1

Capitolo C26
sistemi e linguaggi di Lindenmayer

Contenuti delle sezioni

10 pagine

C260.01 I **linguaggi di Lindenmayer**, chiamati anche linguaggi sviluppamentali e per i quali qui useremo anche il termine abbreviato **linguaggi-L**, dipendono da sistemi di riscrittura che chiamiamo **sistemi-L** i quali sono stati introdotti nei primi anni 1960 dal botanico Aristid Lindenmayer come modelli per lo sviluppo nel tempo di organismi filamentosi.

Negli anni successivi sono state proposte e studiate molte varianti dei modelli iniziali, al fine di applicarli in un primo momenti a organismi non filamentosi come alberi e piante e successivamente a molti altri processi.

Con questi sviluppi i vari tipi di sistemi-L hanno assunto crescente importanza nella teoria dei linguaggi formali, nella biomatematica e in varie altre discipline.

In ambito matematico essi presentano notevoli collegamenti con vari temi della matematica discreta (problemi della computabilità, successione di Prouhet-Thue-Morse, curve che riempiono lo spazio, poliomini, sistemi di tassellazione, frattali).

Nelle discipline applicative i sistemi-L sono stati usati come modelli di taluni fenomeni sociologici, in architettura (morfogenesi digitale) ed in geomorfologia.

C260.02 La definizione della teoria dei sistemi di Lindenmayer si basa sulla modellizzazione del tempo come variabile discreta il cui scorrere à simile allo scorrere dei fotogrammi di un film e su tre postulati fondativi derivanti sia da esperienze istologiche che da osservazioni sugli sviluppi cellulari.
(1) Si modellizzano organismi formati da cellule attribuibili a un numero finito di tipi.
(2) Tutte le cellule di uno stesso tipo si sviluppano nel tempo (riproducendosi, rimanendo invariate o scomparendo) sempre nello stesso modo o, in alcuni casi, secondo poche modalità possibili.
(3) L'evoluzione di un organismo viene osservata e descritta a partire da una struttura cellulare rappresentata con sufficiente accuratezza con il disporsi degli accennati tipi di cellule.

Queste assunzioni rendono possibile rappresentare con un formalismo relativamente semplice l'evolversi delle cellule nel tempo e nello spazio.
Un organismo filamentoso o in qualche modo assimilabile a un organismo di tale genere viene rappresentato in un dato istante mediante una stringa di lettere, ciascuna delle quali rappresenta un tipo di cellula o uno stato di una cellula.
La stringa (o configurazione) successiva è descritta dalla stringa ottenuta applicando in parallelo alle lettere della stringa precedente una trasformazione opportunamente definita.

Dunque, a differenza di quanto accade per le derivazioni nell'ambito delle grammatiche a struttura di frase, le produzioni vengono applicate simultaneamente a tutti i simboli della stringa in evoluzione; inoltre la stringa iniziale della evoluzione può essere una parola sull'alfabeto dei tipi delle cellule, non solo un unico segno.

La sequenza delle stringhe descrive la vita dell'organismo schematizzato che può essere finita o illimitatamente lunga e in questo secondo caso la sua estensione può crescere in misura contenuto o illimitatamente.

C260.03 La formalizzazione si occupa di molteplici generi di sistemi che presentano diversi tipi di differenze.

Si incontano sistemi deterministici e indeterministici, propaganti e non propaganti, estesi e non estesi.
Se lo sviluppo di una cellula è influenzato dallo stato delle sue vicine si parla di sviluppo senza interazioni, nel caso contrario di sviluppo con interazioni.
Se la transizione da una configurazione alla successiva è univocamente determinato si parla di sviluppo deterministico, di sviluppo nen deterministico in caso opposto.
Uno sviluppo è detto propagantr se le produzioni non ammettono la possibilità di morte delle cellule, evento rappresentato da produzioni della forma $a \to \mu$.

In certi sistemi si ha la distinzione tra caratteri terminali e caratteri ausiliari. Sul piano biologico la distinzione rispecchia la differenza tra celule osservabili (rappresentate da termianli) e cellule che rendono l'organismo non osservabile (ad esempio in quanto metastabile per durate molto brevi); occorre anche segnalare che dal punto di vista del biologo questa distinzione è considerata piuttosto forzata e provvisoria.

Si affronta anche la possibilità di differenziare il comportamento delle cellule in periodi diversi della loro crescita organizzando le possibili produzioni in tavole che intervengono separatamente nei passi dell'evoluzione che si attuano nei diversi periodi.
La loro motivazione si collega alle differenti reazioni che le cellule possono avere nelle diverse condizioni: con il buio o con una buona illuminazioine (in patricolare nella notte e nel giorno), con il freddo o con il caldo (in particolare per l'alternarsi delle stagioni) e per ogni altro mutamento ambientale.

C260.04 si è qundi studuiata una grande varietà di sistemi sviluppamentali e occorre dire che questo è statp motivato più dalle esigenza di chiarimenti della teoria dei linguaggi formali che dalle richieste degli ambienti dei biologi.

In effetti si sono trovati numerosi collegamenti con gli studi sulle grammatiche e sui vari altri strumenti per la analisi e la classificazione dei linguaggi formali.

Conviene anche segnalare che il punto di vista dei sistemi di Lindenmayer viene considerato un po' più versatile e generale di quello delle grammatiche di Chomsky.

C26 a. sistemi-0L e linguaggi-0L

C26a.01 I sistemi di Lindenmayer sono sistemi di riscrittura che i pongono come alternativi rispetto alle grammatiche a struttura di frase.

Queste si servono di due tipi ben distinti di caratteri, i terminali e i nonterminali (o caratteri variabili). La motivazione linguistica dei nonterminali sta nel fatto che essi corrispondono alle classi sintattiche dei linguaggi generati e l'insieme delle stringhe di terminali e nonterminali generate si possono ragionevolmente chiamare le forme sentenziali della grammatica.

Una loro giustificazione combinatoria sta nel fatto che la richiesta di considerare stringhe del linguaggio solo le forme sentenziali costituite unicamente da terminali permette di aumentare la capacità generativa e di individuare una maggiore varietà di linguaggi.

I sistemi-L rinunciano a tale distinzione e la giustificazione biomodellistica sta nel fatto che nei casi più semplici ogni segno rappresenta una cella di un organismo filamentoso empiricamente osservabile. I sistemi-L recuperano capacità generativa consentendo di avviare il processo di derivazione a partire da una stringa di più segni e considerando accettabili stringhe ottenute da tutti i passi delle derivazioni.

C26a.02 Si dice **presistema-0L** una coppia $\mathsf{g} = \langle T, P\rangle$ con $T \subset_\varphi \mathsf{A}$ e $P \subset_\varphi T \times T^*$ con $\mathsf{dom}(P) = T$; T viene chiamato alfabeto del presistema-0L g e P insieme delle produzioni di g.

Con $\mathsf{0\mathfrak{L}p}$ denotiamo l'insieme dei presistemi-0L.
Useremo localmente scritture della forma $a \to \alpha$ per esprimere l'affermazione $\langle a, \alpha\rangle \in P$.

$\mathsf{g} = \langle T, P\rangle$ viene detto presistema deterministico sse $\forall a \in T \,:\, P \ni_1 \alpha \,\|\, a \to \alpha$, ovvero sse accade che $P \in \lceil T \longmapsto T^* \rceil$.
In tale caso si dice che S è un **presistema-D0L** e con $\mathsf{D0\mathfrak{L}p}$ denotiamo l'insieme di questi presistemi.

$\mathsf{g} = \langle T, P\rangle$ viene detto propagante sse $\forall a \in T \,:\, a \not\to \mu$, ossia sse $P \in T \times T^+$. In tale caso si dice che S è un **presistema-P0L** e con $\mathsf{P0\mathfrak{L}p}$ denotiamo l'insieme di questi presistemi.

$\mathsf{g} = \langle T, P\rangle$ viene detto presistema deterministico propagante sse appartiene a $\mathsf{D0\mathfrak{L}p} \cap \mathsf{P0\mathfrak{L}p}$, ossia sse $P \in \lceil T \longmapsto T^+ \rceil$.
In tale caso si dice che g è un **presistema-PD0L** e si definisce $\mathsf{PD0\mathfrak{L}p} := \mathsf{D0\mathfrak{L}p} \cap \mathsf{P0\mathfrak{L}p}$.

Si dice **sistema-0L** una terna $\mathsf{G} = \langle T, P, w\rangle$ con $\langle T, P\rangle \in \mathsf{0\mathfrak{L}p}$ e $w \in T^+$; la stringa w viene detta **assioma del sistema-0L**; con $\mathsf{0\mathfrak{L}s}$ denotiamo l'insieme di questi sistemi.

Si introducono anche i più particolari sistemi-D0L, sistemi-P0L e sistemi-PD0L chiedendo che abbiano come presistema sottostante, risp., un presistema-D0L, un presistema-P0L e un presistema-PD0L.

Conseguentemente denotiamo con $\mathsf{D0\mathfrak{L}s}$ l'insieme dei sistemi-D0L, con $\mathsf{P0\mathfrak{L}s}$ l'insieme dei sistemi-P0L e con $\mathsf{PD0\mathfrak{L}s}$, l'insieme dei sistemi-PD0L.

Al fine di trattare sinteticamente le entità introdotto scriviamo: $\forall \mathrm{V} \in \{\mu, \mathrm{D}, \mathrm{P}, \mathrm{PD}\} \,:$

$$\langle T, P, w\rangle \in \mathrm{V}\mathsf{0\mathfrak{L}}s \;\text{ sse }\; \langle T, P\rangle \in \mathrm{V}\mathsf{0\mathfrak{L}p} \,.$$

C26a.03 I sistemi-0L vengono usati come sistemi di riscrittura e per questo si associa a ciascuno di questi sistemi la relazione di **derivazione parallela** $\models\!\!\!\equiv$:
consideriamo $x \in T^+$ con $x =: x_1 \cdots x_n$ per $x_1, ..., x_n \in T$ e $y \in T^*$;

si enuncia $x \models\!\!\!\equiv y$ sse $\forall i = 1, ..., n \,:\, x_i \to \alpha_i$ e $y = \alpha_1 \cdots \alpha_n$.

In altri termini $x \models\!\!\!\equiv y$ sse $y \in x \,{}_{\mathsf{A}}\, P$.

Di questa relazione introduciamo, come al solito, le potenze di composizione $\models^k$, la chiusura cross-c $\models^{\oplus}$ e la chiusura star-c $\models^{\star}$:

$$\models^0 := \mathsf{Id}_{T^*} \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N} : \ \models^{k+1} := \models^k \circ \models \quad , \quad \models^{\oplus} := \cup_{k\in\mathbb{P}} \models^k \quad , \quad \models^{\star} := \models^{\oplus} \cup \mathsf{Id}_{T^*} \ .$$

Possiamo quindi definire come linguaggio generato da $\mathsf{G} = \langle T, P, w\rangle$ l'insieme di tutte le stringhe derivabili dall'assioma w applicando la derivazione in parallelo, ossia

$$\mathsf{G}^{\mathcal{L}} \ := \ \{x \in T^* \,\rrbracket\, w \models^{\star} x\} \ .$$

In taluni contesti si rende necessario segnalare che una relazione di derivazione parallela dipende da un determinato sistema-0L G e quindi si usano notazioni come $\models_{\mathsf{G}}$ o $\models_{\mathsf{G}}^{\oplus}$. Questa precisazione è rgiudicata superflua quando è implicito che si consideri un unico sistema di riscrittura.

Due sistemi-L si dicono equivalenti-L sse generano lo stesso linguaggio, cioè sse sono equivalenti per l'applicazione della funzione ${}^{\mathcal{L}}$.

C26a.04 Ecco qualche semplice considerazione sui sistemi-0L e sui i corrispondenti linguaggi generati.

I sistemi-D0L riguardano un solo processo di generazione illimitato nel quale viene generata una sola successione di stringhe.
Denotiamo con G il generico sistema-D0L e con $\mathsf{G}^{\mathcal{S}} = \langle w_1, w_2, ..., w_n, ...\rangle$ la successione che esso genera. L'insieme delle produzione del sistema $P = \{a_1 \to \alpha_1, ..., a_m \to \alpha_m\}$ in taluni caso conviene presentarlo mediante la matrice a due righe

$$\left\downarrow \begin{matrix} a_1 & \cdots & a_m \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \end{matrix} \right\downarrow \ .$$

Da questa matrice si ricava anche l'alfabeto T dei caratteri che tratta e quindi essa descrive completamente il presistema $\big\langle \{a_1, ..., a_m\}, P\big\rangle$.

Linguaggi-PD0L semplicissimi sono quelli costituiti da una sola stringa e da produzioni della forma $a \to a$; essi sono generati da sistemi della forma $\langle\{a_1, ..., a_m\}\ ,\ \{a_1 \to a_1, ..., a_m \to a_m\}, w\rangle$ per qualsiasi $w \in T^o plus$ ed il processo generativo si riduce alla ripetizione della stringa w.

Altri linguaggi-PDOL assai semplici sono quelli che si servono di un solo carattere e di una sola produzione della forma $a \to a^k$ con $k = 2, 3, 4, ...$; evidentemente un tale sistema genera $\{a, a^k, a^{k^2}, ..., a^{k^n}, ...\}$, linguaggio che corrisponde alla funzione esponenziale a^{k^n} facente parte di $\lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{P} \rceil$.
Chiaramente questi sistemi-PD0L su un solo simbolo sono i sistemi di riscrittura che consentono di controllare le funzioni esponenziali sugli interi.

Altri sistemi-0L su un solo carattere che generano linguaggi finiti, oltre a $\langle\{a\}, \{a \to a\}, a^k\rangle$ per un $k \in \mathbb{P}$ che genera $\{a^k\}$, sono i seguenti

$$\forall k \in \mathbb{P} \ : \ \langle\{a\}, \{a \to \mu\}, a^k\rangle \text{ che genera } \{\mu, a^k\} \text{ e}$$
$$\forall k \in \mathbb{P} \ : \ \langle\{a\}, \{a \to \mu\ ,\ a \to a\}, a^k\rangle \text{ che genera } \{\mu, a.a^2, ..., a^{k-1}, a^k\} \ .$$

C26a.05 Come vedremo la successione delle lunghezze delle stringhe generate, che denoteremo con $\mathsf{G}^{\mathcal{S}\ell} := \big\langle |w_1|, |w_2|, ..., |w_m|, ...\big\rangle$, costituisce un parte rilevante dello studio enumerativo delle successioni di interi positivi, uno dei capitoli più importanti della combinatorica, ed è strettamente collegato allo studio delle serie formali di potenze di una vaiabile.

Per valutare le lunghezze $|w_n|$ e le relative successioni risulta conveniente introdurre la notazione:

$$\forall x \in T\ ,\ k = 1, 2, 3, ... : \ D_{x,k} := deg_x(w_k) \ .$$

È anche utile osservare che per un sistema-PD0L la derivazione parallela $w_n \models w_{n-1}$ si ottiene applicando a w_n la sostituzione associata a P, sostituzione costituente un omomorfismo di monoide libero.

C26a.06 Esempi (1) Il sistema-PD0L $\mathsf{G} = \langle \{a,b\}, \{a \to b, b \to ab\}, a \rangle$ genera la successione

$$\mathsf{G}^{\mathcal{S}} = \langle a \,,\, b \,,\, bab \,,\, abbab \,,\, bababbab \,,\, ... \rangle \,.$$

Si osserva che la successione $\mathsf{G}^{\mathcal{S}\ell}$ è la successione dei numeri di Fibonacci [C60b].

(2) Consideriamo il sistema-PD0L $\mathsf{G} = \langle \{a,b,c\} \,,\, \{a \to abcc \,,\, b \to bcc \,,\, c \to c\} \,,\, a \rangle$; per esso la successione delle parole generate è $\mathsf{G}^{\mathcal{S}} = \langle a \,,\, abcc \,,\, abccbcccc \,,\, abccbccccbcccccc \,,\, ... \rangle$ e la successione delle lunghezze è la successione dei quadrati degli interi, $\mathsf{G}^{\mathcal{S}\ell} = \langle n \in \mathbb{P} :| \, n^2 \rangle$. Infatti si ricava facilmente che per ogni $n \in \mathbb{P}$ $D_{a,n} = 1$ e $D_{b,n} = n-1$; inoltre per induzione si dimostra che $D_{c,n} = n^2 - n$; questa è evidente per $n = 1, 2$, si ipotizza vera per w_{n-1} e si trova $D_{c,n} = 2 \cdot 1 + 2\,(n-2) + (n-1)(n-2) = 2n - 2 + n^2 - 3n + 2 = n^2 - n$.

(3) Il sistema-PD0L $\mathsf{G} := \langle \{a,b,c\} \,,\, \{a \to abc, b \to bc, c \to c\} \,,\, a \rangle$ genera

$$\mathsf{G}^{\mathcal{L}} = \{a \,,\, abc \,,\, abcbcc \,,\, abcbccbccc \,,\, abcbccbcccbcccc \,,\, ...\} \,.$$

Per induzione si trova $w_n = a\left(\prod_{i=1}^{n-1} b\,c^i\right)$; infatti la formula vale per i primi valori di n e ipotizzata vera per w_n si trova $w_{n+1} = abc\left(\prod_{i=1}^{n-1} bcc^i\right) = a\left(\prod_{i=1}^{n} bcc^i\right)$.
Ancora per induzione si dimostra che $|w_n| = n(n+1)/2$; in effetti si constata che $w_{n+1} = w_n\, b\, c^{n-1}$ e quindi che $|w_{n+1}| = |w_n| + n$. Di conseguenza la successione delle lunghezze è la successione dei numeri triangolari $\langle 1, 3, 6, 10, 15, ... \rangle = \langle n \in \mathbb{P} :| \, n(n+1)/2 \rangle$.

(4) La successione dei cubi degli interi positivi si ottiene come $\mathsf{G}^{\mathcal{S}\ell}$ relativa al sistema-PD0L $\mathsf{G} = \langle \{a,b,c,d\} \,,\, \{a \to abcd^5, b \to bcd^5, c \to cd^5, d \to d\} \,,\, a \rangle$, sistema che genera $\mathsf{G}^{\mathcal{L}} = \{a \,,\, abcd^5 \,,\, abcd^5bcd^5cd^6d^5 \,,\, ...\}$.

Si osserva che tutti i linguaggi-PD0L di questo paragrafo come i linguaggi delle funzioni esponenziali sugli interi non sono linguaggi acontestuali, in quanto violano la caratterizzazione di Parikh.
Osserviamo anche che quanti più sono i caratteri usati dal sistema, tanto più sono complesse le successioni delle lunghezze.

C26a.07 Il seguente esempio è stato proposto da Lindenmayer per spiegare lo sviluppo di organismi dotati di diramazioni.

Consideriamo il sistema-PD0L G caratterizzato dall'assioma "1" e dalle produzioni

$$P = \left\downarrow \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & (&) & \# & 0 \\ 2\#3 & 2 & 2\#4 & 504 & 6 & 7 & 8(1) & 8 & (&) & \# & 0 \end{array} \right\downarrow \,.$$

Si constata che esso genera

$$\begin{aligned} \mathsf{G}^{\mathsf{LS}} &= \langle n \in \mathbb{N} :| \, w_n \rangle \\ &= \langle 1 \,,\, 2\#3 \,,\, 2\#2\#4 \,,\, 2\#2\#504 \,,\, 2\#2\#60504 \,,\, 2\#2\#7060504 \,,\, 2\#2\#8(1)07060504 \,,\, ... \rangle \end{aligned}$$

Inoltre si verifica induttivamente che

$$\forall n \in \mathbb{N} \;:\; w_{n+6} = 2\#2\#8(w_n)08(w_{n-1})0 \cdots 08(w_0)07060504 \,.$$

Queste stringhe rappresentano un organismo che all'istante n=6 presenta una diramazione espressa dalla sottostringa "(1)" e che ogni 2 passi presenta una nuova diramazione che inizia sempre come sottostringa "(1)".
Queste sottostringhe di diramazione nel corso dello sviluppo continuano ad essere delimitate da "(" e ")" e sono destinate a svilupparsi come la stringa complessiva; quindi l'organismo avrà diramazioni che spuntano da altre diramazioni, ossia si doterà di diramazioni di successivi livelli.

Questi organismi sono raffigurati con figure nelle quali le diramazioni si dispongono alternatamente a sinistra e a destra della diramazione di origine.

//input C26a06

Si dimostra che il linguaggio $\mathsf{G}^{\mathcal{L}}$ è contestuale e non acontestuale, cioè che $\mathsf{G}^{\mathcal{L}} \in (\mathsf{LngS} \setminus \mathsf{LngF})$.

C26a.08 Si usa il termine **famiglia antiAFL** per denotare una collezione di linguaggi che non è chiusa rispetto a nessuna delle seguenti operazioni: unione, *chiusura* $-\oplus$, omomorfismo noncancellante, inverso di omomorfismo e intersezione con linguaggi razionali.
Si può esprimere questa caratterizzazione dicendo che una famiglia antiAFL manifesta elevata resistenza alle suddette operazioni. Denotiamo la classe delle famiglie antiAFL con il simbolo anti**AFL**.

Teorema La collezione dei linguaggi-0L è una famiglia antiAFL, cioè $0\mathfrak{L} \in \text{anti}\mathbf{AFL}$.

C26a.09 Dunque la collezione $0\mathfrak{L}$ non è chiusa rispetto alla applicazione di macchine sequenziali generalizzate (gsm), per inverse delle applicazioni di gsm e per sostituzioni.

Si dimostra inoltre che $0\mathfrak{L}$ non è chiusa per le operazioni complementazione, intersezione, giustapposizione e chiusura star-c [B53b04].

Due risultati positivo sono invece i seguenti.

(1) Teorema La collezione $0\mathfrak{L}$ è chiusa per riflessione.

Dim.: Se $L = \langle T, P, w\rangle \in 0\mathfrak{L}s\rangle^{\mathcal{L}}$ con $P = \{a_1 \to \alpha_1, ..., a_m \to \alpha_m\}$, allora $L^{\leftarrow} = \langle T, P^{\leftarrow}, w^{\leftarrow}\rangle^{\mathcal{L}}$, dove $P\leftarrow\ := \ \{a_1 \to {\alpha_1}^{\leftarrow}, ..., a_m \to {\alpha_1}^{\leftarrow}\}$.

Dim.: Ogni processo di generazione consentito dal primo sistema-0L corrisponde biunivocamente al processo riguardante le stringhe riflesse del secondo sistema-0L ▮

(2) Teorema Se L è un linguaggio-0L sopra una sola lettera, allora è tale anche L^* .

Dim.: ▮

C26a.10 Enunciamo due proposizioni che si dimostrano con procedimento simile quello seguito per a08(2).

(1) Prop.: Per ogni linguaggio finito L sopra una sola lettera si ha $L^* \in 0\mathfrak{L}$ ▮

Introduciamo la famiglia di insiemi numerici che chiamiamo genericamente **insiemi-**$\mathbb{M}$

$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ s \in \mathbb{P}\ ,\ k_1\ , ...\ , k_s \in \mathbb{N}\ \ :\ \ \mathbb{M}(n, s, m_1, ..., m_s)\ :=\ \{n\} \cup \big\{k_1, ..., k_s \in \mathbb{N} :|\ k_1\, m_1 + \cdots + k_s\, m_s\big\}$;

e denotiamo con $\mathbf{Set}\mathbb{M}$ il loro insieme.

(2) Teorema Sia L un linguaggio infinito sopra una sola lettera che scriviamo a e contenente la μ . Allora

$$L \in 0\mathfrak{L} \iff \mathbf{Set}\mathbb{M} \ni \mathbb{M}_L \ \ \P\ \ L = \Big\{i \in \mathbb{M}_L :|\ a^i\Big\}\ .$$

Dim.: ▮

C26a.11 **(1) Prop.**: Per la collezione dei linguaggi-0L finiti-0L sopra una sola lettera si ha

$$\mathsf{LngF}_a \cap 0\mathfrak{L}\ =\ \big\{m \in \mathbb{P} :|\ \{a^m\}\ ,\ \{\mu\,, a^m\}\ ,\ \{\mu\,, a, a^2, ..., a^m\}\big\}\ .$$

Dim.: Le produzioni di un sistema-0L che genera tale linguaggio non possono essere crescenti, ma solo delle forme $a \to a$ e $a \to \mu$ ▮

(2) Coroll.: $L \in \mathsf{Lng}_a \cap 0\mathfrak{L} \iff$

$$\mathbf{Set}\mathbb{M} \ni M_L \;]\!] \; L = \{i \in \mathbb{M}_l :|\; a^i\} \;\vee\; L \in \{m \in \mathbb{P} :|\; \{\mu, a^m\}\;,\; \{\mu, a, a^2, ..., a^m\}\};$$

(3) Coroll.: Tutti i linguaggi-0L sopra una sola lettera che contengono μ sono razionali ▮

C26a.12 **(1) Algoritmo:** Ad ogni sistema-0L sopra una sola lettera $\mathsf{G}_0 = \langle\{a\}, \mathsf{P}, w\rangle$ associa una espressione razionale che fornisce $\mathsf{G}^{\mathcal{L}}$, oppure un equivalente sistema-0L che è dotato di una sola produzione ▮

(2) Coroll.: È possibile decidere algoritmicamente per due qualsiasi sistemi-0L sopra una lettera se sono equivalenti-L o non equivalenti-L ▮

Il precedente enunciato non si può estendere ad arbitrari sistemi-0L. Questo segue dal fatto che non esiste algoritmo in grado di decidere per due arbitrarie grammatiche acontestuali se sono in grado di generare la stessa forma sentenziale.

C26a.13 Abbiamo ora gli strumenti per confrontare la collezione $0\mathfrak{L}$ e la collezione complementare $0\mathfrak{L}^{\complement} := \mathsf{Lng} \setminus 0\mathfrak{L}$ con le quattro collezioni della gerarchia basilare che qui scriviamo $\mathfrak{L}_0 := \mathsf{LngT}$, $\mathfrak{L}_1 := \mathsf{LngS}$, $\mathfrak{L}_2 := \mathsf{LngF}$, $\mathfrak{L}_3 := \mathsf{LngR}$.

C26a.14 **(1) Teorema** Ciascuna delle collezioni LngR, $\mathsf{LngF} \setminus \mathsf{LngR}$ e $\mathsf{LngS} \setminus \mathsf{LngF}$ ha intersezione non vuota con $0\mathfrak{L}$ e con $0\mathfrak{L}^{\complement}$.

Dim.: $\{a\} \in 0\mathfrak{L} \cap \mathsf{LngR}$.

Consideriamo il linguaggio $\overline{L} := \{i \in \mathbb{N} :|\; a^i\, b\, a^i\}$; esso appartiene a $\mathsf{LngF} \setminus \mathsf{LngR}$ e viene generato da $\langle\{a, b\}, \{b \to aba\}, b\rangle$ e quindi appartiene a $0\mathfrak{L}$.

Consideriamo il linguaggio $L_{11} := \{a^2\} \cup \{i = 2, 3, 4, ... :|\; b^{2i}\}$; esso appartiene a LngS ed è generato da $\langle\{a, b\}, \{a \to bb, b \to bb\}, aa\rangle$ e quindi sta in $0\mathfrak{L}$.

$\{a, a^2\} \in (\mathsf{LngR} \cap 0\mathfrak{L}^{\complement})$.

$\{i \in \mathbb{N} :|\; a^i b^i\} \in (\mathsf{LngF} \setminus \mathsf{LngR}) \cap 0\mathfrak{L}^{\complement}$.

$\{a^3\} \cup \{i \in \mathbb{N} :|\; a^{2^i}\} \;\in\; (\mathsf{LngS} \setminus \mathsf{LngF}) \cap 0\mathfrak{L}^{\complement}$ ▮

C26a.15 **(1) Prop.:** Per ogni $S = \langle T, P, w_0\rangle \in 0\mathfrak{L}s$ con $\{a \in T :|\; \overline{a}\} \subset P$ il linguaggio-0L generato $L := S^{\mathcal{L}}$ appartiene a LngF.

Dim.: Introduciamo $\overline{T} := \{a \in T :|\; \overline{a}\}$ e denotiamo con $\overline{P}$ l'insieme delle produzioni ottenute sostituendo in quelle di P ogni $a \in T$ con $\overline{a}$. Inoltre scriviamo $\overline{w}_0$ la stringa ottenuta da w_0 in seguito alla stessa sostituzione.
Si constata che L è generato dalla grammatica acontestuale

$$\left\langle\; \overline{T} \dot\cup \{x_0\}\;,\; T\;,\; P \cup \{x_0 \to \overline{w}_0\} \cup \{a \in T :|\; \overline{a} \to a\}\;,\; x_0 \right\rangle$$ ▮

(2) Prop.: Consideriamo la grammatica acontestuale $G = \langle V, T, P, x_0\rangle$ ed il linguaggio acontestuale $L := G^{\mathsf{G}}$. Ad L si possono associare un sistema-0L H e un alfabeto U tali che $L = H^{\mathcal{L}} \cap U^*$.

Dim.: Si consideri il sistema-0L $H := \left\langle V \dot\cup T\;,\; P \cup \{a \in V \cup T :|\; a \to a\}\;,\; x_0 \right\rangle$. Si constata che $L = H^{\mathcal{L}} \cap T^*$ ▮

C26a.16 Il teorema a13(1) lascia aperta la determinazione della relazione che sussiste tra le collezioni di linguaggi $0\mathfrak{L}$ ed LngS; ci proponiamo di dimostrare che la prima è contenuta propriamente nella seconda.

(1) Teorema Per ogni $H = \langle T, P, w_0 \rangle \in 0\mathfrak{L}s$ si trova un intero positivo ℓ_H tale che ogni $w \in H^{\mathcal{L}}$ discende da una derivazione $w_0 \models\!\!= w_1 \models\!\!= \cdots \models\!\!= w_s = w$ tale che $\forall i = 0, 1, ..., s \ : \ |w_i| \leq \ell_H \cdot |w|$.

Dim.: ▮

C26**a.17** **(1) Teorema** Ogni linguaggio-0L è un linguaggio contestuale, $0\mathfrak{L} \subset$ **LngS**.

Dim.: ▮

C26 b. sistemi e linguaggi-T0L

C26b.01 I sistemi e i linguaggi-0L sono stati generalizzati in molte direzioni, sia per approfondire le conoscenze sui linguaggi formali, sia per individuare sistemi di riscrittura in parallelo equivalenti ad altri sistemi che individuano configurazioni visualizzabili discrete e con proprietà di regolarità come i frattali, sia per fornire modelli biomatematici discreti in grado di spiegare organismi con caratteristiche di crescita più complesse di quelle degli organismi filamentosi schematizzabili con sistemi-0L.

Una prima generalizzazione di largo interesse è quella dei sistemi che presentano più insiemi di produzioni, chiamati tavole, che possono intervenire nei diversi stadi della evoluzione.

Le diverse tavole prmettono di tenere conto di comportamenti diversi dei componenti degli organismi modellizzati che possono spiegarsi con le diverse influenze dell'ambiente nel quale ogni organismo si viene a trovare nelle diverse fasi della sua evoluzione, ad esempio nelle diverse stagioni o nelle diverse ore del giorno. sia

C26b.02 Diciamo **presistema-T0L** una coppia $\mathsf{s} = \langle T, \boldsymbol{P}\rangle$ con $T \subset_\varphi$ ⍓ e con $\boldsymbol{P} = \{P_1, ..., P_t\}$ ove $t \in \mathbb{P}$ e $\forall i = 1, 2, ..., t : P_i \subset T \times T^*$. Dunque $\boldsymbol{P}$ è un insieme di produzioni che potrebbe far parte di un presistema-0L.
Denotiamo con $\mathsf{T0}\mathfrak{L}\mathsf{p}$ l'insieme dei presistemi-T0L.

Diciamo **sistema-T0L** una terna $\mathsf{S} = \langle T, \boldsymbol{P}, w\rangle$ con $\langle T, \boldsymbol{P}\rangle \in \mathsf{T0}\mathfrak{L}\mathsf{p}$ e denotiamo con $\mathsf{T0}\mathfrak{L}\mathsf{s}$ l'insieme di queste terne.
Chiaramente per $t = 1$ un sistema-T0L si riduce a un sistema-0L.

Anche tra i sistemi-T0L si distinguono i sistemi deterministici, i sistemi propaganti e i sistemi propaganti e deterministici: i primi presentano tutti gli insiemi di produzioni propaganti, nei secondi tutti gli insiemi di produzioni sono deterministici e l'insieme dei terzi è l'intersezione degli insiemi propaganti e degli insiemi deterministici.

È ragionevole denotarli, risp., come **sistemi-PT0L** come **sistemi-DT0L** e come**sistemi-PDT0L** e denotare i loro insiemi, risp., con $\mathsf{PT0}\mathfrak{L}s$, con $\mathsf{DT0}\mathfrak{L}s$ e con $\mathsf{PD0}\mathfrak{L}s$.

Per i sistemi di Lindenmayer a tavole si definisce la relazione di derivazione parallela come unione dalle relazioni di derivazione parallela riguardanti le t diverse tavole del sistema; anche per questa derivazione useremo la notazione $\models$.

Talora risulta opportuno distinguere le derivazioni dovute alle diverse tavole ed è ragionevole denotarle, risp., con $\models_{P_1}, ..., \models_{P_t}$; con tali notazioni la relazione di derivazione parallela del sistema S andrebbe definita come

$$\models_{\boldsymbol{P}} \;:=\; \models_{P_1} \cup \cdots \cup \models_{P_t} .$$

Anche di questa relazione interessano le potenze-c $\models^n$ per $n \in \mathbb{N}$, la chiusura-ccros o chiusura transitiva '$\models^{\oplus}$" e la chiusura-cstar, o chiusura riflessivo-transitiva $\models^*$.

Si definisce come **linguaggio generato dal sistema-T0L** $\mathsf{S} = \langle T, \boldsymbol{P}, w\rangle$ l'insieme $\mathsf{S}^{\mathcal{L}} := \{w \in T^* \;⁆\; w_0 \models^* w\}$.
Denotiamo inoltre con $\mathsf{T0}\mathfrak{L}$ l'insieme dei linguaggi generati dai sistemi-T0L.

In questo insieme risulta utile distinguere i linguaggi generati dai diversi tipi di sistemi-0L e per trattarli concisamente utilizziamo notazioni simili a quelle introdotte per i linguaggi-0L definite in a01:

$$\forall \mathbb{V} \in \{\mu, \mathrm{D}, \mathrm{P}, \mathrm{PD}\} \;:\; \mathbb{V}\mathsf{T0}\mathfrak{L} \;:=\; \left\{\mathsf{S} \in \mathbb{V}\mathsf{T0}\mathfrak{L}s :| \; \mathsf{S}^{\mathcal{L}}\right\} .$$

Conviene osservare esplicitamente che mentre i sistemi-0L coducono a evoluzioni deterministiche, i sistemi-T0L consentono di descrivere sia insiemi di evoluzioni di singoli organismi, sia insiemi di evoluzioni attribuibili a popolazioni di organismi, sia evoluzioni che possono essere governate da meccanismi che scelgono tra diverse successioni di applicazioni di tavole.

C26b.03 Consideriamo il sistema-T0L $\mathsf{S} = \langle \{a\} \ , \ \{\{a \to a^2\}, \{a \to a^3\}\} \ , \ a \rangle$; più precisamente esso è un sistema-PDT0L e chiaramente genera $\mathsf{S}^{\mathcal{L}} = \{h, k \in \mathbb{N} :| \ a^{2^h \cdot 3^k}\}$.
Si osserva che questo linguaggio non è un linguaggio-0L. Questo fatto e l'enunciato b02 $0\mathfrak{L}\mathsf{s} \subset \mathsf{T}0\mathfrak{L}\mathsf{s}$ implicano che vale l'inclusione stretta, $0\mathfrak{L} \subset \mathsf{T}0\mathfrak{L}$.

Similmente si dimostra che $\mathsf{D}0\mathfrak{L} \subset \mathsf{DT}0\mathfrak{L}$.

Si trova invece che $0\mathfrak{L} \not\subset\not\supset \mathsf{DT}0\mathfrak{L}$. Inoltre valgono le proprietà di non chiusura analoghe a quelle in a07: inparticolare $\mathsf{T}0\mathfrak{L} \in \mathsf{anti}\mathbf{AFL}$.

C26b.04 Enunciamo ora una proprietà di collegamento di $\mathsf{T}0\mathfrak{L}$ con la gerarchia di Chomsky analoga al risultato presentato in a16 .

Teorema Ogni linguaggio libero da μ generato da un sistema-TOL può essere generato da una grammatica acontestuale libera da μ programmata.

Procedendo in questa direzione si possono introdurre dispositivi di controllo simili a quelli esaminati in C23.
Uno di questi dispositivi stabilisce che dopo un passo di derivazione in cui si è applicata una data tavola si può applicare solo una tavola scelta in un sottoinsieme associato alla P_h.

Si possono anche dottare tavole di produzioni incomplete; in tal caso si stabilisce che a una stringa in evoluzione w non può essere applicata una tavola priva di produzioni che iniziano con un carattere che compare nella w.
In queste circostanze si parla di campi di fallimento, e questi ultimi non sono in grado di contribuire alla capacità generativa del sistema.

`L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php`