1

Capitolo B56
algebre di Boole

Contenuti delle sezioni

a. algebre di Boole [1] p. 2
b. algebra di Boole su due bits p. 5
c. algebre di Boole su sequenze binarie p .7
d. algebre di Boole di insiemi p .9

11 pagine

B56 0.01 Questo capitolo viene dedicato alle algebre di Boole, strutture algebriche criptomorfe con i reticoli distributivi complementati che devono la loro importanza per le loro applicazioni alla teoria degli insiemi, alla logica, allo studio dei circuiti digitali e alla programmazione.

Occorre segnalare che gli argomenti trattati in questo capitolo presentano significativi collegamenti con le nozioni esaminate in B60.

Dopo avere introdotte le idee complessive sulle algebre di Boole, si esaminano le basilari algebre di Boole su due bits e le loro estensioni cartesiane, le algebre di Boole su sequenze binarie.
Si passa poi ad altre algebre di Boole che si incontrano in moltissimi discorsi, le algebre di Boole di insiemi e le algebre di Boole di proposizioni.
Si conclude con le algebra di Boole dei circuiti digitali, oggetti di importanza applicativa ben evidente.

B56 a. algebre di Boole [1]

B56 a.01 Le proprietà del calcolo proposizionale [B60] possono essere considerate da un punto di vista algebrico piuttosto semplice e generale che consente di inquadrare in modo unitario anche altri importanti sviluppi matematici e tecnologici.
Più precisamente il calcolo proposizionale può considerarsi come una realizzazione della teoria delle algebre di Boole.

Queste algebre costituiscono una specie di struttura algebrica che possiede altre due realizzazioni rilevanti, l'algebra degli insiemi e l'algebra dei circuiti digitali; esse inoltre possono essere studiate vantaggiosamente come insiemi parzialmente ordinati dotati di precise caratteristiche specifiche.

La specie delle algebre di Boole consente quindi di collegare strettamente campi in apparenza separati come studio delle sentenze, studio delle operazioni tra insiemi, studio dei circuiti e studio di particolari insiemi ordinati.

Va anche rilevato che certi sviluppi formali possono essere portati avanti vantaggiosamente e a un livello di elevata generalità grazie alla possibilità di servirsi di notazioni notevolmente concise consentito dalla disponibilità di una relazione d'ordine, di una involuzione e di varie operazioni binarie.

B56 a.02 Si definisce **algebra di Boole** ogni struttura algebrica della forma

$$\boldsymbol{B} = \langle B, \wedge, \vee, {}^{\mathsf{C}}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$$

nella quale B è un insieme comprendente almeno due elementi detto **terreno della struttura**, $\wedge$ e $\vee$ sono due operazioni binarie su B dette, risp., **incontro** e **giunzione**, ${}^{\mathsf{C}}$ una operazione unaria detta **complementazione** che scriveremo preferenzialmente in forma esponenziale, mentre $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ sono due elementi particolari di B, il primo chiamato **zero dell'algebra** o **minimo dell'algebra** e il secondo detto **unità dell'algebra** o **massimo dell'algebra**.

Si chiede inoltre che le componenti della struttura soddisfino gli assiomi che seguono, nei quali a, b, c denotano arbitrari elementi di B.

[AlgB a]: $a \wedge b = b \wedge a$ commutatività dell'incontro $\wedge$,

[AlgB b]: $a \vee b = b \vee a$ commutatività della giunzione $\vee$,

[AlgB c]: $\mathbf{0} \vee a = a$ $\mathbf{0}$ è elemento neutro per $\vee$,

[AlgB d]: $\mathbf{1} \wedge a = a$ $\mathbf{1}$ è elemento neutro per $\wedge$,

[AlgB e]: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ distributività di $\wedge$ rispetto a $\vee$,

[AlgB f]: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ distributività di $\vee$ rispetto a $\wedge$,

[AlgB g]: $a \wedge a^{\mathsf{C}} = \mathbf{0}$ complementazione per l'incontro ,

[AlgB h]: $a \vee a^{\mathsf{C}} = \mathbf{1}$ complementazione per la giunzione .

Occorre segnalare che spesso l'operazione unaria complementazione viene presentata con il simbolo "¬" usato in posizione prefissa che viene chiamato "negazione".

B56 a.03 Ricaviamo le conseguenze più dirette e più ampiamente invocate degli assiomi.

(1) Prop.: L'elemento zero è l'unico elemento neutro per la giunzione $\vee$.

Dim.: Procediamo per assurdo e supponiamo che vi siano due elementi $\mathbf{0}$ e $\mathbf{0}'$ tali che per ogni $a \in B$ sia $a \vee \mathbf{0} = \mathbf{0}$ e $a \vee \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$; da queste e dalla commutatività di $\vee$ segue che $\mathbf{0} \vee \mathbf{0}' = \mathbf{0} = \mathbf{0}' \vee \mathbf{0} = \mathbf{0}'$ ∎

(2) Prop.: L'elemento unità è l'unico elemento neutro per l'incontro $\wedge$.

Dim.: Supponiamo per assurdo che vi siano due elementi $\mathbf{1}$ e $\mathbf{1}'$ tali che per ogni $a \in B$ sia $a \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1}$ e $a \wedge \mathbf{1}' = \mathbf{1}'$; da queste e dalla commutatività di $\wedge$ segue che $\mathbf{1} \wedge \mathbf{1}' = \mathbf{1} = \mathbf{1}' \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1}'$ ∎

B56 a.04 (1) Prop.: $a \vee a = a$, idempotenza della giunzione $\vee$.

Dim.: $a \vee a = (a \vee a) \wedge \mathbf{1} = (a \vee a) \wedge (a \vee a^{\mathsf{C}}) = a \vee (a \wedge a^{\mathsf{C}}) = a \vee \mathbf{0} = a$ ∎

(2) Prop.: $a \wedge a = a$, idempotenza dell'incontro $\wedge$.

Dim.: $a \wedge a = (a \wedge a) \vee \mathbf{0} = (a \wedge a) \vee (a \wedge a^{\mathsf{C}}) = \llcorner\!\!\llcorner [\text{AlgB e}] \lrcorner\!\!\lrcorner = a \vee (a \wedge a^{\mathsf{C}}) = \llcorner\!\!\llcorner [\text{AlgB g}] \lrcorner\!\!\lrcorner = a \vee \mathbf{0} = a$ ∎

B56 a.05 (1) Prop.: $a \vee (a \wedge b) = a$ prima proprietà di assorbimento.

Dim.: $a \vee (a \wedge b) = (a \wedge \mathbf{1}) \vee (a \wedge b) = \llcorner\!\!\llcorner [\text{AlgB f}] \lrcorner\!\!\lrcorner = a \wedge (\mathbf{1} \vee b) = a \wedge \mathbf{1} = a$ ∎

(2) Prop.: Dimostrare che $a \wedge (a \vee b) = a$, seconda proprietà di assorbimento.

B56 a.06 (1) Prop.: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ associatività di $\vee$.

Dim.: $(a \vee b) \vee c = ((a \vee b) \vee c) \wedge \mathbf{1} = ((a \vee b) \vee c) \wedge (a \vee a^{\mathsf{C}})$
$= (((a \vee b) \vee c) \wedge a) \vee (((a \vee b) \vee c) \wedge a^{\mathsf{C}}) = (a \wedge ((a \vee b) \vee c)) \vee (a^{\mathsf{C}} \wedge ((a \vee b) \vee c))$
$= ((a \wedge ((a \vee b) \vee (a \wedge c)) \vee (a^{\mathsf{C}} \wedge ((a \vee b) \vee c)) = (a \vee (a \wedge c)) \vee (a^{\mathsf{C}} \wedge ((a \vee b) \vee c))$
$= a \vee ((a^{\mathsf{C}} \wedge (a \vee b)) \vee (a^{\mathsf{C}} \wedge c)) = a \vee (((a^{\mathsf{C}} \wedge a) \vee (a^{\mathsf{C}} \wedge b)) \vee (a^{\mathsf{C}} \wedge c)) = a \vee ((\mathbf{0} \vee (a^{\mathsf{C}} \wedge b)) \vee (a^{\mathsf{C}} \wedge c))$
$= a \vee ((a^{\mathsf{C}} \wedge b) \vee (a^{\mathsf{C}} \wedge c)) = a \vee (a^{\mathsf{C}} \wedge (b \vee c)) = a \vee ((a^{\mathsf{C}} \wedge (b \vee c)) \vee \mathbf{0}) = a \vee ((a^{\mathsf{C}} \wedge a) \vee (a^{\mathsf{C}} \wedge (b \vee c)))$
$= a \vee (a^{\mathsf{C}} \wedge (a \vee (b \vee c))) = a \vee ((a \vee (b \vee c)) \wedge a^{\mathsf{C}}) = (a \wedge (a \vee (b \vee c))) \vee ((a \vee (b \vee c)) \wedge a^{\mathsf{C}})$
$= ((a \vee (b \vee c)) \wedge a) \vee ((a \vee (b \vee c)) \wedge a^{\mathsf{C}}) = (a \vee (b \vee c)) \wedge (a \vee a^{\mathsf{C}}) = (a \vee (b \vee c)) \wedge \mathbf{1} = (a \vee (b \vee c))$ ∎

(2) Eserc. Dimostrare $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, associatività di $\wedge$.

B56 a.07 (1) Prop.: $a^{\mathsf{C}} \wedge (a \wedge b) = \mathbf{0}$

Dim.: $a^{\mathsf{C}} \wedge (a \wedge b) = 0 \vee (a^{\mathsf{C}} \wedge (a \wedge b)) = (a^{\mathsf{C}} \wedge a) \vee (a^{\mathsf{C}} \wedge (a \wedge b)) = a^{\mathsf{C}} \wedge (a \vee (a \wedge b)) = a^{\mathsf{C}} \wedge a = \mathbf{0}$ ∎

(2) Prop.: $a^{\mathsf{C}} \vee (a \vee b) = \mathbf{1}$.

Dim.: $a^{\mathsf{C}} \vee (a \vee b) = \mathbf{1} \wedge (a^{\mathsf{C}} \vee (a \vee b)) = (a^{\mathsf{C}} \vee a) \wedge (a^{\mathsf{C}} \vee (a \vee b)) = a^{\mathsf{C}} \vee (a \wedge (a \vee b)) = \llcorner\!\!\llcorner \mathsf{a05}(1) \lrcorner\!\!\lrcorner = a^{\mathsf{C}} \vee a = \mathbf{1}$ ∎

(3) Prop.: Dimostrare che $a \wedge (a^{\mathsf{C}} \wedge b^{\mathsf{C}}) = \mathbf{0}$.

(4) Prop.: Dimostrare che $a \vee (a^{\mathsf{C}} \vee b^{\mathsf{C}}) = \mathbf{1}$.

B56 a.08 Prop. $a \wedge c = b \wedge c$ e $a \vee c = b \vee c$ implicano $a = b$.

Dim.: $a = a \wedge (a \vee c) = a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b = (b \vee c) \wedge b = b$ ∎

B56 a.09 (1) Eserc. Dimostrare $a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$, zero o elemento assorbente per $\wedge$.

(2) Eserc. Dimostrare $a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$, unità o elemento assorbente per $\vee$.

(3) Eserc. Dimostrare che $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$, distinzione di zero e unità.

(4) Eserc. Dimostrare che $(a^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}} = a$, idempotenza della complementazione.

B56 a.10 (1) Prop.: $(a^{\mathsf{C}} \vee b^{\mathsf{C}}) \wedge (a \wedge b) = \mathbf{0}$.

Dim.: $(a^{\mathsf{C}} \vee b^{\mathsf{C}}) \wedge (a \wedge b) = (a \wedge b) \vee (a^{\mathsf{C}} \vee b^{\mathsf{C}}) = ((a \wedge b) \wedge a^{\mathsf{C}}) \vee ((a \wedge b) \wedge b^{\mathsf{C}})$
$= (a^{\mathsf{C}} \wedge (a \wedge b)) \vee (b^{\mathsf{C}} \wedge (b \wedge a)) = \llcorner\!\!\llcorner \mathsf{a07}(1) \lrcorner\!\!\lrcorner = \mathbf{0} \vee \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ∎

(2) Prop.: $(a^{\mathsf{C}} \vee b^{\mathsf{C}}) \vee (a \wedge b) = \mathbf{1}$.

Dim $(a^{\mathsf{C}} \vee b^{\mathsf{C}}) \vee (a \wedge b) \;=\; ((a^{\mathsf{C}} \vee b^{\mathsf{C}}) \vee a) \wedge ((a^{\mathsf{C}} \vee b^{\mathsf{C}}) \vee b) \;=\; (a \vee (a^{\mathsf{C}} \vee b^{\mathsf{C}})) \wedge (b \vee (b^{\mathsf{C}} \vee a^{\mathsf{C}})) \;=\; \lfloor\!\lfloor$ a07(4) $\rfloor\!\rfloor$ $= \mathbf{1} \vee \mathbf{1} \;=\; \mathbf{1}$ ∎

B56 a.11 (1) Prop.: $(a \wedge b)^{\mathsf{C}} \;=\; a^{\mathsf{C}} \vee b^{\mathsf{C}}$, prima legge di De Morgan

Dim.: [AlgB g] e a11(1) implicano $(a \wedge b)^{\mathsf{C}} \wedge (a \wedge b) = \mathbf{0} = (a^{\mathsf{C}} \vee b^{\mathsf{C}}) \wedge (a \wedge b)$.
[AlgB h] ed a11(2) implicano $(a \wedge b)^{\mathsf{C}} \vee (a \wedge b) = \mathbf{1} = (a^{\mathsf{C}} \vee b^{\mathsf{C}}) \vee (a \wedge b)$.
Sostituendo in a08 a con $(a \wedge b)^{\mathsf{C}}$, b con $a^{\mathsf{C}} \vee b^{\mathsf{C}}$ e c con $a \wedge b$ si ottiene $a^{\mathsf{C}} \vee b^{\mathsf{C}} = (a \wedge b)^{\mathsf{C}}$ ∎

(2) Prop.: $(a \vee b)^{\mathsf{C}} = a^{\mathsf{C}} \wedge b^{\mathsf{C}}$, seconda legge di De Morgan

Dim.: Sostituendo nella a11(1) a con a^{C} e b con b^{C} e tenendo conto della a09(4), si ottiene $(a^{\mathsf{C}} \wedge b^{\mathsf{C}})^{\mathsf{C}} = a \vee b$; applicando la complementazione ai due membri dell'uguaglianza e ancora applicando la a09(4) si ottiene $a^{\mathsf{C}} \wedge b^{\mathsf{C}} = (a \vee b)^{\mathsf{C}}$ ∎

B56 b. algebra di Boole su due bits

B56 b.01 L'algebra di Boole più semplice ha il terreno costituito da due soli elementi, 0 e 1 i quali svolgono, risp., il ruolo dello zero e quello dell'unità della struttura.

Essa si presenta convenientemente con le operazioni binarie rappresentate da due matrici di profilo 2×2 con le righe e le colonne etichettate, risp., da 0 e da 1 e con l'operazione unaria, endofunzione su $\{0, 1\}$, fornita da un vettore colonna con le righe etichettate da 0 e 1:

$$\wedge \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \vee \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathsf{C} \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 \end{vmatrix} .$$

Essa si dice **algebra di Boole di un bit** e la denotiamo con $\boldsymbol{Bab}_1$.

Servendoci dell'insieme $\mathbf{2} := \{0, 1\}$ abbiamo quindi:

$$\boldsymbol{Bab}_1 = \left\langle \mathbf{2} \;=\; \{0,1\} \;,\; \wedge \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;,\; \vee \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \;,\; \mathsf{C} \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \;,\; 0 \;,\; 1 \right\rangle$$

In questa algebra si possono individuare vari altri operatori binari e unari.
I possibili operatori binari sono 16, in quanto ciascuno di essi è rappresentabile mediante una matrice con 4 entrate binarie e di tali matrici ce ne sono evidentemente $2^{2 \cdot 2}$; i possibili operatori binari sono 4 in quanto individuati dalla seconda riga della trasformazione di $\left\lceil (1) \longmapsto (1) \right\rceil$ e quindi sono in numero di $2^2 = 4$.

Queste 20 operazioni possibili, come vedremo, presentano interesse, in particolare, nello studio dei circuiti elettrici digitali e nella programmazione.

B56 b.02 Le sopra annunciate 20 operazioni sono collegate piuttosto strettamente tra di loro e alcuni gruppi di esse possono essere scelti per definire strutture algebriche del tutto equivalenti, cioè criptomorfe, alla $\boldsymbol{Bab}_1$.

In particolare, come segnalato daCharles Sanders Peirce nel 1880, ma con poco seguito, e con maggiore notorietà da Henry Maurice Sheffer nel 1913, si può definire una struttura algebrica su $\mathbf{2}$ che si basa su una sola operazione binaria.
Come vedremo questa può essere il cosiddetto **connettivo di Sheffer** (*Sheffer stroke*) o il suo duale chiamato **connettivo di Peirce**.

Questo risultato risulta molto utile per la costruzione dei circuiti digitali.

Prima di proseguire segnaliamo che per le operazioni delle algebre di Boole sui due bits, delle sentenze e degli insiemi vengono usate altre notazioni e altri termini che presentiamo nel quadro che segue.
In esso i bits iniziali riguardano nell'ordine le coppie di operandi 00, 01, 10 e 11, A e B denotano due sentenze variabili, mentre $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ denotano due insiemi collocati in un universo denotato con $\boldsymbol{U}$.

0000				contraddizione	insieme vuoto, $\emptyset$
1000	$\downarrow$	NOR	$\neg(A \vee B)$	connettivo di Peirce	compl. dell'unione
0100			nonimplicazione		$\boldsymbol{A}$ senza $\boldsymbol{B}$
0010				nonimplicazione conversa	$\boldsymbol{B}$ senza $\boldsymbol{A}$
0001	$\wedge$	AND		congiunzione	intersezione, $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$
0011					
0101					
0110	$\oplus$	XOR		disgiunzione esclusiva	differenza simmetrica
1001	$\leftrightarrow$, sse	XNOR		bicondizionale	
1010					
1100					
0111	$\vee$	OR		disgiunzione	unione, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$
1011	$\rightarrow$			implicazione	
1101	$\leftarrow$			implicazione conversa	
1110	$\uparrow$	NAND	$\neg(A \wedge B)$	connettivo di Sheffer	compl. dell'intersezione
1111				tautologia	universo, $\boldsymbol{U}$
10	$\neg$	NEG	$\neg A$	negazione	complementazione
01	Id			identità	
00			assurdità		
11			ovvietà		

B56 b.03 Mostriamo come dal connettivo di Sheffer $\uparrow$ (o NAND) si possano ricavare tutte le operazioni restanti di un'algebra di Boole.

$A \uparrow B \ := \ \neg(A \wedge B) = \neg A \ \vee \ \neg B$; v.a. $\overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$.

$A \uparrow A \ := \ \neg(A \wedge A) = \neg A$; v.a. $\boldsymbol{U} \setminus \boldsymbol{A}$.

$B \uparrow B \ := \ \neg(B \wedge B) = \neg B$; v.a. $\boldsymbol{U} \setminus \boldsymbol{B}$.

$A \uparrow \neg A \ := \ \neg(A \wedge \neg A) = \neg \mathsf{false} = \mathsf{true}$; v.a. $\boldsymbol{U} \setminus \emptyset = \boldsymbol{U}$.

$\mathsf{true} \uparrow \mathsf{true} \ := \ \neg(\mathsf{true} \wedge \mathsf{true}) = \mathsf{false}$; v.a. $\boldsymbol{U} \setminus (\boldsymbol{U}) = \emptyset$.

$\neg A \uparrow \neg A \ := \ \neg(\neg A \wedge \neg A) = A$; v.a. $\boldsymbol{U} \setminus (\overline{\boldsymbol{A}}) = A$.

$A \uparrow \neg B \ := \ \neg(A \wedge \neg B) = \neg A \vee B$; v.a. $\overline{\boldsymbol{A}} \cup \boldsymbol{B}$.

$\neg A \uparrow B \ := \ \neg(\neg A \wedge B) = A \vee \neg B$; v.a. $\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$.

$\neg A \uparrow \neg B \ := \ \neg(\neg A \wedge \neg B) = A \vee B$; v.a. $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$.

$(A \uparrow B) \uparrow (\neg A \uparrow \neg B) = \neg\left((\neg A \ \vee \ \neg B) \ \wedge \ (A \vee B)\right) = \neg\left((\neg A \wedge B) \ \vee \ (A \wedge \neg B)\right) =$
$(A \vee \neg B) \ \wedge \ (\neg A \vee B) = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$; v.a $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}})$.

$(A \uparrow \neg B) \uparrow (\neg A \uparrow B \ = \ \neg\left((\neg A \ \vee \ B) \ \wedge \ (A \vee \neg B)\right) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$;
v.a $(\boldsymbol{A} \cap OL\boldsymbol{B}) \cup (\overline{\boldsymbol{A}} \cap \boldsymbol{B})$.

$(A \uparrow B) \uparrow \mathsf{true} = \neg\left((\neg A \vee \neg B) \vee \mathsf{true}\right) = \neg(\neg A \vee \neg b) = A \wedge B$; v.a. $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$.

$(A \uparrow \neg B) \uparrow \mathsf{true} = A \wedge \neg B$; v.a. $\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$.

$(\neg A \uparrow B) \uparrow \mathsf{true} = \neg A \wedge B$; v.a. $\overline{\boldsymbol{A}} \cap \boldsymbol{B}$.

$(\neg A \uparrow \neg B) \uparrow \mathsf{true} = \neg A \wedge \neg B$; v.a. $\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$.

B56 c. algebre di Boole di sequenze binarie

B56 c.01 Presentiamo in modo dettagliato la costruzione del **prodotto diretto di algebre di Boole**.

Consideriamo due algebre di Boole $\boldsymbol{B}_i = \langle B_i, \wedge_i, \vee_i, {}^{c_i}, 0_i, 1_i \rangle$ per $i = 1, 2$; mediante i componenti di queste due sestuple costruiamo i prodotti cartesiani dei terreni, $B := B_1 \times B_2$, e delle operazioni,

$$\begin{aligned}
\wedge \;:=\; \wedge_1 \times \wedge_2 \;&=\; \left\downarrow \begin{matrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\downarrow \times \left\downarrow \begin{matrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\downarrow \\
&= \left\downarrow \begin{matrix} 0000 & 0001 & 0010 & 0011 & 0100 & 0101 & 0110 & 0111 \\ 00 & 00 & 00 & 01 & 00 & 00 & 00 & 01 \end{matrix} \right. \\
&\qquad \left. \begin{matrix} 1000 & 1001 & 1010 & 1011 & 1100 & 1101 & 1110 & 1111 \\ 00 & 00 & 00 & 01 & 10 & 10 & 10 & 11 \end{matrix} \right\downarrow \\
\vee \;:=\; \vee_1 \times \vee_2 \;&=\; \left\downarrow \begin{matrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\downarrow \times \left\downarrow \begin{matrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\downarrow \\
&= \left\downarrow \begin{matrix} 0000 & 0001 & 0010 & 0011 & 0100 & 0101 & 0110 & 0111 \\ 00 & 01 & 01 & 01 & 10 & 11 & 11 & 11 \end{matrix} \right. \\
&\qquad \left. \begin{matrix} 1000 & 1001 & 1010 & 1011 & 1100 & 1101 & 1110 & 1111 \\ 10 & 11 & 11 & 11 & 10 & 11 & 11 & 11 \end{matrix} \right\downarrow \\
\mathsf{C} \;:=\; {}^{c_1} \times {}^{c_2} \;&=\; \left\downarrow \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\downarrow \times \left\downarrow \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\downarrow \;=\; \left\downarrow \begin{matrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 01 & 11 \end{matrix} \right\downarrow .
\end{aligned}$$

Consideriamo inoltre le coppie $\mathbf{0} := \langle 0_1, 0_2 \rangle$ e $\mathbf{1} := \langle 1_1, 1_2 \rangle$.

Si dice prodotto diretto delle algebre di Boole $\boldsymbol{B}_1$ e $\boldsymbol{B}_2$ la struttura algebrica

$$\boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{B}_2 \;:= \langle B, \wedge, \vee, \mathsf{C}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle .$$

In parole povere si tratta della struttura costituita dalle coppie formate da un elemento di B_1 e da un elemento di B_2 sulle quali le operazioni binarie e la complementazione agiscono componente per componente, ossia operano facendo agire le operazioni delle algebre fattore sulle rispettive componenti.

Più dettagliatamente si possono porre le definizioni per a_i e b_i sono elementi arbitrari di $\boldsymbol{B}_i$ con $i = 1, 2$:

$\langle a_1, a_2 \rangle \wedge \langle b_1, b_2 \rangle \;:= \langle a_1 \wedge_1 b_1, a_2 \wedge_2 b_2 \rangle$

$\langle a_1, a_2 \rangle \vee \langle b_1, b_2 \rangle \;:= \langle a_1 \vee_1 b_1, a_2 \vee_2 b_2 \rangle$

$\langle a_1, a_2 \rangle^{\mathsf{C}} \;:= \langle a_1^{c_1}, a_2^{c_2} \rangle$.

B56 c.02 Occorre ora dimostrare che la struttura definita in precedenza è un'algebra di Boole.
La cosa si può fare semplicemente verificando i singoli assiomi per il prodotto diretto ricorrendo alle definizioni e al solo assioma interessato per le algebre fattore.

Per gli elementi generici scriviamo $a = \langle a_1, a_2 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2 \rangle$, $c = \langle c_1, c_2 \rangle$.

Per la [AlgB a]: $\langle a_1, a_2 \rangle \wedge \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 \wedge_1 b_1, a_2 \wedge_2 b_2 \rangle = \langle b_1 \wedge_1 a_1, b_2 \wedge_2 a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle \wedge \langle a_1, a_2 \rangle$

In modo del tutto simile si procede per la [AlgB b].

Per la [AlgB c]: $\langle 0_1, 0_2 \rangle \vee \langle a_1, a_2 \rangle \;= \langle 0_1 \vee_1 a_1, 0_2 \vee_2 a_2 \rangle \;= \langle a_1, a_2 \rangle$.

In modo del tutto simile si procede per la [AlgB d].

Per la [AlgB e]: $\langle a_1, a_2 \rangle \wedge (\langle b_1, b_2 \rangle \vee \langle b_1, b_2 \rangle) \;= \langle a_1 \wedge_1 (b_1 \vee_1 c_1 \;,\; a_2 \wedge_2 (b_2 \vee_2 c_2 \rangle \;= \lfloor\!\lfloor 5.2(e) \rfloor\!\rfloor =$
$\langle (a_1 \wedge_1 b_1) \vee_1 (a_1 \wedge_1 c_1) \;,\; (a_2 \wedge_2 b_2) \vee_2 (a_2 \wedge_2 c_2) \rangle \;=\; (\langle a_1, a_2 \rangle \wedge \langle b_1, b_2 \rangle) \;\vee\; (\langle a_1, a_2 \rangle \wedge \langle c_1, c_2 \rangle)$.

In modo del tutto simile si procede per la [AlgB f].

Per la [AlgB g]: $\langle a_1, a_2\rangle \wedge \langle a_1, a_2\rangle^{\mathsf{C}} = \langle a_1 \wedge_1 a_1{}_1^{\mathsf{C}} \ , \ a_2 \wedge_2 a_2{}^{c_2}\rangle = \langle 0_1, 0_2\rangle$

In modo del tutto simile si procede per la [AlgB h] ∎

B56 c.03 Denotiamo con **Blalg** la classe delle algebre di Boole e più specificamente denotiamo con $\mathbf{Blalg}_K$ la classe delle algebre di Boole avente terreno di cardinale K.

Il fatto dimostrato nel paragrafo precedente si può scrivere come segue.

(1) Prop.: $\boldsymbol{B}_1 \in \mathbf{Blalg}_{K_1}$ e $\boldsymbol{B}_2 \in \mathbf{Blalg}_{K_2} \implies \boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{B}_2 \in \mathbf{Blalg}_{K_1 \times K_2}$

B56 c.04 Il prodotto diretto dell'algebra di Boole di un bit con se stessa, ossia la seconda potenza diretta dell'algebra $\boldsymbol{Bab}_1$, costituisce l'algebra di Boole delle coppie di bits.

In generale per ogni S intero positivo si ottiene l'algebra di Boole delle sequenze di bits di lunghezza s.

Abbiamo quindi l algebra

$$\boldsymbol{Bab}_s := (\boldsymbol{Bab}_1)^{\times s} \ .$$

L'importanza di queste algebre risiede in particolare nel fatto che sequenze di 8, 16, 32, 64 bits sono implementate negli odierni computers e sono oggetto di operazioni che intervengono in molte manovre di interesse informatico e computazionale.

Molte operazioni delle algebre $\boldsymbol{Bab}_s$ nei computers e in moltissimi altri dispositivi digitali sono effettuate da circuiti che in tutte le varie fasi dello sviluppo della microelettronica sono stati progettsti e costruiti con tecniche accuratamente studiate dai punti di vista della fisica e dell'ingegneria.

Anche molte operazioni logico-aritmetiche vengono eseguite con circuiti che possono essere descritti vantaggiosamente riconducendosi alle algebre $\boldsymbol{Bab}_s$.

Buona parte dell'attività di progettazione dei circuiti digitali, come vedremo anche nella sezione :f, è collegata a considerazioni su queste algebre e in particolare a studi con dirette finalità algoritmiche.

Può essere interessante osservare che questi studi influenzano anche la ricerca sull'elettronica dei componenti circuitali.

B56 c.05 Presentiamo alcuni esempi di operazioni sulle algebre delle sequenze binarie; queste vengono rappresentate semplificando il più possibile le notazioni.

$$0110\,1011 \ \wedge \ 0111\,0110 \ = \ 0110\,0010$$
$$0110\,1011 \ \vee \ 0111\,0110 \ = \ 0111\,1111$$
$$1010\,0000\,1111\,0011^{\mathsf{C}} \ = \ 0101\,1111\,0000\,1100$$
$$(0011\,1010 \ \wedge \ 0010\,1010)^{\mathsf{C}} \ = \ 0010\,1010^{\mathsf{C}} \ = \ 1101\,0101$$
$$0011\,1010^{\mathsf{C}} \ \vee \ 0010\,1010^{\mathsf{C}} \ = \ 1100\,0101 \ \vee \ 1101\,0101 \ = \ 1101\,0101$$
$$0110\,0010 \ = \ 0100\,0000 \ \vee \ 0010\,0000 \ \vee \ 0000\,0010$$
$$0111\,0110 \ = \ 0111\,1111 \ \wedge \ 1111\,0111 \ \wedge \ 1111\,1110$$

B56 c.06 Nell'ambito della logica l'adozione dell'algebra di Boole $\boldsymbol{Bab}_1$ corrisponde all'adesione al cosiddetto principio di bivalenza, principio di semantica che stabilisce che ogni sentenza dichiarativa che esprime una proposizione ha esattamente un valore di verità che può essere vero o falso.

Una logica che soddisfa questo principio viene detta logica a due valori.

Nella logica formale il principio di bivalenza è una proprietà che una semantica può possedere o può rifiutare. Questo asserto va confrontato con il principio dek terzo escluso. V. a. `Principle of bivalence (we)`.

B56 d. algebre di Boole di insiemi

B56 d.01 Con le sequenza di s bits si possono rappresentare sottoinsiemi di un qualsiasi insieme ambiente di s elementi facendo riferimento ad una sequenzializzazione dei suoi elementi.
Per esempio con una sequenza di 32 bits nella quale si trascurano gli ultimi 6 bits (che possiamo decidere di tenere tutti al valore 0, si riescono a rappresentare gruppi di lettere dell'alfabeto inglese.
In particolare l'insieme delle lettere che occorrono nella scrittura

augustus de morgan e george boole

ha una rappresentazione binaria che esprimiamo con una scrittura come

$$bin_{32}(\textit{augustus de morgan e george boole}) \;=\; 1101\,1010\,0001\,1110\,0111\,1000\,0000\,0000\ .$$

B56 d.02 In effetti le sequenze binarie di lunghezza s corrispondono alle funzioni indicatrici dei sottoinsiemi di un ambiente costituito da s elementi opportunamente sequenzializzato.

Per esempio nell'ambito dell'intervallo di 32 interi positivi $\mathbf{(}2:33\mathbf{]}$, il sottoinsieme P dei numeri primi ha come funzione indicatrice

$$\mathcal{I}_{\mathbf{(}2:33\mathbf{]}}(P) \;=\; 1101\,0100\,0101\,0001\,0100\,0100\,0001\,0100\ .$$

Si verifica facilmente che alle operazioni di intersezione, unione e complementazione corrispondono le operazioni $\wedge$, $\vee$ e $^{\mathsf{C}}$ per le sequenze binarie.

B56 d.03 È piuttosto interessante il caso delle funzioni indicatrici dei sottoinsiemi di ambienti costituiti da prodotti cartesiani finiti.
Si consideri per esempio l'insieme ambiente $\{A,B,C,D,E,F,G,H\} \times \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ e l'insieme di sue coppie:
$\{\langle B,3\rangle, \langle B,7\rangle, \langle D,2\rangle, \langle E,2\rangle, \langle F,4\rangle, \langle G,4\rangle, \langle F,7\rangle, \langle G,7\rangle, \langle H,7\rangle\}$.
Se si traccia la corrispondente scacchiera 8×8 su un foglio a quadretti e si anneriscono le caselle corrispondenti alle coppie date, si vede che il precedente insieme individua uno schieramento di navi per una battaglia navale comprendente una portaerei da 3 caselle, due incrociatori da 2 e tre torpediniere da 1 casella. In effetti la matrice binaria corrispondente è la

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

Anche funzioni indicatrici di questi generi costituiscono algebre di Boole e sulle matrici di profilo $R \times C$ con R e C insiemi finiti si possono raffigurare con chiarezza le varie operazioni insiemistiche.

Va poi segnalato che le matrici binarie finite consentono di rappresentare le relazioni binarie finite, o equivalentemente i digrafi finiti. Queste matrici negli studi sui grafi vengono chiamate più specificamente matrici delle adiacenze [D27e].

Infine conviene ricordare che con matrici binarie aventi estensioni come 368×512, 768×1024 o 1024×1280 si possono rappresentare figure in bianco e nero della grafica con il computer.

B56 d.04 **(1) Eserc.** Dopo aver ricavato le 26-uple binarie relative alle lettere presenti nelle locuzioni argomento, valutare la 26-upla fornita dalla seguente espressione booleana.

$$bin_{26}(\text{leibnitz nand lambert}) \ \wedge \ bin_{26}(\text{babbage eor hollerith}) \ .$$

(2) Eserc. Si consideri un cubo; si assegnino alle sue facce le etichette da 1 a 6 in modo che siano opposte le facce 1 e 6, le facce 2 e 4 e le facce 3 e 5; si assegnino ai suoi spigoli le etichette 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 2-3, 2-5, 2-6, 3-4, 3-6, 4-5, 4-6, 5-6; infine si assegnino agli spigoli considerati nell'ordine del precedente elenco i numeri da 1 a 12. Costruire la matrice di profilo $\{1,2,3,4,5,6\}^{\times 2}$ delle adiacenze tra le facce e la matrice di profilo $\mathbf{[}1,6\mathbf{]} \times \mathbf{[}1,12\mathbf{]}$ delle incidenze tra facce e spigoli.

(3) Eserc. Valutare le matrici binarie

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} eor \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} nand \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(4) Eserc. Valutare le matrici binarie

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

B56 d.05 L'operazione di potenza diretta dell'algebra di Boole di un bit si può definire per qualsiasi funzione a valori binari del genere $f \in \left\lceil S \longmapsto \{0,1\} \right\rceil$, con S insieme qualsiasi. Una tale funzione si può considerare funzione indicatrice del sottoinsieme $f^{-\mathbf{1}}(1)$ formato dagli elementi di S cui la f associa il valore 1, cioè funzione della forma $\mathcal{I}_S(f^{-\mathbf{1}}(1))$.

Questo consente di inquadrare molte considerazioni sui sottoinsiemi di qualsiasi insieme entro le algebre di Boole della forma

$$\langle \mathfrak{P}(S), \cap, \cup, ^{\mathcal{C}}, \emptyset, S \rangle \ .$$

Le algebre di Boole quindi consentono di considerare in modo unitario varie costruzioni.

Occorre tuttavia osservare che quando si devono effettuare calcoli ed elaborazioni effettive si pongono problemi molto diversi a seconda che si considerino sequenze o matrici binarie finite, numerabili o più che numerabili.

Nelle elaborazioni su strutture finite si pongono problemi di efficienza; per sequenze e matrici numerabili occorre lavorare con espressioni e servirsi di nozioni di combinatorica. Per strutture continue si cerca di operare con espressioni analitiche e con considerazioni infinitesimali, ma spesso non si trae molto vantaggio dal fare riferimento alla teoria delle algebre di Boole.

B56 d.06 Nel caso di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ abbiamo sequenze illimitate cui si possono associare rappresentazioni binarie di numeri reali facenti parte di $\mathbf{[}0,1\mathbf{]}$.

Mediante sottoinsiemi di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si possono descrivere situazioni come la parità o meno oppure la positività o meno degli interi che costituiscono schieramenti bidimensionali speciali come i coefficienti binomiali, i numeri di Stirling di prima e seconda specie o i numeri euleriani di prima e seconda specie. Per esempio per i valori modulo 2 dei coefficienti binomiali si ha la matrice

$$\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
1 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & & & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{bmatrix}$$

(1) Eserc. Calcolare i primi valori della matrice binaria di profilo $[2, +\infty) \times [2, +\infty)$ esprimente la relazione di coprimalità tra interi.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php