1

Capitolo C21
macchine di Turing

Contenuti delle sezioni

a. ruolo delle macchine di Turing p. 2
b. riconoscitori di Turing di base p. 4

6 pagine

C21 0.01 Per **macchina di Turing**, termine che in queste pagine spesso abbreviamo con TM, si intende un tipo di macchina formale con prestazioni sostanzialmente semplici, cioè dotate di dispositivi elementari e in grado di compiere solo pochi tipi di semplici operazioni, ma che, grazie alla illimitata estendibilità dei dispositivi e alla possibilità di effettuare lunghissime sequenze di operazioni, si rivela in grado di eseguire una gamma di computazioni effettive che si rivela estremamente ampia e variegata.

La vastità della portata delle macchine di Turing ha portato a congetturare che tutte le computazioni effettive possano essere eseguite da macchine di Turing.
Questa congettura, avanzata da Alonzo Church nel 1938 e irrobustita da Alan Turing l'anno successivo, viene chiamata **congettura di Church-Turing**, e se fosse dimostrata consentirebbe di dare un fondamento ben preciso alla teoria della computabilità.
Essa comunque viene ampiamente accettata ed è un elemento di riferimento di grande importanza.

C21 a. ruolo delle macchine di Turing

C21 a.01 Nella prima parte di questo capitolo, dopo aver definito alcune varianti della TM, ci preoccuperemo di sviluppare vari argomenti a favore della congettura di Church-Turing.

Innanzi tutto illustreremo in qual modo si possono effettuare alcune elaborazioni fondamentali mediante macchine di Turing delle varianti più semplici. Quindi presenteremo una progressione di varianti più elaborate mostrando come si possano ridurre ai tipi più fondamentali senza perdere di portata. Questo ci consentirà di ampliare notevolmente la gamma delle computazioni governabili con macchine di Turing.

Successivamente annunceremo come le macchine di Turing possono svolgere tutti i compiti che si possono eseguire con sistemi formali come sistemi di riscrittura di Axel Thue, Emil Post e Andrey Markov Jr., sistemi assiomatici finitistici, funzioni ricorsive e λ-calcolo.

Si tratta di sistemi che a prima vista presentano una costituzione molto diversa da quella delle TM e che sono stati proposti fin dai primi del '900 come modelli generali per le computazioni effettive rivelandosi anch'essi in grado di svolgere una vasta gamma di compiti.

Questo amplia ulteriormente la gamma delle elaborazioni governabili con TM e rafforza la convinzione che i dispositivi che esse utilizzano siano i dispositivi essenziali per la elaborazioni automatiche.

C21 a.02 Spingendo avanti le varianti delle macchine di Turing si giunge agli stessi odierni computers, previa una loro idealizzazione mediante la rimozione delle limitazioni delle risorse delle quali esse possono disporre.

La portata delle TM risultano quindi equivalente a quella di un odierno computer utilizzabile mediante un linguaggio di programmazione anche evoluto, nell'ambito di un sistema operativo ed eventualmente in grado di colloquiare con altri elaboratori collegati in rete per ottenere da essi informazioni e prestazioni elaborative.

A questo punto si può portare a favore della congettura di Church anche la grande mole di elaborazioni effettivamente svolte dai computers dei quali disponiamo e delle loro varianti ragionevolmente immaginabili.

Stante la sostanziale equivalenza della portata delle odierne apparecchiature per il calcolo elettronico, risulta che le TM sono in grado di effettuare tutte le elaborazioni eseguibili da automatismi reali o ragionevolmente realizzabili.

C21 a.03 Ciascuno dei meccanismi computazionali generali che si dimostrano avere portata equivalente alle TM potrebbe essere scelto come strumento di riferimento per la totalità delle computazioni inora note.
A favore delle TM si può osservare che costituisce un modello meccanicistico discreto il cui funzionamento può essere immaginato in modo più intuitivo di quello di altri meccanismi generali di computazione. Inoltre le TM si possono arricchire con "dispositivi aggiuntivi", e "composizioni" che consentono di organizzare macchine che demandano compiti particolari a "sottomacchine".
In genere queste macchine arricchite si possono descrivere in termini costruttivi e dinamici sostenibili da visualizzazioni tanto da risultare relativamente intuitive e in grado di convincere della loro capacità di risolvere nuovi problemi.

Va sottolineata l'importanza della possibilità di ricondurre alle prestazioni di un computer le varie prestazioni computazionali concepibili e in particolare quelle descrivibili come eseguibili da meccanismi formali essenziali come le TM basilari.

Questi collegamenti tra prestazioni di meccanismi diversi contribuiscono ad avere una visione unitaria della razionalizzazione delle attività che intendono ottenere(almeno potenzialmente) risultati di elevata generalità e di elevata versatilità.

Questa visione delle computazioni dovrebbe costituire un elemento culturale di primaria importanza, sia sul piano delle molteplici indicazioni per elaborazioni di grande interesse pratico che sul piano delle scelte economiche, amministrative e politiche.

Su questi aspetti generali ritorneremo parlando di complessità computazionale in C47).

C21 a.04 Studiando le caratteristiche delle TM si riesce in modo abbastanza agevole ad individuare elaborazioni che esse non riescono a eseguire, ossia obiettivi di elaborazioni che esse non sono in grado di tentare di raggiungere.

Accettata la generalità della portata delle TM, le accennate limitazioni della loro portata vanno viste come limitazioni per la possibilità di risoluzione effettiva di problemi, cioè come limitazione delle ambizioni delle attività matematico-informatiche.

La presa di coscienza della unitarietà delle computazioni e delle limitazioni alla loro portata va vista come una acquisizione culturale che non può essere sottovalutata, ma che invece va considerata come un elemento di maturità delle discipline computazionali.

In particolare la consapevolezza di queste limitazioni contribuisce alla definizione di gruppi di problemi che si pongono obiettivi più ridotti dei problemi che si rivelano intrattabili, ma le cui possibili meno ambiziose soluzioni possono essere di effettiva utilità.

C21 b. riconoscitori di Turing di base

C21 b.01 Tra le molteplici varianti di TM scegliamo come versione di base, versione dalla quale iniziare la formalizzazione e alla quale riferirci più spesso, la macchina dotata dei seguenti dispositivi.
- una unità centrale dotata di un numero finito di stati interni con il compito di distinguere le configurazioni sulle quali la macchina può venirsi a trovare nel corso delle sue evoluzioni;
- un repertorio di istruzioni di natura estremamente semplice atte a regolare le sue evoluzioni che si vogliono procedere in modo deterministico;
- un nastro illimitato (meglio sarebbe qualificarlo come illimitatamente estendibile ed utilizzabile) nelle due direzioni, sul quale può leggere e scrivere mediante una testina di I/O (ingresso/uscita, ovvero lettura/scrittura).

C21 b.02 Le macchine di Turing, come altri meccanismi che elaborano stringhe, possono essere utilizzate secondo due "assetti".

Nell'assetto da riconoscitore una macchina sottopone ogni stringa w che le viene presentata a un processo conle caratteristiche dell'analisi che ha la possibilità di concludersi in due modi alternativi da interpretano, risp., come accettazione o come rifiuto della w stessa.

Nell'assetto di apparecchiatura generatrice una macchina porta avanti un processo che, di tanto in tanto, può effettuare la emissione su un particolare nastro di una stringa che diciamo stringa generata; ogni stringa generata si può pensare che venga messa a disposizione per qualche successivo utilizzo.

Si possono individuare molti riconoscitori di Turing e molte macchine generatrici di Turing in grado di effettuare attività pienamente controllabili: riconoscitori per i quali si dimostra che per ogni stringa loro sottoposta sono in grado di stabilire in un numero finito di passi se va accettata o rifiutata e generatori che si dimostrano in grado di generare una successione illimitata di stringhe o una lista finita di stringhe e successivamente fermarsi segnalando chiaramente l'avvenuto arresto.
Evidentemente queste macchine controllabili definiscono un linguaggio su un ben definito alfabeto: il linguaggio delle stringhe accettate oppure il linguaggio delle stringhe generate.

Va però subito segnalato che non si può escludere la possibilità che un generico riconoscitore di Turing al quale sia sottoposta una certa stringa proceda lungamente nella sua analisi senza giungere ad una conclusione, cioè senza decidere se accettare o rifiutare la stringa in esame.
Similmente non si può escludere che un generatore di Turing, dopo aver eventualmente generate alcune stringhe, possa procedere nella sua evoluzione, anche a lungo, senza emettere altro.

Vi è quindi un margine di indeterminatezza per la portata delle macchine di Turing del quale si deve tenere conto.

C21 b.03 Occorre anche osservare che la distinzione tra i due assetti non è affatto una drastica alternativa.

Un riconoscitore di Turing R può essere utilizzato da una macchina di Turing generatrice che se ne serve come sottomacchina e procede a presentargli una successone delle stringhe di un alfabeto T per stabilire di assegnare a un linguaggio suo generato ogni stringa che R accetta.

Viceversa una macchina generatrice G può essere utilizzata come sottomacchina da un riconoscitore di Turing che, di fronte alla richiesta di stabilire se una stringa w sia da accettare o rifiutare incarica G di procedere a generare le proprie stringhe e se essa emette la w la dichiara accettabile.

È inoltre opportuno aggiungere che la precedente è una osservazione di prospettiva (spesso chiamata "teorica", ahinoi) che non pretende affatto di fornire indicazioni operative e in particolare trascura ogni preoccupazioni sull'efficienza delle organizzazioni prospettate.

Per giungere a indicazioni operative (che non possono che essere specifiche) risulta necessario un meticoloso lavoro di formalizzazione riguardante non pochi dettagli costruttivi che i discorsi di prospettiva servono solo a presentare per grandi linee.

C21 b.04 Procediamo a una formalizzare della versione della macchina di Turing che assumiamo come primaria.

Diciamo **riconoscitore di Turing deterministico** e con nastro illimitato bidirezionale e istruzioni a 5 campi un sistema della forma

$$\boldsymbol{T} \;=\; \langle Q, \imath, F, \mathsf{T}, \mathsf{X}, \text{ƀ}, \delta\rangle \;,$$

dove $Q \in \mathbf{SetF}$ è l'insieme degli stati della T;
$\imath \in Q$ è lo stato iniziale per le evoluzioni della macchina;
$F \subseteq Q$ è l'insieme degli stati finali;
T e X sono alfabeti disgiunti, detti risp. alfabeto di ingresso e alfabeto di lavoro;
ƀ è un segno estraneo a T e a X detto simbolo di casella disponibile o blank;
$\delta \in \lceil Q \times \mathsf{V}_{\text{ƀ}} \longrightarrow\!\!\triangleright Q \times \mathsf{V}_{\text{ƀ}} \times \Xi \rceil$ è detta **funzione di transizione per la macchina di Turing**.

Per le formule precedenti e per le successive ci serviamo degli alfabeti $\mathsf{V}_{\text{ƀ}} := \mathsf{T} \dot\cup \mathsf{X} \dot\cup \rightarrow$, $\mathsf{V} := \mathsf{T} \dot\cup \mathsf{X}$ e $\Xi := \{\lambda, \nu, \rho\}$, dove λ, ν e ρ sono detti risp. segno per lo spostamento a sinistra, per lo spostamento nullo e per lo spostamento a destra, spostamenti che riguardano la testina di I/O che si può muovere sul nastro in dotazione del riconoscitore.

L'isieme delle quintuple costituenti δ talora viene chiamato "repertorio delle istruzioni" della TM e anche "programma" della macchina.
Per le componenti di una di queste istruzioni $\mathsf{i} = \langle q, x, \overline{q}, \overline{x}, \xi\rangle$ $q \in Q$ viene detto stato attuale della macchina $x \in \mathsf{V}_{\text{ƀ}}$ carattere letto e da sostituire, $\overline{q}$ stato successivo conseguente, $\overline{x}$ carattere sostitutivo conseguente, $\xi \in \Xi$ spostamento conseguente.

Per talune TM V potrebbe essere vuoto, ma questa situazione può essere evitata al fine di semplificare la formualzione.

L'insieme dei riconoscitori introdotti la denotiamo con $\mathsf{TrcnD2w5}$, sigla che ricorda il carattere deterministico, le 2 direzioni del nastro e i 5 campi delle istruzioni. Le posizioni del nastro sono indicate da interi e con la posizione iniziale caratterizzata dalla ascissa 1e acisse crescenti da sinistra a destra.

Anticipiamo che per talune considerazioni non è necessario entrare nei dettagli sui riconoscitori di Turing e per il loro insieme noncompletamente definito adottiamo la notazione Trcn.

C21 b.05 Si dice **configurazione istantanea della macchina di Turing** sopra definita $\boldsymbol{T}$ ogni $\mathsf{C} := \langle q, \beta, \gamma, h\rangle$ dove
q si dice stato interno attuale;
$\beta\gamma$ stringa attualmente registrata sul nastro, il prefisso β essendo registrato a sinistra della posizione iniziale alla quale attribuiamo la posizione 1, e il suffisso γ essendo registrato sulla destra a partire dalla posizione 1;
h posizione attua;le della testina di I/O.

La configurazione C rappresenta la situazione della macchina che si può descrivere i termini materiali dicendo che il controllo della $\boldsymbol{T}$ si trova nello stato q, la testina sulla casella h del nastro, la stringa

$\beta\gamma$ registrata nelle caselle dalla posizione $-(|\beta|-1)$ fino alla $|gam|$, le caselle precedenti e seguenti occupate da segni blanks;
Quindi la testina si trova su un carattere di β sse $-(|\beta|-1)leqh \leq 0$ su un carattere di γ sse $1 \leq h \leq |\gamma|$ e su una casella blanksse altrimenti.

Denotiamo con $\boldsymbol{T}^{conf}$ l'insieme delle configurazioni che $\boldsymbol{T}$ può assumere.

Una configurazione iniziale ha la forma $\langle \iota, \sqcup, w, 1\rangle$ con $w \in \mathsf{T}^*$ costituente la stringa sottoposta alla macchina affinché esegua il proceesso della sua accettazione.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php