Capitolo B66:
teoria assiomatica degli insiemi

Contenuti delle sezioni

19 pagine

B66:**0.01** Questo capitolo concerne le teorie assiomatiche degli insiemi e primariamente la teoria individuata dalla sigla ZFC, cioè la teoria proposta da Zermelo e Fraenkel comprendente l'assioma della scelta la quale è largamente assunta come teoria degli insiemi standard.

La sezione :b contiene una presentazione della ZFC, costituita dalle formule essenziali accompagnate da commenti discorsivi. Sono presenti anche considerazioni sopra i problemi generali per ZFC, come coerenza e completezza. La sezione :b viene preceduta da una sezione dedicata agli elementi del calcolo del primo ordine necessari alla assiomatica ZFC.

Vengono poi presentati a grandi linee le formalizzazioni delle teorie matematiche basate sopra ZFC.

La successiva sezione :d è dedicata alla assiomatizzazione della teoria dei numeri naturali, la più semplice delle teorie basate sopra ZFC.

Viene poi esaminato l'assioma della scelta attraverso diverse formulazioni equivalenti, tra le quali il lemma di Zorn, e vengono presentate sue conseguenze più deboli che possono aiutare alla sua comprensione.

Si termina con una panoramica sopra altre possibili impostazioni assiomatiche della teoria degli insiemi e sopra alcuni altri sistemi formali che vengono proposti per i fondamenti della matematica.

Per questo capitolo sono stati consultati, in particolare, `Mathematical logic (we)` e *Intermediate set theory* (1982) di F. R. Drake e D. Singh.

B66:a. calcolo del primo ordine per ZFC

B66:**a.01** Come segnalato in B65, per la introduzione assiomatica di una teoria formale impegnativa è opportuno disporre di uno strumento formale in grado di tenere sotto controllo le sue basi lessicali, sintattiche e semantiche.

Qui riprendiamo il calcolo dei predicati o calcolo del primo ordine [B61] limitandoci alle sole nozioni di questo calcolo logico che sono necessarie per l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel.

Iniziamo con la definizione del relativo linguaggio, cioè della sua componente lessicale-sintattica.
Questo linguaggio in posizione ancillare rispetto alla teoria di Zermelo-Fraenkel, che identifichiamo concisamente con **LngZF**, si serve di simboli elementari (i simboli che rappresentano i termini e i predicati, i connettivi logici, i simboli dei quantificatori, ...) ed è costituito da costrutti sintattici che chiamiamo **formule ben formate** o formule ammissibili; questo termine nel seguito del capitolo lo sostituiremo con il semplice "formule" o con l'acronimo `wff`.

B66:**a.02** I termini sono simboli di variabili che rappresentano gli oggetti che la teoria consente di trattare, nel nostro caso gli insiemi.
Per i termini ci serviremo di lettere come v e w e anche di lettere affette da esponenti o deponenti come v_1, a_k e $w^{(2)}$ attribuibili a un alfabeto illimitatamente ampliabile **ALngZF**.

Risulta conveniente servirsi di lettere diverse dalle variabili con il ruolo di **metavariabili**, ossia di simboli che possono rappresentare qulsiasi variabile. Qui useremo le lettere a, b, c, ..., t, u, x, y, z eventualmente arricchite con esponenti e deponenti.

Inoltre risulta assai opportuno servirsi di simboli abbreviativi riguardanti oggetti da introdurre con definizioni specifiche (in particolare riguardanti simboli di costanti (come $\emptyset$) e riguardanti termini di astrazione oggetti con una forma del genere $\{x \mid \boldsymbol{P}(x)\}$.

B66:**a.03** **LngZF** si serve di due soli simboli predicativi, ovvero di due simboli concernenti relazioni tra formule, $=$ e $\in$.

Il segno $=$ denota il predicato di identità e va considerato un predicato logico, cioè un predicato applicabile a formule del calcolo del primo ordine, non solo a **LngZF**, indipendentemente dalle loro interpretazioni e applicazioni.

Il segno $\in$ esprime la relazione di appartenenza e va considerato un predicato non logico, in quanto riguarda proprietà legate alla interpretazione delle formule di **LngZF**.
Si osserva che questa interpretazione insiemistica in genere è facilmente comprensibile, anche a livello intuitivo.

Va segnalato che più avanti si introdurranno vari altri segni di predicati mediante definizioni che si possono interamente ricondurre ai due precedenti e che quindi possono essere considerati delle mere abbreviazioni.

B66:**a.04** Si dice **formula atomica** una stringa di simboli della forma $x = y$ o $x \in y$, ove x ed y denotano dei termini.
Per quanto finora detto siamo in grado di considerare termini solo le semplici variabili.

Le formule atomiche esprimono le proposizioni basilari della teoria, proposizioni che quando si passerà al piano semantico della teoria ed esse verranno opportunamente interpretate, saranno qualificate aut come vere aut come false.

B66:**a.05** Si introducono due **connettivi logici**, $\neg$ e $\Longrightarrow$; il primo denota la negazione di un enunciato, il secondo la relazione di implicazione tra due enunciati.

In seguito verranno introdotti anche gli altri connettivi logici del calcolo proposizionale: $\wedge$, $\vee$, $\Longleftrightarrow$, ... , ma come abbreviazioni che si possono ricondurre a combinazioni dei soli connettivi $\neg$ e $\Longrightarrow$.

Osserviamo che in genere nei testi di logica si usano $\to$ o $\supset$ invece di $\Longrightarrow$: in queste pagine finalizzate alla teoria degli insiemi più che alla logica in generale viene preferito$\Longrightarrow$ per evitare di confondere l'implicazione con il segno $\to$ usato per il passaggio al limite e con il segno $\supset$ usato per la relazione di sovrainsieme.
Osserviamo anche che nei testi di logica la negazione viene denotata anche con $\sim$, simbolo che qui viene usato per varie relazioni di equivalenza.

Si introduce poi il segno $\exists$ per denotare il cosiddetto **quantificatore esistenziale**, leggibile come "esiste".

Verranno in seguito usati anche il quantificatore universale $\forall$, da leggere "per ogni", e la variante $\exists_1$, da leggere "esiste un solo"; questi vengono introdotti come abbreviazioni riconducibili al solo $\exists$.

B66:**a.06** Introduciamo le **formule ben formate** della teoria, mediante definizioni del genere induttivo, ossia mediante schemi di definizione che si servono degli elementi in corso di definizione ma che sono riconducibili con un numero finito di passi a elementi noti in precedenza.
Queste definizioni sono riconducibili ai meccanismi generativi delle grammatiche a struttura di frasi [C14].

Facendo uso di metavariabili come ϕ, ψ e χ, chiediamo quanto segue.

(1) Le formule atomiche sono formule.

(2) Se ϕ e ψ sono formule, allora $\lfloor \neg\phi \rfloor$ e $\lfloor \phi \Longrightarrow \psi \rfloor$ sono formule.

(3) Se ϕ è una formula ed x una variabile, allora $\lfloor \exists\, x\, \phi \rfloor$ è una formula.

Il processo di costruzione di una formula non atomica Φ si può descrivere con una o più derivazioni ciascuna ottenibile con una sequenza di applicazioni delle precedenti regole (produzioni).

Il complesso dei possibili processi di costruzione della formula Φ si può descrivere con un digrafo graduato monoradice che scriviamo $\mathsf{DgrfDer}(\Phi)$ il quale sulla radice presenta la formula in esame e sulle foglie le formule atomiche che sono sue sottostringhe.

Più in generale in ogni formula non atomica Φ si individuano delle **sottoformule**, le sue sottostringhe che sono esse stesse formule; ciascuna sottoformula corrisponde a un nodo ν di $\mathsf{DgrfDer}(\Phi)$ ed al sottodigrafo dei discendenti di ν.

Si osserva che si sono usate le coppie di parentesi coniugate $\lfloor$ e $\rfloor$ come delimitatori di formule aventi lo scopo di evidenziare le relative stringhe in contesti nei quali potrebbero risultare poco identificabili.

Molte coppie di queste parentesi coniugate si potrebbero economizzare, in particolare quando una formula poco elaborata compare in un contesto non formalizzato; questo è il caso delle formule in (2) e (3). Esse possono invece essere utili in considerazioni nelle quali si dà peso a certe sottoformule

Inoltre si possono applicare le economie dovute a regole di precedenza. Se si conviene che l'applicazione dell'operatore unario $\neg$ abbia la precedenza sull'applicazione dell'operatore binario $\Longrightarrow$ e del simbolo $\exists$. si può trascurare la coppia di parentesi di una sottoespressione della forma $\lfloor \neg\Phi \rfloor$.

Considerazioni sulle parentesi delimitatrici e sulle regole di precedenza sono valide per ogni linguaggio generato da una grammatica acontestuale, come discusso esaurientemente in C14.

B66:**a.07** In una formula come $\exists x \, \phi$ la stringa suffissa ϕ è chiamata **scope** o **campo d'azione**, del prefisso (quantificatore) $\exists x$; quando la formula viene combinata per ottenere una formula più estesa il suo campo d'azione non cambia.

Le variabili che compaiono in una formula si assegnano a due tipi contrapposti: una tale x si dice **variabile vincolata**, *bound*, sse compare nel campo d'azione di un quantificatore $\exists x$, mentre si dice **libera** sse altrimenti.
Le variabili libere di una formula sono dette anche **parametri** della formula.

Intuitivamente: una variabile libera riguarda un oggetto che la formula contribuisce a qualificare. Un candidato x potrebbe soddisfare o meno la proprietà espressa dalla formula; in altre parole si lascia aperta la possibilità che un oggetto rappresentato dalla x soddisfi o meno la formula.

Una variabile vincolata, al contrario, si potrebbe definire "segnaposto"; la formula $\exists x \, \phi(x)$ si può leggere: esiste un oggetto che qui denotiamo con x tale che per esso vale la formula $\phi(x)$, dove l'aver fatto precedere (x) dalla metavariabile ϕ serve solo a segnalare che nella ϕ deve comparire la variabile x.

Evidentemente se si sostituisce la x con una qualsiasi y diversa dalle variabili che compaiono nella ϕ si ottiene la formula $\exists y \, \phi(y)$ del tutto equivalente alla precedente.

Nella pratica in genere conviene distinguere le lettere che individuano variabili vincolate (ad esempio x, y, z) dalle lettere che denotano variabili libere (ad esempio a, b, c).

B66:**a.08** Vediamo i segni dei connettivi e dei quantificatori che si introducono mediante abbreviazioni.

Per definirli usiamo espressioni che si servono delle metavariabili ϕ e ψ per rappresentare formule generiche, in queste espressioni compare il segno ::= con il ruolo del separatore tra formula contenente il segno introdotto come abbreviazione tendenzialmente concisa e formula con contenuti più elementari che viene sostituita dall'abbreviata.

(1) $\lfloor \phi \vee \psi \rfloor \;::=\; \lfloor \neg\phi \implies \psi \rfloor$ (connettivo or)

(2) $\lfloor \phi \wedge \psi \rfloor \;::=\; \neg \lfloor \phi \implies \neg\psi \rfloor$ (connettivo and)

(3) $\lfloor \phi \iff \psi \rfloor \;::=\; \lfloor \phi \implies \psi \rfloor \;\wedge\; \lfloor \psi \implies \phi \rfloor$ (doppia implicazione)

(4) $\lfloor \forall x \phi \rfloor \;::=\; \lfloor \neg\exists \neg\phi \rfloor$ (quantificatore universale)

(5) $\lfloor \exists_1 x \phi(x) \rfloor \;::=\; \Big\lfloor \exists y \forall x \lfloor \phi(x) \iff x = y \rfloor \Big\rfloor$ (esistenza e unicità)

B66:**a.09** Se la formula ϕ presenta come variabili libere x_1, x_2, ... ,x_m, si dice **chiusura universale** della ϕ la formula

(1) $$\forall x_1 \, x_2 \ldots x_n \, \phi \; .$$

B66:**a.10** Vediamo le formule del linguaggio **LngZF** alle quali si assegna il ruolo di **assiomi logici**.
Come al solito ϕ, ψ e χ denotano metavariabili che rappresentano formule.

(1) $\lfloor \phi \implies \lfloor \psi \implies \phi \rfloor \rfloor$.
(2) $\lfloor \phi \implies \lfloor \psi \implies \chi \rfloor \rfloor \implies \lfloor \lfloor \phi \implies \psi \rfloor \implies \lfloor \phi \implies \chi \rfloor \rfloor$.
(3) $\lfloor \neg\phi \implies \neg\psi \rfloor \implies \lfloor \psi \implies \phi \rfloor$.
(4) $\forall x \, \phi \implies \phi$, se x non è variabile libera in ϕ .
(5) $\forall x \, \phi \implies \phi(y)$, per ogni variabile y per x in $\phi(x)$, cioè tale che x non compare libera in $\phi(x)$ nel campo d'azione di un quantificatore $\exists$ o $\forall$.
(1) $\forall x \lfloor \phi \implies \psi \rfloor \implies \lfloor \phi \implies \forall x \, \psi \rfloor$, se x non è variabile libera in ϕ .

(7) $x = x$.
(8) $x = y \implies \lfloor \phi(x) \iff \phi(y) \rfloor$, per ogni formula ϕ, tale che $\phi(y)$ contiene almeno una occorrenza di y, mentre $\phi(x)$ contiene x libera e non all'interno del campo d'azione di $\exists\, y$ o di $\forall\, x$.

B66:**a.11** Le deduzioni del calcolo del primo ordine per la teoria degli insiemi si servono di due **regole di inferenza**:

(1) **modus ponens**: dalla formula ϕ e dalla $\phi \implies \psi$ si inferisce ψ .

(2) **regola di generalizzazione**: dalla formula ϕ si inferisce $\forall\, x\, \phi$.

B66:**a.12** Se $\boldsymbol{H}$ è un insieme di formule, eventualmente vuoto, si dice **deduzione** che da $\boldsymbol{H}$ conduce a ϕ_m una sequenza di formule $\langle \phi_1, \phi_2, ..., \phi_m \rangle$ tali che per ogni $i = 1, 2, ..., m$ accada
(a) ϕ_i è un assioma ;
(b) $\phi_i \in \boldsymbol{H}$;
(c) ϕ_i si può inferire dalle formule ϕ_h con $h < i$ mediante il modus ponens o la regola di generalizzazione.

Si scrive $\boldsymbol{H} \vdash \phi$ e si dice che "$\boldsymbol{H}$ **comporta** ϕ" sse esiste una deduzione da $\boldsymbol{H}$ che conduce a ϕ.
Si dice **dimostrazione** della formula ϕ una deduzione della forma $\emptyset \vdash \phi$.

B66:**a.13** Al calcolo del primo ordine si vuole dare un significato formalmente definito; in questo consiste la **semantica** del linguaggio **LngZF**.

La semantica è fornita da una **interpretazione** che consiste in due parti: una struttura e un'assegnazione.

Per la struttura non imponiamo richieste precise, ma segnaliamo che un esempio interessante è dato dalla **struttura dei tipi cumulativi** introdotta da Mirimanoff.
Essa inizia con gli individui o insiemi di livello 0, entità prive di membri e tendenzialmente semplici.
Presenta poi insiemi di livello 1, insiemi i cui membri sono individui.
Seguono gli insiemi di livello 2, collezioni i cui membri sono insiemi dei livelli 0 e 1.
In generale si hanno insiemi di livello $n(= 2, 3, 4, ...)$, collezioni i cui membri sono insiemi dei livelli inferiori 0, 1, ..., $n - 1$.

L'**interpretazione** di **LngZF** è individuata da un **dominio** D, una collezione non vuota di oggetti che costituisce il campo di variabilità delle variabili, da una relazione binaria entro D $\boldsymbol{A}$ e da una **assegnazione** v, una funzione che a ogni variabile associa un membro di D.
Una coppia $\langle \sigma, \tau \rangle \in \boldsymbol{A}$ viene interpretata come la relazione di appartenenza $\sigma \in \tau$.

B66:**a.14** Ci proponiamo ora di dare un significato a **LngZF** definendo per le sue formule l'attributo chiamato **attributo di soddisfazione** relativa a una interpretazione $\langle D, \boldsymbol{A}, v \rangle$ del linguaggio stesso.

Esprimeremo questa qualifica con la scrittura

(1) $$\langle D, \boldsymbol{A} \rangle \models \phi(v) ,$$

da leggersi "la struttura $\langle D, \boldsymbol{A} \rangle$ soddisfa la formula ϕ per l'assegnazione v" , oppure "la formula ϕ è vera nella struttura $\langle D, \boldsymbol{A} \rangle$ per l'assegnazione v" .
Useremo anche la negazione della $\models$ che denotiamo con $\not\models$.

Procediamo induttivamente sul digrafo di buona formazione delle formule.

Se ϕ è la formula atomica $\lfloor x = y \rfloor$, allora $\langle D, \boldsymbol{A} \rangle \models \lfloor x = y \rfloor (v)$ sse $v(x) = v(y)$, ossia sse x e y sono assegnate allo stesso oggetto.
Caso $\phi = \lfloor x \in y \rfloor$: $\langle D, \boldsymbol{A} \rangle \models \lfloor x \in y \rfloor$ sse $\langle v(x), v(y) \rangle \in \boldsymbol{A}$.

Caso $\phi = \lfloor \neg\psi \rfloor$: $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \phi$ sse $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \not\models \psi(v)$.

Caso $\phi = \lfloor \psi \Longrightarrow \chi \rfloor$: $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \phi$ sse $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \psi(v)$ implica $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \chi(v)$.

Caso $\phi = \lfloor \exists x\, \psi(x) \rfloor$: $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \phi(x)$ sse vi è una assegnazione x-variante di v v' per la quale $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \psi(v')$.

Qui diciamo che v' è un'**assegnazione** x**-variante** della v sse $v'(y) = v(y)$ per ogni variabile $y \neq x$ (lasciando aperta la possibilità che sia $v(x) \neq v'(x)$).

B66:**a.15** Vogliamo ora considerare la relazione di soddisfazione per le formule ottenute componendo formule più semplici con i costrutti definiti in a08 come abbreviazioni.

Riteniamo sia utile esplicitare come ciascuna di queste cinque relazioni si riconduce a relazioni di soddisfazione per le formule più semplici.

(1) $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi \wedge \chi \rfloor(v)$ sse valgono sia la $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi(v) \rfloor$ che la $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \chi(v) \rfloor$.

(2) $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi \vee \chi \rfloor$ sse valgono o la $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi(v) \rfloor$ o la $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \chi(v) \rfloor$ o entrambe.

(3) $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi \Longleftrightarrow \chi \rfloor$ sse la $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi(v) \rfloor$ implica la $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \chi(v) \rfloor$ e questa seconda implica la prima; ossia sse abbiamo
$\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi(v) \rfloor$ e $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \chi(v) \rfloor$ oppure $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle | \neg \lfloor \psi(v) \rfloor$ e $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle | \neg \lfloor \chi(v) \rfloor$.

(4) $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \forall x\, \psi(x) \rfloor$ sse per ogni assegnazione x variante v' della v si ha $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi(v') \rfloor$.

(5) $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \exists_1 x\, \psi(x) \rfloor$ sse si ha una e una sola assegnazione x-variante v' della v per la quale $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi(v') \rfloor$.

B66:**a.16** La versione base di **LngZF** consente che i termini possano essere soltanto delle variabili.

Risulta però estremamente oneroso sviluppare la teoria degli insiemi e le sue estensioni senza consentire che si abbiano termini opportunamente definiti. In effetti conviene essere permissivi e consentire una buone varietà di termini definiti, a condizione che con i termini aggiunti non si possa raggiungere ad alcuna conclusione che non sia raggiungibile servendosi della versione base di **LngZF**.

A questo proposito diamo la seguente definizione formale.

Data una prima teoria T espressa in un linguaggio $\boldsymbol{L}$ ed una seconda T' formulata nel linguaggio $\boldsymbol{L}'$ che amplia $\boldsymbol{L}$, si dice che T' è una **estensione conservativa** della T sse $\mathsf{T} \subseteq \mathsf{T}'$ e per ogni $\phi \in \boldsymbol{L}$ accade che se $\mathsf{T}' \vdash \phi$ allora si aveva $\mathsf{T} \vdash \phi$.

Questa definizione ci interessa in particolare nei casi per i quali $\boldsymbol{L}$ è la versione di **LngZF** senza termini aggiuntivi, T è la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel, T' è ottenuta aggiungendo a $\boldsymbol{T}$ come assiomi le definizioni di tutti i termini aggiuntivi.

Occorre assicurarsi che T' sia un'estensione conservativa della T in modo che se quest'ultima si trova essere coerente risulta coerente anche T', mentre se T' si trova incoerente risulta tale anche T.

B66:b. teoria assiomatica degli insiemi ZFC

B66:**b.01** [ZF 1], **assioma di estensione**:

$$\forall\, a \,\forall\, b \,\Big\lfloor \forall\, x \,\big\lfloor x \in a \iff x \in b \big\rfloor \implies \big\lfloor a = b \big\rfloor \Big\rfloor \;.$$

Questo assioma in parole povere dice che due insiemi a e b che contengono gli stessi membri sono lo stesso insieme, ossia che due insiemi sono considerati uguali sse contengono gli stessi elementi.
Dunque questo assioma ha lo scopo di formalizzare la nozione intuitiva di uguaglianza di due insiemi.

Da questo assioma segue anche che nella teoria si ha un solo urelemento [f05], l'insieme vuoto $\emptyset$; infatti se vi fosse un altro urelemento non conterrebbe alcun membro e per l'assioma dovrebbe coincidere con $\emptyset$.
Esso inoltre dice che non serve considerare insiemi con i membri ripetuti: un insieme con ripetizioni deve coincidere con il corrispondente insieme senza ripetizioni. Si può quindi affermare che un insieme non presenta membri ripetuti e chiedere che le presentazioni degli insiemi non contengano elementi ripetuti.

B66:**b.02** [ZF 2], **assioma dell'insieme vuoto**:

$$\exists\, x \;\forall\, y \,\big\lfloor y \in x \iff y \neq y \big\rfloor \;.$$

Si può leggere: "esiste un insieme non contenente alcun elemento", in quanto nessun y può essere diverso da se stesso. L'insieme vuoto viene denotato con il segno abbreviativo $\emptyset$ (come implicitamente anticipato).
Si osserva che questo assioma giustifica il termine di astrazione $\{y \mid y \neq y\}$.

B66:**b.03** [ZF 3], **assioma del duetto**:

$$\exists\, x \,\forall\, y \,\big\lfloor y \in x \iff y = a \vee y = b \big\rfloor \;.$$

Si può leggere: "dati due oggetti a e b, esiste un insieme i cui elementi sono esattamente a e b".
Questo assioma giustifica la considerazione del termine $\{y \mid y = a \vee y = b\}$; questo insieme si usa denotarlo con l'abbreviazione $\{a, b\}$.

Mediante particolari duetti si possono introdurre le coppie ordinate di oggetti definendole come

$$\langle a, b\rangle \;:=\; \big\{a, \{a, b\}\big\} \;\neq=\; \langle b, a\rangle \;:=\; \big\{b, \{a, b\}\big\} \;.$$

B66:**b.04** [ZF 4], **assioma dell'unione**:

$$\exists\, x \,\forall\, y \Big\lfloor y \in x \iff \exists\, z \,\big\lfloor y \in z \wedge z \in a \big\rfloor \Big\rfloor \;.$$

"Se a è un insieme di insiemi, esiste un insieme x i cui elementi sono tutti e soli gli elementi degli elementi di a."
L'assioma giustifica il termine $\{y \mid \exists\, z \,\big\lfloor y \in z \wedge z \in a \big\rfloor\}$, il quale si abbrevia con la scrittura $\bigcup_{z\in a} z$.

B66:**b.05** [ZF 5], **assioma dell'insieme delle parti** o assioma della potenza:

$$\exists\, x \,\forall\, y \,\big\lfloor y \in x \iff y \subseteq a \big\rfloor \;,$$

ove $y \subseteq a$ è l'abbreviazione del termine $\forall\, z \,\big\lfloor z \in y \implies z \in a \big\rfloor$.

Può leggersi: "per ogni insieme a esiste un insieme i cui membri sono esattamente i sottoinsiemi di a."
Esso consente di servirsi, per ogni insieme a, dell'insieme delle sue parti che denotiamo con $\mathfrak{P}(a)$.

B66:**b.06** [ZF 6], **assioma di separazione** o **assioma dei sottoinsiemi** o Aussonderungaxiom :

$$\forall\, a\, \exists\, x\, \forall\, y\, \lfloor y \in x \iff y \in a \wedge \phi(y) \rfloor \ .$$

Per ogni insieme a e ogni predicato ϕ definito per ogni elemento di a, esiste un insieme i cui elementi sono tutti e soli gli elementi di a che soddisfano ϕ; questo insieme viene detto sottoinsieme di a caratterizzato dalla formula ϕ (cioè l'insieme che qui avremmo denotato con $\{y \in a \mid \phi(y)\}$.

L'assioma apre la possibilità di trattare sottoinsiemi di un insieme, $Y \subseteq X$, specificati mediante un predicato, cioè una proprietà che distingue i suoi elementi dai rimanenti di X.
Si possono quindi trattare tutti i sottoinsiemi $S \subseteq X$ grazie a predicati della forma $p(y) = (y \in S)$ e di passare da un tale S al suo complementare in X (che qui si usa denotare con $X \setminus S$ o con $\overline{S}$), grazie al predicato $y \notin S$. Successivamente si può introdurre l'intersezione di insiemi.

A partire dai precedenti assiomi si possono sviluppare tutte le proprietà generali delle operazioni insiemistiche, delle relazioni e delle funzioni; si possono inoltre trattare in modo costruttivo tutti gli insiemi finiti.
Occorre però osservare che per rendere lecita la trattazione di insiemi infiniti è necessario un assioma dell'infinito; per questo si veda [ZF 9] in b09.

B66:**b.07** [ZF 7], **assioma di sostituzione**:

$$\forall\, z\, \forall\, u\, \forall\, v\, \lfloor \psi(z,u) \wedge \psi(z,v) \Longrightarrow u = v \rfloor \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x\, \forall\, y\, \Big\lfloor y \in x \iff \exists\, z\, \lfloor z \in a \wedge \psi(z,y) \rfloor \Big\rfloor \ .$$

Si può leggere "Data una funzione ψ, esiste un insieme i cui elementi costituiscono l'immagine di tale ψ."
Esso consente di trattare funzioni definite su un dato dominio attraverso proprietà caratteristiche, anche senza conoscerne l'insieme immagine.

B66:**b.08** [ZF 8], **assioma di regolarità** o assioma di fondazione:

$$\exists\, x\, \lfloor x \in a \rfloor \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x\, \lfloor x \in a \wedge x \cap a = \emptyset \rfloor \ .$$

"Ogni insieme non vuoto a contiene un membro che è disgiunto da a".
Questo assioma stabilisce che non si possono trattare entità aventi le caratteristiche degli insiemi ed essere elementi di se stesse.

B66:**b.09** [ZF 9], **assioma dell'infinito**:

$$\exists\, w\, \Big\lfloor \emptyset \in w \wedge \forall\, x\, \lfloor x \in w \Longrightarrow x \cup \{x\} \in w \rfloor \Big\rfloor \ .$$

Equivale ad affermare "esiste un insieme che contiene l'insieme vuoto e che, per ogni suo elemento x, contiene $\{x\}$, elemento che può svolgere il ruolo di successore di x".
Questo assioma permette di trattare costruttivamente gli insiemi numerabili e in particolare $\mathbb{N}$.
In effetti l'assioma consente direttamente di individuare come primo insieme numerabile

$$\{\emptyset\ ,\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\ ,\ \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\ , ...\}\ .$$

Successivamente, attraverso il passaggio all'insieme delle parti, si possono affrontare insiemi più che numerabili.

B66:**b.10** [ZF C] = ***AoC*1 assioma della scelta**:

$$\forall x \forall y \lfloor x \in a \wedge y \in a \wedge x \neq y \implies x \cap y = \emptyset \ , \ \forall x \lfloor x \in a \Longrightarrow x \neq \emptyset \rfloor \rfloor$$
$$\implies \exists c \forall x \lfloor x \in a \Longrightarrow \lfloor \exists u \, c \cap x = \{u\} \rfloor \rfloor \ .$$

"Per ogni collezione di insiemi disgiunti non vuoti esiste un insieme che può essere oggetto di scelta". Oppure "Data una partizione P di un insieme S, esiste una funzione $C \in \{\mathsf{dom}(P) \longmapsto S\}$, chiamata funzione di scelta, tale che $\forall x \in \mathsf{dom}(P) \ \vdots \ C(x) \in S$."

L'assioma riguarda l'esistenza di una funzione di scelta, anche se, evidentemente, non fornisce un criterio in grado di indirizzare la scelta stessa.

Sulla sensatezza e l'opportunità di adottare questo assioma si sono sviluppate controversie che nel secolo scorso sono state anche molto aspre.
Successivamente si è imposta l'abitudine di distinguere i risultati ottenuti adottando la più ampiamente accettata teoria ZF da quelli che hanno richiesto l'intervento dell'assioma [ZF C], ossia l'intera teoria ZFC.
Attualmente prevale l'atteggiamento di consentire l'adozione di diversi sistemi formali, anche se presentano notevoli differenze con i tuttora prevalenti ZF e ZFC.
Inoltre sono state effettuate ampie ricerche sulla interdipendenza dei diversi sistemi formali e in particolare si sono ottenuti vari risultati che precisano le possibilità consentite o meno dall'assioma della scelta.

B66:**b.11** Va rilevato che il sistema di assiomi presentato è ridondante. Lo schema di sostituzione [ZF 7] implica lo schema dei sottoinsiemi [ZF 6], mentre [ZF 7] e l'assioma dell'insieme delle parti [ZF 5] implicano l'assioma del duetto [ZF 3]. Inoltre l'assioma dell'insieme vuoto [ZF 2] si può far discendere dall'assioma dei sottoinsiemi [ZF 6].

Non aver scelto un sistema privo di ridondanze è dovuto a due considerazioni sulle opportunità per la maggiore chiarezza dell'esposizione.

La presentazione di tutti gli assiomi dati può risultare più leggibile e motivata.

Con il sistema presentato si possono più chiaramente delineare i vari sistemi di assiomi più deboli che risulta utile prendere in esame, sistemi che si possono più agevolmente comprendere se ottenuti indebolendo o eliminando qualcuno degli assiomi presentati, ma mantenendo il complesso delle conseguenze degli assiomi rimanenti.

B66:c. sviluppi della matematica basati sopra ZFC

B66:**c.01** Come già segnalato, la teoria ZFC è la base formale che è stata più estesamente utilizzata per introdurre le teorie delle strutture matematiche nel modo attualmente giudicato (a maggioranza) rigoroso, ossia in un modo che rispetti la richiesta di condivisibilità degli sviluppi formali sostenuti dalla logica matematica.

Ci proponiamo qui di presentare le linee che vengono usualmente seguite per basare sulla teoria ZFC alcune delle teorie matematiche più importanti, anche dal punto di vista storico.

B66:**c.02** Volendo essere rigidamente rigorosi nelle pagine che seguono si dovrebbe utilizzare solo il linguaggio con il quale si è formulata la teoria ZFC.

Così facendo, però, si avrebbero esposizioni estremamente prolisse e faticosamente comprensibili dagli studiosi, soprattutto da quelli interessati agli sviluppi di teorie specifiche e di applicazioni.

Per avere esposizioni leggibili con scorrevolezza della nozioni matematiche che di volta in volta si vogliono accostare risulta necessario adottare linguaggi parzialmente formalizzati nei quali vengono introdotte svariate abbreviazioni e notazioni specifiche anche con validità locale.

Inoltre può essere opportuno lasciare spazio alla intuizione, adottare metafore e farsi aiutare da elementi grafici.

Evidentemente questo modo di fare comporta notevoli problemi di coordinamento delle convenzioni che vengono adottate, convenzioni che s ono fortemente condizionate dai molteplici legami tra i concetti trattati.
I problemi di coordinamento, stante la grande e crescente varietà delle nozioni sviluppate e la variabilità nel tempo delle scelte dovute al crescere dei risultati e delle problematiche, vengono affrontati con una certa determinazione solo restringendosi ad ambiti settoriali e con limitate pretese di definitezza.

B66:**c.03** In positivo vanno segnalate le possibilità fornite dagli strumenti informatici per la gestione delle esposizioni della matematica, dei repertori riguardanti formule, figure e tavole numeriche e della documentazione complessiva della letteratura della disciplina.

In particolare si possono ricordare le iniziative collegate al termine Mathematical Knowledge Management (e alla voce `https://it.wikipedia.org/wiki/Mathematical Knowledge Management`) e il testo del `https://it.wikipedia.org/wiki/Mathematics Classification Scheme` nella versione attualmente in vigore MCS2020.

B66:**c.04** Per sviluppare le conseguenze della teoria ZFC è necessario innanzi tutto avere ben presenti due gruppi di nozioni che devono essere utilizzati in una grande varietà di passaggi: le nozioni che riguardano i numeri cardinali degli insiemi e la tipologia degli insiemi muniti di relazioni d'ordine.

Le considerazioni sopra la numerosità degli insiemi sono presentate in B19f e nel successivo B19g dedicato ai numeri transfiniti. Le relazioni d'ordine sono esaminate in B55 e in un caso particolare ma importante in B56.

B66:d. assiomatizzazione degli interi naturali

B66:**d.01** Presentiamo in questa sezione la definizione assiomatica dei numeri interi naturali che si basa sulla teoria degli insiemi ZF.

Questo sviluppo si impone come prima applicazione della teoria degli insiemi ZF in quanto i numeri naturali, sono le entità del tipo più semplice tra quelli esaminati dalla matematica, le più utilizzate nelle argomentazioni (inferenze) per scopi specifici, sia di carattere speculativo che applicativo; inoltre il loro studio, in varie epoche, ha condotto a risultati prestigiosi e quindi a interrogativi pressanti sulla loro ontologia e sul loro ruolo nella cultura in generale.

In effetti gli studi sulla definizione dei numeri interi hanno costituito uno dei filoni iniziali dell'esame dei fondamenti della matematica e il primo tipo di entità che è stata oggetto di sforzi di assiomatizzazione.

Aggiungiamo qualche considerazione sul rapporto che esiste tra numeri naturali e stringhe.

Nella impostazione della presente esposizione le stringhe sono introdotte prima dei naturali, in quanto strumenti di comunicazione tra gli attori degli sviluppi conoscitivi che conducono alla matematica [B01c].

Con questa scelta si è data importanza allo sviluppo della matematica in quanto attività umana (supportata sempre più dalla tecnologia) e di conseguenza si è prestata attenzione alla osservazione, eseguibile anche con pratiche riprese dalla fisica e da discipline sperimentali, delle attività che conducono a risultati matematici.

Inoltre va tenuto presente che le stringhe, oltre ad essere oggetti efficientemente osservabili, sono preliminari inevitabili alle attività della logica [B60b, B61b].

Per aiutare capire il rapporto tra stringhe e naturali serve anche osservare l'equivalenza dei naturali della asiomatizzazione che segue con i naturali esprimenti lunghezze di stringhe [B02a].

B66:**d.02** Iniziamo con la definizione di un attributo per gli insiemi.

Un insieme S si dice essere un **insieme induttivo** e si scrive

$$\mathsf{Indctset}\left\lbrace S\right\rbrace \quad \text{sse} \quad \emptyset \in S \ \wedge\ \forall x \in S \left\lfloor x \cup \{x\} \in S \right\rfloor \ .$$

L'insieme $x \cup \{x\}$ si dice successore di x e si denota anche con $x+1$.
Si usa inoltre la funzione successore di x

$$\boldsymbol{succ} \ := \ \lceil x \in S \mapsto x \cup \{x\} \rceil \ .$$

Si dice che x è un **intero naturale**, ovvero un intero nonnegativo, e si scrive $\boldsymbol{Nint}\left\lbrace x\right\rbrace$ sse

$$\forall S \left\lfloor \mathsf{Indctset}\left\lbrace S\right\rbrace \implies x \in S \right\rfloor \ .$$

In parole povere per intero naturale si intende un oggetto matematico che fa parte di ogni insieme induttivo.

B66:**d.03** In vari punti dell'esposizione che segue utilizzeremo spesso le cosiddette variabili per i numeri naturali, lettere come la i utilizzata nelle seguenti abbreviazioni concernenti una qualsiasi formula ϕ:

$$\forall i\, \phi(i) \quad \text{abbrevia} \quad \forall x \left\lfloor \boldsymbol{Nint}\left\lbrace x\right\rbrace \implies \phi(x) \right\rfloor \quad \text{e}$$

$$\exists i\, \phi(i) \quad \text{abbrevia} \quad \exists x \left\lfloor \boldsymbol{Nint}\left\lbrace x\right\rbrace \implies \phi(x) \right\rfloor \quad .$$

Nel ruolo di variabili per i numeri naturali utilizzeremo spesso anche le lettere j, k, l, m ed n.

B66:**d.04** Siamo ora in grado di enunciare il teorema che esprime lo **schema di induzione matematica**. Cominciamo con il seguente lemma.

(1) Lemma: $\left\{x ¶ \textbf{\textit{Nint}}\lceil x \rceil\right\}$ è un insieme.

Dim.: L'assioma dell'infinito [ZF 8] afferma che esiste un insieme induttivo, ossia che $\exists S\, \mathsf{Indctset}\lceil S \rceil$. Facendo riferimento a questo S postulato (e non identificato), abbiamo $\textbf{\textit{Nint}}\lceil x \rceil \implies x \in S$ e quindi $\left\{\textbf{\textit{Nint}}\lceil x \rceil\right\} = \left\{x ¶ x \in S \wedge \textbf{\textit{Nint}}\lceil x \rceil\right\}$.
Grazie all'assioma dei sottoinsiemi [ZF 6] l'oggetto $\left\{x ¶ x \in S \wedge \textbf{\textit{Nint}}\lceil x \rceil\right\}$ è un insieme ∎

Va notato che l'assioma dell'infinito viene invocato solo per il teorema che segue. D'ora in avanti verrà invocato solo il teorema sull'induzione matematica [d04].

Ora possiamo introdurre la notazione standard per l'insieme dei naturali: $\mathbb{N} := \left\{x ¶ \textbf{\textit{Nint}}\lceil x \rceil\right\}$. Segnaliamo che però nei testi di logica si usa prevalentemente la notazione $\omega := \mathbb{N}$.

B66:**d.05** **Teorema** Per ogni formula di ZF ϕ si ha:

$$\lfloor \phi(\emptyset) \;\wedge\; \forall n \lceil \phi(n) \Longrightarrow \phi(n+1) \rceil \rfloor \; .$$

Segnaliamo che per una relazione come la precedente $\phi(\emptyset)$ viene detto **base per l'induzione**, la formula $\phi(n)$ viene chiamata **ipotesi induttiva** e l'implicazione $\phi(n) \Longrightarrow \phi(n+1)$ viene chiamata **passo induttivo**.

Dim.: Consideriamo l'insieme $S := \{n ¶ \phi(n)\}$; per l'ipotesi induttiva $\lfloor \phi(\emptyset) \;\wedge\; \forall n \lceil \phi(n) \Longrightarrow \phi(n+1) \rceil \rfloor$ S è un insieme induttivo. Dato che ogni insieme induttivo contiene ogni numero naturale deve valere $\phi(n+1)$, cioè la conclusione richiesta ∎

B66:**d.06** Introduciamo anche le notazioni più usuali per i numeri interi.

0 sta per $\emptyset$;

1 sta per $\{\emptyset\}$;

2 sta per $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ovvero $\{0, 1\}$;

3 sta per $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, , ovvero $\{0, 1, 2\}$;

. . . .

Si osserva che $\{\emptyset\} = \emptyset \cup \{\emptyset\}$, ovvero $1 = 0\dot{+}1$, che $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}$, ovvero $2 = 1\dot{+}1$ etc. .

Le precedenti esplicitazioni dei numeri naturali sono dovute a von Neumann. Anticipando le definizione della relazione "minore" tra numeri naturali [d07], possiamo dire che ogni intero naturale è l'insieme di tutti gli interi naturali minori di esso.

B66:**d.07** Si definisce la relazione $x < y$, x minore di y, come abbreviazione della

$$\textbf{\textit{Nint}}\lceil x \rceil \wedge \textbf{\textit{Nint}}\lceil y \rceil \wedge x \in y \; .$$

Si definisce inoltre la relazione $x \leq y$, x minore o uguale a y, come abbreviazione di $x < y \vee x = y$.

Si osserva che questa impostazione consente di utilizzare la relazione di appartenenza anche per definire la relazione d'ordine per gli interi naturali definiti come insiemi di tutti i naturali loro inferiori. Si tratta di un procedimento poco intuitivo, ma che a livello formale ha il vantaggio di richiedere meno entità di partenza.

B66:**d.08** Occorre però di stabilire che $\leq$ è un ordine totale.
Per questo si introduce l'attributo essere insieme transitivo:

$$\mathsf{Transset}(S) \quad \text{sse} \quad \forall x \forall y \lfloor \lfloor x \in y \wedge y \in S \rfloor \Longrightarrow x \in S \rfloor \; .$$

Introduciamo inoltre l'abbreviazione

$$x \in y \in S \quad \text{sse } x \in y \ \wedge \ y \in S \ .$$

Si dimostra allora che $\forall i \lfloor \boldsymbol{Nint}(i) \Longrightarrow \mathsf{Transset}(i) \rfloor$ e successivamente che $\mathsf{Transset}(\mathbb{N})$.

B66:**d.09** Occorre anche dimostrare che l'ordinamento $\leq$ è discreto, compito svolto dal teorema che segue.

(1) Teorema $\forall i, j \in \omega \lfloor i \in j \ \vee \ i = j \ \vee \ j \in i \rfloor$.

Con questo risulta dimostrata la proprietà di tricotomia per gli interi naturali, cioè la tripartizione delle coppie di naturali rispetto alla relazione $\leq$, e quindi che questa è una relazione d'ordine totale.

B66:**d.10** Ci proponiamo ora di accennare quella che chiamiamo **aritmetica di Peano**, cioè al sistema di assiomi proposti da Giuseppe Peano nel 1889 come semplificazione del sistema di assiomi proposto l'anno prima da Dedekind e tuttora ampiamente usato.

Per l'aritmetica di Peano, in sigla PeAr, ci serviamo delle notazioni usuali, cioè dei simboli delle operazioni binarie $+$ e $\times$ per addizione e moltiplicazione, del postfisso $\dot{+}1$ per l'operazione unaria di passaggio al successore e delle variabili i, j, k per i generici interi naturali. Inoltre ci serviremo della versione più colloquiale delle formule del calcolo logico.

B66:**d.11** L'aritmetica di Peano PeAr si basa sui 7 assiomi che seguono.

[PeAx 1]: $\forall i \in \omega \ \colon \ 0 \neq i\dot{+}1$;

[PeAx 2]: $\forall i, j \in \omega \ \colon \ i\dot{+}1 = j\dot{+}1 \Longrightarrow i = j$;

[PeAx 3]: $\forall i \in \omega \ \colon \ i + 0 = i$;

[PeAx 4]: $\forall i, j \in \omega \ \colon \ i + (j\dot{+}1) = (i + j)\dot{+}1$;

[PeAx 5]: $\forall i \in \omega \ \colon \ i \times 0 = 0$;

[PeAx 6]: $\forall i, j \in \omega \ \colon \ i \times (j\dot{+}1) = (i \times j) + i$;

[PeAx 7[: $\forall i \in \omega$, $\forall \phi$ formula della PeAr cL $\Big\lfloor \phi(0) \wedge \forall i \lfloor \phi(i) \Longrightarrow \phi(i\dot{+}1) \rfloor \Big\rfloor \implies \forall i\, \phi(i)$.

B66:**d.12** Si trova che [PeAx 1] e [PeAx 2] discendono dagli assiomi all'inizio della sezione attuale.

Gli assiomi [PeAx 3] e [PeAx 4] si possono considerare definizioni dell'addizione, mentre [PeAx 5] e [PeAx 6] si possono considerare definizioni della moltiplicazione.
L'assioma [PeAx 7] ha invece il ruolo del principio di induzione matematica.

Questo consente di ricavare dalla teoria ZF il seguente importante risultato.

B66:**d.13** **Teorema** (**di ricorsione di Dedekind**) Per ogni insieme A, per ogni membro $a_0 \in A$ e per ogni $f \in \{A \longrightarrow A\}$ esiste una unica funzione $h \in \{\omega \longrightarrow A\}$ tale che

(a) $h(0) = a_0$;

(b) $\forall i \in \omega \ \colon \ h(i\dot{+}1) = f\big(h(i)\big)$.

La dimostrazione può essere data in termini quasi discorsivi; tuttavia se la si vuole collegare chiaramente alla teoria ZF conviene servirsi della nozione di buona funzione.

B66:**d.14** Il teorema di Dedekind consente di dedurre da ZF gli assiomi [PeAx 3]-[PeAx 6] come proprietà dell'addizione e della moltiplicazione.

Inoltre esso consente di dimostrare che l'insieme ω strutturato dall'addizione e dalla moltiplicazione è unico.

B66:e. assioma della scelta

B66:**e.01** Come vedremo in parte nel seguito, gli sviluppi delle teorie che assumono l'assioma della scelta, termine che abbiamo abbreviato con $\boldsymbol{AoC}1$, richiedono di affrontare svariate questioni.

Dell'assioma della scelta risulta opportuno prendere in considerazione diverse formulazioni che si devono dimostrare equivalenti. In effetti ciascuna di queste varianti formali risulta la più conveniente in un particolare gruppo dei suoi molteplici utilizzi.

Cominciamo con il ripresentare l'enunciato esposto in c10.

$$\forall x \forall y \lfloor x \in a \wedge y \in a \wedge x \neq y \implies x \cap y = \emptyset \ , \ \forall x \lfloor x \in a \Longrightarrow x \neq \emptyset \rfloor$$

$$\boldsymbol{AoC}1 \qquad \implies \ \exists c \forall x \left\lfloor x \in a \Longrightarrow \lfloor \exists u \, c \cap x = \{u\} \rfloor \right\rfloor \ .$$

Questa formulazione non richiede definizioni specifiche ed è la più semplice da accostare e da descrivere in termini discorsivi.

Una formulazione che fa riferimento alle cosiddette funzioni di scelta Chfun è la seguente

$$\boldsymbol{AoC}2 \qquad \forall X \exists f \left\lfloor \mathsf{Chfun}\left\{f\right\} \ \wedge \ \mathsf{dom}(f) = X \ \wedge \ \forall x \in X \lfloor x \neq \emptyset \Longrightarrow f(x) \in x \rfloor \right\rfloor \ .$$

B66:**e.02** Dimostriamo l'equivalenza delle due formulazioni date.

(1) Lemma: $\boldsymbol{AoC}1 \iff \boldsymbol{AoC}2$.

Dim.:

▮

B66:**e.03** Una formulazione chiamata anche assioma di moltiplicazione ....

Una quarta formulazione è detta assioma di uniformazione .....

B66:**e.04**

Dimostriamo l'equivalenza delle quattro formulazioni date.

(1) Lemma: $\boldsymbol{AoC}3 \iff \boldsymbol{AoC}4 \iff \boldsymbol{AoC}1$.

Dim.: Procediamo con i seguenti passi: $\boldsymbol{AoC}2 \iff \boldsymbol{AoC}3 \iff \boldsymbol{AoC}4 \iff \boldsymbol{AoC}2$.

▮

B66:**e.05** Ricordiamo che un poset $\langle S, \preceq\rangle$ si dice **insieme ben ordinato** sse ogni sottoinsieme di S contiene un elemento minimo.
Denotiamo con **PosetWo** la classe dei posets bene ordinati.

Si osserva che ogni insieme ben ordinato deve essere totalmente ordinato: infatti per ogni duetto di suoi elementi (diversi) $\{a, b\}$ deve essere aut $a \prec b$, aut $b \prec a$. Dunque **PosetWo** $\subset$ **PosetT**.

Tra i posets ben ordinati si trovano gli insiemi finiti muniti di ordinamento totale (ovviamente) e i posets $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ e $\langle \mathbb{Z}_-, \geq\rangle$.

Non sono invece ben ordinati $\langle \mathbb{N}, \geq\rangle$, $\langle \mathbb{Z}_-, \leq\rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq\rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle$ e $\langle \mathbb{R}, \leq\rangle$.

Osserviamo che i due posets ben ordinati infiniti menzionati sono isomorfi. Isomorfi a essi sono tutti gli insiemi generati da una macchina MSPG [B16] ordinati dall'ordine di emissione sul nastro di uscita.

Conviene segnalare anche altri posets ben ordinati che non sono isomorfi ai precedenti. Uno di questi è il poset che si può presentare con la scrittura

$$\langle 1 \prec 3 \prec 5 \prec ... \prec 2 \prec 4 \prec 6 \prec ... \rangle \ .$$

Più in generale si hanno i posets caratterizzati da un qualsiasi intero $m = 2, 3, 4, ...$ e da un intero $k = 2, 3, ...m - 1$ presentabili con una scrittura della forma

$$\langle 0 \prec m \prec 2m \prec ... \prec 1 \prec 1+m \prec 1+2m \prec ... \prec 2 \prec 2+m \prec 2+2m \prec ... \prec k \prec k+m \prec k+2m \prec ... \rangle \ .$$

B66:**e.06** **Teorema** Consideriamo un insieme ben ordinato $\langle S, \preceq \rangle$. Per ogni endofunzione entro S che conserva l'ordinamento, cioè per ogni endofunzione isotona $I \in \{S \longmapsto S\}$, si ha

$$\forall x \in S \ : \ x \preceq I(x) \ .$$

Dim.:

▮

B66:**e.07** **Coroll.**: Due distinti segmenti iniziali di un buon ordinamento non sono isomorfi.

Dim.:

▮

B66:**e.08** **Teorema** Assunto $\boldsymbol{AoC}$, ogni insieme è equinumeroso di qualche ordinale.

Dim.:

▮

B66:**e.09** Per un poset $\langle S, \preceq \rangle$ introduciamo l'attributo woposet ponendo

$$\text{woposet}\left\{ S, \preceq \right\} \quad \text{sse} \quad \text{il poset } \langle S, \preceq \rangle \ \text{ è ben ordinato} \ .$$

(1) Teorema $\forall X \exists \preceq \ ¶ \ \lfloor \text{woposet}\left\{ S, \preceq \right\} \rfloor \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{AoC}2$.

Dim.:

▮

B66:**e.10** **Teorema** Assunto $\boldsymbol{AoC}$, due qualsiasi insiemi sono confrontabili in termini di numerosità.

Dim.:

▮

B66:**e.11** **(1) Teorema** (**teor. di Hausdorff**) Assunto $\boldsymbol{AoC}$, ogni poset presenta una catena massimale.

Dim.:

▮

(2) Teorema (**lemma di Zorn**) Assunto $\boldsymbol{AoC}$, se $\langle S, \preceq \rangle$ è un poset nel quale ogni catena possiede un estremo superiore, allora S possiede un elemento massimale per $\preceq$.

Dim.:

▮

B66:**e.12** **Teorema** Il lemma di Zorn implica $\boldsymbol{AoC}1$.

Dim.:

▮

B66:**e.13** Dopo aver presentati vari enunciati equivalenti all'assioma della scelta, presentiamo alcuni enunciati la cui dimostrazione richiede $\boldsymbol{AoC}$ ma che hanno portata inferiore; alcuni di questi enunciati sono utilizzati per definire teorie più deboli di altre che postulano ZFC, ossia teorie con una portata intermedia tra quella di ZF e quella di ZFC.

B66:**e.14** È necessario assumere $\boldsymbol{AoC}$ per dimostrare che $\mathbb{N}$ è l'insieme infinito di minima numerosità.

(2) Prop.: Sia $\langle n \in \mathbb{N} :| A_n \rangle$ una famiglia numerabile di insiemi contabili e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $B_n := \{\mathbb{N} \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright A_n\}$.
Allora $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; B_n \neq \emptyset$ si può applicare $\boldsymbol{AoC}3$ al prodotto cartesiano $\mathsf{X}\{n \in \mathbb{N} :| B_n\}$ per ottener una funzione di scelta f tale che $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; f(n) \in B_n$, ossia tale che $f(n) \in \{\mathbb{N} \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright A_n\}$.

Dim.: ▮

B66:**e.15** **Prop.** Se A è un insieme diverso da $\emptyset$ ed $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, allora

$$\forall x \in A \,\exists y \in A \;\; x \,\mathcal{R}\, y \quad \Longrightarrow \quad \exists f \in \{\mathbb{N} \longmapsto A\} \left\lfloor \forall n \in \mathbb{N} \;:\; \lfloor f(n) \mathcal{R} f(n+1) \rfloor \right\rfloor .$$

B66:**e.16** Il lemma di Zorn può essere invocato per dimostrare l'esistenza di filtri e di ideali massimali propri.

B66:**e.17** **Teorema** (**teor. di Fodor**) Assunto $\boldsymbol{AoC}$, se S è stazionario in un cardinale κ con $\kappa > \omega$ ed $f \in \{S \longrightarrow \kappa\}$, allora f è costante su qualche insieme stazionario.

Dim.:

B66:f. altre teorie assiomatiche degli insiemi

B66:**f.01** Come si è detto, della teoria degli insiemi sono state studiate varie assiomatizzazioni diverse da ZFC e da ZF.

La maggior parte di queste teorie richiede che gli insiemi facciano parte di una **gerarchia cumulativa**. Questa si limita a considerare gli **insiemi puri**, insiemi i cui membri sono tutti insiemi che a loro volta sono insiemi puri.
Ciascuno di questi insiemi, chiamiamolo S, è caratterizzato da un ordinale chiamato rango di S definito come il minimo maggiorante dei successori dei membri di X: all'insieme vuoto si assegna rango 0, a $\{\emptyset\}$ rango 1, ecc.
Per ogni ordinale α si considera l'insieme V_α costituito da tutti gli insiemi puri di rango inferiore ad α e il complesso dei V_α per $\alpha = 0, 1, 2, 3, ..., \omega, \omega + 1, ...2\omega, ..., 3\omega, ...$ costituisce il cosiddetto **universo di von Neumann**.
Limitarsi a questi insiemi riduce la generalità in modo inessenziale, mentre porta rilevanti vantaggi per la formulazione.
Limitarsi a una gerarchia cumulativa evita i paradossi che portano a contradditorietà.

B66:**f.02** Si distinguono poi teorie degli insiemi che trattano solo insiemi puri, come le varianti di ZFC che utilizzano solo insiemi puri, e teorie che considerano sia gli insiemi che le cosiddette **classi pure**, entità che non sono membri di un'altra entità.

In particolare, mentre la nozione di insieme di tutti gli insiemi porta a contraddizioni e deve essere evitata, questo non accade per la classe di tutti gli insiemi.

Le classi pure sono sicuramente utili: in particolare la totalità delle strutture di un dato genere costituiscono classi pure, non insiemi: si trattano, per esempio, la classe di tutti i gruppi, la classe di tutti gli spazi vettoriali e simili.
Dal punto di vista delle classi pure agli insiemi viene assegnato il ruolo delle piccole classi.

B66:**f.03** Di ZFC si studiano alcuni riduzioni (chiamate anche frammenti), cioè sistemi che omettono e/o indeboliscono alcuni assiomi del sistema originario.

La **teoria degli insiemi di Zermelo** trascura lo schema di assioma di sostituzione [c08] mantenendo il più debole assioma di separazione [c05].

La cosiddetta **teoria generale degli insiemi** è un frammento della precedente e presenta il vantaggio di essere sufficiente per l'assiomatizzazione di Peano dell'aritmetica [d11] e per una trattazione ben fondata degli insiemi finiti.

La **teoria di Kripke-Pistek** omette gli assiomi dell'infinito, dell'insieme delle parti e della scelta e indebolisce gli schemi di rimpiazzamento e di sostituzione.

B66:**f.04** Tra le assiomatizzazioni degli insiemi che trattano anche le classi proprie la più rilevante è l'assiomatizzazione di von Neumann, Bernays e Goedel, nota come **assiomatizzazione NBG** (`von Neumann-Bernays-Gödel set theory (we)`).

Anche la NBG conduce alla gerarchia di von Neumann degli insiemi, mentre in essa non è lecito trattare la classe di tutte le classi.
Va segnalato che questa teoria può essere formulata finitamente, cioè mediante assiomi espressi finitamente e senza ricorrere a schemi di assiomi.

Viceversa la teoria ZFC richiede gli schemi di assiomi c06 e c07, cioè richieste che dipendono da un oggetto variabile in un insieme infinito; lo stesso accade per varie altre teorie deli insiemi.

Si dimostra che NBG è sostanzialmente equivalente alla ZFC: ogni enunciato nel linguaggio della ZFC è dimostrabile nella NBG sse lo è nella ZFC: questa situazione si caratterizza dicendo che NBG è un'**estensione conservativa** della ZFC.

B66:**f.05** Una estensione più forte della ZFC è invece la teoria degli insiemi di Morse-Kelly, nota anche con la sigla MK e presentata da Kelly nel 1955 come Skolem-Morse theory e da Morse nel 1965.

Contrariamente a NBG, MK non può essere assiomatizzata finitamente. [Morse-Kelly set theory (we)].

Taluni giudicano la teoria MK più agile della ZFC e della NBG.

Un'altra estensione più forte della ZFC è la teoria degli insiemi di Alfred Tarski e Alexander Grotendieck [Tarski-Grotendieck set theory (we)], nota anche con la sigla TG.

Si tratta di una estensione non conservativa di ZFC introdotta come parte di un sistema software chiamato Mizar [Mizar system (we)] per la verifica automatica delle imostrazioni.

Essa è caratterizzata dall'assioma di Tarski che afferma che a ogni insieme è associato un cosiddetto universo di Grothendieck (wi).

B66:**f.06** Un altro elemento distintivo per le teorie assiomatiche degli insiemi è la comparsa o l'assenza dei cosiddetti **urelementi**, oggetti che possono appartenere ad insiemi ma non possono contenere alcun elemento, cioè non possono essere un insieme diverso da $\emptyset$.
Nella teoria ZF si incontra un solo urelemento, proprio l'insieme vuoto.

Nel 1937 Willard Van Orman Quine ha proposto un sistema di assiomi chiamato New Foundations (we) o Nuova Fondazione (wi), in particolare con lo scopo di semplificare la teoria dei tipi adottata dall'opera *Principia Matematica* di Whitehead e Russel .
Questa teoria non prevedeva urelementi ed è nota anche con la sigla NF.
Nel 1969 Jensen propose la sua estensione comprendente urelementi, ora individuata dalla sigla NFU.

NF ed NFU non si basano sopra una gerarchia cumulativa, mentre includono un "insieme di tutti gli oggetti" rispetto al quale ogni insieme possiede un complemento. Da notare che NF, contrariamente ad NFU, tratta insiemi per i quali non vale l'assioma della scelta.

B66:**f.07** Mentre le teorie sopra accennate si basano sul calcolo del primo ordine, si studiano teorie costruttive degli insiemi che incorporano assiomi della logica intuizionistica, invece degli assiomi del genere suddetto.

Tra queste si collocano la teoria degli insiemi sfumati [Fuzzy set theory (wi)] di Lofty A. Zadeh e la teoria degli insiemi rozzi (Rough set theory (we)] di Zdzislaw I. Pawlak .

Altre impostazioni pongono alla base dei fondamenti entità diverse degli insiemi: ricordiamo in particolare la teoria delle categorie [T50] e la più articolate teoria dei topoi [Topos (we)].

B66:**f.08** Gli studiosi sui fondamenti della matematica, in relazione al consolidamento sul piano della coerenza di teorie come ZFC ed NBG, si sono posti le questioni della completezza e della decidibilità delle teorie assiomatiche degli insiemi.
Sul successo di questi studi fino agli anni 1930 ha particolarmente insistito David Hilbert, allora, probabilmente, il più influente tra i matematici.

L'obiettivo della dimostrazione della completezza venne invece dimostrato irraggiungibile nel 1931 in conseguenza dei teoremi di incompletezza di Goedel.

Questi hanno posto dei limiti alla portata della matematica ed hanno costituito per molti matematici motivo di una profonda crisi.

B66:**f.09** Un ulteriore passo è stato effettuato da Turing nel 1936. Egli propose come modello degli algoritmi i meccanismi formali ora chiamati macchine di Turing [C21] e individuò la cosiddetta **macchina universale di Turing**, macchina di Turing in grado di simulare ciascuna delle evoluzioni di qualsiasi macchina di Turing, anche di se stessa.

Inoltre dimostrò l'impossibilità di trovare un algoritmo che, assegnate una qualsiasi macchina di Turing T e una qualsiasi stringa w, fosse in grado di decidere se sottoponendo w a T l'evoluzione di questa si sarebbe arrestata dopo una sequenza finita di passi.

Questo teorema limitativo si colloca sullo stesso piano dei teoremi di Goedel e di un risultato equivalente di Alonzo Church ottenuto sul sistema formale chiamato λ-calcolo.
Il risultato di Turing risulta però molto più facile da comprendere e consente di mostrare con relativa facilità l'equivalenza della portata del modello macchina di Turing con la portata dei molti altri modelli di sistemi di computazione (λ-calcolo, sistemi di Post, sistemi di Thue, ...).
Questo conduce alla congettura di Church-Turing sulla sostanziale equivalenza di tutti i modelli di calcolo formale e quindi a una visione unitaria di tutte le attività di calcolo.

`Testi dell'esposizione in http://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e in http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/`