zoc}\circ\big\{E_1\,\big|\,F_1\big\}$ ▮

(5) $\big\{e\,\big|\,f\big\}^{\oplus} = \big\{e\,\big|\,f\big\}$ ▮

(6) $\big\{e\,\big|\,f\big\}^{\otimes} = \mathbf{1}_\circ + \big\{e\,\big|\,f\big\}$ ▮

(7) $\big\{E_1\,\big|\,F_1\big\}^{\oplus} = \big\{E_1\,\big|\,F_1\big\}$ ▮

C33a.08 Prop. Valgono anche le proprietà che seguono.

(1) $\left(\sum_{i\in I}\big\{E_i\,\big|\,F_i\big\}\right)^{\otimes} = \sum_{i\in I}\big\{E_i\,\big|\,F_i\big\} + \left(\sum_{i\in I}\big\{E_i\,\big|\,F_i\big\}\right)^2 =$

$\sum_{i\in I} \left\{E_i \middle| F_i\right\} + \sum_{i,j\in I}(E_i \cap F_j)^{zoc} \circ \left\{E_i \middle| F_j\right\}$ ▮

(2) $\mathbf{1}_\circ \ = \ \sum_{e\in E} \left\{e \middle| e\right\}$ ▮

(3) ${F_1}^{reset} \ = \ \sum_{e\in E} \left\{e \middle| F_1\right\} \ = \ \left\{E \middle| F_1\right\}$ ▮

(4) $\emptyset^{reset} \ = \ \left\{E \middle| \emptyset\right\}$ ▮

(5) ${E_1}^{\cap} \ = \ \sum_{e\in E_1} \left\{e \middle| e\right\}$ ▮

(6) ${E_1}^{\cup} \ = \ \mathbf{1}_\circ + {E_1}^{reset} \ = = \sum_{e\in E} \left\{e \middle| E_1 + e\right\}$ ▮

(7) ${E_1}^{\setminus} \ = \ \sum_{e\notin E_1} \left\{e \middle| e\right\}$ ▮

(8) $\sum_i {E_i}^{\cap} \ = \ (\cup_i E_i)^{\cap}$ ▮

(9) $\sum_i {E_i}^{\cup} \ = \ (\cup_i E_i)^{\cup}$ ▮

(10) $\sum_i {E_i}^{\setminus} = (\cap_i E_i)^{\setminus}$ ▮

(11) ${E_1}^{\cap} \circ {E_2}^{\cap} = {E_2}^{\cap} \circ {E_1}^{\cap} = (E_1 \cap E_2)^{\cap}$ ▮

(12) ${E_1}^{\cup} \circ {E_2}^{\cup} = {E_2}^{\cup} \circ {E_1}^{\cup} = (E_1 \cup E_2)^{\cup}$ ▮

(13) ${E_1}^{\setminus} \circ {E_2}^{\setminus} \ = \ {E_2}^{\setminus} \circ {E_1}^{\setminus} = (E_1 \cup E_2)^{\setminus}$ ▮

(14) $\forall \mathcal{O} \in \{\cap, \cup, \setminus\} \ : \ ({E_1}^{\mathcal{O}})^{\oplus} \ = \ {E_1}^{\mathcal{O}}$ ▮

(15) $({E_1}^{\cup})^{\otimes} \ = \ {E_1}^{\cup} \ , \ ({E_1}^{\cap})^{\otimes} \ = \ ({E_1}^{\setminus})^{\otimes} \ = \ \mathbf{1}_\circ$ ▮

C33a.09 Gli operatori unitivi di $OprUn_{E,F}$ possono identificarsi (sono crittomorfi) con le relazioni tra gli insiemi E ed F.
Nella presentazione di talune considerazioni conviene tuttavia tenere distinte le due nozioni e a questo scopo ci serviamo delle definizioni che seguone.

Si dice relazione associata ad $\Omega \in OprUn_{E,F}$

$$\Omega^{Rel} \ := \ \{\langle e, f\rangle \ \rVert \ e \in E \ , \ f \in e\Omega\} \subseteq E \times F \ .$$

si osseva che $\left\{e \middle| f\right\}^{Rel} = \langle e, f\rangle$ e che $\left\{E_1 \middle| F_1\right\}^{Rel} = E_1 \times F_1$.

Si dice operatore unitivo associato ad $R \subseteq E \times F$

$$R^{OprU} \ := \ \sum_{\langle e,f\rangle \in R} \left\{e \middle| f\right\} \in OprUn_{E,F} \ .$$

(1) Prop.: $\forall \Omega \in OprUn_{E,F} \ : \ \Omega^{Rel\ OprU} = \Omega$ e $\forall R \in E \times F \ : \ R^{OprU\ Rel} = R$ ▮

C33a.10 **(2) Prop.**: ${}^{Rel} = {}^{OprU^{-1}} \in \lceil \langle OprUn_E, \sum, \circ, \emptyset^{reset}, \mathbf{1}_\circ\rangle \longleftrightarrow_{SKA} \langle (E \times E)^{\mathfrak{P}}, \cup, \circ, \emptyset, E^{\mathsf{Id}}\rangle \rceil$.

Dim.: Le relazioni precedenti (1) affermano che ^{Rel} ed ^{OprU} sono biiezioni inverse.
Se $\lceil i \in I \,\middle|\, \Omega_i \rceil \in \mathsf{Fam}(OprUn_E)$, allora $\left(\sum_i \Omega_i\right)^{Rel} = \cup_i {\Omega_i}^{Rel}$ e $(\Omega_1 \circ \Omega_2)^{Rel} = {\Omega_1}^{Rel} \circ {\Omega_2}^{Rel}$.
Evidente inoltre che ${\emptyset^{reset}}^{Rel} = \emptyset$ e che in $OprUn_E$ si ha ${\mathbf{1}_\circ}^{Rel} = \left(E^{\mathfrak{P}^{\mathsf{Id}}}\right)^{Rel} = E^{\mathsf{Id}}$ ▮

(3) Prop.: $\Omega^{\oplus\,Rel} = \Omega^{Rel\,\oplus}$, $\Omega^{\otimes\,Rel} = \Omega^{Rel\,\otimes}$, $\Omega^{\vdash} \subseteq (\Omega^{Rel})^{\dashv\mathfrak{P}}$ ▮

C33a.11 Come per le relazioni, interessa l'involuzione tra operatori unitivi data dal passaggio al trasporto.

Definiamo **trasposto dell'operatore unitivo** $\Omega \in OprUn_{E,F}$ $\Omega^{\mathsf{T}} \ := \ \sum_{\langle e,f\rangle \in \Omega^{Rel}} \left\{f \middle| e\right\} \in OprUn_{F,E}$.

Prop. Valgono le proprietà che seguono.

(1) $\left\{e \middle| f\right\}^{\mathsf{T}} = \left\{f \middle| e\right\}$ e $\left\{E_1 \middle| F_1\right\}^{\mathsf{T}} = \left\{F_1 \middle| E_1\right\}$ ▮

(2) $\Omega^{\mathsf{T}^{\mathsf{T}}} = \Omega$, cioè la trasposizione di operatori unitivi è una involuzione ▮

(3) $\Omega^{\top\,Rel} = \Omega^{Rel\,\top}$, ossia la relazione associata al trasposto di un operatore unitivo è la trasposta della associata all'operatore stesso ▮

(4) $\left(\sum_i \Omega_i\right)^\top = \sum_i {\Omega_i}^\top$ e $(\Omega_1 \circ \Omega_2)^\top = {\Omega_2}^\top \circ {\Omega_1}^\top$; quindi $^\top \in \lceil \mathsf{SKAc} \hookleftarrow\!\!\rightarrow_{antiSKA} \mathsf{SKAc} \rceil$ ▮

(5) $\forall n \in \mathbb{N} \,:\, \Omega^{\top n} = (\Omega^n)^\top$ e $(\Omega^\oplus)^\top = (\Omega^\top)^\oplus$, $\Omega^{\otimes\top} = \Omega^{\top\otimes}$ ▮

(6) $E_1(\Omega \circ \Omega^\top) \supseteq E_1 \cap \left(\Omega^{Rel}\ \mathsf{cod}\right)$ e $F_1(\Omega^\top \circ \Omega) \supseteq F_1 \cap \left(\Omega^{Rel}\ \mathsf{cod}\right)$ ▮

(7) $\forall \mathcal{O} \in \{\cap, \cup, \setminus\} \,:\, {F_1}^{\mathcal{O}\mathfrak{P}} = {F_1}^{\mathcal{O}}$ ▮

C33a.12 Su $OprUn_{E,F}$ si introduce la usuale relazione d'ordine definibile per tutte le bande abeliane ponendo:

$$\Omega_1 \leq \Omega_2 \quad \text{sse} \quad \Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_2 \ .$$

Prop. Per questa relazione valgono le proprietà che seguono.

(1) $\Omega_1 \leq \Omega_2$ sse ${\Omega_1}^{Rel} \subseteq {\Omega_2}^{Rel}$.
Più dettagliatamente $\langle OprUn_{E,F}, \leq\rangle$ è isotono a $\langle (E \times F)^{\mathfrak{P}}, \subseteq\rangle$ e quindi costituisce un reticolo booleano atomico i cui atomi sono gli operatori basilari $\{e \,|\, f\}$ per ogni $\langle e, f\rangle \in E \times F$ ▮

(2) ${E_1}^\cup \circ {E_2}^\setminus \ \geq\ {E_2}^\setminus \circ (E_1 {E_2}^\setminus)^\cup$ ▮

(3) ${E_1}^\setminus \circ {E_2}^\cup \ \leq\ {E_2}^\cup \circ (E_1 {E_2}^\setminus)^\setminus$ ▮

(4) ${E_1}^\cup \circ {E_2}^\cap \ \geq\ {E_2}^\cap \circ (E_1 {E_2}^\cap)^\cup$ ▮

(5) ${E_1}^\cap \circ {E_2}^\cup \ \leq\ {E_2}^\cup \circ (E_1 {E_2}^\cup)^\cap$ ▮

C33a.13 **(1) Prop.**: $OprUn_{E,F} \subset \lceil E^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{Un} F^{\mathfrak{P}} \rceil$, e questo equivale ad affermare che gli operatori unitivi sono particolari applicazioni isotone rispetto alla relazione di inclusione.

Dim.: Consideriamo $\Omega \in \lceil E^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{Un} F^{\mathfrak{P}} \rceil$ ed $E_1, E_2 \subseteq E$.
$E_1 \subseteq E_2 \iff E_1 + E_2 = E_2 \implies \forall \Omega \in OprUn_{E,F} \,:\, E_1\Omega + E_2\Omega = (E_1 + E_2)\Omega = E_2\Omega$
$\iff \forall \Omega \in OprUn_{E,F} \,:\, E_1\Omega \subseteq E_2\Omega$.
Per garantire l'inclusione stretta bastano alcuni esempi di operatori in $\lceil E^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{\subseteq} F^{\mathfrak{P}} \rceil \setminus OprUn_{E,F}$ come $\lceil G \subseteq E \mapsto \cup H \rceil$ per qualsiasi $H \subseteq E$ ▮

(2) Prop.: $(E_1 \cap E_2)\Omega \ \subseteq\ E_1\Omega \cap E_2\Omega$, $(E_1 \setminus E_2)\Omega \ \supseteq\ E_1\Omega \setminus E_2\Omega$ ▮

C33a.14 Consideriamo alcune collezioni di sottoinsiemi dell'ambiente E $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}' \subseteq E^{\mathfrak{P}}$ e introduciamo le seguenti loro corrispondenti classi di operatori unitivi-domcod di $OprUn_E$:
$\{\mathbf{X} \,|\, \mathbf{Y}\} := \left\{X \in \mathbf{X}, Y \in \mathbf{Y} :|\ \{X \,|\, Y\}\right\}$;
$\mathbf{OprU\ cns}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \{\Omega \in OprUn_E \,\P\, \mathbf{X}\Omega \subseteq \mathbf{Y}\} = OprUn_E \cap \{\mathbf{X} \,|\, \mathbf{Y}\}$;
$\forall \mathcal{O} \in \{\cap, \cup, \setminus\} \,:\, \mathbf{X}^{\mathcal{O}} := \{X \in \mathbf{X} :|\ X^{\mathcal{O}}\}$.

Prop. Si dimostrano senza difficoltà le proprietà che seguono.

(1) $\mathbf{X} \subset \mathbf{X}', \mathbf{Y} \subset \mathbf{Y}' \iff \{\mathbf{X} \,|\, \mathbf{Y}\} \subset \{\mathbf{X}' \,|\, \mathbf{Y}\} \subset \{\mathbf{X}' \,|\, \mathbf{Y}'\}$ ▮

(2) $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{X}', \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{Y}' \iff \{\mathbf{X} \,|\, \mathbf{Y}\} \subseteq \{\mathbf{X}' \,|\, \mathbf{Y}\} \subseteq \{\mathbf{X}' \,|\, \mathbf{Y}' \rceil$ ▮

(3) $\mathbf{X} \subset \mathbf{X}' \iff \mathbf{X}^\cap \subset \mathbf{X}'^\cap \iff \mathbf{X}^\cup \subset \mathbf{X}'^\cup \iff \mathbf{X}'^\setminus \subset \mathbf{X}^\setminus$ ▮

(4) $\forall \mathcal{O} \in \{\cap, \cup, \setminus\}$, $\forall \odot \in \{\cup, \cap, \ominus\}$: $\mathbf{X}^{\mathcal{O}} \odot \mathbf{X}'^{\mathcal{O}} = (\mathbf{X} \odot \mathbf{X}')^{\mathcal{O}}$ ▮

(5) $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}' \implies \{\mathbf{X} \,|\, \mathbf{Y}\} \circ \{\mathbf{X}' \,|\, \mathbf{Y}'\} \subseteq \{\mathbf{X} \,|\, \mathbf{Y}' \rceil$ i.e.
$\forall \Omega \in \{\mathbf{X} \,|\, \mathbf{Y}\}$, $\Omega' \in \{\mathbf{X}' \,|\, \mathbf{Y}'\}$: $\Omega \circ \Omega' \in \{\mathbf{X} \,|\, \mathbf{Y}' \rceil$ ▮

(6) $\forall \mathcal{U} \in \{+, \sum\} \,:\, \mathbf{Y} \in [\,\mathcal{U}\,] \implies \{\mathbf{X} \,|\, \mathbf{Y}\} \in [\,\mathcal{U}\,]$ ▮

(7) $\mathbf{X} \in [\,\sum\,] \implies \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X}\} \in [\,\oplus, \otimes\,]$ ▮
(8) $\{\mathbf{X} \cap \mathbf{X}' \mid \mathbf{Y} \cap \mathbf{Y}'\} = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}\} \cap \{\mathbf{X}' \mid \mathbf{Y}'\}$ ▮
(9) $\{\mathbf{X} \cup \mathbf{X}' \mid \mathbf{Y} \cup \mathbf{Y}'\} = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}\} \cup \{\mathbf{X}' \mid \mathbf{Y}'\} \cup \{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}'\} \cup \{\mathbf{X}' \mid \mathbf{Y}\rceil$ ▮
(10) $\{E^{\mathfrak{P}} \mid \mathbf{Y}\} \subseteq \{E^{\mathfrak{P}} \mid \mathbf{Y}\rceil$.
(11) $\forall G, H \subseteq E \;:\; Y \in \mathbf{Y} \Longrightarrow G\{H \mid Y\} \in \{\emptyset, Y\}$ ▮
(12) $\{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}\} \cap \{\mathbf{X}' \mid \mathbf{Y}\} \subseteq \{\mathbf{X} \cap \mathbf{X}' \mid \mathbf{Y}\}$ ▮
(13) $\{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}\} \cap \{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}'\} = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y} \cap \mathbf{Y}'\rceil$ ▮
(14) $\{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}\} \cup \{\mathbf{X}' \mid \mathbf{Y}\} \supseteq \{\mathbf{X} \cup \mathbf{X}' \mid \mathbf{Y}\rceil$ ▮
(15) $\{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}\} \cup \{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}'\} \subseteq \{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y} \cap \mathbf{Y}'\}$ ▮

C33a.15 Consideriamo la famiglia $\lceil i \in I \mid\!\!\rangle\, \Omega_i \rceil \in \mathsf{Fam}(OprUn_{E,F}$; si definisce **intersezione-R** degli operatori unitivi Ω_i

$$\overset{R}{\bigcap}_{i\in I} \Omega_i := \left(\bigcap_{i\in I} {\Omega_i}^{Rel}\right)^{OprU} \in OprUn_{E,F} \;;$$

si definisce come intersezione o **intersezione-T** degli operatori unitivi Ω_i

$$\overset{T}{\bigcap}_{i\in I} \Omega_i := \lceil G \subseteq E \mid\!\!\rangle\, \bigcap_{i\in I} G\Omega_i \rceil \;.$$

Due prime proprietà di queste costruzioni si osservano facilmente.

(1) Prop.: $\forall j \in I \,:\, \overset{R}{\bigcap}_{i\in I} \Omega_i \leq \Omega_j$ ▮

(2) Prop.: $\forall i \in I \;:\; E_1 \subseteq E_2 \implies E_1 \left(\overset{T}{\bigcap}_{i\in I} \Omega_i\right) \subseteq E_2 \left(\overset{T}{\bigcap}_{i\in I} \Omega_i\right)$ ▮

(3) Prop.: $\forall G \subseteq E \;:\; G\left(\overset{R}{\bigcap}_{i\in I} \Omega_i\right) \subseteq G\left(\overset{T}{\bigcap}_{i\in I} \Omega_i\right)$.

Dim.: $f \in G\left(\overset{R}{\bigcap}_{i\in I} \Omega_i\right) \iff \forall i \in I : e_i \in G \;\text{;}\; \langle e_i, f\rangle \in {\Omega_i}^{Rel} \implies \forall i \in I \;:\; f \in G\Omega_i$

$\iff f \in \bigcap_{i\in I}(G\Omega_i) = G\left(\overset{T}{\bigcap}_{i\in I} \Omega_i\right)$.

Resta da constatare che si può avere $G\left(\overset{R}{\bigcap}_{i\in I} \Omega_i\right) \subset G\left(\overset{T}{\bigcap}_{i\in I} \Omega_i\right)$. Limitiamoci al caso in cui sia $I = \{1, 2\}$; è agevole rendersi conto che si può avere ${\Omega_1}^{Rel} \cap {\Omega_2}^{Rel} = \emptyset$ e quindi $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset^{reset}$ e contemporaneamente avere $(G\Omega_1) \cap (G\Omega_2) \neq \emptyset$ ▮

Può accadere che $\overset{T}{\bigcap}_{i\in I} \Omega_i$ non appartenga a $OprUn_{E,F}$; infatti se $\{j \in J :\mid E_j\} \subseteq E^{\leftarrow}$, si trovano insiemi tali che $(\sum_{j\in J} E_j)\left(\overset{T}{\bigcap}_{i\in I} \Omega_i\right) = \bigcap_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} E_j\Omega_i\right) = \bigcap_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}(E_j\Omega_i)\right)$ non coincide con $\sum_{j\in J}\left(E_j\left(\overset{T}{\bigcap}_{i\in I} \Omega_i\right)\right) = \sum_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I} E_j\Omega_i\right)$.

Possiamo limitarci al caso $I = J = \{1, 2\}$ e scrivere $E_{j,i} := E_j\Omega_i$; non è difficile trovare insiemi $E_{i,j}$ tali che sia $E' := (E_{1,1}+E_{2,1}) \cap (E_{1,2}+E_{2,2}) = E_{1,1} \cap E_{1,2}+E_{1,1} \cap E_{2,2}+E_{2,1} \cap E_{1,2}+E_{2,1} \cap E_{,22} \supset E'' := E_{1,1} \cap E_{1,2}+E_{2,1} \cap E_{2,2}$.

C33a.16 Ad ogni operazione binaria $\perp \in \lceil E^{\mathfrak{P}} \times E^{\mathfrak{P}} \longmapsto E^{\mathfrak{P}} \rceil$ e a ogni $H \subseteq E$ si associano le due seguenti trasformazioni:
la **traslazione a destra per l'operazione binaria** $\perp$ $\quad H^{\perp_\rho} := \lceil G \subseteq E \mid\!\!\rangle\, G \perp H \rceil$
e la **traslazione a sinistra per l'operazione binaria** $\perp$ $\quad H^{\perp_\lambda} := \lceil (G \subseteq E) \mid\!\!\rangle\, (H \perp G) \rceil$.

Chiaramente $H^{\perp_\rho}$, $H^{\perp_\lambda} \in \lceil E^{\mathfrak{P}} \longmapsto E^{\mathfrak{P}} \rceil$.

Si constata che $\lceil$ $\perp$ è una operazione commutativa $\rceil$ sse $\forall H \subseteq E$: $H^{\perp_\rho} = H^{\perp_\lambda}$.

In questo caso si ha un solo operatore traslazione che si denota semplicemente con $H^\perp$.

Se $\perp$ è un'operazione associativa abbiamo:

$$H_1{}^{\perp_\rho} \circ H_2{}^{\perp_\rho} = (H_1 H_2{}^{\perp_\rho})^{\perp_\rho} = (H_2 H_1{}^{\perp_\lambda})^{\perp_\rho} \;,$$
$$H_1{}^{\perp_\lambda} \circ H_2{}^{\perp_\lambda} = (H_1 H_2{}^{\perp_\lambda})^{\perp_\lambda} = (H_2 H_1{}^{\perp_\rho})^{\perp_\lambda} \;.$$

C33a.17 Supponiamo ora che $\perp$ sia completamente distributiva rispetto all'unione, cioè sia

$\forall \lceil i \in I \nparallel E_i \rceil$, $\lceil j \in J \nparallel E'_j \rceil \in \mathsf{FamS}_E$: $(\sum_{i\in I} E_i)\perp(\sum_{j\in J} E'_j) = \sum_{\langle i,j\rangle \in I\times J} \; E_i \perp E'_j$.

(1) Prop.: $\forall H \subseteq E$: $H^{\perp_\rho}, H^{\perp_\lambda} \in OprUn_E$.

Dim.: Consideriamo $\lceil i \in I \nparallel E_i \rceil \in \mathsf{FamS}_E$; abbiamo $(\sum_{i\in I} E_i)H^{\perp_\rho} = (\sum_{i\in I} E_i)\perp H = \sum_{i\in I}) E_i \perp H) = \sum_{i\in I} E_i H^{\perp_\rho}$ e $(\sum_{i\in I} E_i)H^{\perp_\lambda} = H\perp(\sum_{i\in I} E_i) = \sum_{i\in I}(H\perp E_i) = \sum_{i\in I}(E_i H^{\perp_\lambda})$ ∎

Consideriamo $\lceil k \in K \nparallel H_k \rceil \in \mathsf{FamS}_E$ e sia $\xi \in \{\lambda, \rho\}$.

(2) Prop.: $\left(\sum_{k\in K} H_k\right)^{\perp_\xi} = \sum_{k\in K} H_k{}^{\perp_\xi}$ ∎

(3) Prop.: $H_1 \subseteq H_2 \implies H_1{}^{\perp_\xi} \le H_2{}^{\perp_\xi}$.

Dim.: $H_1 \subseteq H_2 \iff H_1 + H_2 = H_2 \implies \lfloor_{\mathsf{N}} (2) \rfloor_{\mathsf{N}} \implies H_1{}^{\perp_\xi} + H_2{}^{\perp_\xi} = (H_1 + H_2)^{\perp_\xi} = H_2^{\perp_\xi} \iff H_1{}^{\perp_\xi} \le H_2{}^{\perp_\xi}$ ∎

C33a.18 Prop. $\left(\bigcap_{k\in K} H_k\right)^{\perp_\xi} \subseteq \bigcap_{k\in K} H_k{}^{\perp_\xi}$.

In particolare:

$$\left(\bigcap_{k\in K} H_k\right)^{\perp_\rho} = \bigcap_{k\in K} H_k{}^{\perp_\rho} \quad \text{sse} \quad [\alpha] := \lceil \forall e \in E \;:\; h \ne h' \implies e\perp h \ne e\perp h' \rceil \;;$$
$$\left(\bigcap_{k\in K} H_k\right)^{\perp_\lambda} = \cap_{k\in K} H_k{}^{\perp_\lambda} \quad \text{sse} \quad [\beta] := \lceil \forall e \in E \;:\; h \ne h' \implies h\perp e \ne h'\perp e \rceil \;.$$

Dim.: $(\cap_{k\in K} H_k)^{\perp_\rho Rel} = \{\langle e, e\perp h\rangle \mid: e \in E, h \in \cap_{k\in K} H_k\} \subseteq \lfloor_{\mathsf{N}} = \text{ sse vale } [\alpha] \rfloor_{\mathsf{N}}$
$\subseteq \cap_{k\in K} \{e \in E, h \in H_k :\mid \langle e, e\perp h\rangle\} = \cap_{k\in K}\big((H_k{}^{\perp_\rho})^{Rel}\big) = (\cap_{k\in K} H_k{}^{\perp_\lambda})^{Rel} =$
$(\cap_{k\in K} H_k)^{\perp_\rho Rel} = \{e \in E, h \in \cap_{k\in K} H_k :\mid \langle e, h\perp e\rangle\} \subseteq \lfloor_{\mathsf{N}} = \text{ sse vale } [\beta] \rfloor_{\mathsf{N}}$
$\cap_{k\in K} \{e \in E, h \in H_k :\mid \langle e, h\perp e\rangle\} = \cap_{k\in K} \left((H_k{}^{\perp_\lambda})^{Rel}\right) = \lfloor_{\mathsf{N}} \mathsf{a14} \rfloor_{\mathsf{N}} = (\cap_{k\in K} H_k{}^{\perp_\lambda})^{Rel}$ ∎

Si noti che, essendo in generale $G\perp(\cap_{k\in K} H_k) \subseteq \cap_{k\in K}(G\perp H_k)$, si ha
$\cap_{k\in K} H_k{}^{\perp_\rho} = \lceil (G \subseteq E) \nparallel \big(G\perp(\cap_{k\in K} H_k)\big) \subseteq \lceil (G \subseteq E) \nparallel \big(\cap_{k\in K} (G\perp H_k)\big) = T \overset{R}{\cap}_{k\in K} H_k{}^{\perp_\rho}$.

Inoltre, essendo $(\cap_{k\in K} H_k \perp G \subseteq \cap_{k\in K}(H_k \perp G)$, si ha $\cap_{k\in K} H_k{}^{\perp_\lambda} \subseteq \overset{R}{\cap}_{k\in K} H_k{}^{\perp_\rho}$, in accordo con a04 .

C33a.19 Un $\Omega \in OprUn_{E,F}$ si dice **operatore unitivo finito** sse $\Omega^{Rel} \subset_\varphi E \times F$.

Con $OprUnF_{E,F}$ denotiamo l'insieme degli operatori unitivi finiti da E in F.

$\Omega \in OprUn_{E,F}$ si dice **operatore unitivo localmente finito** sse $E_1 \subset_\varphi E \implies E_1\Omega \subset_\varphi F$, cioè sse $\forall e \in E$: $e\Omega \subset_\varphi F$.

Con $OprUnLf_{E,F}$ denotiamo l'insieme degli operatori unitivi localmente finiti da E in F.

$\Omega \in OprUn_{E,F}$ si dice **operatore unitivo fedele** sse $\Omega^{\mathfrak{P}} \in OprU_{\ell\varphi;E,F}$.

Denotiamo con $OprUnFfl_{E,F}$ l'insieme di tali operatori.

$\Omega \in OprUn_{E,F}$ si dice **operatore unitivo bilocalmente finito** sse $\forall \Omega \in OprUn_{\ell\varphi;E,F}$: $e\Omega^{\mathfrak{P}} \in OprUn_{\ell\varphi;E,F}$.

Denotiamo con $OprUnBlf_{E,F}$ l'insieme di tali operatori.

C33a.20 **Prop.** $OprUn_{\varphi;E,F} \ \subset \ OprUnBlf_{E,F} \ = \ OprUn_{\ell\varphi;E,F} \cap OprUnFfl_{E,F}$.

Prop. $OprUn_{\varphi;E}$, $OprUnBlf_{\mathfrak{P}} \ \in \ \big[\ \mathfrak{P}\ \big]$ ▮

$\Omega \in OprUn_E$, si dice **operatore unitivo dilatatore** sse $\forall G \in E \ : \ G\Omega \supseteq G$, cioè sse $\forall e \in E \ : \ e \in e\Omega$.

Denotiamo con $OprUnDil_E$ l'insieme di tali operatori.

$\forall H \subseteq E \ : \ H^{\cup} \in OprUnDil_E$ ▮

$\Omega \in OprUnDil_E$ sse $\mathbf{1}_\circ \leq \Omega$ sse $\mathbf{1}_\circ \leq \Omega^{\mathfrak{P}}$ sse Ω^{Rel} è una relazione riflessiva.
$OprUnDil_E \in \big[\ \mathfrak{P}\ \big]$ ▮

$OprUn_{\varphi;E,F} \ \cap \ OprUnDil_E \ = \ \emptyset$ ▮

C33 b. operatori unitivi sui monoidi liberi [1]

C33b.01 Consideriamo gli alfabeti $A, B \subset_\varphi \text{Ꟊ}$, i monoidi liberi A^*, B^* e l'insieme $OprUn_{A^*,B^*}$ degli operatori (completamente) unitivi da A^* in B^*. In particolare si può trattare l'insieme dei morfismi di bande abeliane $\lceil \mathbf{L}_A \longmapsto_+ \mathbf{L}_B \rceil$.

L'insieme di operatori $OprUn_{A^*,B^*}$ si può denotare più concisamente con $OprUnL_{A,B}$ e si può parlare di operatori unitivi da $\mathbf{L}_A$ in $\mathbf{L}_B$.
Scriviamo inoltre $OprUnL_A := OprUnL_{A,A} = OprUn_{A^*,A^*} = OprUn_{A^*}$.

C33b.02 **Prop.** Sopra $OprUnL_{A,B}$ si possono riprendere, previe opportune specificazioni, le considerazioni svolte in :a .

In particolare si possono trattare le entità ch seguono.

L'operatore unità rispetto al prodotto.c di $OprUnL_A$, per il quale $\mathbf{1}_\circ = \sum_{w\in A^*} \lceil w \,\Vdash\, w \rceil$;

Gli operatori basilari $\{ w \,|\, z \}$ riguardanti qualsiasi $w \in A^*$ e ogni $z \in B^*$; per essi si ha $E\{ w \,|\, z \} = (E \cap w)^{zoc}\, z$.

Gli operatori rettangolari $\{ L \,|\, M \}$ relativi a qualsiasi $L \subseteq A^*$ e a qualsiasi $M \subseteq B^*$; per essi abbiamo $E\{ L \,|\, M \} = (E \cap L)^{zoc}\, M$;

Gli operatori costanti in $OprUnL_{A,B}$ definiti per ogni $M \subseteq B^*$ come $M^{reset} = \{ A^* \,|\, M \}$; in particolare si ha $\emptyset^{reset} = \{ A^* \,|\, \emptyset \}$.

Gli intersettori, gli unitori e gli eliminatori in $OprUnL_A$ definiti per ogni $L \subseteq A^*$, risp., come
$L^\cap := \sum_{w\in L} \{ w \,|\, w \}$,
$L^\cup := \sum_{w\in A^*} \{ w \,|\, (L + w) \}$ ed
$L^\setminus := \sum_{w\in A^*\setminus L} \{ w \,|\, w \}$.

Il morfismo ${}^{Srel} = {}^{OprU^{-1}} \in \lceil \langle OprUnL_A, \sum, \circ, \emptyset^{reset}, \mathbf{1}_\circ \rangle \;\triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{SKA}\; \langle (A^* \times A^*), \cup, \circ, \emptyset, A^{\mathsf{Id}} \rangle \rceil$.

La possibilità di scrivere, per ogni $\Omega \in OprUnL_{A,B}$, $\Omega = \sum_{\langle w,z\rangle\in R} \{ w \,|\, z \}$, dove $R := \Omega^{Rel} \subseteq A^* \times B^*$.

la trasposizione ${}^\intercal \in \lceil OprUnL_A \;\triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{antiSKA}\; OprUnL_A \rceil$.
la relazione d'ordine per gli operatori di $OprUnL_{A,B}$ definita da $\Omega_1 \le \Omega_2$ sse $\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_2$.
Questa fa di $OprUnL_{A,B}$ un reticolo booleano avente come elementi atomici tutti gli operatori basilari $\{ w \,|\, z \}$ relativi alle stringhe $w \in A^*$ e $z \in B^*$ ed avente come elemento minimo $\emptyset^{reset}$ e come massimo $\{ A^* \,|\, B^* \}$;

Le collezioni di operatori $\{ \mathbf{X} \,|\, \mathbf{Y} \}$ e gli aggregati di collezioni di operatori:

$$\left\{ \mathbf{X} \subseteq \mathbf{L}_A \;,\; \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{L}_B \;\;\vdots\;\; \{ \mathbf{X} \,|\, \mathbf{Y} \} \right\} .$$

Le collezioni di operatori $OprUnL\varphi_{A,B}$, $OprUnL\ell\varphi_{A,B}$, $OprUnL\ell\varphi_{A,B}$, $OprUnLBlf_{A,B}$ e $OprUnLDil_{A,B}$.

In molti sviluppi si riesce a prescindere dall'alfabeto sul quale sono costruiti i linguaggi in esame: in tali circostanze si può fare riferimento all'alfabeto Ꟊ oppure trascurare di esplicitare l'alfabeto.

C33b.03 Sul terreno $OprUnL$ si possono costruire due interessanti strutture di SKA.

Prop. Consideriamo un alfabeto A e la struttura $OprUnc_A := \langle OprUn_A, \sum, \circ, \emptyset^{reset}, \mathbf{1}_\circ \rangle$;

allora $OprUnc_A \in \textsf{SKA}$.
Dim.: Da [7A.3(a)] con $E = A^*$ ed $E^{\mathfrak{P}} = \mathbf{L}_A$ ▮

$OprUnLc_A$ si può chiamare **algebra-c degli operatori unitivi tra linguaggi** sull'alfabeto A.

C33b.04 Si definisce come prodotto.b tra gli operatori basilari di $OprUnL_{A,B}$:

$$\forall u, v \in A^* \ , \ w, z \in B^* \ : \ \left\lbrace u \,\middle|\, w \right\rbrace : \left\lbrace v \,\middle|\, z \right\rbrace \ := \ \left\lbrace u \cdot w \,\middle|\, v \cdot z \right\rbrace \ .$$

Chiaramente si tratta della estensione al prodotto cartesian della giustapposizione di stringhe.

Si definisce **prodotto.b degli operatori unitivi su linguaggi** Ω_1 e Ω_2 in $OprUnL_{A,B}$

$$\Omega_1 : \Omega_2 \ := \ \sum_{\{\langle w_1,z_1\rangle \in \Omega_1{}^{Srel} \ , \ \langle w_2,z_2\rangle \in \Omega_2{}^{Srel}\}} \left\lbrace w_1 \,\middle|\, z_1 \right\rbrace : \left\lbrace w_2 \,\middle|\, z_2 \right\rbrace \ =$$
$$\sum_{\{\langle w_1,z_1\rangle \in \Omega_1{}^{Srel} \ , \ \langle w_2,z_2\rangle \in \Omega_2{}^{Srel}\}} \left\lbrace w_1 w_2 \,\middle|\, z_1 z_2 \right\rbrace \ .$$

Chiaramente si tratta della estensione booleana del prodotto.b tra operatori basilari.

Introduciamo inoltre l'operatore unità per il prodotto.b $\mathbf{1}_: \ := \ \left\lbrace u \,\middle|\, u \right\rbrace = {}^o$.

C33b.05 **Prop.** $OprUnLb_{A,B} \ := \langle OprUnL_{A,B}, \sum, :, \emptyset^{reset}, \mathbf{1}_: \rangle \in \textsf{SKA}$.

Dim.: $OprUnLb_{A,B}$ è una struttura costruita come indicato in [6B.2(e)] a partire dai monoidi $\langle A^*, \cdot, \mu \rangle$ e $\langle B^*, \cdot, \mu \rangle$ ▮

Introduciamo inoltre $OprUnLb_A \ := \ OprUnLb_{A,A}$; questo insieme si dice costituire il terreno per la **algebra-b degli operatori unitivi tra linguaggi** sull'alfabeto A.

C33b.06 Per l'insieme di operatori $OprUnL_{A,B}$ si possono riprendere con le opportune specificazioni tutte le considerazioni svolte per le SKA, sia considerandolo terreno di algebre SKAc, sia considerandolo terreno di algebre SKAb.

In particolare, per ogni $\Omega = \sum_{\langle w,z\rangle \in R} \left\lbrace w \,\middle|\, z \right\rbrace \in OprUn_A$, ove si intende $R \ := \ \Omega^{Srel}$, si definiscono:

le **potenze-c** $\Omega^0 \ := \ \mathbf{1}_\circ, \ \Omega^1 := \Omega, \forall n \in \mathbb{N} \ : \ \Omega^n \ := \ \Omega^{n-1} \circ \Omega = \sum_{\langle u,v\rangle \in R^n} \left\lbrace u \,\middle|\, v \right\rbrace$;

la **chiusura-+c** $\Omega^\oplus \ := \ \sum_{n \in \mathbb{P}} \Omega^n = \sum_{\langle u,v\rangle \in R^\oplus} \left\lbrace u \,\middle|\, v \right\rbrace$;

la **chiusura-*c** $\Omega^\otimes \ := :: \sum_{n \in \mathbb{N}} \Omega^n = \mathbf{1}_\circ \dot{+} \Omega^\oplus = \sum_{\langle u,v\rangle \in R^\otimes} \left\lbrace u \,\middle|\, v \right\rbrace$.

Per $\Omega = \sum_{\langle w,z\rangle \in R} \left\lbrace w \,\middle|\, z \right\rbrace \in OprUnL_{A,B}$ si definiscono

le **potenze-b** $\Omega^{:0} \ := \ \mathbf{1}_: := \left\lbrace u \,\middle|\, u \right\rbrace$, $\Omega^{:1} \ := \ \Omega$,
$\Omega^{:n} \ := \ \Omega^{:n-1} : \Omega = \sum_{\langle w_i,z_i\rangle \in R} \left\lbrace (w_1 ... w_n) \,\middle|\, (z_1 ... z_n) \right\rbrace$;

la **chiusura-+b** $\Omega^{:\oplus} \ := \ \sum_{n \in \mathbb{P}} \Omega^{:n} = \sum_{\langle u,v\rangle \in R^\oplus} \left\lbrace u \,\middle|\, v \right\rbrace$;

la **chiusura-*b** $\Omega^{:\otimes} \ := \ \sum_{n \in \mathbb{N}} \Omega^{:n} = 1_: \dot{+} \Omega^{:\oplus} = \sum_{\langle u,v\rangle \in R^\otimes} \left\lbrace u \,\middle|\, v \right\rbrace$.