1

Capitolo C30
fattorizzazione e decomposizione dei linguaggi

Contenuti delle sezioni

18 pagine

C300.01 In questo capitolo vengono esposte le proprietà di fattorizzazione dei linguaggi formali in generale, prendendo in considerazione loro caratteristiche specifiche solo per presentare esempi.

I risultati che si ottengono forniscono proprietà di prospettiva, poco utilizzabili per elaborazioni specifiche, ma utili nell'impostazione degli studi sui collegamenti tra i linguaggi, tra le famiglie di linguaggi e le varie composizioni di linguaggi, collegamenti che saranno delineati nell'ambito delle algebre di Kleene [C32] e che saranno approfonditi quando si terrà conto delle maggiori diverse caratterizzazioni specifiche.

Nel seguito assumiamo le seguenti convenzioni:

s sta per un intero maggiore di 1; i, j, h, k e loro combinazioni della forma j_i denotano interi naturali;

A denota un alfabeto finito, $\mathsf{A} \subset_{\varphi} \mathbb{A}$;

a, a_i, b, c, d, e denotano caratteri dell'alfabeto A;

w, w_i, u, v denotano stringhe su A, $w, w_i, u, v \in \mathsf{A}^*$;

$\mathsf{L}, \mathsf{L}_i, \mathsf{E}, \mathsf{F}, \mathsf{F}_i, \mathsf{F}_{i,j}, \mathsf{F}', \mathsf{G}, \mathsf{G}_i, \mathsf{G}_{i,j}$ rappresentano linguaggi di $\mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}$.

Inoltre semplifichiamo la notazione $\circ_{lr}$ con $\circ$.

C30 a. fattorizzazioni e fattori di un linguaggio

C30a.01 La sequenza di linguaggi $\mathsf{S} = \langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}{}^s$ si dice **sottofattorizzazione di lunghezza** s **del linguaggio** $\mathsf{L} \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}$ sse $\mathsf{F}_1 \cdot \mathsf{F}_2 \cdot ... \cdot \mathsf{F}_s \subseteq \mathsf{L}$.
In tal caso si dice che F_1 è **linguaggio sottofattore sinistro** di L, che F_s è **linguaggio sottofattore destro** di L e per ogni $i \in (\mathrm{s}\ ]$ che F_i è **linguaggio sottofattore di posizione** i nella S di L.

Denotiamo con $\mathsf{Sftrn}(\mathsf{L})$ l'insieme delle sottofattorizzazioni di Le in particolare denotiamo con $\mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L})$ l'insieme delle sottofattorizzazioni di lunghezza s di L.

C30a.02 Alcune semplici ed evidenti osservazioni.
$\langle \mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2 \rangle \in \mathsf{Sftrn}_2(\mathsf{L}_1 \cdot \mathsf{L}_2)$, $\langle \mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2, \mathsf{L}_3 \rangle \in \mathsf{Sftrn}_3(\mathsf{L}_1 \cdot \mathsf{L}_2 \cdot \mathsf{L}_3)$ e $\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{F}_1 \cdot \mathsf{F}_2 \cdot ... \cdot \mathsf{F}_s)$.
Inserendo tra i sottofattori di $\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L})$ h fattori uguali a $\{\mu\}$ per qualsiasi $h \in \mathbb{N}$ si ottiene un elemento di $\mathsf{Sftrn}_{s+h}(\mathsf{L})$.

Il linguaggio $\emptyset$ si può considerare sottofattore i-esimo di ogni linguaggio, per i qualsiasi, in quanto

$$\forall\ \mathsf{L}, \mathsf{L}_1, ..., \mathsf{L}_s \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}\ :\quad \emptyset \cdot \mathsf{L}_2 \cdot ... \cdot \mathsf{L}_s \subseteq \mathsf{L}\ ,\ ...\ ,\ \mathsf{L}_1 \cdot ... \cdot \emptyset \cdot ... \cdot \mathsf{L}_s \subseteq \mathsf{L}\ ,\ ...\ ,\ \mathsf{L}_1 \cdot ... \cdot \mathsf{L}_{s-1} \cdot \emptyset \subseteq \mathsf{L}\ .$$

In genere si può supporre implicito riferire gli elementi delle sottofattorizzazioni del linguaggio L all'alfabeto $\mathsf{A} := \mathsf{L}^{\mathrm{minalf}}$. Infatti ogni lettera estranea a tale insieme di caratteri può comparire solo nelle sottofattorizzazioni che contenga $\emptyset$ come sottofattore, oggetti che servono solo a operazioni generiche di impostazione.

C30a.03 Prop. $\mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L}) \in \mathsf{Stabs}(\supseteq^{\times s}) \subseteq \mathsf{Stabs}(\cap^{\times s})$;
$\mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L})$ è sottosemireticolo inferiore di $\langle \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}{}^{\times s}, \cap^{\times s}, +^{\times s} \rangle$ e $\langle \emptyset, ..., \emptyset \rangle$ è il suo elemento minimo.
Dim.: Sia $\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_{\mathsf{L}}$ e sia $\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \supseteq^s \langle \mathsf{G}_1, ..., \mathsf{G}_s \rangle$.
Allora $\langle \mathsf{G}_1, ..., \mathsf{G}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_{\mathsf{L}}$; inoltre $\emptyset^s \subset \mathsf{L}$ ∎
Osserviamo che le relazioni $\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, ..., \mathsf{F}_s \rangle$, $\langle \mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2, ..., \mathsf{G}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L})$ non implicano che sia

$$\langle \mathsf{F}_1 + \mathsf{G}_1, \mathsf{F}_2 + \mathsf{G}_2, ..., \mathsf{F}_s + \mathsf{G}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L}).$$

Un semplice controesempio è il seguente: $\langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle \in \mathsf{Sftrn}_2(ac+bd)$, ma $\langle a+b, c+d \rangle \notin \mathsf{Sftrn}_2(ac+bd)$.

C30a.04 Prop. Per ogni $\mathsf{L} \in \mathbf{Lng}$ e ogni $s \in \mathbb{P}$ valgono gli enunciati che seguono.
(a) $\langle \mu, ..., \mu, \mathsf{L}, ..., \mu \rangle \in \mathsf{Sftrn}(\mathsf{L})$ ∎
(b) $\forall w_1, w_2, ..., w_s \in \mathsf{A}^*\ :\ w_1 w_2 ... w_s \in \mathsf{L} \implies \langle w_1, w_2, ..., w_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L})$ ∎
(c) $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, ..., \mathsf{M}_s \subseteq \mathsf{L}^* \implies \langle \mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, ..., \mathsf{M}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L}^*)$ ∎
(d) Per ogni famiglia di linguaggi $\{j \in J :| F_{i,j}\}$ accade che
$\forall\ j \in J : \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_{ij}, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L}) \implies \langle \mathsf{F}_1, ..., \sum_{j \in J} \mathsf{F}_{ij}, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L})$ ∎
(e) $\forall s \in \mathbb{P}\ :\ \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L}) \leq_{Latt} \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}{}^{\times s} \iff \mathsf{L} = \mathsf{A}^* \iff \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L}) = \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}{}^{\times s}$
Dim.: Evidentemente $\mathsf{L} = \mathsf{A}^*$ implica gli enunciati primo e terzo. Per le implicazioni opposte basta osservare che per ogni $w \in \mathsf{A}^*$ le s s-uple costituite da w ed $s-1$ repliche di μ appartengono a $\mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}{}^s$ e quindi appartengono a L ∎

C30a.05 Per $\mathsf{L} \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}$ ed $i \in \mathbb{N}$ si definisce **massima estensione dei sottofattori** i**-esimi** di L

$$maxext_{i,\mathsf{L}} := \ulcorner\ s = i, i+1, ...\ :|\ \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_i, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}{}^s \ \mapsto \ \langle \mathsf{F}_1, ..., \sum\{\mathsf{F}_i{}' \ |:\ \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_i{}', ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L})\}, ..., \mathsf{F}_s \rangle \ \urcorner\ .$$

Chiaramente $maxext_{i,\mathsf{L}} \in \bigcup_{s=i}^{+\infty} \lceil \mathbf{Lng_A}^s \longmapsto \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L}) \rceil$.

F_i si dice **linguaggio massimo fattore** nella posizione i per L entro $\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_i, ..., \mathsf{F}_s \rangle$ sse $\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_i, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L})$ e $\forall\, \mathsf{F}_{\bar{i}} : \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_{\bar{i}}, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L}) \implies \mathsf{F}_{\bar{i}} \subseteq \mathsf{F}_i$.

Sia $\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathbf{Lng_A}^s$; $maxext_{i,\mathsf{L}}\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_i, ..., \mathsf{F}_s \rangle = \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{G}_i, ..., \mathsf{F}_s \rangle$ sse G_i è massimo fattore nella posizione i per L entro $\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{G}_i, ..., \mathsf{F}_s \rangle$.

C30a.06 Si osserva che

$$\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_i, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathbf{Lng_A}^s \setminus \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L}) \implies maxext_{i,\mathsf{L}}\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_i, ..., \mathsf{F}_s \rangle = \langle \mathsf{F}_1, ..., \emptyset, ..., \mathsf{F}_s \rangle .$$

Inoltre risulta $maxext_{i,\mathsf{L}} \circ maxext_{i,\mathsf{L}} = maxext_{i,\mathsf{L}}$, ovvero si può quindi affermare che $maxext_{i,\mathsf{L}}$ è una endofunzione idempotente entro $\mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L})$.

Invece se $i \neq j$, non è necessariamente

$$maxext_{i,\mathsf{L}}\left(maxext_{j,\mathsf{L}}\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_i, ..., \mathsf{F}_s \rangle\right) = maxext_{j,\mathsf{L}}\left(maxext_{i,\mathsf{L}}\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_i, ..., \mathsf{F}_s \rangle\right) .$$

Controesempio: per $\mathsf{L} = a\,c + b\,c + a\,d$, $s = 2$ e $\langle a, c \rangle \in \mathsf{Sftrn}_2(\mathsf{L})$ si ha

$$maxext_{2,\mathsf{L}}(maxext_{1,\mathsf{L}}\langle a, c \rangle) = \langle a+b, c \rangle \neq maxext_{1,\mathsf{L}}(maxext_{2,\mathsf{L}}\langle a, c \rangle) = \langle a, c+d \rangle .$$

Questa noncommutazione si verifica anche per sequenze di linguaggi che non sono qualificate come sottofattorizzazioni di un dato linguaggio: per $\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2 \rangle \notin \mathsf{Sftrn}_2(\mathsf{L})$ risulta

$$maxext_{2,\mathsf{L}}\left(maxext_{1,\mathsf{L}}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2 \rangle\right) = \langle \emptyset, \mathsf{A}^* \rangle \neq maxext_{1,\mathsf{L}}\left(maxext_{2,\mathsf{L}}\langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2 \rangle\right) = \langle \mathsf{A}^*, \emptyset \rangle.$$

C30a.07 Prop. Consideriamo $\mathsf{L} \in \mathbf{Lng_A}$ e $i_1, ..., i_k \in \mathbb{N}$;

$$maxext_{i_1,\mathsf{L}} \circ .... \circ maxext_{i_k,\mathsf{L}} = maxext_{j_1,\mathsf{L}} \circ .... \circ maxext_{j_h,\mathsf{L}}$$

ove $\langle j_1, ..., j_h \rangle$ è la sottosuccessione ottenuta scorrendo la $\langle i_1, ..., i_k \rangle$ ed eliminando gli interi ripetuti.

Dim.: Basta mostrare che

$$maxext_{j_1,\mathsf{L}}(maxext_{j_h,\mathsf{L}}...(maxext_{j_1,\mathsf{L}}\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle)...) = maxext_{j_h,\mathsf{L}}(...(maxext_{j_1,\mathsf{L}}\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle)...)$$

per $s \geq j_1, ..., j_h$.

A questo scopo scriviamo

$\langle \mathsf{G}_1, ..., \mathsf{G}_s \rangle := maxext_{j_h,\mathsf{L}}\left(...(maxext_{j_1,\mathsf{L}}\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle)...\right)$

e osserviamo che se fosse $maxext_{j_1,\mathsf{L}}\langle \mathsf{G}_1, ..., \mathsf{G}_{j_1}, ..., \mathsf{G}_s \rangle = \langle \mathsf{G}_1, ..., \mathsf{G}_{j_1}', ..., \mathsf{G}_s \rangle$ con $\mathsf{G}_{j_1}' \supset \mathsf{G}_{j_1}$, sarebbe

$$maxext_{j_1,\mathsf{L}}\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_{j_1}, ..., \mathsf{F}_s \rangle = \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{G}_{j_1}', ..., \mathsf{F}_s \rangle \neq \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{G}_{j_1}, ..., \mathsf{F}_s \rangle \blacksquare$$

C30a.08 $\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathbf{Lng_A}^s$ si dice **fattorizzazione di un linguaggio** L sse per $i = 1, ..., s$ F_i è massimo in i per L entro la stessa $\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle$.

Le componenti di una fattorizzazione di L si dicono **linguaggi fattori del linguaggio** L.

Denotiamo con $\mathsf{Ftrn}(\mathsf{L})$ l'insieme delle fattorizzazioni di L e con $\mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{L})$ l'insieme delle fattorizzazioni di lunghezza s di L; inoltre denotiamo con $\mathsf{Ftr}(\mathsf{L})$ l'insieme dei fattori,
con $\mathsf{FtrL}(\mathsf{L})$ l'insieme dei fattori sinistri e con $\mathsf{FtrR}(\mathsf{L})$ l'insieme dei fattori destri.

Si constata rapidamente che $\mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{L}) \subset \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L})$ e che $maxext_{i,\mathsf{L}}|_{\mathsf{Ftrn}(\mathsf{L})} = (\mathsf{Ftrn}(\mathsf{L}))^{\mathsf{Id}}$.

C30a.09 Prop.

$$\mathsf{L} = \sum_{\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L})} \mathsf{F}_1 \cdot ... \cdot \mathsf{F}_s = \sum_{\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{L})} \mathsf{F}_1 \cdot ... \cdot \mathsf{F}_s$$

e quindi $\forall\ \mathsf{L} \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}\ ,\ s \geq 2\ :\ \ \mathsf{Sftrn}_s\ ,\ \mathsf{Ftrn}_s \in \lceil \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \twoheadleftarrow\!\!\rightarrow \mathfrak{P}(\mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}{}^s)\ \rceil$.

Dim.: $\langle\ \mu\ , ..., \mathsf{L}, ...,\ \mu\ \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L})$ tale che $\mu \cdot ... \cdot \mathsf{L} \cdot ... \cdot \mu\ = \mathsf{L}$ e $\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L}) \Longrightarrow \mathsf{F}_1 \cdot ... \cdot \mathsf{F}_s \subseteq \mathsf{L}$ ▮

C30a.10 Si verificano facilmente i le affermazioni che seguono.

$\mathsf{Ftrn}_s(\emptyset)\ =\ \{\langle \emptyset, \mathsf{A}^*, ..., \mathsf{A}^* \rangle, \langle \mathsf{A}^*, \emptyset, ..., \mathsf{A}^* \rangle, ..., \langle \mathsf{A}^*, ..., \mathsf{A}^*, \emptyset \rangle\}$ ▮

$\mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{A}^*)\ =\ \{\langle \mathsf{A}^*, \mathsf{A}^*, ..., \mathsf{A}^* \rangle\}$ ▮

$\mathsf{Ftrn}_s(\ \mu\ )\ =\ \{\langle\ \mu\ ,\ \mu\ , ...,\ \mu\ \rangle\} \dot{\bigcup} \mathsf{Ftrn}_s(\emptyset)$ ▮

$\forall w \in \mathsf{A}^*\ :\ \ \mathsf{Ftrn}_s(w)\ =\ \{\langle w_1, w_2, .., w_s \rangle\ ¶\ w_1, w_2, ..., w_s \in \mathsf{A}^* \wedge w_1 \cdot w_2 \cdot ... \cdot w_s = w\}\ \dot{\bigcup}\ \mathsf{Ftrn}_s(\emptyset)$ ▮

$\mathsf{P} \in \mathbf{P}_{\mathsf{A}}\ \iff\ \forall s \in \{2, ...\}\ :\ \mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{P}) \setminus \mathsf{Ftrn}_s(\emptyset)\ \subset_\varphi\ \mathbf{P}_{\mathsf{A}}{}^s\ \iff\ \mathsf{FtrnP}) \setminus \{\mathsf{A}^*\} \subset_\varphi \mathbf{P}_{\mathsf{A}}$ ▮

C30a.11 Prop.

$$\mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{L})\ =$$
$$\Big\{\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L}) \wedge \langle i_1, ..., i_s \rangle \in \mathbf{Perm(}\mathrm{s}\ \mathbf{]}\ :|\ maxext_{i_s,\mathsf{L}}\Big(...(maxext_{i_1,\mathsf{L}}\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle)...\Big)\Big\}$$

C30a.12 Alcune osservazioni.

$\mathsf{F}_1 \cdot ... \cdot \mathsf{F}_s = \mathsf{L} \not\Longrightarrow \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{L})$.
Controesempio: per ogni linguaggio L si ha $\mu\ \cdot ... \cdot\ \mu\ \cdot \mathsf{L}^* \cdot\ \mu\ \cdot ... \cdot\ \mu\ = \mathsf{L}^*$, mentre può accadere che sia $\mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{L}^*) \ni \langle \mathsf{M}_1, ..., \mathsf{M}_s \rangle \supseteq^s \langle \mathsf{L}^*, ..., \mathsf{L}^* \rangle$.
e quindi $\langle\ \mu\ , \mathsf{L}^*,\ \mu\ \rangle \notin \mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{L}^*)$.
Un altro controesempio si ottiene dal fatto che $(\ \mu\ + a) \cdot (\ \mu\ + a^2)\ =\ \ \mu\ + a + a^2 + a^3$, mentre $\mathsf{Ftrn}_2(\ \mu\ + a + a^2 + a^3) \ni \langle(\ \mu\ + a), (\ \mu\ + a + a^2)\rangle$.

Anche il viceversa non vale: $\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{L}) \not\Longrightarrow \mathsf{F}_1 \cdot ... \cdot \mathsf{F}_s = \mathsf{L}$.
Contresempio: $\mathsf{Ftrn}_2(a\,c + a\,d + b\,c) \setminus \mathsf{Ftrn}_2(\emptyset)\ =\ \{\langle a + b, c \rangle, \langle a, c + d \rangle\}$, mentre $(a + b)c$ e $a(c + d)$ sono sottoinsiemi propri di $a\,c + a\,d + b\,c$.

Consideriamo $\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{L})$ e $w_1, ..., w_s \in \mathsf{A}^*$ tale che $w_1 \cdot ... \cdot w_s \in \mathsf{L}$; abbiamo:

$$\Big\{maxext_{i_s,\mathsf{L}}(...(maxext_{i_1,\mathsf{L}}\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle)...)\ ¶\ \langle i_1, ..., i_s \rangle \in \mathbf{Perm(}\mathrm{s}\ \mathbf{]}\Big\} \subseteq$$
$$\subseteq \{\langle \mathsf{G}_1, ..., \mathsf{G}_s \rangle \in \mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{L})\ ¶\ \langle \mathsf{G}_1, ..., \mathsf{G}_s \rangle \supseteq^s \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle\}\quad ;$$
$$\Big\{maxext_{i_s,\mathsf{L}}\big(...(maxext_{i_1,\mathsf{L}}\langle w_1, ..., w_s \rangle)...\big)\ ¶\ \langle i_1, ..., i_s \rangle \in \mathbf{Perm(}\mathrm{s}\ \mathbf{]}\Big\} \subseteq$$
$$\subseteq \{\langle \mathsf{G}_1, ..., \mathsf{G}_s \rangle \in \mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{L})\ ¶\ w_1 \in \mathsf{G}_1, ..., w_s \in \mathsf{G}_s\}\quad .$$

C30a.13 Prop. Consideriamo $\mathsf{L} \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}$, $s = 3, 4, ...$ e $\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{L})$; abbiamo

(a) $\mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \ni \mathsf{J}\ ¶\ \langle \mathsf{F}_1, \mathsf{J} \rangle \in \mathsf{Ftrn}_2(\mathsf{L})$;
(b) $\forall i = 2, ..., s - 1\ :\ \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \ni \mathsf{H}, \mathsf{I}\ ¶\ lgg\mathsf{H}, \mathsf{F}_i, \mathsf{I} \rangle \in \mathsf{Ftrn}_3(\mathsf{L})$;
(c) $\mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \ni \mathsf{G}\ ¶\ \langle \mathsf{G}, \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Ftrn}_2(\mathsf{L})$.

Dim.: (a) $\langle \mathsf{F}_1, (\mathsf{F}_2 \cdot ... \cdot \mathsf{F}_s) \rangle \in \mathsf{Sftrn}_2(\mathsf{L})$ ed entro di essa F_1 è massimo in 1 perL; quindi abbiamo

$$maxext_{2,\mathsf{L}}\langle \mathsf{F}_1, (\mathsf{F}_2 \cdot ... \cdot \mathsf{F}_s) \rangle =: \langle \mathsf{F}_1, \mathsf{J} \rangle \in \mathsf{Ftrn}_2(\mathsf{L}),$$

(b) $\langle \mathsf{F}_1 \cdot ... \cdot \mathsf{F}_{i-1}\ ,\ \mathsf{F}_i\ ,\ \mathsf{F}_{i+1} \cdot ... \cdot \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_3(\mathsf{L})$ ed entro di essa F_i è massimo in 2 per L;

quindi per $\langle j,k\rangle \in \{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$ abbiamo

$$maxext_{k,\mathsf{L}}(maxext_{j,\mathsf{L}}(\big\langle(\mathsf{F}_1\cdot ...\cdot \mathsf{F}_{i-1}),\mathsf{F}_i,(\mathsf{F}_{i+1}\cdot ...\cdot \mathsf{F}_s)\big\rangle)) \;=: \big\langle \mathsf{H},\mathsf{F}_i,\mathsf{I}\big\rangle \in \mathsf{Ftrn}_3(\mathsf{L}) \ .$$

(c) $\big\langle(\mathsf{F}_1\cdot ...\cdot \mathsf{F}_{s-1}),\mathsf{F}_s\big\rangle \in \mathsf{Sftrn}_2(\mathsf{L})$ ed entro di essa F_s è massimo in 2 per L; quindi abbiamo

$$maxext_{1,\mathsf{L}}\big\langle(\mathsf{F}_1\cdot ...\cdot \mathsf{F}_{s-1}),\mathsf{F}_s\big\rangle \;=: \big\langle \mathsf{G},\mathsf{F}_s\big\rangle \in \mathsf{Ftrn}_2(\mathsf{L}) \ \blacksquare$$

C30a.14 In accordo con quanto appena dimostrato non si sono distinti i fattori di un linguaggio rispetto alla lunghezza della relativa fattorizzazione.

$\big\langle \mathsf{F}_1,...,\mathsf{F}_s\big\rangle \in \mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{L}) \quad \not\Longleftarrow$

(1) $\big\langle \mathsf{F}_1,(\mathsf{F}_2\cdot ...\cdot \mathsf{F}_s)\big\rangle \in \mathsf{Ftrn}_2(\mathsf{L})$,
(2) $\big\langle(\mathsf{F}_1\cdot ...\cdot \mathsf{F}_{i-1}),\mathsf{F}_i,(\mathsf{F}_{i+1}\cdot ...\cdot \mathsf{F}_s)\big\rangle \in \mathsf{Ftrn}_3(\mathsf{L})$,
(3) $\big\langle(\mathsf{F}_1\cdot ...\cdot \mathsf{F}_{s-1}),\mathsf{F}_s\big\rangle \in \mathsf{Ftrn}_2(\mathsf{L})$.

Questo viene mostrato dai controesempi che seguono.

Per $\mathsf{L} = ab^*(c^2+d)b^*$: $\langle ab^*, b^*c, cb^*\rangle \in \mathsf{Ftrn}_3(\mathsf{L})$ e $\langle ab^*, b^*c^2b^*\rangle \subset^2 \langle ab^*, b^*(c^2+d)b^*\rangle \in \mathsf{Ftrn}_2(\mathsf{L})$.

Per $\mathsf{L} = (ab{+}ba)c(de{+}ed)$ abbiamo $\langle a,b,c,d,e\rangle \in \mathsf{Ftrn}_5(\mathsf{L})$, mentre $\langle ab,c,de\rangle \subset^3 \langle ab{+}ba, c, de{+}ed\rangle = maxext_{3,\mathsf{L}}(maxext_{1,\mathsf{L}}\langle ab,c,de\rangle) = maxext_{1,\mathsf{L}}(maxext_{3,\mathsf{L}}\langle ab,c,de\rangle \in \mathsf{Ftrn}_3(\mathsf{L}))$.

C30a.15 **Prop.** Siano $\big\langle \mathsf{F}_1,...,\mathsf{F}_s\big\rangle \in \mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{L})$ e $\big\langle \mathsf{F}_{i1},...,\mathsf{F}_{it_i}\big\rangle \in \mathsf{Ftrn}_{t_i}(\mathsf{F}_i)$ per $i = 1,...,s$.
In tali circostanze $\big\langle \mathsf{F}_{11},...,\mathsf{F}_{1t_1},\mathsf{F}_{21},...,\mathsf{F}_{s-1t_{s-1}},\mathsf{F}_{1s},...,\mathsf{F}_{st_s}\big\rangle \in \mathsf{Ftrn}_{\sum t_i}(\mathsf{L})$.

Dim.: Se per qualche $i \in (\mathrm{s}\ ]$, $h \in (t_i]$ e $j =: t_1 + ... + t_{i-1,1} + h$ fosse

$$maxext_{j,\mathsf{L}}\big\langle \mathsf{F}_{11},...,\mathsf{F}_{ih},....,\mathsf{F}_{st_s}\big\rangle \;=: \big\langle \mathsf{F}_{11},...,{\mathsf{F}_{ih}}',...,\mathsf{F}_{st_s}\big\rangle$$

con ${\mathsf{F}_{ih}}' \supset \mathsf{F}_{ih}$, sarebbe $\big\langle \mathsf{F}_{i1},...,{\mathsf{F}_{ih}}',...,\mathsf{F}_{it_i}\big\rangle \in \mathsf{Ftrn}_{t_i}(\mathsf{F}_i)$ contro una delle ipotesi $\blacksquare$

C30a.16 A questo punto conviene estendere booleanamente la funzione $\mathsf{Ftr}(\mathsf{L})$ per poterla applicare a un insieme di linguaggi che denotiamo con $\{h \in \mathsf{H} :\mid \mathsf{E}_h\}$:

$$\mathsf{Ftr}_{\cup}\{h \in \mathsf{H} :\mid \mathsf{E}_h\} \;:=\; \bigcup_{h\in\mathsf{H}} \mathsf{Ftr}(\mathsf{E}_h) \ .$$

Si ottiene allora facilmente l'enunciato che segue.

Coroll.:

$$\mathsf{Ftr}(\mathsf{Ftr}(\mathsf{L})) \;=\; \bigcup_{\mathsf{F}\in\mathsf{Ftr}(\mathsf{L})} \mathsf{Ftr}(\mathsf{F}) = \mathsf{Ftr}(\mathsf{L}) \ .$$

C30 b. divisioni tra linguaggi

C30b.01 Prop. Consideriamo $\mathsf{E} \in \mathbf{Lng}$, l'alfabeto $\mathsf{A} := \mathsf{E}^{\mathrm{minalf}}$ ed un secondo linguaggio $\mathsf{F} \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}$. Seguono allora:

(a) Esiste un unico $\mathsf{G}_1 \in \mathsf{FtrL}(\mathsf{E})$ prima componente massima per E entro le sottofattorizzazioni $\langle \mathsf{G}, \mathsf{F} \rangle$;

(b) Esiste un unico $\mathsf{G}_2 \in \mathsf{FtrR}(\mathsf{E})$ secondo componente massima per E entro le sottofattorizzazioni $\langle \mathsf{F}, \mathsf{G} \rangle$.

Dim.: (a) è soddisfatto da G_1 tale che $\langle \mathsf{G}_1, \mathsf{F} \rangle := maxext_{1,\mathsf{E}} \langle \emptyset, \mathsf{F} \rangle$, cioè da $\mathsf{G}_1 := \sum \{ \mathsf{G} \mid \mathsf{GF} \subseteq \mathsf{E} :| \mathsf{G} \}$ e (b) è soddisfatto da G_2 tale che $\langle \mathsf{F}, \mathsf{G}_2 \rangle := maxext_{2,\mathsf{E}} \langle \mathsf{F}, \emptyset \rangle$, cioè da $\mathsf{G}_2 := \sum \{ \mathsf{G} \mid \mathsf{FG} \subseteq \mathsf{E} :| \mathsf{G} \}$ ∎

C30b.02 Questa proposizione consente di definire le seguenti due operazioni binarie:

divisione a destra del linguaggio $/\!\!/\!\!/ \in \lceil \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \times \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \longmapsto \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \rceil$ definita da:

$$\mathsf{E} /\!\!/\!\!/ \mathsf{F} := \sum \{ \mathsf{G} \mid \mathsf{GF} \subseteq \mathsf{E} \} = maxext_{1,\mathsf{E}} \langle \mathsf{G}, \mathsf{F} \rangle ;$$

divisione a sinistra del linguaggio $\backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \in \lceil \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \times \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \longmapsto \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \rceil$ definita da:

$$\mathsf{F} \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{E} := \sum \{ \mathsf{G} \mid \mathsf{FG} \subseteq \mathsf{E} \} = maxext_{2,\mathsf{E}} \langle \mathsf{F}, \mathsf{G} \rangle .$$

C30b.03 (1) Prop.: $\mathsf{E} /\!\!/\!\!/ \mathsf{F} = \bigcap_{v \in \mathsf{F}} (\mathsf{E} /\!\!/ v) = \mathsf{A}^* \setminus ((\mathsf{A}^* \setminus \mathsf{E}) /\!\!/ \mathsf{F}) \in \mathsf{FtrL}(\mathsf{E})$.

Dim.: $\mathsf{E} /\!\!/\!\!/ \mathsf{F} = \sum \{ u \mid u\mathsf{F} \subseteq \mathsf{E} \} = \{ u \mid \forall v \in \mathsf{F} : \ |: uv \in \mathsf{E} \} = \bigcap_{v \in \mathsf{F}} \{ u \mid u\, v \in \mathsf{E} \} = \bigcap_{v \in \mathsf{F}} (\mathsf{E} /\!\!/ v)$;

$\mathsf{A}^* \setminus (\mathsf{E} /\!\!/ \mathsf{F}) = \mathsf{A}^* \setminus \bigcap_{v \in \mathsf{F}} (\mathsf{E} /\!\!/ v) = \bigcup_{v \in \mathsf{F}} (\mathsf{A}^* \setminus (\mathsf{E} /\!\!/ v)) = \bigcup_{v \in \mathsf{F}} ((\mathsf{A}^* /\!\!/ v) \setminus (\mathsf{E} /\!\!/ v)) =$
$\bigcup_{v \in \mathsf{F}} ((\mathsf{A}^* \setminus \mathsf{E}) /\!\!/ v) = (\mathsf{A}^* \setminus \mathsf{E}) /\!\!/ \mathsf{F}$ ∎

(2) Prop.: $\mathsf{F} \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{E} = \bigcap_{u \in \mathsf{F}} (u \backslash\!\!\backslash \mathsf{E}) = \mathsf{A}^* \setminus (\mathsf{F} \backslash\!\!\backslash (\mathsf{A}^* \setminus \mathsf{E})) \in \mathsf{FtrR}(\mathsf{E})$.

Dim.: Duale-LR della dimostrazione della (1) ∎

C30b.04 Coroll.:

(a) $\mathsf{E} /\!\!/\!\!/ \mathsf{E} \ni \mu$, $\mathsf{E} \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{E} \ni \mu$ ∎

(b) $\mathsf{F}_1 \subseteq \mathsf{F}_2 \implies \mathsf{E} /\!\!/\!\!/ \mathsf{F}_1 \supseteq \mathsf{E} /\!\!/\!\!/ \mathsf{F}_2$, $\mathsf{F}_1 \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{E} \supseteq \mathsf{F}_2 \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{E}$ ∎

(c) $\mathsf{E} /\!\!/\!\!/ \emptyset = \emptyset \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{E} = \mathsf{A}^* /\!\!/\!\!/ \mathsf{F} = \mathsf{F} \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{A}^* = \mathsf{A}^*$ ∎

(d) $\mathsf{F}^{\mathrm{minalf}} \not\subseteq \mathsf{A} = \mathsf{E}^{\mathrm{minalf}} \implies \mathsf{E} /\!\!/\!\!/ \mathsf{F} = \mathsf{F} \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{E} = \emptyset$ ∎

(e) $(\mathsf{F} /\!\!/\!\!/ \mathsf{E}) \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{G} = \bigcap_{u \in \mathsf{F}, v \in \mathsf{G}} u /\!\!/ \mathsf{E} \backslash\!\!\backslash v = \mathsf{F} /\!\!/\!\!/ (\mathsf{E} \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{G}) =: \mathsf{F} /\!\!/\!\!/ \mathsf{E} \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{G}$ ∎

C30b.05 Prop. $(\mathsf{E} \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{E}) /\!\!/\!\!/ \mathsf{E} = \mathsf{E} \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash (\mathsf{E} /\!\!/\!\!/ \mathsf{E}) = \mathsf{E}$, cioè $\langle \mathsf{E} \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{E}, \mathsf{E} \rangle, \langle \mathsf{E}, \mathsf{E} /\!\!/\!\!/ \mathsf{E} \rangle \in \mathsf{Ftrn}_2(\mathsf{E})$.

Dim.: $maxext_{2,\mathsf{E}}(maxext_{1,\mathsf{E}} \langle \mu, \mathsf{E} \rangle) = \langle \mathsf{E} \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{E}, (\mathsf{E} \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{E}) /\!\!/\!\!/ \mathsf{E} \rangle = \langle \mu + ..., \mathsf{E} \rangle$.
$maxext_{1,\mathsf{E}}(maxext_{2,\mathsf{E}} \langle \mathsf{E}, \mu \rangle) = \langle \mathsf{E} \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash (\mathsf{E} /\!\!/\!\!/ \mathsf{E}) , \mathsf{E} /\!\!/\!\!/ \mathsf{E} \rangle = \langle \mathsf{E}, \mu + ... \rangle$ ∎

in accordo con b04, $\mathsf{E} \backslash\!\!\backslash\!\!\backslash \mathsf{F}$ si dice anche **derivata forte a destra** di E per F, mentre $\mathsf{F} /\!\!/\!\!/ \mathsf{E}$ si dice anche **derivata forte a sinistra** di E per F.

Se $\mathsf{E} \setminus\!\!\setminus \mathsf{F}$ e $\mathsf{F} /\!\!/ \mathsf{E}$ si rappresentano, risp., con EF^{-1} e con $\mathsf{F}^{-1}\mathsf{E}$ le derivate forti si indicano anche con $\mathsf{EF}^{[-1]}$ e $\mathsf{F}^{[-1]}\mathsf{E}$, rispettivamente.

C30b.06 **(1) Prop.**: $\forall\, \mathsf{L} \in \mathsf{FtrL(E)}$: esiste un unico $\mathsf{R} \in \mathsf{FtrR(E)}$ tale che $\langle\, \mathsf{L}, \mathsf{R}\, \rangle \in \mathsf{Ftrn_2(E)}$ e precisamente $\mathsf{R} = \mathsf{L} /\!\!/\!\!/ \mathsf{E}$ ▮

(2) Prop.: $\forall\, \mathsf{R} \in \mathsf{FtrR(E)}$: esiste un unico $\mathsf{L} \in \mathsf{FtrL(E)}$ tale che $\langle\, \mathsf{L}, \mathsf{R}\, \rangle \in \mathsf{Ftrn_2(E)}$: $\mathsf{L} = \mathsf{E} \setminus\!\!\setminus\!\!\setminus \mathsf{R}$ ▮

Possiamo quindi definire la biiezione delle divisioni del linguaggio E

$$Bijdiv_{\mathsf{E}} := \lceil\, \mathsf{L} \in \mathsf{FtrL(E)} \mapsto \mathsf{L} /\!\!/\!\!/ \mathsf{E}\, \rceil\ .$$

(3) Prop.: $Bijdiv_{\mathsf{E}} \in \lceil \mathsf{FtrL(E)} \longleftrightarrow \mathsf{FtrR(E)} \rceil$ e $\big(Bijdiv_{\mathsf{E}}\big)^{-1} = \lceil\, \mathsf{R} \in \mathsf{FtrR(E)} \mapsto \mathsf{E} \setminus\!\!\setminus\!\!\setminus \mathsf{R}\, \rceil$ ▮

(4) Prop.: $|\mathsf{FtrL(E)}| = |\mathsf{FtrR(E)}| = |\mathsf{Ftrn_2(E)}|$ ▮

Conviene riferire $\mathsf{Ftrn_2(E)}$, $\mathsf{FtrL(E)}$ e $\mathsf{FtrR(E)}$ ad un unico insieme di indici I e scrivere:

$$\mathsf{Ftrn_2(E)} =: \{\langle \mathsf{L}_i, \mathsf{R}_i \rangle \mid: i \in \mathsf{I}\}\ ,\ \mathsf{FtrL(E)} =: \{\mathsf{L}_i \mid: i \in \mathsf{I}\}\ ,\ \mathsf{FtrR(E)} =: \{\mathsf{R}_i \mid: i \in \mathsf{I}\}\ ,$$

dove $\forall i \in \mathsf{I}$: $\mathsf{L}_i := \mathsf{E} \setminus\!\!\setminus\!\!\setminus \mathsf{R}_i$ e $\mathsf{R}_i := \mathsf{L}_i /\!\!/\!\!/ \mathsf{E}$.

L'insieme degli indici I lo chiamiamo **etichettatura di bifattorizzazione** del linguaggio E e lo denotiamo con $bfctix(\mathsf{E})$.

C30b.07 Per ogni linguaggio $\mathsf{E} \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}$ denotiamo:
con $\mathsf{DrlwL(E)}$ l'insieme delle sue derivate rispetto a parole da sinistra ,
con $\mathsf{DrlwR(E)}$ l'insieme delle sue derivate rispetto a parole da destra ,
con $\mathsf{DrlL(E)}$ l'insieme delle sue derivate rispetto a linguaggi da sinistra ,
con $\mathsf{DrlR(E)}$ l'insieme delle sue derivate rispetto a linguaggi da destra .

(1) Prop.: $\mathsf{DrlwL(E)} = \{u /\!\!/ \mathsf{E} \mid: u \in \mathsf{A}^*\} = \{u /\!\!/\!\!/ \mathsf{E} \mid: u \in \mathsf{A}^*\} \subseteq \mathsf{FtrR(E)} =$

$$= \{ \bigcap_{\mathsf{D} \in \mathbf{D}} \mathsf{D} \mid: \mathbf{D} \subseteq \mathsf{DrlwL(E)}\} = \{\mathsf{A}^* \setminus \mathsf{C} \mid: \mathsf{C} \in \mathsf{DrlL}(\mathsf{A}^* \setminus \mathsf{E})\}\ ▮$$

(2) Prop.: $\mathsf{DrlwR(E)} = \{v \setminus\!\!\setminus \mathsf{E} \mid: v \in \mathsf{A}^*\} = \{v \setminus\!\!\setminus\!\!\setminus \mathsf{E} \mid: v \in \mathsf{A}^*\} \subseteq \mathsf{FtrL(E)} =$

$$= \{ \bigcap_{\mathsf{D} \in \mathbf{D}} \mathsf{D} \mid: \mathbf{D} \subseteq \mathsf{DrlwR(E)}\} = \{\mathsf{A}^* \setminus \mathsf{C} \mid: \mathsf{C} \in \mathsf{DrlR}(\mathsf{A}^* \setminus \mathsf{E})\}\ ▮$$

Si noti che $\mathsf{A}^* = \bigcap_{\mathsf{D} \in \emptyset} \mathsf{D} \in \mathsf{FtrL(E)} \cap \mathsf{FtrR(E)}$.

Si osserva anche che $\mathsf{E} = \bigcap\{\mathsf{D} \in \{\mathsf{E}\} = \{\mathsf{E} \setminus\!\!\setminus \mu\} = \{\mu /\!\!/ \mathsf{E}\} : \mid: \mathsf{D} \in \mathsf{FtrL(E)} \cap \mathsf{FtrR(E)}\}$.

Abbiamo inoltre $\mathsf{E} \in \mathbf{P}_{\mathsf{A}} \implies \mathsf{DrlR}(\mathsf{A}^* \setminus \mathsf{E}), \mathsf{DrlL}(\mathsf{A}^* \setminus \mathsf{E}) \ni \mathsf{A}^* \iff \emptyset \in \mathsf{FtrL(E)} \cap \mathsf{FtrR(E)}$ in accordo con le definizioni.

C30b.08 **(1) Prop.**: $(\mathsf{E} \setminus\!\!\setminus\!\!\setminus \mathsf{F}) /\!\!/\!\!/ \mathsf{E} = \mathsf{F} \iff \mathsf{F} \in \mathsf{FtrR(E)}$; $\mathsf{E} \setminus\!\!\setminus\!\!\setminus (\mathsf{F} /\!\!/\!\!/ \mathsf{E}) = \mathsf{F} \iff \mathsf{F} \in \mathsf{FtrL(E)}$.

(2) Prop.: Siano $\langle \mathsf{L}_1, \mathsf{R}_1 \rangle$, $\langle \mathsf{L}_2, \mathsf{R}_2 \rangle \in \mathsf{Ftrn_2(E)}$; $\mathsf{L}_1 \subset \mathsf{L}_2 \iff \mathsf{R}_1 \supset \mathsf{R}_2$.

Dim.: "$\Longleftarrow$": $\mathsf{L}_1 \subset \mathsf{L}_2$ e per 11:2.3(b) $\implies \mathsf{R}_1 \supseteq \mathsf{R}_2$, e per 11:2.5(c) $\implies \mathsf{R}_1 \neq \mathsf{R}_2$.

"$\Longrightarrow$": $\mathsf{R}_1 \supset \mathsf{R}_2$ per argomentazioni duali-LR delle precedenti implica $\mathsf{L}_1 \subseteq \mathsf{L}_2$, $\mathsf{L}_1 \neq \mathsf{L}_2$ ▮

C30b.09 Per maggiore ccompletezza conviene collegare alcune nozioni relative alle fattorizzazioni di lunghezza 2 alla nozione generale di connessione di Galois.

Si dice **relazione di fattorizzazione** del linguaggio E entro A^* con $\mathsf{A} := \mathsf{E}^{\mathrm{minalf}}$:

$$\mathsf{Ftrel(E)} := \{\langle u, v \rangle \in \mathsf{A}^* \times \mathsf{A}^* \mid u\, v \in \mathsf{E}\}\ .$$

Si dicono **controdivisione sinistra del linguaggio** E e **controdivisione destra del linguaggio** E, risp.:

$$\mathsf{E}_{\backslash\!\backslash\!\backslash} \;:=\; \left\lceil \mathsf{F}\in\mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \;\;\not\vdash\;\; \mathsf{E}\backslash\!\backslash\!\backslash\mathsf{F} \right\rceil \;\in\; \left\lceil \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \longmapsto \mathsf{FtrL}(\mathsf{E}) \right\rceil ,$$

$$\mathsf{E}_{///} \;:=\; \left\lceil \mathsf{F}\in\mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \;\;\not\vdash\;\; \mathsf{F}///\mathsf{E} \right\rceil \;\in\; \left\lceil \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \longmapsto \mathsf{FtrR}(\mathsf{E}) \right\rceil .$$

C30b.10 Vediamo ora come si esprimono **esigenza**, **coesigenza**, **connessione di Galois**, **funzioni di chiusura** e **sistemi di chiusura** per la relazione di fattorizzazione di un linguaggio.

Prop.

$$exg\mathsf{Ftrel}(\mathsf{E}) \;:=\; \left\lceil \mathsf{F}\in\mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \;\;\not\vdash\;\; \{v\in\mathsf{A}^* \;\rrbracket\; \forall u\in\mathsf{F} \;:\; u\cdot v\in\mathsf{E}\} \right\rceil \;=\; \mathsf{E}_{///} \;;$$

$$cexg\mathsf{Ftrel}(\mathsf{E}) \;:=\; \left\lceil \mathsf{F}\in\mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \;\;\not\vdash\;\; \{u\in\mathsf{A}^* \;\rrbracket\; \forall v\in\mathsf{F} \;:\; u\cdot v\in\mathsf{E}\} \right\rceil \;=\; \mathsf{E}_{\backslash\!\backslash\!\backslash} \;;$$

$$Galconn\mathsf{Ftrel}(\mathsf{E}) := \langle \mathsf{A}^*, \mathsf{A}^*, \mathsf{E}_{///}, \mathsf{E}_{\backslash\!\backslash\!\backslash} \rangle \;;$$

$$Lclass\mathsf{Ftrel}(\mathsf{E}) := \mathsf{E}_{///}\circ\mathsf{E}_{\backslash\!\backslash\!\backslash} = \left\lceil \mathsf{F}\in\mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \;\;\not\vdash\;\; \mathsf{E}\backslash\!\backslash\!\backslash(\mathsf{F}///\mathsf{E}) \right\rceil \;;\; Rclsy\mathsf{Ftrel}(\mathsf{E}) = \mathsf{FtrL}(\mathsf{E}) \;;$$

$$Rclass\mathsf{Ftrel}(\mathsf{E}) := \mathsf{E}_{\backslash\!\backslash\!\backslash}\circ\mathsf{E}_{///} = \left\lceil \mathsf{F}\in\mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \;\;\not\vdash\;\; (\mathsf{E}\backslash\!\backslash\!\backslash\mathsf{F})///\mathsf{E} \right\rceil \;;\; Rclsy\mathsf{Ftrel}(\mathsf{E}) = \mathsf{FtrR}(\mathsf{E}) \;\;.$$

C30b.11 Consideriamo $\mathsf{E}\in\mathbf{Lng}$, la corrispondente etichettatura di bifattorizzazione $I := bfctix(\mathsf{E})$ e il corrispondente insieme delle bifattorizzazioni $\mathsf{Ftrn}_2(\mathsf{E}) \;=\; \{\langle i\in\mathsf{I} :\mid \mathsf{L}_i,\mathsf{R}_i\rangle\}$.

Per $i,j\in\mathsf{I}$ si dice **fattore centrale del linguaggio** E relativo ad L_i ed R_j, e si denota qui con $\mathsf{E}\boldsymbol{FtrC}\langle i,j\rangle$ il linguaggio massimo nella posizione centrale entro la trifattorizzazione di E che presenta a sinistra il fattore L_i e a destra R_j.

Più concisamente ci serviamo del linguaggio $\mathsf{E}_{ij} := \mathsf{E}\boldsymbol{FtrC}\langle i,j\rangle$ ed abbiamo le seguenti relazioni:

$$\langle \mathsf{L}_i,\mathsf{E}_{ij},\mathsf{R}_j\rangle \in \mathsf{Ftrn}_3(\mathsf{E}) \quad,\quad \mathsf{E}_{ij}\in\mathsf{Ftr}(\mathsf{E}) \quad,\quad \langle \mathsf{L}_i,\mathsf{E}_{ij},\mathsf{R}_j\rangle \;=\; maxext_{2,\mathsf{E}}\langle \mathsf{L}_i,\emptyset,\mathsf{R}_j\rangle \;.$$

Può accadere che sia $\mathsf{E}_{ij}=\emptyset$; ciò avviene sse esistono $u\in\mathsf{L}_i$ e $v\in\mathsf{R}_j$ tali che $u\cdot\mathsf{A}^*\cdot v\bigcap\mathsf{E}=\emptyset$ e in tal caso deve essere $\mathsf{L}_i\cdot\mathsf{R}_j\not\subseteq\mathsf{E}$.

C30b.12 Continuiamo a usare le notazioni precedenti.

(1) Prop.: $\forall\, i,j\in\mathsf{I} \;:\; \langle \mathsf{L}_i,\mathsf{E}_{ij}\rangle \in \mathsf{Ftrn}_2(\mathsf{L}_j)$, $\langle \mathsf{E}_{ij},\mathsf{R}_j\rangle \in \mathsf{Ftrn}_2(\mathsf{R}_i)$.

Dim.: $\mathsf{L}_i\cdot\mathsf{E}_{ij}\subseteq\mathsf{L}_j$, poiché altrimenti $\mathsf{L}_j\neq\mathsf{E}\backslash\!\backslash\!\backslash\mathsf{R}_j$, mentre $\mathsf{E}_{ij}\cdot\mathsf{R}_j\subseteq\mathsf{R}_i$ perché in caso contrario sarebbe $\mathsf{R}_i\neq\mathsf{L}_i///\mathsf{E}$.

Se fosse $maxext_{2,\mathsf{L}_j}\langle \mathsf{L}_i,\mathsf{E}_{ij}\rangle = \langle \mathsf{L}_i,\mathsf{E}_{ij}{}'\rangle \circ maxext_{1,\mathsf{R}_i}\langle \mathsf{E}_{ij},\mathsf{R}_j\rangle = \langle \mathsf{E}_{ij}{}',\mathsf{R}_j\rangle$ con $\mathsf{E}_{ij}{}'\supset\mathsf{E}_{ij}$ sarebbe $maxext_{2,\mathsf{E}}\langle \mathsf{L}_i,\emptyset,\mathsf{R}_j\rangle = \langle \mathsf{L}_i,\mathsf{E}_{ij}{}',\mathsf{R}_j\rangle$.

Se fosse $maxext_{a,\mathsf{L}_j}\langle \mathsf{L}_i,\mathsf{E}_{ij}\rangle = \langle \mathsf{L}_i{}',\mathsf{E}_{ij}\rangle$ con $\mathsf{L}_i{}'\supset\mathsf{L}_i$ sarebbe $\mathsf{E}\backslash\!\backslash\!\backslash\mathsf{R}_i=\mathsf{L}_i{}'$.

Se fosse $maxext_{2,\mathsf{R}_i}\langle \mathsf{E}_{ij},\mathsf{R}_j{}'\rangle$ con $\mathsf{R}_j{}'\supset\mathsf{R}_j$ sarebbe $\mathsf{L}_j///\mathsf{E}=\mathsf{R}_j{}'$ ▮

(2) Prop.: $\forall\, i,j\in\mathsf{I} \;:\; \mathsf{E}_{ij}=\mathsf{L}_i///\mathsf{L}_j=\mathsf{R}_i\backslash\!\backslash\!\backslash\mathsf{R}_j=\mathsf{L}_i///\mathsf{E}\backslash\!\backslash\!\backslash\mathsf{R}_j$.

Dim.: Discende da (1) ▮

(3) Prop.: $\forall\, i,j\in\mathsf{I} \;:\; \langle \mathsf{L}_i,\mathsf{E}_{ij},\mathsf{R}_j\rangle \in \mathsf{Ftrn}_3(\mathsf{E})$.

Dim.: Segue da (1) ▮

(4) Prop.: $\forall\, s=2,3,\ldots\,,\; i_1,i_2,\ldots,i_{s-1}\in\mathsf{I} \;:\; \langle \mathsf{L}_{i_1},\mathsf{E}_{i_1 i_2},\ldots,\mathsf{E}_{i_{s-2}i_{s-1}},\mathsf{R}_{i_{s-1}}\rangle \in \mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{E})$.

Dim.: Anche questa segue da (1) . ▮

C30 c. matrice dei fattori di un linguaggio

C30c.01 Nel seguito focalizziamo l'attenzione sul linguaggio $\mathsf{E} \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}$ e scriviamo $\mathsf{I} := bfctix(\mathsf{E})$ per l'etichettatura delle bifattorizzazioni di E $\mathsf{Ftrn}_2(\mathsf{E}) =: \{\langle \mathsf{L}_i, \mathsf{R}_i \rangle \mid: i \in \mathsf{I}\}$ e l'insieme dei fattori centrali di E $\{\mathsf{E}_{ij} \mid: i, j \in \mathsf{I}\}$.

C30c.02 **Teorema** Definiamo la coppia di indici $\langle l, r\rangle \in \mathsf{I} \times \mathsf{I}$ in modo che si abbia $\mathsf{L}_l = \mathsf{E} \backslash\!\backslash\!\backslash \mathsf{E}$ ed $\mathsf{R}_r = \mathsf{E} /\!/\!/ \mathsf{E}$.
Allora abbiamo $\mathsf{L}_r = \mathsf{R}_l = \mathsf{E}_{lr} = \mathsf{E}$ e $\forall\, i \in \mathsf{I} \;:\; \mathsf{E}_{li} = \mathsf{L}_i$, $\mathsf{E}_{ir} = \mathsf{R}_i$.

Dim.: Per gli indici l ed r e per i linguaggi previsti abbiamo :

$\mathsf{L}_r = \mathsf{E} \backslash\!\backslash\!\backslash \mathsf{R}_r = \mathsf{E} \backslash\!\backslash\!\backslash (\mathsf{E} /\!/\!/ \mathsf{E}) = \mathsf{E}$.

$\mathsf{R}_l = \mathsf{L}_l /\!/\!/ \mathsf{E} = (\mathsf{E} \backslash\!\backslash\!\backslash \mathsf{E}) /\!/\!/ \mathsf{E} = \mathsf{E}$.

$\mathsf{E}_{lr} = [11 : 2.9(b)] = \mathsf{L}_l /\!/\!/ \mathsf{E} \backslash\!\backslash\!\backslash \mathsf{R}_r = \mathsf{E} \backslash\!\backslash\!\backslash \mathsf{R}_r = \mathsf{L}_l /\!/\!/ \mathsf{E} = \mathsf{E}$.

$\mathsf{E}_{li} = \mathsf{L}_l /\!/\!/ \mathsf{E} \backslash\!\backslash\!\backslash \mathsf{R}_i = \mathsf{R}_l \backslash\!\backslash\!\backslash \mathsf{R}_i = \mathsf{E} \backslash\!\backslash\!\backslash \mathsf{R}_i = \mathsf{L}_i$.

$\mathsf{E}_{ir} = \mathsf{L}_i /\!/\!/ \mathsf{E} \backslash\!\backslash\!\backslash \mathsf{R}_r = \mathsf{L}_i /\!/\!/ \mathsf{L}_r = \mathsf{L}_i /\!/\!/ \mathsf{E} = \mathsf{R}_i$ ▮

C30c.03 **Teorema** $\mathsf{Ftr}(\mathsf{E}) = \{\mathsf{E}_{ij} \mid: i, j \in \mathsf{I}\}$.

Dim.: $\forall\, i, j \in \mathsf{I} \;:\; \mathsf{E}_{ij} = \mathsf{L}_i /\!/\!/ \mathsf{E} \backslash\!\backslash\!\backslash \mathsf{E}_j \in \mathsf{Ftr}(\mathsf{E})$. Viceversa per il precedente teorema $\mathsf{FtrL}(\mathsf{E}) = \{\mathsf{E}_{li} \mid: i \in \mathsf{I}\}$ e $\mathsf{FtrR}(\mathsf{E}) = \{\mathsf{E}_{ir} \mid: i \in \mathsf{I}\}$.
Inoltre per ogni $s = 3, 4, 5, ...$ consideriamo $\mathbf{F} := \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \in \mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{E})$, cioè stabiliamo che sia $\forall h = 2, ..., s-1 \;:\; \mathsf{F}_h = \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \boldsymbol{Prj}_h$. Allora ogni F_h compare come secondo fattore di una trifattorizzazione $\langle \mathsf{H}, \mathsf{F}_h, \mathsf{K} \rangle \in \mathsf{Ftrn}_3(\mathsf{E})$ e quindi se $\mathsf{H} =: \mathsf{L}_i$ e $\mathsf{K} =: \mathsf{R}_j$ si ha $\mathsf{F}_h = \mathsf{E}_{ij}$ ▮

C30c.04 Si dice **matrice dei fattori del linguaggio** E la seguente matrice quadrata di linguaggi su A:

$$\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}) := [\mathsf{E}_{i,j} \mid: i, j \in \mathsf{I}] \in \lceil \mathsf{I} \times \mathsf{I} \longmapsto \mathsf{Ftr}(\mathsf{E}) \rceil .$$

Chiamiamo **kit di fattorizzazione del linguaggio** E:

$$\mathsf{FTR}(\mathsf{E}) := \langle \mathsf{I}, l, r, \mathsf{FtrL}(\mathsf{E}) = \{\mathsf{L}_i \mid: i \in \mathsf{I}\}, \mathsf{FtrR}(\mathsf{E}) = \{\mathsf{R}_i \mid: i \in \mathsf{I}\}, \mathsf{MFtr}(\mathsf{E}) = [\mathsf{E}_{i,j} \mid: i, l \in \mathsf{I}] \rangle.$$

Questa struttura di dati racciglie tutte le informazioni generali riguardanti le fattorizzazioni di E.

C30c.05 Ricordiamo da 11:2.3(c) che $\mathsf{A}^* \in \mathsf{FtrL}(\mathsf{E}) \bigcap \mathsf{FtrR}(\mathsf{E})$ e che si definiscono gli indici $h, k \in \mathsf{I}$ ponendo $\mathsf{A}^* =: \mathsf{L}_h$ e $\mathsf{A}^* =: \mathsf{R}_k$.

Prop. $\mathsf{L}_k = \mathsf{L}_k \cdot \mathsf{A}^*$; $\mathsf{R}_h = \mathsf{A}^* \cdot \mathsf{R}_h$; $\forall\, i \in \mathsf{I}$, $m = h, k \;:\; \mathsf{E}_{mi} = \mathsf{A}^* \cdot \mathsf{E}_{mi}$, $\mathsf{E}_{im} = \mathsf{E}_{im} \cdot \mathsf{A}^*$.

C30c.06 **Prop.** $\forall\, i \in \mathsf{I} \;:\; \mathsf{E}_{ii} = \mathsf{L}_i /\!/\!/ \mathsf{L}_i = \mathsf{R}_i \backslash\!\backslash\!\backslash \mathsf{R}_i \ni \mu$.

Dim.: $\mathsf{L}_i, \mathsf{R}_i \subseteq \mathsf{E} \implies \mathsf{L}_i \cdot \mu \cdot \mathsf{R}_i \subseteq \mathsf{E} \implies \mu \in \mathsf{E}_{ii}$ ▮

C30c.07 In conseguenza dei due precedenti teoremi alla matrice dei fattori di E si può presentare il seguente aspetto generale:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccccc} ... & \mathsf{R}_i & \mathsf{R}_j & ... & \mathsf{R}_l=\mathsf{E} & \mu+\mathsf{R}_r & ... & \mathsf{R}_h=\mathsf{A}^*\mathsf{R}_h & \mathsf{R}_k=\mathsf{A}^* \end{array} \\
\begin{array}{c} ... \\ \mathsf{L}_i \\ \mathsf{L}_j \\ ... \\ \mu+\mathsf{L}_l \\ \mathsf{L}_r=\mathsf{E} \\ ... \\ \mathsf{L}_h=\mathsf{A}^* \\ \mathsf{L}_k=\mathsf{L}_k\mathsf{A}^* \end{array} &
\begin{pmatrix}
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
... & \mu+\mathsf{E}_{ii} & \mathsf{E}_{i,j} & ... & \mathsf{E}_{i,l} & \mathsf{R}_i & ... & \mathsf{E}_{ih}\mathsf{A}^* & \mathsf{E}_{ik}\mathsf{A}^* \\
... & \mathsf{E}_{ji} & \mu+\mathsf{E}_{j,j} & ... & \mathsf{E}_{j,l} & \mathsf{R}_j & ... & \mathsf{E}_{j,h}\cdot\mathsf{A}^* & \mathsf{E}_{j,k}\cdot\mathsf{A}^* \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
... & \mathsf{L}_i & \mathsf{L}_j & ... & \mu+\mathsf{L}_l & \mathsf{E} & ... & \mathsf{A}^* & \mathsf{L}_k\mathsf{A}^* \\
... & \mathsf{E}_{ri} & \mathsf{E}_{rj} & ... & \mathsf{E}_{rl} & \mu+\mathsf{R}_r & ... & \mathsf{E}_{r,h}\mathsf{A}^* & \mathsf{E}_{r,k}\mathsf{A}^* \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & \\
... & \mathsf{A}^*\mathsf{E}_{hi} & \mathsf{A}^*\mathsf{E}_{hj} & ... & \mathsf{A}^*\mathsf{E}_{hl} & \mathsf{A}^*\mathsf{R}_h & ... & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^*\mathsf{E}_{hk}\mathsf{A}^* \\
... & \mathsf{A}^*\mathsf{E}_{ki} & \mathsf{A}^*\mathsf{E}_{kj} & ... & \mathsf{A}^*\mathsf{E}_{kl} & \mathsf{A}^* & ... & \mathsf{A}^*\mathsf{E}_{kh}\mathsf{A}^* & \mathsf{A}^*
\end{pmatrix}
\end{array},$$

dove le colonne sono contraddistinte da elementi di $\mathsf{FtrR}(\mathsf{E})$ e le righe da elementi di $\mathsf{FtrL}(\mathsf{E})$.

C30c.08 Esempi

(1)
$$\mathsf{MFtr}(\mathsf{A}^*) \;=\; \begin{array}{cc} & \mathsf{A}^* \\ \mathsf{A}^* & \begin{pmatrix} \mathsf{A}^* \end{pmatrix} \end{array}$$

(2)
$$\mathsf{MFtr}(\emptyset) \;=\; \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \emptyset & \mathsf{A}^* \end{array} \\ \begin{array}{c} \emptyset \\ \mathsf{A}^* \end{array} & \begin{pmatrix} \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* \\ \mathsf{A}^* & \emptyset \end{pmatrix} \end{array}$$

(3)
$$\mathsf{MFtr}(\mu) \;=\; \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \emptyset & \mu & \mathsf{A}^* \end{array} \\ \begin{array}{c} \emptyset \\ \mu \\ \mathsf{A}^* \end{array} & \begin{pmatrix} \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* \\ \mathsf{A}^* & \mu & \emptyset \\ \mathsf{A}^* & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \end{array}$$

(4)
$$\mathsf{MFtr}(a) \;=\; \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \emptyset & \mu & a & \mathsf{A}^* \end{array} \\ \begin{array}{c} \emptyset \\ \mu \\ a \\ \mathsf{A}^* \end{array} & \begin{pmatrix} \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* \\ \mathsf{A}^* & a & \mu & \emptyset \\ \mathsf{A}^* & \mu & \emptyset & \emptyset \\ \mathsf{A}^* & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \end{array}$$

Consideriamo infine la stringa di s caratteri tutti diversi $a_1a_2a_3\cdots a_s$;

$$\mathsf{MFtr}(a_1...a_s) \;=\; \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} \emptyset & \mu & a_s & \cdots & a_3...a_s & a_2...a_s & a_1...a_s & \mathsf{A}^* \end{array} \\
\begin{array}{c} \emptyset \\ \mu \\ a_1 \\ a_1a_2 \\ \vdots \\ a_1...a_{s-1} \\ a_1...a_s \\ \mathsf{A}^* \end{array} &
\begin{pmatrix}
\mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \cdots & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* \\
\mathsf{A}^* & a_1...a_s & a_1...a_{s-1} & \cdots & a_1a_2 & a_1 & \mu & \emptyset \\
\mathsf{A}^* & a_2...a_s & a_2...a_{s-1} & \cdots & a_2 & \mu & \emptyset & \emptyset \\
\mathsf{A}^* & a_3...a_s & a_3...a_{s-1} & \cdots & \mu & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathsf{A}^* & a_s & \mu & \cdots & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\
\mathsf{A}^* & \mu & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\
\mathsf{A}^* & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset
\end{pmatrix}
\end{array}$$

C30c.09 Vediamo altre proprietà che consentono di precisare la struttura delle matrici dei fattori del generico linguaggio E; per questo poniamo $\mathsf{A} := \mathsf{E}^{\text{minalf}}$.

Prop. $h = k$ sse $\mathsf{E} = \mathsf{A}^*$.

C30c.10 **(1) Prop.:** $\forall\, i \in \mathsf{I}\ :\ \mathsf{R}_i \not\subset \mathsf{R}_h = \mathsf{A}^* \cdot \mathsf{R}_h$.

Dim.: Se fosse $\mathsf{R}_i \subset \mathsf{R}_h$, per 11:2.3(b) sarebbe $\mathsf{L}_i \supset \mathsf{L}_h = \mathsf{A}^*$, il che è assurdo ▮

(2) Prop.: $\forall\, i \in \mathsf{I}\ :\ \mathsf{L}_i \not\subset \mathsf{L}_k = \mathsf{L}_k \cdot \mathsf{A}^*$.

Dim.: Come sopra, se fosse $\mathsf{L}_i \subset \mathsf{L}_k$, ancora per 11:2.3(2), sarebbe $\mathsf{R}_i \supset \mathsf{R}_k = \mathsf{A}^*$, anche questo un assurdo ▮

(3) Prop.: $\emptyset \in \mathsf{FtrL}(\mathsf{E}) \iff \mathsf{L}_k = \emptyset \iff \forall\, i \in \mathsf{I}\ :\ \mathsf{E}_{ki} = \mathsf{A}^*$ ed $\mathsf{E} \neq \mathsf{A}^*$.

Dim.: $\emptyset \in \mathsf{FtrL}(\mathsf{E})$, per la proposizione (2) comporta $\mathsf{L}_k = \emptyset$; ovvio il viceversa ; $\forall\, i \in \mathsf{I} : \mathsf{E}_{ki} = \mathsf{A}^*$ ed $\mathsf{L}_k \neq \emptyset \implies \forall\, i \in \mathsf{I} :\ maxext_{3,\mathsf{E}}\langle \mathsf{L}_k \cdot \mathsf{A}^*, \mathsf{A}^*, \emptyset\rangle = \langle \mathsf{L}_k \cdot \mathsf{A}^*, \mathsf{A}^*, \mathsf{R}_i\rangle \implies \mathsf{I}^\sharp = 1 \implies \mathsf{E} = \mathsf{A}^*$ e quindi $\forall\, i \in \mathsf{I} : \mathsf{E}_{ki} = \mathsf{A}^*$ ed $\mathsf{E} \neq \mathsf{A}^* \implies \mathsf{L}_k = \emptyset$; ovvio il viceversa ▮

(4) Prop.: $\emptyset \in \mathsf{FtrR}(\mathsf{E}) \iff \mathsf{R}_h = \emptyset \iff \forall\, i \in \mathsf{I} : \mathsf{E}_{ih} = \mathsf{A}^*$ ed $\mathsf{E} \neq \mathsf{A}^*$.

Dim.: Si effettua come duale-LR di quella di (3) ▮

C30c.11 **Prop.** $\forall i \in \mathsf{I} : \mathsf{E}_{im} \subseteq \mathsf{E}_{in} \iff \mathsf{L}_m \subset \mathsf{L}_n \iff \mathsf{R}_m \supset \mathsf{R}_n \iff \forall\, i \in \mathsf{I} : \mathsf{E}_{mi} \supseteq \mathsf{E}_{ni}$.

Dim.: $\mathsf{E}_{im} \subseteq \mathsf{E}_{in}, i = l \implies \mathsf{L}_m \subseteq \mathsf{L}_n$ e per 11:2.5(c) abbiamo $\mathsf{L}_m \subset \mathsf{L}_n$; ma $\mathsf{L}_m \subset \mathsf{L}_n$ implica ed è implicato da $\mathsf{R}_m \supset \mathsf{R}_n$ a causa di 11:2.3(b); $\mathsf{E}_{mi} \supseteq \mathsf{E}_{ni},\ \ i = r \implies \mathsf{R}_m \supseteq \mathsf{R}_n$ e per 11:2.5(c) abbiamo $\mathsf{R}_m \supset \mathsf{R}_n$;

ma $\mathsf{R}_m \supset \mathsf{R}_n \implies \forall\, i \in \mathsf{I}\ :\ \mathsf{E}_{im} = \lfloor 11:2.9(c) \rfloor = \mathsf{R}_i \backslash\!\backslash\!\backslash \mathsf{R}_m \subset \mathsf{R}_i \backslash\!\backslash\!\backslash \mathsf{R}_n = \mathsf{E}_{in}$;

mentre $\forall\, i \in \mathsf{I} : \mathsf{L}_m \subset \mathsf{L}_n \implies \mathsf{E}_{mi} = [11:2.9(c)] = \mathsf{L}_m /\!/\!/ \mathsf{L}_i \supseteq \mathsf{L}_n /\!/\!/ \mathsf{L}_i = \mathsf{E}_{ni}$. ▮

C30c.12 **Prop.** $\mathsf{L}_k = \mathsf{L}_k \cdot \mathsf{A}^* \subset \mathsf{L}_m \subset \mathsf{L}_h = \mathsf{A}^* \iff \mathsf{R}_k = \mathsf{A}^* \supset \mathsf{R}_m \supset \mathsf{R}_h = \mathsf{A}^* \cdot \mathsf{R}_h \iff$
$\forall\, i \in \mathsf{I} : \mathsf{E}_{ki} = \mathsf{A}^* \cdot \mathsf{E}_{ki} \supseteq \mathsf{E}_{mi} \supseteq \mathsf{E}_{hi} = \mathsf{A}^* \cdot \mathsf{E}_{hi} \iff \forall\, i \in \mathsf{I} : \mathsf{E}_{ik} \cdot \mathsf{A}^* \subseteq \mathsf{E}_{im} \subseteq \mathsf{E}_{ih} = \mathsf{E}_{ih} \cdot \mathsf{A}^*$
$\implies \mu \notin \mathsf{E}_{mk}\ ,\ \mu \notin \mathsf{E}_{hm}$.

Dim.: Tutte le implicazioni eccettuata l'ultima seguono dalla 11:3.12;

$\mu \in \mathsf{E}_{mk} \implies \mathsf{L}_m \cdot \mathsf{E}_{mk} \cdot \mathsf{A}^* \supseteq \mathsf{L}_m \cdot \mathsf{A}^*$ in contrasto con $\mathsf{L}_m \supset \mathsf{L}_k$; $\mu \in \mathsf{E}_{hm} \implies \mathsf{A}^* \cdot \mathsf{E}_{hm} \cdot \mathsf{R}_m \supseteq \mathsf{A}^* \cdot \mathsf{R}_m$ in conflitto con $\mathsf{R}_m \supset \mathsf{R}_h$ ▮

C30c.13 **Prop.** $l = r \iff \mathsf{E} = \mathsf{E}^* \leq_{Mnd} \mathsf{A}^* \iff \forall\, s \in \{2,3,...\} : \langle \mathsf{E},...,\mathsf{E}\rangle \in \mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{E})$.

Dim.: $l = r$ allora per $\lfloor$ 11:3.1 $\rfloor$ $\mathsf{E} = \mathsf{L}_l = \mathsf{L}_r = \mathsf{R}_l = \mathsf{R}_r = \mathsf{E}_{ll}$ $\lfloor$ 11:3.4 $\rfloor$

$\mu \in \mathsf{E}\ ,\ \mathsf{E} \cdot \mathsf{E} \subseteq \mathsf{E} \implies \mathsf{E} = \mathsf{E}^2 = \mathsf{E}^+ = \mathsf{E}^*$.

$\mathsf{E} = \mathsf{E}^* \implies \mathsf{E} = \mathsf{E} \cdot \mathsf{E} = \mathsf{E}^2 = \mathsf{E}^3 = \cdots \implies \forall\, s \geq 2 : \langle \mathsf{E},...,\mathsf{E}\rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{E})$;

se fosse $maxext_{z,\mathsf{E}}\langle \mathsf{E},...,\mathsf{E},...,\mathsf{E}\rangle = \langle \mathsf{E},...,\mathsf{E}',...,\mathsf{E}\rangle$ con $z \in \mathsf{E}' \setminus \mathsf{E}$

dato che $\mu \in \mathsf{E}$, $\ z \in \mathsf{E} \cdot ... \cdot \mathsf{E}' \cdot ... \cdot \mathsf{E} \subseteq \mathsf{E}$ assurdo ; quindi $\forall\, s \geq 2 : \langle \mathsf{E},...,\mathsf{E}\rangle \in \mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{E})$.

$\forall\, s \geq 2 : \langle \mathsf{E},...,\mathsf{E}\rangle \in \mathsf{Ftrn}_s(\mathsf{E}) \implies \langle \mathsf{E},\mathsf{E}\rangle \in \mathsf{Ftrn}_2(\mathsf{E}) \implies r = s$ ▮

C30c.14 Prendiamo in considerazione $\mathsf{E} \in \mathbf{Lng}_\mathsf{A}$ con

$$\mathsf{FTR}(\mathsf{E}) = \langle\ \mathsf{I}\ ,\ l\ ,\ r\ , \{\mathsf{L}_i \mid: i \in \mathsf{I}\}, \{\mathsf{R}_i \mid: i \in \mathsf{I}\}, [\mathsf{E}_{i,j} \mid: i,j \in \mathsf{I}]\rangle\ .$$

Teorema (a) $\mathsf{E}_{i,j} \cdot \mathsf{E}_{j,m} \subseteq \mathsf{E}_{i,m}$.

(b) $\mathsf{F} \cdot \mathsf{G} \subseteq \mathsf{E}_{i,m} \iff \mathsf{I} \ni j$ tale che $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{E}_{i,j}$ e $\mathsf{G} \subseteq \mathsf{E}_{j,m}$.

(c) $\mathsf{F}_1 \cdot \mathsf{F}_2 \cdot ... \cdot \mathsf{F}_s \subseteq \mathsf{E}_{i,k} \iff \mathsf{I} \ni i_1,...,i_{h-1}$ tali che $\mathsf{F}_1 \subseteq \mathsf{E}_{i,i_1}\ ,\ \mathsf{F}_2 \subseteq \mathsf{E}_{i_1,i_2}\ ,...,\ \mathsf{F}_h \subseteq \mathsf{E}_{i_{s-1},k}$.

(d) $\langle \mathsf{F}_1,\mathsf{F}_2,...,\mathsf{F}_s\rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{E}) \iff \mathsf{I} \ni i_1,...,i_{s-1}$ tali che $\mathsf{F}_1 \subseteq \mathsf{E}_{l,i_1}\ ,\ \mathsf{F}_2 \subseteq \mathsf{E}_{i_1,i_2}\ ,...,\ \mathsf{F}_s \subseteq \mathsf{E}_{i_{s-1},r}$.

(e) $w_1 \cdot w_2 \cdot ... \cdot w_s \in \mathsf{E} \iff \mathsf{I} \ni i_1,...,i_{s-1}$ tali che $w_1 \in \mathsf{E}_{l,i_1}\ ,\ w_2 \in \mathsf{E}_{i_1,i_2}\ ,...,\ w_s \in \mathsf{E}_{i_{s-1},r}$.

Dim.: (a) La 11:2.9(d) implica $\mathsf{L}_i \cdot \mathsf{E}_{i,j} \cdot \mathsf{E}_{j,m} \cdot \mathsf{R}_m \subseteq \mathsf{E} \Longrightarrow \langle \mathsf{L}_i, \mathsf{E}_{i,j} \cdot \mathsf{E}_{j,m}, \mathsf{R}_m \rangle \in \mathsf{Sftrn}_3(\mathsf{E}) \Longrightarrow \langle \mathsf{L}_i, \mathsf{E}_{i,m}, \mathsf{R}_m \rangle = maxext_{2,\mathsf{E}} \langle \mathsf{L}_i, \mathsf{E}_{i,j} \cdot \mathsf{E}_{j,m}, \mathsf{R}_m \rangle \Longrightarrow \mathsf{E}_{i,j} \cdot \mathsf{E}_{j,m} \subseteq \mathsf{E}_{i,m}$.

(b) $\mathsf{F} \cdot \mathsf{G} \subseteq \mathsf{E}_{i,m} \Longrightarrow \mathsf{L}_i \cdot \mathsf{F} \cdot \mathsf{G} \cdot \mathsf{R}_m \subseteq \mathsf{E} \Longrightarrow \langle \mathsf{L}_i \cdot \mathsf{F}, \mathsf{G} \cdot \mathsf{R}_m \rangle \in \mathsf{Sftrn}_2(\mathsf{E}) \Longrightarrow \mathsf{I} \ni j$ tale che $maxext_{3-n,\mathsf{E}}(maxext_{n,\mathsf{E}}(\langle \mathsf{L}_i \cdot \mathsf{F}, \mathsf{G} \cdot \mathsf{R}_m \rangle)) = \langle \mathsf{L}_j, \mathsf{R}_j \rangle \in \mathsf{Ftrn}_2(\mathsf{E}) \quad (n = 1, 2) \Longrightarrow (\mathsf{L}_i \cdot \mathsf{F}) \cdot \mathsf{R}_j \subseteq \mathsf{E}$ e $\mathsf{L}_j \cdot (\mathsf{G} \cdot \mathsf{R}_m) \subseteq \mathsf{E} \Longrightarrow \mathsf{F} \subseteq \mathsf{E}_{i,j}$ e $\mathsf{G} \subseteq \mathsf{E}_{j,m}$. $\mathsf{I} \ni j$ tale che $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{E}_{i,j}$ e $\mathsf{G} \subseteq \mathsf{E}_{j,m} \Longrightarrow \mathsf{F} \cdot \mathsf{G} \subseteq \mathsf{E}_{i,j} \cdot \mathsf{E}_{j,m} \subseteq \mathsf{E}_{i,m}$, quest'ultima inclusione essendo conseguenza del punto (a).

(c) Segue da (b) per induzione su h .

(d) Caso particolare di (c) relativo a $\mathsf{E}_{l,r} = \mathsf{E}$.

(e) segue dal fatto che $\langle w_1, ..., w_s \rangle \in \mathsf{Sftrn}_s(\mathsf{E})$ e da (d) . ∎

C30c.15 Per le matrici quadrate dello stesso ordine le cui entrate sono linguaggi, ed in particolare per le matrici dei fattori di un linguaggio, si può definire il prodotto riconducendosi al prodotto di matrici conformabili con entrate in un semianello. Di conseguenza sono definibili naturalmente anche le loro potenze n-esime per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque abbiamo

$$(\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^0 := \left[(\{i\} \cap \{j\})^{zu} \mid: i,j \in \mathsf{I} \right] \quad , \quad (\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^2 := \left[\sum_{k \in \mathsf{I}} \mathsf{E}_{i,k} \cdot \mathsf{E}_{k,j} \mid: i,j \in \mathsf{I} \right] \quad .... \quad ,$$

$$\forall\, n = 3,4,5,... \;:\; (\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^n := (\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^{n-1} \quad .$$

Utilizzando le prestazioni delle matrici con entrate in algebre di Kleene che si incintrano in C32d, per le matrici dei fattori si possono definire senza difficoltà anche la chiusura-cross:

$$(\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^+ := \sum_{s \in \mathbb{P}} (\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^s$$

e la chiusura-star:

$$(\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^* := \sum_{s \in \mathbb{N}} (\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^s \; .$$

C30c.16

(1) Prop.: $\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}) = (\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^2 = \lfloor \forall n \in \mathbb{N} : \rfloor = (\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^n = (\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^+ = (\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^*$.

Dim.: $(\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^2_{ik} = \sum_{j \in \mathsf{I}} \mathsf{E}_{i,j} \cdot \mathsf{E}_{j,k} \subseteq \lfloor 11 : 3.15(a) \rfloor \subseteq \mathsf{E}_{i,k} \subseteq \lfloor 11 : 3.4 \rfloor \subseteq \mathsf{E}_{i,i} \cdot \mathsf{E}_{i,k} \subseteq \sum_{j \in \mathsf{I}} \mathsf{E}_{i,j} \cdot \mathsf{E}_{j,k}$ e quindi $(\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^2_{ik} = \mathsf{E}_{ik}$ da cui $\forall\, n \in \mathbb{N} : \mathsf{MFtr}(\mathsf{E}) = (\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^n$ ed $\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}) = (\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^+$.
Per l'ultima uguaglianza basta considerare che da $\lfloor$ 11:3.4 $\rfloor$ segue $\mathsf{E}_{ii} \ni \mu$ ∎

(2) Coroll.: $\forall\, s \in \mathbb{N} \;:\; \mathsf{E} = \sum_{i_1, i_2, ..., i_{s-1} \in \mathsf{I}} \mathsf{E}_{l,i_1} \cdot \mathsf{E}_{i_1,i_2} \cdot ... \cdot \mathsf{E}_{i_{s-1},r} = (\mathsf{MFtr}(\mathsf{E}))^s_{lr}$.

C30c.17 Prop.

(a) $\mathsf{E} \in \mathbf{R}_{\mathsf{A}}$, $\mathsf{F} \in \mathbf{R} \Longrightarrow \mathsf{E} \backslash\!\backslash\!\backslash \mathsf{F}$, $\mathsf{F} /\!/\!/ \mathsf{E} \in \mathbf{R}_{\mathsf{A}}$.

(b) $\mathsf{E} \in \mathbf{R}_{\mathsf{A}} \iff \mathsf{FtrL}(\mathsf{E}) \subseteq \mathbf{R}_{\mathsf{A}} \iff \mathsf{FtrR}(\mathsf{E}) \subseteq \mathbf{R}_{\mathsf{A}} \iff \mathsf{Ftr}(\mathsf{E}) \subseteq \mathbf{R}_{\mathsf{A}}$
$\iff \mathsf{FtrL}(\mathsf{E}) \subset_\varphi \mathsf{Lng}_{\mathsf{A}} \iff \mathsf{FtrR}(\mathsf{E}) \subset_\varphi \mathsf{Lng}_{\mathsf{A}} \iff \mathsf{Ftr}(\mathsf{E}) \subset_\varphi \mathsf{Lng}_{\mathsf{A}}$.

(c) $\mathsf{E} \in \mathbf{R}_{\mathsf{A}} \Longrightarrow |\mathsf{FtrL}(\mathsf{E})| = |\mathsf{FtrR}(\mathsf{E})| = |\mathsf{DrlL}(\mathsf{A}^* \setminus \mathsf{E})| = |\mathsf{DrlR}(\mathsf{A}^* \setminus \mathsf{E})|$.

Dim.: (a) Da 11:2.2(b) ,2C5a, 2C4b, 2C4c...

(b) $\mathsf{E} \in \mathbf{R}_{\mathsf{A}} \lfloor 2E3a \rfloor \Longrightarrow \mathsf{DrlwR}(\mathsf{E})$, $\mathsf{DrlwL}(\mathsf{E}) \subset_\varphi \mathbf{R}_{\mathsf{A}} \lfloor 11 : 2.6 \rfloor \Longrightarrow$
$\mathsf{FtrL}(\mathsf{E}) = \{\bigcap_{\mathsf{D} \in \mathbf{D}} \mathsf{D} \mid: \mathbf{D} \subseteq \mathsf{DrlwR}(\mathsf{E})\}$, $\mathsf{FtrR}(\mathsf{E}) = \bigcap_{\mathsf{D} \in \mathbf{D}} \mathsf{D} \mid: \mathbf{D} \subseteq \mathsf{DrlwL}(\mathsf{E}) \subset_\varphi \mathbf{R}_{\mathsf{A}} \lfloor 11 : 2.9(c) \rfloor \Longrightarrow$
$\mathsf{Ftr}(\mathsf{E}) = \{\mathsf{L}_i /\!/\!/ \mathsf{L}_j \mid: i,j \in \mathsf{I}\} = \{\mathsf{R}_i \backslash\!\backslash\!\backslash \mathsf{R}_j \mid: i,j \in \mathsf{I}\} \subset_\varphi \mathbf{R}_{\mathsf{A}}$.

Viceversa $\mathsf{Ftr}(\mathsf{E}) \subset_\varphi \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \,\lfloor 11:3.1 \rfloor \implies \mathsf{FtrL}(\mathsf{E})$, $\mathsf{FtrR}(\mathsf{E}) \subset_\varphi \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \,\lfloor 11:2.6 \rfloor \implies$ $\mathsf{DrlwR}(\mathsf{E})$, $\mathsf{DrlwL}(\mathsf{E}) \subset_\varphi \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}} \,\lfloor 2A3a \rfloor \implies \mathsf{E} \in \mathbf{R}_{\mathsf{A}}$.

$\mathsf{Ftr}(\mathsf{E}) \subseteq \mathbf{R}_{\mathsf{A}} \implies \mathsf{FtrL}(\mathsf{E})$, $\mathsf{FtrR}(\mathsf{E}) \subseteq \mathbf{R}_{\mathsf{A}} \implies \mathsf{DrlwR}(\mathsf{E})$, $\mathsf{DrlwL}(\mathsf{E}) \subseteq \mathbf{R}_{\mathsf{A}} \,\lfloor 2E3a \rfloor \implies$
 $\mathsf{E} \in \mathbf{R}_{\mathsf{A}}$.

(c) Segue da 11:2.6 ▮

C30c.18 Algoritmo: Dati $\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2 \in \mathbf{Rcn}$, costruire S e $\mathsf{T} \in \mathbf{Rcn}$ tali che $\mathsf{S}^{\mathcal{A}} = {\mathsf{R}_1}^{\mathcal{A}} \setminus\!\!\setminus\!\!\setminus {\mathsf{R}_2}^{\mathcal{A}}$ e $\mathsf{T}^{\mathcal{A}} = {\mathsf{R}_2}^{\mathcal{A}} /\!\!/\!\!/ {\mathsf{R}_1}^{\mathcal{A}}$.

Proced.: Su R_1 si individuano [2C6a] le parole pseudoξ d innovatrici per $\xi \in \{L, R\}$; su R_2 si stabilisce quali stanno in ${\mathsf{R}_2}^{\mathcal{A}}$ e a partire da R_1 si individuano riconoscitori per ${\mathsf{R}_1}^{\mathcal{A}} \setminus\!\!\setminus v$ con $v \in {\mathsf{R}_2}^{\mathcal{A}} \bigcap ({\mathsf{R}_1}^{\mathcal{A}})^{pLdinn}$ e per $u /\!\!/ {\mathsf{R}_1}^{\mathcal{A}}$ con $u \in {\mathsf{R}_2}^{\mathcal{A}} \bigcap ({\mathsf{R}_1}^{\mathcal{A}})^{pRdinn}$.

Si individuano infine [2C4b] il riconoscitore S per ${\mathsf{R}_1}^{\mathcal{A}} \setminus\!\!\setminus\!\!\setminus {\mathsf{R}_2}^{\mathcal{A}} = \bigcap \{ {\mathsf{R}_1}^{\mathcal{A}} \setminus\!\!\setminus v \;|\!: v \in {\mathsf{R}_2}^{\mathcal{A}} \bigcap ({\mathsf{R}_1}^{\mathcal{A}})^{pLdinn} \}$ ed il riconoscitore T per ${\mathsf{R}_2}^{\mathcal{A}} /\!\!/\!\!/ {\mathsf{R}_1}^{\mathcal{A}} = \bigcap \{ u /\!\!/ {\mathsf{R}_1}^{\mathcal{A}} \;|\!: u \in {\mathsf{R}_2}^{\mathcal{A}} \bigcap ({\mathsf{R}_1}^{\mathcal{A}})^{pRdinn} \}$. ▮

C30c.19 Algoritmo: Dato $\mathsf{R} \in \mathbf{Rcn}$, costruire $\mathsf{FTR}(\mathsf{R}^{\mathcal{A}})$.

Proced.: Scriviamo $\mathsf{L} := \mathsf{R}^{\mathcal{A}}$ e ricaviamo da R i riconoscitori per le derivate a sinistra rispetto a parole; denotiamo il loro insieme con L^{LdRcn}.

Da questi si ottengono i riconoscitori per le intersezioni delle derivate e si stabiliscono le relazioni di comparazione tra tali linguaggi utilizzando anche le relazioni di inclusione

A questo punto si è in possesso dell'insieme dei fattori a destra di E e si definisce nel modo più opportuno l'insieme di riferimento I; l è determinato considerando che $\mathsf{R}_l = \mathsf{R}^{\mathcal{A}}$ è accettato da L^{LdRcn} ▮

Con l'algoritmo precedente si ricavano poi i riconoscitori che individuano gli $\mathsf{L}_i = \lfloor [11:2.5] \rfloor = \mathsf{E} \setminus\!\!\setminus\!\!\setminus \mathsf{R}_i$ e gli $\mathsf{E}_{ij} = \lfloor [11:2.9(b)] \rfloor = \mathsf{R}_i \setminus\!\!\setminus\!\!\setminus \mathsf{R}_j = \mathsf{L}_i /\!\!/\!\!/ \mathsf{L}_j$ e si individua r considerando che $\mathsf{L}_r = \mathsf{E}$ è accettato da un riconoscitore equivalente a L^{LdRcn} $\lfloor$ [2F3c] $\rfloor$ ▮

Il precedente procedimento può abbreviarsi sfruttando particolarità dei linguaggi razionali che si trattano, cosa fattibile soprattutto se essi sono dati da espressioni razionali maneggievoli, tenendo presente che la matrice cercata deve avere la struttura indicata a inizio del paragrafo e sfruttando le relazioni date in 11:3.10, 11:3.11, 11:3.12, 11:3.13, 11:3.14 e talvolta in 11:3.16 .

Se $\mathsf{A}^* \setminus \mathsf{E}$ è semplice da individuare può essere utile considerare che [11:2.6] $\xi\mathsf{Ftr}(\mathsf{E}) = \{ \mathsf{A}^* \setminus \mathsf{C} \;|\!: \mathsf{C} \in \overline{\xi}\mathsf{Drl}(\mathsf{A}^* \setminus \mathsf{E}) \}$ $\langle \xi, \overline{\xi} \rangle \in \{ \langle L, R \rangle, \langle R, L \rangle \}$.

Sfruttando tutte le informazioni sopra citate può essere agevole determinare $\mathsf{FTR}(\mathsf{E})$ anche nel caso dei più semplici linguaggi non razionali: per essi è però necessario possedere delle espressioni per tutte le derivate rispetto a parole le quali devono costituire successioni abbastanza semplici, in quanto servono per determinare l'insieme di riferimento I ora infinito.

L'importanza della determinazione di $\mathsf{FTR}(\mathsf{E})$ deriva dal fatto che a partire da tale complesso di informazioni si possono calcolare in modo canonico [7] i risultati di varie operazioni.

C30c.20 Esempio Determinare $\mathsf{FTR}(\mathsf{E})$ per $\mathsf{E} := (a^3)^* <_{Mnd} a^*$.

Posto $\mathsf{E}_i := a^i (a^3)^*$ per $i = 0, 1, 2 \,\lfloor \mathsf{E}_0 = \mathsf{E} \rfloor$ abbiamo $DerwL(\mathsf{E}) = \mathsf{DrlwR}(\mathsf{E}) = \{ \mathsf{E}_0, \mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2 \}$;
dato che $i \neq j \implies \mathsf{E}_i \bigcap \mathsf{E}_j = \emptyset$ abbiamo $\mathsf{FtrL}(\mathsf{E}) = \mathsf{FtrR}(\mathsf{E}) = \{ a^*, \emptyset, \mathsf{E}_0, \mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2 \}$ e quindi:

$$\mathsf{FTR(E)} \quad = \quad \begin{array}{c|ccccc} & \emptyset & \mathsf{E}_0 & \mathsf{E}_2 & \mathsf{E}_1 & a^* \\ \hline \emptyset & a^* & a^* & a^* & a^* & a^* \\ \mathsf{E}_0 & a^* & \mathsf{E}_0 & \mathsf{E}_1 & \mathsf{E}_2 & \emptyset \\ \mathsf{E}_1 & a^* & \mathsf{E}_2 & \mathsf{E}_0 & \mathsf{E}_1 & \emptyset \\ \mathsf{E}_2 & a^* & \mathsf{E}_1 & \mathsf{E}_2 & \mathsf{E}_0 & \emptyset \\ a^* & a^* & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{array} \quad .$$

C30c.21 Esempio Determiniamo $\mathsf{FTR(E)}$ per $\mathsf{E} := a^2(a^5)^*$.
Posto $\mathsf{E}_i := a^i(a^5)^*$ per $i = 0, 1, ..., 4$, si osserva che $\mathsf{E}_2 = \mathsf{E}$.
Chiaramente $i \neq j \implies \mathsf{E}_i \bigcap \mathsf{E}_j = \emptyset$ e $\mathsf{FtrL(E)} = \mathsf{FtrR(E)} = \{a^*, \emptyset, \mathsf{E}_0, \mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3, \mathsf{E}_4\}$ e quindi:

$$\mathsf{FTR(E)} \quad = \quad \begin{array}{c|ccccccc} & \emptyset & a^* & \mathsf{E}_2 & \mathsf{E}_1 & \mathsf{E}_0 & \mathsf{E}_4 & \mathsf{E}_3 \\ \hline \emptyset & a^* & a^* & a^* & a^* & a^* & a^* & a^* \\ \mathsf{E}_0 & a^* & \mathsf{E}_0 & \mathsf{E}_1 & \mathsf{E}_2 & \mathsf{E}_3 & \mathsf{E}_4 & \emptyset \\ \mathsf{E}_1 & a^* & \mathsf{E}_4 & \mathsf{E}_0 & \mathsf{E}_1 & \mathsf{E}_2 & \mathsf{E}_3 & \emptyset \\ \mathsf{E}_2 & a^* & \mathsf{E}_3 & \mathsf{E}_4 & \mathsf{E}_0 & \mathsf{E}_1 & \mathsf{E}_2 & \emptyset \\ \mathsf{E}_3 & a^* & \mathsf{E}_2 & \mathsf{E}_3 & \mathsf{E}_4 & \mathsf{E}_0 & \mathsf{E}_1 & \emptyset \\ \mathsf{E}_4 & a^* & \mathsf{E}_1 & \mathsf{E}_2 & \mathsf{E}_3 & \mathsf{E}_4 & \mathsf{E}_0 & \emptyset \\ a^* & a^* & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{array} \quad .$$

C30c.22 Esempio Determinare $\mathsf{FTR(E)}$ per $\mathsf{E} := (a^*b + b^+a)^* \in \mathbf{R}_{\mathsf{A}}$ con $\mathsf{A} = \{a, b\}$; si osservi che $\mathsf{E} <_{Mnd} \mathsf{A}^*$ e che $\mathsf{E} = \mathsf{A}^* \setminus (\mathsf{A}^*aa + a)$.
Troviamo $\mathsf{DrlwL(E)}$ e consideriamo un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$:
$\mu \,/\!\!/\, \mathsf{E} = \mathsf{E}$, $a^n \,/\!\!/\, \mathsf{E} = a^*b\,\mathsf{E}$, $b^n \,/\!\!/\, \mathsf{E} = (\mu + b^*a)\,\mathsf{E}$, $a^nb \,/\!\!/\, \mathsf{E} = \mathsf{E}$, $b^na \,/\!\!/\, \mathsf{E} = a^*b\,\mathsf{E} + \mathsf{E} = \mathsf{E}$.
$\mathsf{DrlwL(E)} = \{\mathsf{E}, a^*b\mathsf{E}, (\mu + b^*a)\mathsf{E}\}$ $\mu \in \mathsf{E}$, $\mu \in (\mu + b^*a)\,\mathsf{E}$ e quindi E^{LdRcn} :

//input pC30c22

$a^*b\,\mathsf{E} \subset \mathsf{E} \subset (\mu + b^*a)\mathsf{E}$ e quindi $\mathsf{FtrR(E)} = \{a^*b\,\mathsf{E}, \mathsf{E}, (\mu + b^*a)\mathsf{E}, \mathsf{A}^*\}$.
Per $\mathsf{DrlwR(E)}$ $\mathsf{E} \,\backslash\!\!\backslash\, \mu = \mathsf{E}$, $\mathsf{E} \,\backslash\!\!\backslash\, a = \mathsf{E}b^+$, $\mathsf{E} \,\backslash\!\!\backslash\, b = \mathsf{E}a^* = \mathsf{A}^*$, $\mathsf{E} \,\backslash\!\!\backslash\, a\,a = \emptyset$,
$\mathsf{E} \,\backslash\!\!\backslash\, b\,a = \mathsf{E} \,\backslash\!\!\backslash\, b\,b = \mathsf{A}^* \,\backslash\!\!\backslash\, x = \mathsf{A}^*$; essendo $\mu \in \mathsf{E}, \mathsf{A}^*$, il riconoscitore minimo di $\mathsf{E}^{\leftarrow}$ $\mathsf{E}^{\leftarrow}$ E^{RdRcn} è dato da :

//input pC30c22B

$\emptyset \subset \mathsf{E}b^+ \subset \mathsf{E} \subset \mathsf{A}^*$ e quindi $\mathsf{FtrL(E)} = \{\emptyset, \mathsf{E}b^+, \mathsf{E}, \mathsf{A}^*\}$.
Accoppiando i fattori sinistri e destri [11:2.7] e tenendo conto di 5C2, 11:3.11(c), 11:3.14, si trova:

$$\mathsf{FTR(E)} \quad = \quad \begin{array}{c|cccc} & \mathsf{A}^* & (\mu + b^*a)\mathsf{E} & \mathsf{E} & ab^*\,\mathsf{E} \\ \hline \emptyset & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* \\ \mathsf{E}b^+ & \emptyset & \mathsf{E}_{22} & (\mu + b^*a)\mathsf{E} & \mathsf{E}_{24} \\ \mathsf{E} & \emptyset & \mathsf{E}\,b^+ & \mathsf{E} & \mathsf{A}^* \\ \mathsf{A}^* & \emptyset & \mathsf{E}_{42} & a^*b\,\mathsf{E} & \mathsf{E}_{44} \end{array}$$

Per i restanti fattori centrali $\mathsf{E}_{22} = \mathsf{E}\,b^+ /\!\!/\!\!/ \mathsf{E}\,b^+ = \bigcap_{u \in \mathsf{E}\,b^+} u \,/\!\!/\, \mathsf{E}\,b^+$,

$\mathsf{E}_{42} = \mathsf{A}^* /\!\!/\!\!/ \mathsf{E}\, b^+ = \bigcap_{u\in\mathsf{A}^*} \mathsf{E}\, b^+$, $\mathsf{E}_{24} = \mathsf{E}\, b^+ /\!\!/\!\!/ \mathsf{A}^* = \mathsf{A}^*$, $\mathsf{E}_{44} = \mathsf{A}^* /\!\!/\!\!/ \mathsf{A}^* = \mathsf{A}^*$.

Per E_{22} ed E_{42} conviene riferirsi a $(\mathsf{E}\, b^+)^{LdRcn}$ che, visto $\mathsf{DrlwL}(\mathsf{E})$, risulta :

//input pC30c22C

Da qui $\mathsf{E}_{22} = \bigcap\{\text{linguaggi su stati finali}\} = (\mu + b^* a)\mathsf{E}\, b^+ + b^*$,
$\mathsf{E}_{42} = \bigcap\{\text{linguaggi su tutti gli stati}\} == a^* b\, \mathsf{E}\, b^+$.

C30c.23 Determiniamo $\mathsf{FTR}(\mathsf{E})$ per alcuni semplici linguaggi non razionali.

Esempio Costruiamo $\mathsf{FTR}(\mathsf{E})$ per $\mathsf{E} := \sum_{n\in\mathbb{N}} a^n\, b^n \in \mathsf{Lng}_{\mathsf{A}} \setminus \mathbf{R}_{\mathsf{A}}$, dove $\mathsf{A} := \{a, b\}$.

$\mathsf{DrlwL}(\mathsf{E}) = \{\mu, b, b^2, b^3, ..., \mathsf{E}_0, \mathsf{E}_{-1}, \mathsf{E}_{-2}, \mathsf{E}_{-3}, ...\}$, ove $\forall\, i \in \mathbb{N} :\ \mathsf{E}_{-1} := \sum_{n\in\mathbb{N}} a^n\, b^{n+i}$ $(\mathsf{E}_0 = \mathsf{E})$.

$\mathsf{DrlwR}(\mathsf{E}) = \{\mu, a, a^2, a^3, ..., \mathsf{E}_0, \mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3, ...\}$, ove $\forall\, i \in \mathbb{N} :\ \mathsf{E}_i := \sum_{n\in\mathbb{N}} a^{n+i} b^n$.

Dunque $b^i \bigcap \mathsf{E}_{-j} = b^i\, (\{i\} \bigcap \{j\})^{zu}$ e $a^i \bigcap \mathsf{E}_j = a^i \big(\{i\} \bigcap \{j\}\big)^{zu}$. Di conseguenza:

$$\mathsf{FTR}(\mathsf{E}) = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} \emptyset & \mu & \mathsf{E} & \mathsf{E}_{-1} & \mathsf{E}_{-2} & \mathsf{E}_{-3} & \cdots & b & b^2 & b^3 & \cdots & \mathsf{A}^* \end{array} \\
\begin{array}{c} \emptyset \\ \mu \\ \mathsf{E} \\ a \\ a^2 \\ a^3 \\ \vdots \\ \mathsf{E}_1 \\ \mathsf{E}_2 \\ \mathsf{E}_3 \\ \vdots \\ \mathsf{A}^* \end{array} &
\begin{pmatrix}
\mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \cdots & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \cdots & \mathsf{A}^* \\
\mathsf{A}^* & \mu & \mathsf{E} & a & a^2 & a^3 & \cdots & \mathsf{E}_1 & \mathsf{E}_2 & \mathsf{E}_3 & \cdots & \emptyset \\
\mathsf{A}^* & \mu & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset \\
\mathsf{A}^* & \mathsf{E}_{-1} & \emptyset & \mu & a & a^2 & \cdots & \mathsf{E} & \mathsf{E}_1 & \mathsf{E}_2 & \cdots & \emptyset \\
\mathsf{A}^* & \mathsf{E}_{-2} & \emptyset & \emptyset & \mu & a & \cdots & \mathsf{E}_{-1} & \mathsf{E} & \mathsf{E}_1 & \cdots & \emptyset \\
\mathsf{A}^* & \mathsf{E}_{-3} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \mu & \cdots & \mathsf{E}_{-2} & \mathsf{E}_{-1} & \mathsf{E} & \cdots & \emptyset \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathsf{A}^* & b & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \mu & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset \\
\mathsf{A}^* & b^2 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & b & \mu & \emptyset & \cdots & \emptyset \\
\mathsf{A}^* & b^3 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & b^2 & b & \mu & \cdots & \emptyset \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathsf{A}^* & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset
\end{pmatrix}
\end{array} .$$

Nella matrice precedente si sono trascurate le sottomatrici riguardanti combinazioni di E_{-i} con E_{-j}, di E_{-i} con E_j, di E_i con E_{-j}, di E_{-i} con b^j e di a^i con E_{-j}, sottomatrici aventi tutte le entrate uguali e $\emptyset$.

C30c.24 **Esempio** Determiniamo $\mathsf{FTR}(\mathsf{E})$ per $\mathsf{E} := \sum_{n\in\mathbb{N}} a^{2^n} = \{a, a^2, a^4, a^8, ...\}$, linguaggio che si colloca in $\mathbf{S}_{\{a\}} \setminus \mathbf{R}_{\{a\}}$.

Posto $\forall c \in \mathbb{P} :\ \mathsf{E}_{-c} := \sum_{n\geq \log_2 c} a^{2^n - c}$, abbiamo $\mathsf{DrlwL}(\mathsf{E}) = \mathsf{DrlwR}(\mathsf{E}) = \{c \in \mathbb{P} :|\ \mathsf{E}_{-c}\}$.

Inoltre $\mathsf{E}_{-c} \bigcap \mathsf{E}_{-d} = a^k$ sse $|d - c| = 2^n(2^{m-n} - 1)$ quando è $0 \leq n \leq m$, mentre è uguale ad $\emptyset$ sse altrimenti.

Dunque $\mathsf{FtrL}(\mathsf{E}) = \mathsf{FtrR}(\mathsf{E}) = \{\emptyset, \mathsf{A}^*, \mathsf{E}_0 = \mathsf{E}, \mathsf{E}_{-1}, \mathsf{E}_{-2}, ..., \mu, a, a^2, ...\}$. Di conseguenza:

$$
\mathsf{FTR}(\mathsf{E}) \;=\; \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} \emptyset & \mu & a & a^2 & \cdots & \mathsf{E} & \mathsf{E}_{-1} & \mathsf{E}_{-2} & \cdots & \mathsf{A}^* \end{array} \\
\begin{array}{c} \emptyset \\ \mu \\ a \\ a^2 \\ \vdots \\ \mathsf{E} \\ \mathsf{E}_{-1} \\ \mathsf{E}_{-2} \\ \vdots \\ \mathsf{A}^* \end{array} &
\begin{pmatrix}
\mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \cdots & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* & \cdots & \mathsf{A}^* \\
\mathsf{E} & \mathsf{E}_{-1} & \mathsf{E}_{-2} & \mathsf{A}^* & \cdots & \mu & a & a^2 & \cdots & \emptyset \\
\mathsf{A}^* & \mathsf{E}_{-1} & \mathsf{E}_{-2} & \mathsf{E}_{-3} & \cdots & \emptyset & \mu & a & \cdots & \emptyset \\
\mathsf{A}^* & \mathsf{E}_{-2} & \mathsf{E}_{-3} & \mathsf{E}_{-4} & \cdots & \emptyset & \emptyset & \mu & \cdots & \emptyset \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathsf{A}^* & \mu & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset \\
\mathsf{A}^* & a & \mu & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset \\
\mathsf{A}^* & a^2 & a & \mu & \cdots & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathsf{A}^* & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

C30c.25 **Teorema** Consideriamo $\mathsf{E}, \mathsf{G}_1, ..., \mathsf{G}_s \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}$ e sia $\mathsf{FTR}(\mathsf{E}) = \langle \mathsf{I}, l, r, \{\mathsf{L}_i\}, \{\mathsf{R}_i\}, \{\mathsf{E}_{ij}\} \rangle$.

(a) $\mathsf{E} \bigcap (\mathsf{G}_1 \cdot ... \cdot \mathsf{G}_s) = \sum_{i_1,...,i_{s-1} \in \mathsf{I}} (\mathsf{E}_{li_1} \bigcap \mathsf{G}_1) \cdot (\mathsf{E}_{i_1 i_2} \bigcap \mathsf{G}_2) \cdot ... \cdot (\mathsf{E}_{i_{s-1} r} \bigcap \mathsf{G}_s)$.

(b) $\mathsf{E} \bigcap (\mathsf{G}_1 \cdot \mathsf{G}_2) = \sum_{i \in \mathsf{I}} (\mathsf{L}_i \bigcap \mathsf{G}_1) \cdot (\mathsf{R}_i \bigcap \mathsf{G}_2)$.

(c) $\mathsf{E} \in \mathsf{R}_{\mathsf{A}} \Longrightarrow \mathsf{E} \bigcap (\mathsf{G}_1 \cdot \mathsf{G}_2) = \sum_{j=1}^{f} \mathsf{G}_{j1} \cdot \mathsf{G}_{j2}$, ove $f \in \mathbb{N}$, $h \in \{1,2\}$ e $\forall\, j \in \{,f\} \,\colon\, \mathsf{G}_{jh} \subseteq \mathsf{G}_h$.

(d) $\mathsf{E} \in \mathsf{R}_{\mathsf{A}}$, $\mathsf{E} \subseteq \mathsf{G}_1 \cdot \mathsf{G}_2 \Longrightarrow \mathsf{E} = \sum_{j=1}^{f} \mathsf{G}_{j1} \cdot \mathsf{G}_{j2}$ con $h \in \{1,2\}$, $f \in \mathbb{N}$ e $\forall\, j \in \{,f\} \,\colon\, \mathsf{G}_{jh} \subseteq \mathsf{G}_h$.

(e) $\mathsf{E}, \mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2 \in \mathsf{R}_{\mathsf{A}} \implies \mathsf{E} \bigcap (\mathsf{G}_1 \cdot \mathsf{G}_2) = \sum_{j=1}^{f} \mathsf{G}_{j1} \cdot \mathsf{G}_{j2}$ con $h \in \{1,2\}$, $f \in \mathbb{N}$ e $\forall\, j \in \{,f\} \,\colon\, \mathsf{G}_{jh} \in \mathsf{R}_{\mathsf{A}}$, $\mathsf{G}_{jh} \subseteq \mathsf{G}_h$.

Dim.: (a) $\mathsf{E} \bigcap (\mathsf{G}_1 \cdot ... \cdot \mathsf{G}_s) = \{w_1 \cdot ... \cdot w_s \in \mathsf{E} \mid: w_1 \in \mathsf{G}_1, ..., w_s \in \mathsf{G}_s \; = [11{:}3.15(\mathsf{e}) =$
$= \bigcup_{i_1,...,i_{s-1} \in \mathsf{I}} \{w_1 \cdot ... \cdot w_s \mid: w_1 \in \mathsf{E}_{li_1} \bigcap \mathsf{G}_1, w_2 \in \mathsf{E}_{i_1 i_2} \bigcap \mathsf{G}_2 \; , \; ... \; , \; w_s \in \mathsf{E}_{i_{s-1} r} \bigcap \mathsf{G}_s\} =$
$= \sum_{i_1,...,i_{s-1} \in \mathsf{I}} (\mathsf{E}_{li_1} \bigcap \mathsf{G}_1) \cdot (\mathsf{E}_{i_1 i_2} \bigcap \mathsf{G}_2) \cdot ... \cdot (\mathsf{E}_{i_{s-1} r} \bigcap GSs_s)$.
(b) (a) $\Longrightarrow \mathsf{E} \bigcap (\mathsf{G}_1 \cdot \mathsf{G}_2) = \sum_{i \in \mathsf{I}} (\mathsf{E}_{li} \bigcap \mathsf{G}_1) \cdot (\mathsf{E}_{ir} \bigcap \mathsf{G}_2) = \sum_{i \in \mathsf{I}} (\mathsf{L}_i \bigcap \mathsf{G}_1) \cdot (\mathsf{R}_i \bigcap \mathsf{G}_2)$.
(c) Da (b) con $f = |\mathsf{DrIL}(\mathsf{A}^* \setminus \mathsf{E})| = |\mathsf{I}| < \infty [11{:}5.18(c)]$ $\{\mathsf{G}_{j1} \mid: j = 1, ..., f\} = \{\mathsf{L}_i \bigcap \mathsf{G}_1 \mid: i \in \mathsf{I}\}$ e $\{\mathsf{G}_{j2} \mid: j = 1, ..., f\} = \{\mathsf{R}_i \bigcap \mathsf{G}_2 \mid: i \in \mathsf{I}\}$.
(d) Caso particolare di (c).
(e) Da (b) e [2E3b]. ▮

C30c.26 **Esempio** Consideriamo $\mathsf{E} = (a^*b + b^+a)^*$, come l'esempio11:3.23, $\mathsf{G}_1 = a\mathsf{A}^*b$, $\mathsf{G}_2 = b\mathsf{A}^*a$.
$\mathsf{E} \bigcap (\mathsf{G}_1 \cdot \mathsf{G}_2) = [11{:}3.26(e)] = (\mathsf{E}\, b^+ \bigcap \mathsf{G}_1)((\mu + b^*a)\mathsf{E} \bigcap \mathsf{G}_2) + (\mathsf{E} \bigcap \mathsf{G}_1)(\mathsf{E} \bigcap \mathsf{G}_2) + (\mathsf{A}^* \bigcap \mathsf{G}_1)(a^*b\, \mathsf{E} \bigcap \mathsf{G}_2) =$
$[a \,/\!\!/\, \mathsf{E} = a^*b\, \mathsf{E}$, $b \,/\!\!/\, \mathsf{E} = (\mu + b^*a)\mathsf{E}$, $\mathsf{E} \,\backslash\!\!\backslash\, a = \mathsf{E}\, b^+$, $\mathsf{E} \,\backslash\!\!\backslash\, b = \mathsf{A}^*$, $a \,/\!\!/\, \mathsf{E} \,\backslash\!\!\backslash\, a = a^*\, \mathsf{E}\, b$, $a \,/\!\!/\, \mathsf{E} \,\backslash\!\!\backslash\, b = \mathsf{A}^*$, $b \,/\!\!/\, \mathsf{E} \,\backslash\!\!\backslash\, a = (\mu + b^*a)\, \mathsf{E}\, b^+ + b^* = \mu + (\mu + b^*a)\mathsf{E}\, b^+$, $b \,\backslash\!\!\backslash\, \mathsf{E} \,/\!\!/\, b = \mathsf{A}^*]$
$= a(a^*b\, \mathsf{E} b^*)b^2((\mu + b^*a)\, \mathsf{E}\, b^+ + \mu)\, a + a\, \mathsf{A}^*\, b^2\, \mathsf{E}\, b^+\, a = a\, \mathsf{A}^* b^2(\mu + (\mu + b^*a)\mathsf{E}\, b^+)a$.

C30c.27 **Eserc.** Consideriamo $\mathsf{E} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a^n\, b^n$ come nell'esempio 11:3.24, $\mathsf{G}_1 := a\, \mathsf{A}^*\, a$, $\mathsf{G}_2 := a\, \mathsf{A}^*\, b$
.
$\mathsf{E} \bigcap (\mathsf{G}_1 \cdot \mathsf{G}_2) = [11{:}3.26(b)] = \sum_{h \in \mathbb{N}} (a^h \bigcap a\, \mathsf{A}^* a)(\mathsf{E}_h \bigcap a\, \mathsf{A}^* b) + \sum_{h \in \mathbb{N}} (\mathsf{E}_h \bigcap a\, \mathsf{A}^*\, a)(b^h \bigcap a\, \mathsf{A}^*\, b) =$
$= \sum_{h \geq 2} (\sum_{n \in \mathbb{N}} a^n\, b^{n+h})$.

C30 d. problemi di approssimazione dei linguaggi

C30d.01 Prendiamo in considerazione il linguaggio $\mathsf{E} \in \mathsf{Lng}_{\mathsf{A}}$ e le caratterizzazioni dei suoi fattori $\mathsf{FTR(E)} = \left\langle \mathsf{Q},\ l,\ r, \langle q \in \mathsf{Q} :| \mathsf{L}_q\rangle, \langle q \in \mathsf{Q} :| \mathsf{R}_q\rangle, [\mathsf{E}_{p,q} \,|\!: p,q \in \mathsf{Q}]\right\rangle$ e $\mathsf{Ftr(E)} = \langle j \in \mathsf{J} :| \mathsf{F}_j \rangle$.

Introduciamo inoltre l'insieme ordinato di segni esclusi da A $\mathsf{X} := \{j \in \mathsf{J} :| x_j\} \subset \mathsf{A} \setminus \mathsf{A}$, la biiezione $\psi := \lceil \mathsf{F}_j \mapsto x_j \,|\!: j \in \mathsf{J} \rceil \in \lceil \mathsf{Ftr(E)} \longleftrightarrow \mathsf{X} \rceil$ e la matrice quadrata avente come entrate elementi di X

$$\mathsf{M} := \mathsf{MFtr(E)} \circ \psi \in \lceil \mathsf{Q} \times \mathsf{Q} \longmapsto \mathsf{X} \rceil .$$

Osserviamo che l'insieme dei fattori e l'insieme dei segni x_j vengono considerati ordinati in due sequenze da considerare parallele che possono essere finite o infinite, a seconda del cardinale di dell'insieme degli indici J che hanno in comune.

C30d.02 Si dice **linguaggio fattoriale del linguaggio** E sull'alfabeto X:

$$\mathsf{E!}_{\mathsf{X}} := \mathsf{E}^{\mathbf{o}} + (\mathsf{M}^+)_{lr} \in \mathsf{Lng}_{\mathsf{X}} .$$

Spesso questa notazione può essere semplificata nella E!.

Utilizzando la produttoria cartesiana [B10e01] definiamo la **funzione fattoriale basata sul linguaggio** E:

$$\mathsf{fun(E!)} := \mathsf{fun}(\mathsf{E}^{\mathbf{o}} + (\mathsf{M}^+)_{lr}) \in \lceil \mathsf{X}_{j\in \mathsf{J}}\, \mathsf{Lng} \longmapsto \mathsf{Lng} \rceil .$$

Si dice **espressione fattoriale del linguaggio** E:

$$\langle \mathsf{F}_j \,|\!: j \in \mathsf{J}\rangle \mathsf{fun(E!)} := (\mathsf{E!})(\psi^{-1}) \in \mathsf{Lng}_{\mathsf{A}} .$$

Si noti che $\mathsf{E} \in \mathbf{R}_{\mathsf{A}} \iff \mathsf{Ftr(E)} \subset_{\varphi} \mathsf{Lng}_{\mathsf{A}} \iff \mathsf{X} \subset_{\varphi} \mathsf{A} \iff$ M è una matrice quadrata di ordine finito; solo in tal caso E! è un linguaggio vero e proprio, cioè un sottoinsieme di un monoide libero finitamente generato, e solo in tal caso fun(E!) è una ordinaria composizione associata a un linguaggio. Le generalizzazioni implicite nelle precedenti definizioni non portano comunque a difficoltà .

C30d.03 Teorema $\forall\, s \in \mathbb{N} \,:\, \langle \mathsf{F}_j \,|\!: j \in \mathsf{J}\rangle \mathsf{fun(E!)} = \langle \mathsf{F}_j \,|\!: j \in \mathsf{J}\rangle \mathsf{fun}(\mathsf{E!} \bigcap \mathsf{X}^s)$.

Dim.: $\forall\, s \in \mathbb{N} \,:\, \langle \mathsf{F}_j \,|\!: j \in \mathsf{J}\rangle \mathsf{fun}(\mathsf{M}^s)_{lr} = (\mathsf{MFtr(E)})^s_{lr} = \lfloor 11:3.17 \rfloor = \mathsf{E}$;
$\langle \mathsf{F}_j \,|\!: j \in \mathsf{J}\rangle \mathsf{fun(E!)} = \langle \mathsf{F}_j \,|\!: j \in \mathsf{J}\rangle \mathsf{fun}(\mathsf{E}^{\mathbf{o}}) + \sum_{s\in\mathbb{N}} \langle \mathsf{F}_j \,|\!: j \in \mathsf{J}\rangle \mathsf{fun}(\mathsf{M}^s)_{lr} = \mathsf{E}^{\mathbf{o}} + \sum_{s\in\mathbb{N}} \mathsf{E} = \mathsf{E}$ ▮

Si noti che l'espressione fattoriale di un linguaggio non sviluppata ha un contenuto equivalente a quello di FTR(E).

C30d.04 Esempio Consideriamo $\mathsf{E} = (a^*b + b^+a)^*$ come nell'esempio 11:3.23 e introduciamo il seguente sistema di abbreviazioni:

$$\psi := \left\updownarrow \begin{matrix} \emptyset & \mathsf{A}^* & \mathsf{E} & \mathsf{E}b^+ & (\mu + b^*a)\mathsf{E} & a^*b\,\mathsf{E} & (\mu + b^*a)\mathsf{E}b^+ + \mu & a^*b\,\mathsf{E}b^+ \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{matrix} \right\updownarrow$$

Otteniamo allora

$$\mathsf{M} = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_0 & x_6 & x_4 & x_1 \\ x_0 & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_0 & x_7 & x_5 & x_1 \end{pmatrix} ,$$

$$\mathsf{E!} = \mu + x_2 + x_0\, x_1 + x_3\, x_4 + {x_2}^2 + x_1\, x_5 + \ldots + x_0\, x_2\, x_1 \ldots$$

Per la determinazione di $\mathsf{E!} \in \mathbf{R}_x$ nel caso $\mathsf{E} \in \mathbf{R}_{\mathsf{A}}$ vedi 5D6?? e 6 D 4??.

C30d.05 Consideriamo $\mathsf{A} \subset_\varphi \mathbb{A}W$, $\mathsf{E}, \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{A}}$, $\mathsf{X} :=: \{x_1, ..., x_s\} :\subset_\varphi \mathbb{A}W \setminus \mathsf{A}$ ed una collezione di linguaggi $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{Lng}_{\mathsf{X}}$. Si può porre il problema della determinazione di un $\mathsf{G} \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{B}} \subseteq \mathbf{Lng}_{\mathsf{X}}$ tale che $\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \mathsf{fun}(\mathsf{G}) \subseteq \mathsf{E}$ e che $\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \mathsf{fun}(\mathsf{G})$ tra i linguaggi precedenti abbia estensione massimale.
Un tale problema si dice **problema di approssimazione del linguaggio** E di primo tipo o con composizione incognita.

C30d.06 Si dice **linguaggio di migliore approssimazione del linguaggio** E mediante $\{\mathsf{F}_1, .., \mathsf{F}_s\}$:

$$\mathsf{bal}\langle \mathsf{E}; \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle := \mathsf{E}^{\mathbf{o}} + \sum_{t \in \mathbb{N}} \sum_{\mathsf{F}_{\alpha_1} ... \mathsf{F}_{\alpha_t} \subseteq \mathsf{E}} (x_{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_{\alpha_t}) =$$

$$\mathsf{E}^{\mathbf{o}} + \sum_{t \in \mathbb{N}} \sum_{\langle \mathsf{F}_{\alpha_1}, ..., \mathsf{F}_{\alpha_t} \rangle \in \mathsf{Sftrn}_t(\mathsf{E})} (x_{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_{\alpha_t}) := \mathsf{F} \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{X}},$$

Si dice **funzione di migliore approssimazione del linguaggio** E mediante $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s$:

$$\mathsf{baf}\langle \mathsf{E}; \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle := \mathsf{fun}(\mathsf{F}) \in \lceil \mathbf{Lng}^s \longmapsto \mathbf{Lng} \rceil \quad .$$

Si dice **migliore approssimazione del linguaggio** E mediante $\mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s$:

$$\mathsf{ba}\langle \mathsf{E}; \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle := \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \mathsf{fun}(\mathsf{F}) = \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \mathsf{bal}(\mathsf{fun}\langle \mathsf{E}; \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle) \quad .$$

C30d.07 **Prop.** $\mathsf{ba}(\langle \mathsf{E}; \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle) = \sum\{\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \mathsf{fun}(\mathsf{G}) \subseteq \mathsf{E} \mid: \mathsf{G} \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{X}}\}$.
Dim.: $\mathsf{ba}(\langle \mathsf{E}; \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle) = \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \mathsf{fun}(\mathsf{E}^{\mathbf{o}} + \sum_{t \in \mathbb{N}} \sum_{\mathsf{F}_{\alpha_1} ... \mathsf{F}_{\alpha_t} \subseteq \mathsf{E}} (x_{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_{\alpha_t})) =$
$= \mathsf{E}^{\mathbf{o}} + \sum_{t \in \mathbb{N}} \sum_{\mathsf{F}_{\alpha_1} ... \mathsf{F}_{\alpha_t} \subseteq \mathsf{E}} (\mathsf{F}_{\alpha_1} \cdot ... \cdot \mathsf{F}_{\alpha_t}) = \mathsf{E}^{\mathbf{o}} + \sum_{t \in \mathbb{N}} \sum\{\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \mathsf{fun}(\mathsf{G}) \subseteq \mathsf{E} \mid: \mathsf{G} \subseteq \mathsf{X}^t\}$ ∎

C30d.08 $\mathsf{bal}(\langle \mathsf{E}; \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle)$ costituisce quindi una soluzione al problema di approssimazione di E con composizione incognita .
Per particolari $\mathsf{E}, \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s$ potrebbe trovarsi $\mathsf{G} \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{X}} \setminus \mathsf{bal}(\langle \mathsf{E}; \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle)$ tale che

$$\langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \mathsf{fun}(\mathsf{G}) = \mathsf{ba}(\langle \mathsf{E}; \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle) \ .$$

C30d.09 **Esempio** Consideriamo due linguaggi F_1 e F_2 tali che $\mathsf{F}_1 \subset \mathsf{F}_2 \subset \mathsf{E}$ e $\mathsf{F}_1\mathsf{F}_1 \not\subseteq \mathsf{E}$ e quindi tali che $\forall t = 2, 3, 4, ... \ : \ \mathsf{F}_{\alpha_1} ... \mathsf{F}_{\alpha_t} \not\subseteq \mathsf{E}$.
Questo accade per esempio ad $\mathsf{F}_1 = a$, $\mathsf{F}_2 = a + b$, $\mathsf{E} = a + b + c$, $\mathsf{bal}(\langle \mathsf{E}; \mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2 \rangle) = x_1 + x_2$.
$\mathsf{ba}(\langle \mathsf{E}; \mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2 \rangle) = \mathsf{F}_1 + \mathsf{F}_2 = \mathsf{F}_2 = \langle \mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2 \rangle \mathsf{fun}(\mathsf{G})$ con $\mathsf{G} = x_2 \neq x_1 + x_2$.
$\mathsf{bal}(\langle \mathsf{E}; \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle)$ ha però il pregio di essere determinato univocamente e in modo relativamente semplice; inoltre per ogni altro G si ha $\mathsf{G} \subset \mathsf{bal}(\langle \mathsf{E}; \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle)$.

C30d.10 **Prop.**

$$\mathsf{bal}(\langle \mathsf{E}; \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle)s = \mathsf{E}^{\mathbf{o}} + \sum_{s \in \mathbb{P}} \sum \{\mathsf{G} \subseteq \mathsf{X}^t \ :| \ \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \mathsf{fun}(\mathsf{G}) \subseteq \mathsf{E}\}$$

$$= \sum \{\mathsf{G} \in \mathbf{Lng}_{\mathsf{X}} \ :| \ \langle \mathsf{F}_1, ..., \mathsf{F}_s \rangle \mathsf{fun}(\mathsf{G}) \subseteq \mathsf{E}\} \ .$$