Capitolo B65:
fondamenti e teorie formali

Contenuti delle sezioni

11 pagine

B65:**0.01** Questo capitolo inizia con una panoramica storica sugli studi sui fondamenti della matematica e sui sistemi formali ai quali essi hanno condotto.

Successivamente vengono presentate le caratteristiche delle teorie formali in generale e di quelle più specifiche dedicate alla matematica.

Sono anche esposte le caratteristiche della logica matematica che si è sviluppata come disciplina organica anch'essa in stretto collegamento con lo sviluppo dei fondamenti.

Per questo capitolo sono stati consultati, in particolare, `Mathematical logic (we)` e *Intermediate set theory* di F. R. Drake e D. Singh (1982).

B65:a. studi sui fondamenti della matematica

B65:**a.01** Per perseguire sistematicamente gli obiettivi della matematica (dai teorici ai computazionali), impegnativi e di vasta portata, si è reso necessario disporre di apparati formali affidabili, versatili ed efficienti i quali consentano di trattare con gli opportuni procedimenti dimostrativi gli oggetti delle indagini (numeri, configurazioni geometriche, strutture, equazioni, ...) e la rete delle loro relazioni.

Ai sistemi formali innanzi tutto si chiede che non portino a contraddizioni. Questa richiesta è in piena sintonia con l'approccio pragmatico della matematica: le contraddizioni con permettono di definire algoritmi deterministici di qualche attendibilità e in genere di servire ad attività che richiedono decisioni.

Inoltre un sistema formale, in quanto strumento per le indagini in un intero settore, deve presentare qualche genere di completezza.

Gli apparati formali e algoritmici utilizzati per poter avere una ampia portata devono essere in grado di servirsi in modo versatile e sistematico di raggruppamenti di entità di molti generi (entità numeriche, geometriche, algebriche, ...). Questa esigenza ha condotto a diversi approcci, in particolare a quelli che hanno portato a definire accurate teorie degli insiemi, da molti decenni gli strumenti più diffusi.

Trascurando per il momento gli altri approcci, risulta comunque necessario sviluppare una strumentazione formale per le entità da chiamare insiemi che consenta di tenere sotto controllo con costruzioni formali simili a quelle applicabili agli insiemi finiti e ai ricorsivi anche gli insiemi costruibili (procedurali) per i quali non sia possibile decidere il problema dell'appartenenza, gli insiemi definiti da proprietà non costruibili, cioè per i quali non si conoscano procedure generative e che riescano a tenerli sotto controllo e, almeno in parte, totalità introdotte euristicamente.

A proposito di questi ultimi, va ribadito che cercando di trattare come insieme la totalità degli insiemi si ottengono delle contraddizioni o antinomie (situazioni note anche come paradossi).

B65:**a.02** Una caratteristica che distingue piuttosto nettamente le collezioni degli insiemi trattabili costruttivamente dalle collezioni degli insiemi che non lo sono è il loro cardinale.

Gli insiemi costruibili sono ottenibili con procedure o con macchine MSPG individuate da definizioni o rappresentazioni costruttive finite.

Le generatrici di ciascuno dei genere particolari sono individuate da espressioni o programmi appartenenti a un definito linguaggio formale e quindi costituiscono un insieme ricorsivo avente il cardinale del numerabile.

Le entità non trattabili con procedimenti costruttivi si possono conoscere e utilizzare solo attraverso proprietà che possano essere oggetto di procedimenti dimostrativi e che possano essere considerati elementi di collezioni che hanno cardinale superiore al numerabile. e che chiamiamo genericamente **insiemi più che numerabili**.

Al livello del più che numerabile va collocato un primo gruppo di problemi che sono stati affrontati fin dalle civiltà antiche (Mesopotamia, Egitto, India, Cina, Maya, mondo greco-ellenistico, ...) e riguarda la trattazione della linea retta, degli ambienti geometrici (piano, spazio euclideo, ...) che alla retta si possono ricondurre e delle "forme" (funzioni, curve, superfici, ...) che in questi ambienti si collocano ed eventualmente si evolvono.

Questi problemi matematici sono stati imposti da una quantità di problemi del mondo reale per i quali è stata impostata una vasta gamma di modelli fisico-matematici o discreti per il mondo materiale e per attività di organizzazione.

Tra le attività che hanno richiesto modelli matematici e conseguenti strumenti computazionali citiamo: misurazioni del terreno, architettura, costruzioni di macchine, balistica, controllo delle acque, astronomia, fisica, scienze e tecnologie, economia, attività amministrative, gestionali, finanziarie, legali.

B65:**a.03** I cultori della matematica fino alla prima metà del XIX secolo hanno fatto ampio ricorso all'intuizione, soprattutto all'intuizione geometrica. In queste circostanze nei confronti dei fondamenti si è assunto, più o meno consapevolmente, un atteggiamento euristico.

In alcuni settori della matematica sono stati fatti notevoli sforzi per giungere alla stesura di trattazioni rigorose. Sono esemplari la redazione degli *Elementi di Euclide* e le opere di Archimede nell'ambito della scienza greco-ellenistica e opere di pensatori indiani come Panini e Aksapada Gotama .

Nel passato comunque l'atteggiamento prevalente è consistito nella ricerca di risultati che fossero coerenti all'interno di singoli campi, e utilizzabili per applicazioni di rilievo (soprattutto architettura, astronomia, meccanica e ottica), mentre si rinviavano il chiarimento dei fondamenti e, piuttosto spesso, di assumevano definizioni di nozioni cruciali poco fondate e basate su loro applicazioni particolari.

Questo atteggiamento si riscontra nella geometria greco-ellenistica, nell'analisi infinitesimale delle scuole antiche e nella matematica europea dal rinascimento a tutto il XVIII secolo.

Esemplare in questo senso è l'atteggiamento euristico di un matematico sistematico e fecondo come Euler . Questi inoltre ha ilmerito di avere promosso lo scambio di informazioni e le collaborazioni effettive tra ricercatori di paesi diversi.

B65:**a.04** Nel secolo XIX si verifica un cruciale avanzamento del pensiero matematico consistente negli studi sui fondamenti della geometria (Gauss, Lobachevsky, Bolyai, Riemann) e nella nascita della teoria degli insiemi e della logica matematica.

Nella prima parte del secolo XIX si era iniziata la definizione di formalizzazioni precise per le costruzioni dell'analisi infinitesimale reale. Grande importanza ebbero i sistematici lavori di Louis Augustin Cauchy , mentre purtroppo fu piuttosto ridotta la risonanza dei lavori pionieristici di Bernhard Bolzano .

Le accennate ricerche in analisi hanno incrociato un problema filosofico e scientifico fondamentale che si era discusso da secoli (Zenone da Elea, Aristotele, Avicenna, ...), la comprensione della nozione di infinito.
I primi approfondimenti in proposito sono dovuti ai lavori con i quali Bolzano affrontò dal 1837 al 1847 lo studio di alcuni paradossi dell'infinito. A lui si deve l'introduzione del il termine insieme e l'attenzione rivolta a questa entità.

B65:**a.05** Un altra linea di pensiero concerne l'impostazione matematica della logica avviata in Inghilterra da studiosi come Charles Babbage , George Boole e Augustus De Morgan] ; va ricordato che essi furono influenzati anche dallo studio di opere indiane concernenti la logica.

Nel 1847 George Boole, con la sua analisi delle leggi del pensiero, propose quelle che ora sono note come algebre di Boole. Sulla sua scia Augustus De Morgan espose le leggi note con il suo nome [B19c09].

Inoltre l'americano Charles Sanders Peirce per primo iniziò ad affrontare un'ampia serie di problemi riguardanti gli insiemi, la logica ed i fondamenti della matematica.
Purtroppo le sue molte idee ebbero un'influenza limitata e tardiva. In particolare già nel 1860 egli aveva proposto di caratterizzare gli insiemi infiniti con i numeri cardinali.

Negli stessi anni sul fronte della geometria, dopo le proposte delle geometrie non euclidee e dei successivi ampliamenti di orizzonti dovuti a Bernhard Riemann , si è fatta forte l'esigenza di un riesame approfondito dei fondamenti della geometria e dei sistemi continui che porteranno alla sintesi operata da David Hilbert.

B65:**a.06** Due questioni importanti studiate in quegli anni da matematici autorevoli come Karl Weierstrass e Richard Dedekind , anche in relazione con lo studio di funzioni reali non intuitive, riguardavano la definizione dell'insieme dei numeri reali e la individuazione di basi logiche per la teoria dei numeri interi.

Fondamentali progressi nello studio dell'infinito si deve a Georg Cantor che con una serie di lavori dal 1868 al 1874 pose le basi della teoria degli insiemi.

Queste entità fino allora erano state considerate solo in contesti piuttosto particolari e non nella loro generalità e ad un insufficiente livello di astrazione.

Cantor considerò invece gli insiemi come entità caratterizzate solo dal contenere elementi che soddisfano proprietà alle quali non si imponeva alcun requisito.

Egli portò l'attenzione sopra il cardinale degli insiemi, definendo due insiemi come equicardinali quando risulta possibile porli in biiezione.

Sulla base di questa definizione dimostrò la equicardinalità per svariate coppie di insiemi utilizzati in matematica, mentre dimostrò che l'insieme delle parti di un insieme S ha un cardinale superiore a $|S|$ e di conseguenza individuando una successione di classi di equicardinalità caratterizzate dai numeri transfiniti $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$, $\aleph_1 := |\mathfrak{P}(\mathbb{N})|$, $\aleph_2 := |\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{N}))|$, ..., $\aleph_n$, ...

B65:**a.07** Queste idee furono accolte da molti dei matematici interessati ai fondamenti (in particolare da Weierstrass e Dedekind) e si cominciò a utilizzare gli insiemi come basi per lo studio sistematico dei fondamenti della matematica, a cominciare dalle impostazioni assiomatiche dell'aritmetica e della geometria.

Gli insiemi concepiti da Cantor trovarono però forti oppositori, in particolare in Leopold Kronecker, che lo accusava di ricorrere a nozioni troppo vaghe come quella di insieme astratto e quella di assumere come basi dei cardinali delle biiezioni non meglio precisate; inoltre egli criticava l'allontanando dalle problematiche costruttive e dai loro metodi.

Per contro ci si rese conto che gli insiemi trattati come entità astratte consentivano di proporre teorie di apprezzabile elevata generalità le quali promettevano di unificare teorie diverse di portata più ridotta; queste tuttavia avevano il vantaggio di riguardare entità più circoscritte ma tangibilmente analizzabili.

Si può dire comunque che nell'ultimo quarto del XIX secolo si è andata imponendo l'idea dell'utilità di una teoria degli insiemi astratti, sia come strumento di sistemazione della matematica, sia per i vantaggi in termini di generalità dei risultati ottenibili e di concisione espositiva complessiva.

B65:**a.08** Intorno al 1970 C. S. Peirce aveva iniziato a proporre un sistema logico di ampio respiro che in particolare dava importanza alle relazioni e ai quantificatori. Proseguendo questi studi egli giunse anche a distinguere la logica del primo ordine dalla logica del secondo ordine.

Separatamente nel 1879 Gottlieb Frege, nell'ambito degli studi sulla definizione assiomatica dell'aritmetica, nella sua opera *Begriffschrift* ($\approx$ linguaggio di concetti) propose con determinazione il programma chiamato **logicismo**, il quale, richiamando l'utopia della *characteristica universalis* di Leibniz e l'opera di Boole, si proponeva di ridurre l'aritmetica alla logica.

Frege propose il paradigma delle teorie formali, cioè di sistemi formali ciascuno dei quali si basa sopra un raggruppamento di enunciati proposti come dotati di verità, gli assiomi, e sopra regole di inferenza puramente simboliche che dagli assiomi consentono di derivare come formule ben formate tutti e soli gli enunciati da considerare veri nell'ambito della teoria.

Questo programma per la formulazione precisa delle catene deduttive, richiede un linguaggio artificiale che deve coinvolgere anche i quantificatori.

In tal modo si giunse a precisare che una teoria matematica deve avere le seguenti proprietà:

noncontradditorietà, ossia **consistenza** o **coerenza**, cioè l'impossibilità di avere catene deduttive che giungono a proprietà contradditorie;

completezza, cioè la possibilità di dimostrare ogni enunciato ben formato, oppure di confutarlo, ossia la possibilità di dimostrare la sua negazione;

decidibilità, ossia disponibilità di un procedimento sicuro o di un algoritmo in grado di decidere la validità di ogni enunciato ben formato.

B65:**a.09** Frege, con l'opera *Grundgesetze der Arithmetik* riuscì a dare una base assiomatica all'aritmentica.
Per questo propose un linguaggio formale che si serviva di formule disposte in due dimensioni.
Purtroppo tale strumento si rivelò pesante ed il suo uso fu assai limitato.

Un linguaggio più semplice venne proposto da Dedekind e successivamente Giuseppe Peano espose una formulazione dell'aritmetica ancora più semplice che venne ampiamente adottata e viene tuttora proficuamente studiata [e10-e14].

L'assiomatizzazione dell'aritmetica influenzò anche altri studi sul metodo assiomatico e sulla fondazione formale della matematica ai quali si stavano dedicando alcuni tra i più influenti matematici di quel tempo, come Henry Poincaré, David Hilbert, Hermann Weyl e successivamente Bertrand Russel.

In questo periodo le teorie matematiche formalizzate hanno cominciato ad imporsi come i soli apparati di vasta portata in grado di garantire procedimenti dimostrativi rigorosi capaci di condurre a risultati ad un alto livello di attendibilità.

Per questa proprietà preoccupava soprattutto il pericolo della contradditorietà dei risultati, ovvero il pericolo delle antinomie.

In effetti si dimostra che nell'ambito di una teoria nella quale dagli assiomi si possono dedurre sia un enunciato che il suo opposto è possibile giungere a contraddire ciascuno dei teoremi deducibili dagli assiomi; quindi si ha la contradditorietà degli assiomi stessi e la inattendibilità della teoria nei confronti delle sue possibili applicazioni.

B65:**a.10** La pubblicazione nel 1899 dei *Grundlagen der Geometrie* di David Hilbert a conclusione di una intensa attività di indagine per i quali vanno ricordati anche Moritz Pasch, Mario Pieri e Oswald Veblen, fornì la prima impostazione deduttiva completa e logicamente soddisfacente della geometria.

Va segnalato che l'impostazione di Hilbert contraddisse la radicata convinzione, sostenuta anche da Kant e accolta ancora da Frege, della natura innata delle idee riguardanti lo spazio.

I fondamenti della geometria di Hilbert ebbero vasta influenza, anche in virtù della loro capacità di unificare le diverse geometrie (la euclidea, l'ellittica e l'iperbolica) intorno alle quali nel recente passato si erano riscontrati accesi dibattiti, anche in ambito filosofico.

Il programma del logicismo per i fondamenti però ha incontrato aspre difficoltà con la scoperta o la ripresa di alcuni cosiddetti paradossi, enunciazioni che conducono a contraddizioni, e quindi antinomie:

`paradosso di Epimenide (wi)`, `paradosso di Burali-Forti (wi)`, `paradosso di Russel (wi)` (e di Zermelo), `paradosso del barbiere (wi)`, paradosso del più piccolo intero privo d'importanza, ...

Particolarmente preoccupante fu il paradosso che Russel individuò in un testo di Frege. Esso riguarda l'entità definita come

l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi .

Se tale insieme fosse membro di se stesso contraddirebbe la sua definizione, mentre se non appartenesse a se stesso dovrebbe contenere se stesso.

Inoltre furono individuati oggetti geometrici paradossali: per esempio Peano trovò una curva piana continua che passa per tutti i punti di una regione quadrata.

B65:**a.11** Ci si è dunque resi conto che la teoria degli insiemi proposta da Frege consentiva di trattare l'insieme di tutti gli insiemi, ossia accettava l'enunciato $\mathbf{Set} \in \mathbf{Set}$, affermazione alla quale si possono ricondurre molte antinomie.

L'evidenziazione delle antinoie che conducono a enunciati matematici in contraddizione preoccupò profondamente gli studiosi della teoria degli insiemi e del problema dei fondamenti.

In effetti si ebbe anche un gran numero di matematici che, osservando che gli "insiemi" generatori di antinomie erano molto più estesi e indefiniti di quelli che, più o meno esplicitamente, venivano utilizzati nelle attività matematiche più feconde di risultati riutilizzabili, considerarono con un certo distacco il dibattito sui fondamenti e proseguirono nei loro studi specifici rimuovendo le preoccupazioni per le questioni di principio.

B65:**a.12** Si è comunque imposta l'idea che servirsi di definizioni basate sulla sola intuizione e di nozioni basilari poco approfondite comportava il rischio di giungere a situazioni insostenibili in molti campi di indagine.

Una teoria degli insiemi che non pone vincoli per le proprietà in grado di caratterizzare gli insiemi stessi venne considerata ingenua, *naïve*, o almeno provvisoria. Per avere buone garanzie di non contradditorietà e di affidabilità era necessaria una teoria degli insiemi saldamente basata su richieste espresse in un preciso formalismo.

Si impose dunque la necessità di sviluppare accurate impostazioni formali che consentissero di definire teorie basate su assiomi e su regole di inferenza in grado di derivare enunciati, i teoremi, da considerare veri nel proprio ambito specifico.

In particolare tra i 23 problemi che Hilbert al II Congresso Internazionale di Matematica nel 1900 aveva segnalato come cruciali per l'avanzamento della ricerca [`Hilbert's prpblems (we)`] si trovano la coerenza della teoria dei numeri naturali e l'ipotesi del continuo [`Comntinuum hypothesis (we)`], cioè la congettura secondo la quale non esistono insiemi con cardinale compreso tra quello degli interi e quello della retta reale.

B65:b. teorie formali e logica matematica

B65:**b.01** Per perseguire la definizione formale-deduttiva di una matematica libera da contraddizioni e affidabile dall'inizio del XX secolo furono proposti vari programmi, tra i quali si presentavano anche rilevanti differenze negli approcci e negli obiettivi.

Questi studi fondazionali complessivamente ottennero vari risultati importanti, ma incontrarono anche difficoltà e fallimenti che hanno condotto a una situazione con elementi di frammentarietà che durano tuttora.

Gli studi sui sistemi formali deduttivi e sui fondamenti condussero a introdurre e consolidare la `logica matematica (wi)`, cioè la disciplina che si occupa delle leggi del ragionamento in matematica servendosi di strumenti formali che intendono essere il più possibile rigorosi.

Questa disciplina si è sviluppata in stretto contatto con le problematiche della teoria degli insiemi e dei fondamenti della matematica traendo vari spunti dalle esigenze di questi settori.
Essa tuttavia si pone obiettivi di ampio raggio e sistematici, sviluppa propri strumenti e rivendica una propria autonomia.

B65:**b.02** La logica matematica studia lo sviluppo e l'applicazione delle **teorie formali**. Queste sono sistemi simbolici costituiti da un linguaggio e da un automatismo deduttivo.

Il linguaggio di una teoria formale, che denotiamo con L, si basa su un alfabeto A costituito da simboli aventi ruoli diversi:

- variabili: x, y, z, ... X, Y, x_1, x_2, ... costituenti insiemi finiti prefissati che si consente possano essere ampliati senza limiti a priori e secondo necessità;
- costanti;
- parentesi delimitatrici e simboli di punteggiatura;
- connettivi proposizionali: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$;
- quantificatore universale $\forall$ e quantificatore esistenziale: $\exists$;
- predicati: "essere un insieme", $=$, $\in$.

Il linguaggio $\mathsf{L} \subset A^\star$ è individuato da regole sintattiche ben determinate, che in particolare possono essere organizzate in una grammatica acontestuale [C14].
Le sue stringhe hanno il compito di rappresentare formalmente degli enunciati e sono dette **formule ben formate** o formule ammissibili.

Tra di esse si distinguono:

- **formule atomiche** come le seguenti $x = y$, $x \in S$, S è un insieme ;
- **formule derivate** ottenute applicando anche più volte le regole di riscrittura costituenti i meccanismi per la formazione dei predicati.

L'automatismo deduttivo è costituito da un insieme $\mathcal{A} \subset \mathsf{L}$ di enunciati privilegiati chiamati assiomi e da regole di inferenza.

Un **assioma** è un enunciato che viene assunto convenzionalmente come enunciato vero, più precisamente come enunciato valido nell'ambito della teoria che si intende sviluppare.

Ogni **regola di inferenza** è una regola di riscrittura che da alcune formule ammissibili consente di ricavare una nuova formula ammissibile.

Le regole di inferenza sono usate per procedere a generare formule valide a partire dagli assiomi e da formule valide precedentemente ottenute.

B65:**b.03** Tra le teorie formali sono state messe a fuoco le più specifiche **teorie matematiche** concernenti obiettivi più specificamente collegati alle possibilità di elaborazioni e caratterizzate dall'includere la relazione di uguaglianza.

Nella maggior parte delle teorie matematiche viene data particolare importanza alla teoria degli insiemi (nelle sue non poche varianti).

Nelle teorie matematiche gli enunciati validi in talune esposizioni sono chiamati indistintamente **teoremi**; in altre esposizioni per essi la qualifica di teorema viene attribuita solo a enunciati considerati di particolare rilievo, mentre per gli altri enunciati validi vengono usati nomi come proposizioni, lemmi e corollari; lemmi sono chiamati gli enunciati che nello sviluppo della teoria si collocano in posizione preliminare rispetto ad un teorema di rilievo, mentre sono chiamati lemmi gli enunciati che discendono direttamente da un teorema o da un'altra proposizione di una certa importanza.

Gli enunciati validi di una teoria matematica hanno lo scopo di esprimere le proprietà delle entità formali che sono state introdotte per rendere la teoria stessa in grado di individuare strumenti conoscitivi, algoritmi e metodi che servano ad attività di portata non episodica finalizzate alla risoluzione di problemi nuovi o già affrontati ma che si ripresentano in relazione a esigenze nuove i quali si presume possano presentarsi in futuro.

B65:**b.04** Il più importante e influente programma per la fondazione assiomatica della matematica proposto all'inizio del XX secolo è stato formulato principalmente da Hilbert nel 1900 e va sotto il nome di **logicismo**.

Esso si propone di individuare una assiomatizzazione della teoria degli insiemi priva di ricorsi alla intuizione, ma espressa solo con richieste formulate finitamente.

A questa teoria degli insiemi si chiedeva di essere in grado di dimostrare la propria consistenza servendosi solo dei propri assiomi e dei propri teoremi.

Si chiedeva inoltre che si potesse individuare un procedimento o un algoritmo in grado di stabilire per ogni enunciato della teoria se fosse dimostrabile oppure confutabile a partire dagli assiomi; a questa richiesta si è dato il nome (*Entscheidungsproblem*).

Infine si chiedeva che dalla teoria degli insiemi fossero deducibili i primi teoremi riguardanti i numeri naturali.

Questo programma fu portato avanti con importanti successi dallo stesso Hilbert e da suoi molti seguaci e diede un forte impulso alla crescita della logica matematica.

B65:**b.05** Un importante risultato del finitismo fu la assiomatizzazione della teoria degli insiemi formulata da Ernst Zermelo (1908), arricchita da Adolf Abraham Fraenkel (1922) e completata negli anni immediatamente successivi da Thoralf Skolem .

Le sue caratteristiche sono state presentate in b02 e saranno esposte con parecchi dettagli in B66.

Va comunque subito detto che questa teoria è quella che dalla sua presentazione viene utilizzata nella maggior parte delle esposizioni di teorie matematiche e che può considerarsi la formalizzazione standard degli insiemi.

Il finitismo invece fallì l'obiettivo della dimostrazione a partire dai suoi assiomi della coerenza della teoria stessa, in conseguenza della dimostrazione da parte di Kurt Goedel nel 1931 dei cosiddetti teoremi di incompletezza.
Il finitismo quindi dovette ridurre i suoi obiettivi, ma entro i suoi limiti accertati continuò a essere praticato.

B65:**b.06** A fianco del finitismo va considerato il progetto di formalizzazione della teoria degli insiemi e dei fondamenti della matematica che ha condotto alla pubblicazione negli anni 1910, 1912 e 1913 dei *Principia Mathematica* di Bertrand Russel ed Alfred North Whitehead.

In questa opera, nata con vasti obiettivi, si evitano le antinomie introducendo per gli insiemi una gerarchia consistente in una successione di tipi di cardinali crescenti.

Lo sviluppo di questa teoria risulta però piuttosto pesante, ben più della teoria di Zermelo-Fraenkel; inoltre alcuni obiettivi proposti all'inizio dell'opera risultano irrealizzabili, ancora in conseguenza dei teoremi di incompletezza di Goedel.

B65:**b.07** Una questione che per molti anni è stata ampiamente dibattuta riguarda l'opportunità di inserire o meno tra gli assiomi della teoria degli insiemi e tra i fondamenti della matematica del cosiddetto **assioma della scelta**, ossia *axiom of choice*, in sigla ***AoC***, al quale si può dare la forma che segue.

Data una famiglia, infinita, di insiemi non vuoti esiste una funzione che ad ogni insieme associa un suo elemento.

In termini intuitivi l'assioma assicura che a partire da una famiglia di insiemi si può costruire un insieme scegliendo un elemento da ciascuno dei detti insiemi.

La teoria di Zermelo-Fraenkel che include l'assioma della scelta viene solitamente identificata con la sigla ZFC, mentre la teoria che non ricorre ad ***AoC*** viene identificata con ZF.

Attualmente questa diatriba si è quasi completamente esaurita, in quanto il proseguire delle ricerche hanno fatto prevalere l'idea che non sia necessario imporre un sistema unico per le varie questioni che si collegano ai fondamenti della matematica.

La decisione sull'assioma della scelta viene lasciata aperta e per certi risultati sensibili si ha cura di distinguere se sia sufficiente una teoria ZF senza questa richiesta oppure si renda necessaria una teoria che la include.

Questo verrà introdotto e discusso con una certa ampiezza in B66e.

In effetti per i fondamenti della matematica, per la portata della logica e per tematiche analoghe si consente di fare riferimento a diverse teorie degli insiemi e di adottare altri approcci che si servono di entità diverse dagli insiemi, ad esempio delle cosiddette categorie [T50].

In questo scenario di "eclettismo" l'attenzione si concentra sull'approfondimento dei vari sistemi formali alternativi e sull'esame delle relazioni che intercorrono tra di essi: si esaminano equivalenze, dipendenze e possibilità di alternative [B66f].

B65:**b.08** Un importante approccio ai fondamenti della matematica è partito dalla messa sotto accusa di molti strumenti per lo studio degli insiemi che vengono introdotti con motivazioni giudicate inadeguate. In particolare sono stati messi sotto accusa un uso smodato del principio del terzo escluso e l'assioma della scelta.

In contrapposizione al finitismo venne dunque proposto il programma di costruire la matematica con rigida esclusione degli strumenti non pienamente giustificati. Questo approccio, chiamato **intuizionismo**, venne proposto e sviluppato inizialmente dall'olandese Luitzen E. J. Brouwer .

Va anche segnalato che tra intuizionisti e finitisti, in particolare tra Brouwer ed Hilbert, si sono avute anche polemiche molto accese.

B65:**b.09** Una posizione con molti punti in comune con l'intuizionismo venne sviluppata nell'Unione Sovietica da Andrei Andreevich Markov Jr. .

Anche questo approccio fu critico nei confronti degli strumenti ammissibili e, per contro, insistette sopra l'opportunità di ottenere dimostrazioni costruttive dei risultati della matematica mediante strumenti algoritmici che fossero in grado di consentire un controllo più effettivo dei risultati formali e una migliore consapevolezza della realizzabilità delle applicazioni.

B65:**b.10** Segnaliamo anche a grandi linee gli aspetti della logica matematica che più qui interessano.

Una nozione basilare per questa disciplina è quella di **calcolo formale**, termine che in questo capitolo sostituiamo con la sola parola "calcolo". Possiamo definire calcolo una terna costituita da un linguaggio formale, da un sistema di assiomi espressi nel suddetto linguaggio e da un sistema di regole di inferenza.

Solo nell'ambito di un calcolo formale si può dare una precisa definizione di dimostrazione e con questa aprire la possibilità di stabilire quando è impossibile dimostrare un enunciato all'interno di una teoria che su quel calcolo si basa.

Questa tematica si è esercitatain particolare nel cosiddetto **problema della parola** introdotto da Max Dehn nel 1911 limitatamente alla teoria dei gruppi.

In generale il problema riguarda una specie di struttura algebrica arbitraria e una sua presentazione finita e si chiede se esiste un algoritmo in grado di decidere a partire da due arbitrarie presentazioni (le parole) t_1 e t_2 di suoi elementi se rappresentano lo stesso elemento.

Per talune specie di strutture algebriche, in particolare per la teoria dei gruppi, il problema si dimostra indecidibile, per altre decidibile. Accade inoltre che molti problemi di decisione siano riconducibili a un problema della parola e quindi larelativa problematica può dire molto sulle possibilità di trovare algoritmi.

B65:**b.11** Un importante risultato della logica matematica consiste nella definizione matematica della nozione di algoritmo, cioè di una procedura affettiva in grado di risolvere una classe, spesso infinita, di problemi.

Questa nozione risponde all'auspicio di Leibniz di individuare un meccanismo in grado di risolvere ogni problema della matematica, da lui chiamato *characteristica universalis*.

Accadde però che Alonso Church nel 1936 dimostrò l'impossibilità di trovare un algoritmo esprimibile nel cosiddetto **lambda calcolo** che, dato un arbitrario enunciato sugli interi naturali espresso in un linguaggio formale in grado di formalizzare l'aritmetica elementare, consentisse di decidere la validità o meno dell'enunciato per ogni intero naturale.

Venne quindi dimostrata l'impossibilità di risolvere quello che Hilbert aveva chiamato *Entscheidungsproblem*, problema che si era dimostrato equivalente alla decisione della validità di un qualsiasi enunciato della matematica.

Nello stesso anno si ebbe un risultato equivalente: Alan Mathison Turing introdusse la macchina che porta il suo nome come strumento in grado di eseguire ogni algoritmo, nonché la variante specifica detta macchina di Turing universale, macchina in grado di simulare ogni evoluzione di macchina di Turing ed in particolare in grado di simulare se stessa.

Tale strumento permise a Turing di individuare un altro problema algoritmicamente indecidibile, quello dell'arresto della suddetta macchina.

I vari strumenti formali noti in grado di realizzare algoritmi si dimostrarono equivalenti; quindi Church e Turing avanzarono la congettura che ogni algoritmo sia eseguibile da una macchina di Turing, oppure con il λ-calcolo, oppure con la teoria della ricorsione di Goedel, oppure da un altro qualsiasi degli accennati strumenti.

Negli anni successivi furono individuati molti altri problemi indecidibili e quindi molti aspetti limitativi della matematica. A questi sviluppi contribuirono in particolare matematici dell'Unione Sovietica come Anatoly Ivanovich Maltsev , Piotr Sergeievich Novikov ed Aleksander Alexandrevich Markov jr. .

B65:**b.12** Le considerazioni precedenti riguardano la branca sintattica della logica matematica.

Gli studi più profondi di questa branca riguardano la nozione di dimostrazione nei diversi calcoli logici e oggi costituiscono un settore della logica matematica dotato di una buona autonomia chiamato **teoria della dimostrazione**.

Vi sono poi gli studi semantici i quali si devono applicare ai linguaggi formali dei diversi calcoli logici. Per ciascun linguaggio si tratta di indagare sopra la verità delle sue espressioni.

Le nozioni semantiche vengono precisamente definite e questo rende possibile uno studio rigoroso di vari concetti di verità.

La semantica del linguaggio del calcolo dei predicati ha costituito un rigoglioso settore della logica matematica chiamato **teoria dei modelli**.

Questa disciplina fu fondata da Alfred Tarski e Anatoly Maltsev e molti dei suoi risultati e dei suoi metodi sono utilizzati in altri settori della matematica, in particolare nell'algebra e nell'analisi infinitesimale.

Testi dell'*esposizione* in http://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e in http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/