1

Capitolo B54
funzioni, partizioni, equivalenze, chiusure

Contenuti delle sezioni

31 pagine

B540.01 Questo capitolo, come il precedente, vuole fornire un inquadramento generale e unificante di varie definizioni e costruzioni viste separatamente in precedenza e che si incontrano in numerosi sviluppi della matematica.

Per questo vengono presentate definizioni e prime proprietà piuttosto generali cha aprono la possibilità di inquadrare molte nozioni sia viste che da incontrare più avanti a un livello di generalità e di astrazione che risulta notevolmente vantaggioso in termini di prospettiva generale, di collegamenti complessivi, di concisione e anche di comprensione.

All'inizio viene ripresa a un elevato livello di generalità la nozione di funzione come caso particolare di relazione.

Vengono poi esaminate in parallelo le relazioni di equivalenza e le partizioni degli insiemi, mettendo in rilievo il loro criptomorfismo, ossia la loro equivalenza rispetto a tutte le implicazioni.

Successivamente vengono trattate le funzioni di insieme chiamate chiusure e viene presentata una vasta gamma di entità e proprietà che si possono ricondurre agli effetti di tali funzioni.

Tra le funzioni di chiusura vengono esaminate con particolare interesse quelle associate a operatori su insiemi che rispettano l'unione, quelle derivate da operazioni algebriche e quelle associate a relazioni.

Mentre gli argomenti delle chiusure di insiemi si possono considerare elementi di reticoli booleani, il capitolo si chiude a un maggiore livello di generalità con funzioni di chiusura che agiscono su elementi di insiemi ai quali si chiede solo di esere parzialmente ordinati.

B54 a. funzioni

B54a.01 ‘E forse utile ricordare alcune nozioni già toccate iniziando con il definire insieme delle relazioni tra un insieme A e un insieme B come la collezione dei sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$, $\mathbf{Rel}_{A,B} := \mathfrak{P}(A \times B)$.

Si è poi definita **relazione trasposta** della $R \subseteq A \times B$ la relazione $R^\top := \{\langle a,b\rangle \in R :| \langle b,a\rangle\} \subseteq B \times A$.

Diciamo inoltre prodotto di composizione oprodotto-c delle relazioni $R \subseteq A \times B$ ed $S \subseteq B \times C$ la relazione

$$R \circ S := \{\langle a,c\rangle \in A \times C \;\P\; (B \ni b \;\P\; \langle a,b\rangle \in R \wedge \langle b,c\rangle \in S)\} .$$

L'insieme delle relazioni tra un insieme A e se stesso, ossia l'insieme delle relazioni entro A lo denotiamo con $\mathbf{Rel}_A := \mathbf{Rel}_{A,A}$.

Tra le relazioni entro A si trovano:
- la relazione ovvia $A \times A$;
- la relazione assurda $\emptyset$;
- la relazione identità su $A \searrow \mathsf{Id}_A := \{a \in A :| \langle a,a\rangle$.

Tra le relazioni R entro A distinguiamo:
- le **relazioni riflessive** tali che $\mathsf{Id}_A \subseteq R$;
- le **relazioni antiriflessive** R tali che $\langle a,b\rangle \in R \Longrightarrow \langle b,a\rangle \notin R$;
- le **relazioni simmetriche** tali che $R = R^\top$;
- le **relazioni antisimmetriche** tali che $R \cap R^\top = \emptyset$;
- le **relazioni transitive** tali che $R \circ R \subseteq R$;
- le **relazioni antitransitive** tali che $R \circ R \Diamond R$;
- le **relazioni di equivalenza**, relazioni riflessive, simmetriche e transitive;
- le **poset** o relazioni di ordine, relazioni riflessive, antisimmetriche e transitive.

Ad ogni relazione di equivalenza $\sim$ sopra un insieme A sono associate le cosiddette classi di equivalenza, sottoinsiemi di A costituiti da elementi mutuamente equivalenti. Si dimostra facilmente che due classi di equivalenza differenti sono sottoinsiemi di A disgiunti e che l'unione delle classi di una equivalenza entro A coincide con A.

L'insieme delle classi dell'equivalenza $\sim$ sopra un insieme A si dice **quoziente** dell'insieme A per $\sim$ e si denota con $A/\sim$.

B54a.02 Un insieme f di coppie appartenenti a un prodotto cartesiano della forma $A \times B$ si dice **relazione funzionale**, **funzione**, **corrispondenza univoca**, mappa o applicazione da A in B sse

$$\forall a \in \mathsf{dom}(f) \;\vdots\; \langle a,b_1\rangle , \langle a,b_2\rangle \in f \implies b_1 = b_2 .$$

Il dominio della funzione f si può ottenere come proiezione su A dell'insieme f di coppie in $A \times B$: $\mathsf{dom}(f) := \boldsymbol{Prj}_A(f)$.
Il codominio della funzione f si può ottenere come proiezione su B dell'insieme f di coppie in $A \times B$: $\mathsf{cod}(f) := \boldsymbol{Prj}_B(f)$.

L'insieme delle funzioni da A in B lo denotiamo con $\lceil A \longrightarrow B \rceil$.

Se $\mathsf{dom}(f) = A$ si parla di funzione di (tutto) A in B. L'insieme di queste funzioni lo denotiamo con $\lceil A \longmapsto B \rceil$.

Se $\mathsf{cod}(f) = B$ si parla di funzione da A su B; una tale entità è detta anche **funzione suriettiva** o **suriezione** su B.
L'insieme di queste funzioni lo denotiamo con $\lceil A \longrightarrow\!\!\triangleright B \rceil$.

Una funzione f da A in B tale che $\langle a_1, b\rangle$, $\langle a_2, b\rangle \in f \implies a_1 = a_2$ si dice **funzione iniettiva** o **iniezione** da A in B.
L'insieme delle iniezioni di A in B lo denotiamo con $\lceil A \longmapsto B \rceil$.

La trasposta di una funzione iniettiva appartenente a $\lceil A \longmapsto B \rceil$ è anch'essa una funzione, più precisamente una funzione di $\lceil B \longrightarrow A \rceil$; essa viene chiamata **funzione inversa** della f e si denota con f^{-1}.

Della trasposta di una funzione noniniettiva invece si può dire solo che è una relazione non funzionale da B in A.

Tra le funzioni iniettive da A in B si distinguono anche:
- le funzioni suriettive su B, il cui insieme si denota con $\lceil A \longrightarrow\!\!\triangleright B \rceil$,
- le funzioni di (tutto) A in B, il cui insieme si denota con $\lceil A \longmapsto B \rceil$,
- le funzioni di A su B, il cui insieme si denota con $\lceil A \longmapsto\!\!\triangleright B \rceil$.

Una funzione iniettiva e suriettiva di (tutto) A su (tutto) B si dice **funzione biiettiva** o **biiezione** tra A e B.
L'insieme di queste funzioni lo denotiamo con $\lceil A \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright B \rceil$.

Una funzione da A in se stesso si dice **endofunzione** di A; l'insieme delle endofunzioni di A lo denotiamo con Endo_A.

Una biiezione di A su se stesso si dice **permutazione** di A e l'insieme delle permutazioni di A lo denotiamo con Perm_A.

B54a.03 Ha interesse analizzare insiemi di funzioni come $\lceil A \longrightarrow B \rceil$, $\lceil A \longmapsto B \rceil$ e $\lceil A \triangleleft\!\!\longrightarrow B \rceil$ quando si trattano funzioni delle quali si possiede una conoscenza incompleta, in particolare quando si affrontano funzioni fornite da espressioni dalle quali non emergono con evidenza dominio e/o codominio.

Spesso la precisazione di queste caratteristiche di una funzione proposta attraverso una sua espressione o altre sue proprietà costituisce un lavoro utile e impegnativo.

In uno stadio conoscitivo di una funzione f nel quale la si sa soltanto collocare in un insieme del genere $\lceil A \longrightarrow B \rceil$ ad A si dà il nome di **sovradominio** della f e a B il nome di **sovracodominio** della f.

In genere in queste circostanze è utile organizzare l'approfondimento delle caratteristiche della f come ricerca di riduzioni del sovradominio A finalizzate a raggiungere il dominio $\mathsf{dom}(f)$ e la ricerca di restrizioni del sovracodominio B che avvicinino al codominio $\mathsf{cod}(f)$.

Il dominio della f viene detto anche coimmagine della f ed il codominio della f, cioè $f(\mathsf{dom}(f))$, viene detto anche immagine della f e denotato con $\mathrm{img}(f)$.

B54a.04 Passando dalle relazioni alle funzioni risulta che, date due funzioni $f \in \lceil A \longrightarrow B \rceil$ e $g \in \lceil B \longrightarrow C \rceil$, la loro **composizione** o **prodotto-c** o prodotto di Peirce è l'operazione

(1) $$f \circ_{lr} g \;:=\; g \circ_{rl} f \;:=\; \{\langle a, g(f(a))\rangle \;\rceil\; a \in \mathsf{dom}(f)\ ,\ f(a) \in B \cap \mathsf{dom}(g)\}\ .$$

Si osserva che, come per le relazioni, $f \circ_{lr} g$ si riduce all'insieme vuoto sse $\mathsf{cod}(f) \cap \mathsf{dom}(g) = \emptyset$.

(2) Prop.: La composizione di funzioni è una operazione binaria associativa.

Dim.: si tratta di un caso particolare della sssociatività del prodotto-c tra relazioni ∎

Dunque la composizione delle tre funzioni f, g, h si può scrivere semplicemente come

$$f \circ_{lr} g \circ_{lr} h \;=\; h \circ_{rl} g \circ_{rl} f \;.$$

Questa eliminazione delle parentesi si può effettuare anche per il prodotto di composizione di 4 o più funzioni e una scrittura come $f_1 \circ_{lr} f_2 \circ_{lr} \cdots \circ_{lr} f_m$ è priva di ambiguità.

B54a.05 Ad ogni funzione $f \in \lceil A \longmapsto B \rceil$ si associa la relazione entro A che scriviamo EqvF_f caratterizzata dalla proprietà

$$a_1 \,\mathsf{EqvF}_f\, a_2 \iff f(a_1) = f(a_2) \;.$$

Essa evidentemente è riflessiva, simmetrica e transitiva, cioè si tratta di una relazione di equivalenza.

Per la classe di questa equivalenza contenente l'elemento $a \in A$ adottiamo la notazione $a\,{}_{\text{Я}}\,\mathsf{EqvF}_f$, spesso semplificata nella $a\,\mathsf{EqvF}_f$.

Alla $f \in \lceil A \longmapsto B \rceil$ associamo altre tre funzioni:

$$f_1 \;:=\; \lceil a \in A \mid\!\blacktriangleright a\,{}_{\text{Я}}\,\mathsf{EqvF}_f \rceil \quad , \quad f_2 \;:=\; \lceil a\,\mathsf{EqvF}_f \in A/\mathsf{EqvF}_f \mid\!\blacktriangleright f(a) \rceil \quad \text{e} \quad f_3 \;:=\; \lceil b \in f(A) \mid\!\blacktriangleright b \rceil \;.$$

Si constata che f_1 è suriettiva, f_2 è biiettiva e f_3 è iniettiva. Più precisamente la funzione f_1 appartiene a $\lceil A \longmapsto\!\triangleright A/\mathsf{EqvF}_f \rceil$, $f_2 \in \lceil A/\mathsf{EqvF}_f \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\triangleright f(A) \rceil$ ed $f_3 \in \lceil f(A) \triangleleft\!\!\longrightarrow B \rceil$.
Inoltre si ha la relazione tra funzioni

$$f \;=\; f_1 \circ_{lr} f_2 \circ_{lr} f_3 \;.$$

Questa espressione è chiamata **fattorizzazione canonica di una funzione** f.
Essa viene presentata efficacemente mediante il seguente grafico

//input pB54a05

Questo schema visuale viene chiamato **diagramma funzionale commutativo**; il segno // collocato nella cosiddetta maglia interna sta a rapresentare la precedente uguaglianza che si propone come espressione della commutatività dei percorsi.
In effetti il diagramma si può considerare come un digrafo arricchito nel quale si riconoscono due cammini concernenti le quattro funzioni coinvolte.

B54a.06 Siano I ed A due insiemi. Si dice **famiglia indicizzata** da I, o "famiglia con indici in I" di elementi di A ogni terna $\langle I, A, \chi \rangle$ ove $\chi \in \lceil I \longmapsto A \rceil$. Denotiamo con $\mathsf{Fam}_{I,A}$ la classe di queste famiglie; essa è strettamente associata all'insieme di funzioni $\lceil I \longmapsto A \rceil$.

Se più particolarmente χ è suriettiva si parla di **famiglia suriettiva** da I su A; l'insieme di tali famiglie è strettamente associato a $\lceil I \longmapsto\!\triangleright A \rceil$.

Se invece χ è iniettiva si parla di **famiglia iniettiva** da I in A; l'insieme di tali famiglieè strettamente associato a $\lceil I \longmapsto A \rceil$.

Se χ è biiettiva si parla di **famiglia biiettiva** su I; l'insieme di tali famiglieè strettamnte associato a $\lceil I \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\triangleright A \rceil$.

La nozione di famiglia generalizza nozioni già viste.
Se I è un insieme finito totalmente ordinato si ha una elementare sequenza di elementi di A di lunghezza $|I|$, ovvero una disposizione con ripetizione di lunghezza $|I|$ di elementi di A, ovvero una $|I|$-upla di elementi di A.
Se $I = \mathbb{P}$ o $I = \mathbb{N}$ si ha una successione di elementi di A;
se $I = \mathbb{Z}$ si ha una successione bilatera di elementi di A;

Se I è un prodotto cartesiano si hanno le matrici con entrate in A.

Altre famiglie particolarmente importanti sono le famiglie di insiemi.
Due esempi sono la famiglia di intervalli di interi consecutivi $\left\langle \mathbb{N}, \mathsf{Intvl}_{\mathbb{Z}}, \lceil n \in \mathbb{N} \lceil [2^n : 2^{n+1}) \rceil \right\rangle$ e la famiglia di intervalli reali $\left\langle \mathbb{P}, \mathsf{Intvl}_{\mathbb{R}}, \lceil n \in \mathbb{P} \mapsto [-1/n, 1/n] \rceil \right\rangle$.
La prima è una successione di insiemi disgiunti; la seconda una successione di insiemi ciascuno dei quali contiene il successivo.

Spesso una famiglia $\langle I, A, \chi \rangle$ si può ragionevolmente individuare mediante la sola χ o anche mediante $\mathsf{dom}(\chi)$: questo è il caso delle due famiglie precedenti, individuabili, risp., mediante

$$\left\{ n \in \mathbb{N} :| \, [2^n : 2^{n+1}) \right\} \ = \ \left\{ \langle 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 4, 5, 6, 7 \rangle, ... \right\}$$

e mediante

$$\left\{ n \in \mathbb{P} :| \, [-1/n, 1/n] \right\} \ = \ \left\{ [-1, 1], [-1/2, 1/2], ..., [-1/n.1/n], ... \right\} .$$

B54a.07 Se $f \in \lceil A \longmapsto B \rceil$ e $C \subset A$, si dice **restrizione** della f al sottoinsieme C del proprio dominio la funzione $f|_C \ := \ \lceil c \in C \mapsto f(c) \rceil$.

Si dice invece **estensione booleana** della funzione $f \in \lceil A \longmapsto B \rceil$ la funzione

$$f^{\text{boole}} \ := \ \left\lceil E \subseteq A \ \mapsto \ \bigcup \{ e \in E :| \, f(e) \} \right\rceil .$$

Chiaramente $(f^{\text{boole}}) \in \lceil \mathfrak{P}(A) \longmapsto \mathfrak{P}(B) \rceil$ e $(f^{\text{boole}})|_{\{a \in A :| \{a\}\}}$ equivale alla f. e in molti contesti si può identificare con essa.

In molte circostanze l'identificazione dell'estensione booleana di una funzione con la semplice funzione stessa porta ad ambiguità risolvibili con il contesto e rende più scorrevoli molti brani espositivi.

B54a.08 Da due funzioni definite in due domini disgiunti $f \in \lceil A \longmapsto B \rceil$ e $g \in \lceil C \longmapsto D \rceil$ con $A \Diamond C$, attraverso la loro semplice unione, cioè con l'unione dei due corrispondenti insiemi disgiunti di coppie appartenenti a $(A \dot\cup C) \times (B \cup D)$, si ottiene una unica funzione detta **unione funzionale** di f e g; essa si denota con:

$$f \ \ddot{\cup} \ g \ := \ \lceil a \in A \mapsto f(a) \rceil \ \dot\cup \ \lceil c \in C \mapsto g(c) \rceil .$$

Si dimostrano agevolmente le relazioni che seguono:

$$f \ \ddot{\cup} \ g = g \ \ddot{\cup} \ f \text{ (simmetria dell'operazione)} , \quad (f \ \ddot{\cup} \ g)|_{f^{\vdash}} = f \quad \text{e} \quad (f \ \ddot{\cup} \ g)|_{g^{\vdash}} = g .$$

La definizione della unione funzionale si estende senza difficoltà a un numero qualsiasi di funzioni e anche a famiglie indicizzate di funzioni che hanno i domini mutuamente disgiunti; queste unioni funzionali costituiscono casi particolari di famiglie indicizzate di insiemi, casi riguardanti insiemi di coppie.

Si constata che queste costruzioni godono della associatività.

B54a.09 Si dice **funzione costante** ogni funzione con il codominio costituito da un singoletto.

La funzione costante avente come dominio l'insieme A che in corrispondenza di ogni $a \in A$ assume come unico valore c , quando si può sottintendere il suo dominio, si denota con c^{cnst}.

Una notazione più circostanziata riguardante un qualsiasi insieme A e un qualunque suo elemento c è la seguente:

$$\text{cnst}_{A,c} \ := \ \lceil a \in A \mapsto c \rceil .$$

Le funzioni costanti hanno interesse solo in quanto elementi particolari di insiemi significativi di funzioni. In particolare le funzioni costanti vengono prese in considerazione come prime componenti delle successioni graduali di polinomi: per esempio la successione graduale dei polinomi di Legendre, funzioni che consideriamo in una variabile reale, può definirsi come $\left\langle n \in \mathbb{N} \;\vdots\; \frac{1}{2^n\, n!}\, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^{\,n}}\,(1-x^2)^n \right\rangle$ e la sua prima componente è la funzione costante $\mathrm{cnst}_{\mathbb{R},1}$.

La composizione di due funzioni costanti è anch'essa una funzione costante: se A è un qualsivoglia insieme e se b viene considerato come elemento di un qualche insieme B si ha

$$\mathrm{cnst}_{A,b} \circ_{lr} \mathrm{cnst}_{B,c} \;=\; \mathrm{cnst}_{A,c} \; .$$

B54 b. endofunzioni

B54b.01 Si dice **endofunzione** ogni funzione avente il codominio contenuto nel dominio, cioè ogni funzione di un genere $f \in \lceil A \longmapsto A \rceil$ per qualche insieme A.
L'insieme $\lceil A \longmapsto A \rceil$ si denota anche con Endo_A; i suoi elementi si chiamano endofunzioni entro l'insieme A

Le permutazioni di A sono casi particolari delle endofunzioni entro A; più precisamente, se $|A| > 1$ si ha $\mathsf{Perm}_A \subset \mathsf{Endo}_A$.

Delle funzioni, come per le relazioni, si possono considerare prodotti di composizione e potenze di composizione, ovvero prodotti-c e potenze-c.
Con composizioni di funzioni note, soprattutto con composizioni di endofunzioni, si possono rendere disponibili molte nuove funzioni utili e significative.

B54b.02 Si dice **punto fisso di una endofunzione** f ogni $x \in f^{\vdash}$ che f trasforma in se stesso, cioè tale che $f(x) = x$.
Denotiamo con $\mathsf{Fixpt}(f)$ l'insieme dei punti fissi della endofunzione f.

Una endofunzione costante si dice **reset** o collasso. La collezione delle endofunzioni reset aventi come dominio l'insieme A ha la forma $\{c \in A :| \operatorname{cnst}_{A,c}\}$.

Chiaramente la composizione di due di queste funzioni è ancora una funzione di questa classe:

$$\operatorname{cnst}_{A,c} \circ_{lr} \operatorname{cnst}_{A,d} = \operatorname{cnst}_{A,d} .$$

Una endofunzione j entro A si dice **endofunzione idempotente** entro A sse $j \circ j = j$. Denotiamo con Idmp_A l'insieme delle endofunzioni idempotenti entro A.

Evidentemente ogni endofunzione reset è una endofunzione idempotente.

Le endofunzioni entro un insieme A si possono caratterizzare utilmente con il cardinale del loro codominio e con il cardinale del loro insieme di punti fissi.
Le endofunzioni reset sono quelle aventi come codominio un singoletto. Le permutazioni di un insieme T sono le endofunzioni entro T aventi codominio dello stesso cardinale di T.

Tra le permutazioni di un insieme la distinzione derivante dai diversi cardinali dei punti fissi è particolarmente significativa.

B54b.03 (1) Prop.: Ogni funzione idempotente j è unione disgiunta funzionale di endofunzioni resets.

Dim.: Sia c un qualsiasi elemento del codominio $C := \mathsf{cod}(j)$; per l'idempotenza deve essere $j(c) = c$ e quindi $\mathsf{Fixpt}(j) = \mathsf{cod}(j)$. Ogni elemento del dominio di j viene trasformato in un punto fisso: quindi

$$f = \dot{\bigcup} \left\{ c \in j^{\dashv} :| \ \lceil d \in j_{\,\mathrm{R}}\, c \mapsto c \rceil \right\} \quad \text{ove} \quad j_{\,\mathrm{R}}\, c = (j^{\top})(c) \ \blacksquare$$

(2) Eserc. La funzione valore assoluto su $\mathbb{Z}$ può considerarsi una funzione idempotente: quali sono i suoi punti fissi e quali sono i resets di cui essa è unione funzionale disgiunta?

(3) Eserc. Quali sono i punti fissi e i resets della funzione valore assoluto collocata in $\mathbb{R}$ e di quella collocata in $\mathbb{C}$?

(4) Eserc. Per $m \in [2 : +\infty)$ la funzione che a ogni $n \in \mathbb{Z}$ associa il suo valore modulo m risulta idempotente: quali sono i suoi punti fissi e quali i suoi resets?

B54b.04 Definiamo **involuzione** ogni funzione che applicata due volte riporta ogni elemento del suo dominio in se stesso.
Una involuzione J deve essere in grado di agire su ogni elemento della sua immagine e questo comporta $\mathsf{cod}(J) \subseteq \mathsf{dom}(J)$.
Dobbiamo tuttavia escludere che sia $\mathsf{cod}(J) \subset \mathsf{dom}(J)$, in quanto un eventuale $y \in \mathsf{dom}(J) \setminus \mathsf{cod}(J)$ non potrebbe essere ottenuto da una seconda applicazione della J.
Dunque una involuzione J deve essere una permutazione del suo dominio, e deve essere $J \circ J = \mathsf{Id}_{\mathsf{dom}(J)}$; questo implica che la J deve essere invertibile e deve coincidere con la propria inversa: $J = J^{-\mathbf{1}}$.

Si può anche affermare che le involuzioni sono tutte e sole le permutazioni che coincidono con le proprie funzioni inverse.

Denotiamo con $\mathbf{Invl}_A$ l'insieme delle involuzioni entro l'insieme A.

Per ogni insieme A la corrispondente identità Id_A fa parte di $\mathbf{Invl}_A$.

Le involuzioni entro un insieme di due elementi $\{a, b\}$ sono l'identità e lo scambio dei due elementi $\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$.

Consideriamo una generica $J \in \mathbf{Invl}_A$; questa endofunzione può avere o meno dei punti fissi. Se in A si trova un elemento c che viene mandato in un elemento diverso $d := c ⌉J$ (e questo accade sicuramente se $J \neq \mathsf{Id}_A$), allora $d ⌉J = c$; quindi in A si individuano duetti $\{c, d\}$ di elementi che vengono trasformati l'uno nell'altro; questi sottoinsiemi di due elementi di A sono chiamati **duetti di elementi duali** per J.

Dunque il dominio di una involuzione si bipartisce nell'insieme dei

Una involuzione di un insieme finito di cardinale pari, scriviamolo $2\,k$, deve presentare un numero pari $2\,f$ di punti fissi, con $f = 0, 1, 2, ..., k-1, k$, e $k - f$ duetti di elementi duali,

Una involuzione di un insieme finito di cardinale dispari, diciamo $2\,k+1$, deve contenere $2\,f+1$ punti fissi con $f = 0, 1, 2, ..., k-1, k$ (almeno uno) e $k - f$ duetti di elementi duali.

B54b.05 La trasformazione di un numero reale nel suo opposto è una involuzione su $\mathbb{R}$; il suo unico punto fisso è 0, mentre la collezione dei duetti duali è $\{r \in \mathbb{R}_+ :| \{r, -r\}\}$.

(1) Eserc. Mostrare che il passaggio al reciproco è una involuzione su $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e individuarne punti fissi e duetti duali.

(2) Eserc. Mostrare che il passaggio da un numero complesso al complesso coniugato è un'involuzione entro il piano complesso e individuarne punti fissi e duetti duali.

(3) Eserc. Mostrare che lo scambio $[1 \longleftrightarrow 2]$ è un'involuzione per l'insieme delle 6 permutazioni degli interi 1, 2 e 3 e individuarne punti fissi e duetti duali. Esaminare poi l'effetto della applicazione di $[1 \longleftrightarrow 2]$ sull'insieme delle 24 permutazioni di $\{1, 2, 3, 4\}$.

B54b.06 Si dice **traiettoria di una endofunzione** $f \in \lceil A \longmapsto A \rceil$ iniziante con $a_0 \in A$ la successione $\langle i \in \mathbb{N} :| f^{\circ i}(a_0)\rangle$.
Denotiamo con $f^{\otimes}(a_0)$ questa traiettoria; denotiamo inoltre con $\mathbf{Trjct}(f)$ la collezione dei codomini delle traiettorie della endofunzione f: $\mathbf{Trjct}(f) := \{a \in A :| \mathsf{cod} f^{\otimes}(a)\}$.
Tra le traiettorie di una endofunzione hanno maggiore interesse le sequenze massimali, ossia quelle che non si possono ottenere da un'altra eliminando un suo prefisso, ossia una sua sottosequenza iniziale.
Due diverse traiettorie massimali aut non hanno componenti comuni, aut hanno in comune una componente e tutte lw loro successive.

Consideriamo una endofunzione f entro A e un elemento $a \in A$; un elemento s di A si dice successore per f di a sse $s \in \mathsf{cod}(f^{\otimes}(a))$, cioè sse esiste un intero naturale k tale che $s = f^{\circ k}(a)$; si dice invece che $p \in A$ è predecessore di a sse $a \in \mathsf{cod}(f^{\otimes}(p))$, cioè sse a è successore di p per f.
La relazione ottenuta da ciascuna di queste relazioni ampliandola con la sua riflessa e con la Id_A, oltre ad essere riflessiva e simmetrica, deve essere transitiva e quindi deve essere una equivalenza.
Questa equivalenza la denotiamo con $\mathbf{EqvE}_f$. Ciascuna delle corrispondenti classi di equivalenza è unione di traiettorie massimali.

Delle traiettorie delle endofunzioni $f^{\otimes}(a)$ spesso interessano i codomini, cioè gli insiemi $\mathbf{SetY}(f^{\otimes}(a))$.

I codomini di traiettorie di endofunzioni possono essere finiti o numerabili; il secondo caso si può riscontrare solo se A è infinito, numerabile o meno.

Consideriamo una funzione f dotata di almeno un punto fisso x; la traiettoria $f^{\otimes}(x)$ è ridotta alla successione costante $\langle i \in \mathbb{N} :| \ p\rangle$ e il suo codominio è il singoletto $\{x\}$.

Se il punto fisso possiede predecessori, la traiettoria di uno di questi, che scriviamo y, ha la forma $\langle y, f(y), f^2(y), ..., f^k(y), p, p, ...\rangle$ ed ha codominio finito.

Nel caso in cui A è l'insieme dei vertici di un esagono regolare $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ed f è la rotazione intorno al centro dell'esagono di 60°, tutte le traiettorie hanno la forma $\left\langle n \in \mathbb{N} :| \ v_{n\%6}\right\rangle$ e i corrispondenti codomini coincidono con l'insieme dei 6 vertici.

Per l'endofunzione $\boldsymbol{Trsl}(k, +) := \ulcorner z \in \mathbb{Z} \mapsto z + k \urcorner$ per un dato k intero positivo, tutte le traiettorie hanno codominio infinito della forma $\{n \in \mathbb{N} :| \ z + n\}$.

B54b.07 Se p è un intero positivo, si dice **punto ciclico** di periodo p per la endofunzione f un elemento c del dominio della f tale che $f^p(c) = c$, mentre sono tutti diversi tra di loro gli elementi $f^h(c)$ per $h = 0, 1, ..., p-1$.

I punti fissi dunque sono punti ciclici di periodo 1.
I vertici dell'esagono regolare sono punti ciclici di periodo 6 per la rotazione intorno al centro dell'esagono di 60°.

Dati due elementi a e b diversi del dominio di una endofunzione, dalla elencazione delle possibilità che tra i due elementi sussistano o meno le relazioni di successore e predecessore in senso stretto, per le corrispondenti traiettorie si danno le seguenti 4 possibilità esclusive:

(1) $f^{\otimes}(a)$ e $f^{\otimes}(b)$ sono disgiunte, cioè sono disgiunti i relativi codomini, sse a non è successore né predecessore di b;

(2) $\mathsf{cod}(f^{\otimes}(a)) \subset \mathsf{cod}(f^{\otimes}(b))$ sse a è successore (in senso stretto) di b ed, evidentemente, non è suo predecessore.

(3) $\mathsf{cod}(f^{\otimes}(a)) \supset \mathsf{cod}(f^{\otimes}(b))$ sse a è predecessore (in senso stretto) di b ed, evidentemente, non è suo successore.

(4) $\mathsf{cod}(f^{\otimes}(a)) = \mathsf{cod}(f^{\otimes}(b))$ sse a è sia predecessore che successore di b; equivalentemente si ha che a e b sono punti ciclici appartenenti allo stesso ciclo per l'endofunzione.

Questo insieme di possibilità costituisce una cosiddetta **tetracotomia** dalla tricotomia di $f^{\vdash} \times f^{\vdash}$ data dalle quattro relazioni mutuamente complementari uguaglianza, essere successore in senso stretto, essere successore in senso stretto e presentare traiettorie disgiunte.

Di un elemento a del dominio $D := f^{\vdash}$ l'unione dell'insieme dei successori e dell'insieme dei predecessori si dice insieme degli elementi direttamente raggiungibili da a per la f.

Data una endofunzione $f \in \mathsf{Endo}_A$ diciamo **connessione diretta** per la f la relazione costituita dalle coppie $\langle a, b\rangle$ tali che $a = f(b)$ oppure $b = f(a)$

La chiusura riflessivo-transitiva della relazione di connessione diretta per la f è una relazione di equivalenza in $\mathsf{cod}(f)$ che chiamiamo **raggiungibilità per la funzione** f.

Si verifica facilmente che questa relazione di equivalenza è in genere decisamente più grossolana della EqvF_f, la equivalenza canonica associata alla f .

L'insieme dei successori di un punto ciclico c di periodo p è l'insieme di cardinale p

$$\{c, c\,f, c\,f^2, ..., c\,f^{p-1}\}\ .$$

Si possono avere anche elementi del dominio di una endofunzione con infiniti successori ed elementi con infiniti predecessori. Questa situazione può verificarsi solo per endofunzioni entro domini infiniti. Ogni endofunzione entro un insieme finito deve invece possedere punti ciclici.

B54b.08 **Eserc.** Descrivere le collezioni delle traiettorie delle seguenti endofunzioni:

$\boldsymbol{Trsl}(k, \cdot)\ :=\ \lceil z \in \mathbb{Z} \mapsto z \cdot k \rceil$ per $k \in \mathbb{Z}$

$\lceil z \in \mathbb{Z}_m \mapsto z^k \rceil$ per $z \in \mathbb{Z}, k = 2, 3, ..., m-1$

Una permutazione di un insieme finito. (Suggerimento: ricordare la nozione di periodo di un elemento di un gruppo finito definita in B41b16)

Passaggio al quadrato per i numeri naturali (Suggerimento: individuare punti fissi e traiettorie di quadrati di interi).

$f(x) = x^2$ $f(x) = x^3$ $f(x) = \mathsf{e}^x$ $f(x) = \sin(x)$ per $x \in \mathbb{R}$

B54 c. partizioni ed equivalenze

B54c.01 Si dice **partizione di un insieme** nonvuoto A ogni $\pi \in \lceil A \longmapsto \mathfrak{P}(A) \rceil$ tale che vale l'implicazione

$$\forall a, b \in A \;\colon\; \pi(a) \ni a \;\text{ e }\; \pi(a) \neq \pi(b) \implies \pi(a) \cap \pi(b) = \emptyset.$$

Denotiamo con Part_A l'insieme delle partizioni dell'insieme A.

Sia $\pi \in \mathsf{Part}_A$; $\forall a, b \in A \;\colon\; \pi(a) \neq \emptyset$; $\pi(a) \cap \pi(b) \neq \emptyset \implies \pi(a) = \pi(b)$; $A = \bigcup_{a \in A} \pi(a)$.

B54c.02 Ad ogni equivalenza entro $A \sim \in \mathsf{Eqv}_A$ si associa la partizione

$$\sim^{\text{part}} := \lceil a \in A \mapsto a_{Я} \sim \rceil \in \mathsf{Part}_A \,.$$

Ad ogni partizione $\pi \in \mathsf{Part}_A$ si associa l'equivalenza $\pi^{\boxdot} := \bigcup \{a \in A :| \pi(a) \times \pi(a)\} \in \mathsf{Eqv}_A$.

$\forall \pi \in \mathsf{Part}_A \;\colon\; a(\pi^{\boxdot}()b \iff \pi(a) = \pi(b)$ e $(\pi^{\boxdot})^{\text{part}} = \pi$.

$\forall \sim \in \mathsf{Eqv}_A \;\colon\; a \sim b \iff a(\sim^{\text{part}}) = b(\sim^{\text{part}})$ e $(\sim^{\text{part}})^{\boxdot} = \sim$.

Si può quindi concludere che le partizioni di A e le equivalenze entro A sono in corrispondenza biunivoca: formalmente:

$$\text{part} = \boxdot^{-1} \in \lceil \mathsf{Eqv}_A \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright \mathsf{Part}_A \rceil \,.$$

Partizioni e relazioni di equivalenza costituiscono quindi due specie di entità logicamente equivalenti, ossia completamente interscambiabili.
Per questa relazione tra le entità partizioni di un insieme e relazioni di equivalenza entro lo stesso insieme si dice che siamo di fronte a **specie di entità criptomorfe**.
Equivalentemente si dice che tra le equivalenze e le partizioni intercorre la relazione di **criptomorfismo**.

Si osserva anche che la relazione di criptomorfismo può essere considerata una relazione di equivalenza entro la classe delle entità che posseggono una definizione matematicamente valida.

B54c.03 Se π è una partizione di A si dice **quoziente** di A per π :

$$A/\pi := \{a \in A :| \pi(a)\} = \mathsf{cod}(\pi) \,.$$

Se $\sim$ è una equivalenza entro A si dice quoziente di A per $\sim$:

$$A/\sim := \{a \in A :| a \sim\} = \sim^{\dashv} \,.$$

Se $|A| > 1$: $A/\pi,\ A/\sim \subset \mathfrak{P}_{ne}(A)$.

$\pi = \sim^{\text{part}} \iff A/\pi = A/\sim$; $\pi \in \lceil A \longmapsto\!\!\triangleright A/\pi \rceil$.

B54c.04 Si dice **equivalenza associata a una funzione** $f \in \lceil A \longmapsto B \rceil$ la relazione $f^{\boxdot} := f \circ_{lr} (f^{-1})$.

Si trova agevolmente che $f^{\boxdot} \in \mathsf{Eqv}_{\mathsf{dom}(f)}$ e $a\, f^{\boxdot}\, b \iff f(a) = f(b)$.

Si dice **partizione associata a una funzione** $f \in \lceil A \longmapsto B \rceil$: $f^{\text{part}} := \lceil a \in A \mapsto f^{-1}(f(a)) \rceil$.
Si constata agevolmente che $f^{\text{part}} \in \mathsf{Part}_{\mathsf{dom}(f)}$ e $f^{\text{part}} = f \circ_{lr} (f^{-1})$.

Si dice **biiezione associata a una funzione** $f \in \lceil A \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright B \rceil$:

$$f^{\text{bij}} := \lceil a \in A : f^{-1}(f(a)) \mapsto f(a) \rceil \in \lceil A/f^{\text{part}} \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright f^{\dashv} \rceil$$

Tale funzione consente la cosiddetta **fattorizzazione canonica della funzione**

$$f = \ f^{\text{part}} \circ_{lr} f^{\text{bij}} \ .$$

B54c.05 Può essere opportuno presentare una partizione di un insieme A mediante il suo codominio $\pi^{\dashv} \ = \ \{a \in A :| \ \pi(a)\}$, cioè con la collezione dei sottoinsiemi disgiunti del suo dominio ottenuti dalla sua applicazione.

Per esempio una partizione di $(10]$ si può individuare chiaramente mediante la scrittura

$$\big\{\{1,3,5\},\{2,6,10\},\{4\},\{7,8,9\}\big\} \ .$$

Si dice **famiglia associata a una partizione** π ogni famiglia della forma $\langle I,\chi,\pi^{\dashv}\rangle$. Quando si sviluppano elaborazioni effettive può rendersi necessario fornire il codominio di una partizione attraverso una famiglia associata.

Spesso una partizione si identifica con la corrispondente collezione o con una famiglia associata; in genere questa identificazione non genera ambiguità che non possono essere eliminate tenendo conto del contesto, mentre alleggerisce molti discorsi, cioè costituisce un abuso di linguaggio veniale.

B54c.06 Consideriamo una partizione $\pi \in \mathsf{Part}_A$ fornita attraverso una famiglia associata $\lceil i \in I \ \mapsto \ A_i \rceil$, cioè avente lo stesso codominio $\mathsf{cod}(\pi)$.

Ogni funzione $f \in \lceil A \longmapsto B \rceil$ si può esprimere come unione funzionale disgiunta della forma $f \ = \ \dot{\cup} \ \{i \in I :| \ f|_{A_i}\}$.

Accade spesso che lo studio di una funzione porti a esprimerla significativamente come unione funzionale di funzioni più ristrette che si serve di una partizione del dominio in sottoinsiemi nei quali le funzioni ridotte si possono presentare in forme tendenzialmente semplici.

Una notevole semplificazione si ha quando si riesce a esprimere la funzione in esame come unione funzionale di costanti, risultato che in genere facilita molto la sua analisi.

Con un procedimento inverso molte funzioni sono utilmente definite come unione disgiunta di funzioni costanti.

L'esempio più evidente è fornito dalla **funzione scalino di Heavyside** definita come

$$\mathsf{Hvsd}(x) \ := \ \lceil x \in \mathbb{R}_- \ \mapsto \ -1 \rceil \ \dot{\cup} \ \lceil 0 \mapsto 0 \rceil \ \dot{\cup} \ \lceil x \in \mathbb{R}_+ \ \mapsto \ 1 \rceil \ ;$$

la **funzione soffitto** è definita come $\quad \dot{\cup}_{\ n\in\mathbb{Z}} \lceil x \in (n-1,n] \ \mapsto \ n \rceil$;

la **funzione pavimento** o **funzione parte intera** è definita come $\quad \dot{\cup}_{\ n\in\mathbb{Z}} \lceil x \in [n,n+1) \ \mapsto \ n \rceil$.

la **funzione valore assoluto** in $\mathbb{R}$ è definita come $\quad \lceil x \in \mathbb{R}_- \ \mapsto \ -x \rceil \ \dot{\cup} \ \lceil x \in \mathbb{R}_{0+} \ \mapsto \ x \rceil$.

Osserviamo che la funzione valore assoluto si è potuta definire semplicemente mediante la unione funzionale di funzioni non costanti, mentre la sua espressione mediante unione funzionale di costanti non risulta molto intuitiva:

$$\langle 0,0\rangle \ \dot{\cup} \dot{\bigcup} \{x \in \mathbb{R}_+ :| \ \lceil -x,x \ \mapsto \ x,x \rceil\} \ .$$

B54c.07 Introduciamo ora due ordinamenti per le equivalenze e per le partizioni su un dato insieme A che risultano in stretta corrispondenza.

Consideriamo $\sim_i \in \mathsf{Eqv}_A$ e $\pi_i \in \mathsf{Part}_A$, per $i = 1,2$. Si dice che $\sim_1$ è **equivalenza meno grossolana [in senso lato]** ovvero **equivalenza più fine [in senso lato]** di $\sim_2$ sse $\sim_1 \subseteq \sim_2$, cioè sse $\forall a,b \in A \ \ \vdots \ \ a \sim_1 b \implies a \sim_2 b$.

In questo caso si scrive anche $\sim_1 \sqsubseteq \sim_2$.

Passando alle partizioni, si dice che π_1 è **partizione meno grossolana [in senso lato]** o **partizione più fine [in senso lato]** di π_2 sse tutti gli insiemi costituenti $\mathsf{cod}(\pi_2)$ sono ottenibili come unioni di insiemi costituenti $\mathsf{cod}(\pi_1)$.
In parole povere si possono ottenere gli insiemi in $\mathsf{cod}(\pi_1)$ da quelli in $\mathsf{cod}(\pi_2)$ sottoponendo ciascuno di essi ad una partizione (senza escludere che qualche insieme sia lasciato invariato).
In questo caso si può utilizzare la relazione $\sqsubseteq_{\neq} \; := \; \sqsubseteq \setminus \mathsf{Id}$ e scrivere $\pi_1 \sqsubseteq \pi_2$.

Per esempio $\{\{1,2\},\{3\},\{4,5,6\},\{7.8\}\} \;\; \sqsubseteq_{\neq} \;\; \{\{1,2,4,5,6\},\{3,7,8\}\}$.

Chiaramente la più fine delle equivalenze entro A è Id_A, mentre la più grossolana è $A \times A$. Inoltre la più fine delle partizioni di A è $\lceil a \in A \Vdash \{a\} \rceil$, mentre la più grossolana è $\lceil a \in A \Vdash A \rceil$.

Queste due relazioni d'ordine sono isotone, dato che

$$\sim_1 \subseteq \sim_2 \quad \Longleftrightarrow \quad {\sim_1}^{\text{part}} \sqsubseteq {\sim_2}^{\text{part}} .$$

Osserviamo esplicitamente che questi ordinamenti sono strettamente parziali, se $|A| > 2$: ad esempio non sono confrontabili le due partizioni di $\{1,2,3\}$ $\{\{1,2\},\{3\}\}$ e $\{\{1\},\{2,3\}\}$.

B54 d. funzioni-StS

B54d.01 Consideriamo due insiemi non vuoti A e X e la collezione di funzioni $\lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto X^{\mathfrak{P}} \rceil$.
Una funzione di questa collezione si dice **funzione d'insieme** da A in X. Se in particolare $A = X$ si parla di **endofunzione d'insieme** entro A.
Useremo anche le abbreviazioni **funzione-StS** per funzione da insieme in insieme ed **endofunzione-StS** per endofunzione d'insieme.

Per le classi di tali funzioni usiamo notazioni come

$$\mathsf{FunSS}(A,X) \ := \ \lceil \mathfrak{P}(A) \longmapsto \mathfrak{P}(X) \rceil \quad \text{ed} \quad \mathbf{EndoS}(A) \ := \mathbf{EndoS}_A \ := \ \lceil \mathfrak{P}(A) \longmapsto \mathfrak{P}(A) \rceil \ .$$

È molto esteso e variegato l'insieme delle funzioni-StS e delle endofunzioni-StS che rivestono ruoli importanti nei vari settori della matematica.

Una prima distinzione tra queste funzioni, naturalmente, riguarda il carattere discreto (finito o numerabile) oppure continuo degli insiemi che coinvolgono, cioè dei loro domini e codomini.

Altre distinzioni dipendono da alcune proprietà esprimibili in termini di operazioni e di proprietà insiemistiche, cioè da proprietà tendenzialmente semplici e generali.

Altre infine dipendono da caratteristiche più specifiche degli insiemi coinvolti.

B54d.02 Vediamo ora alcune delle proprietà generali riferendole a una funzione-StS I che appartiene a $\lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto X^{\mathfrak{P}} \rceil$, oppure a una endofunzione-StS E che appartiene a $\lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto A^{\mathfrak{P}} \rceil$ (caso particolare con $X = A$).

La funzione-StS I si dice **funzione d'insieme isotona** sse

$$\forall\ B, C \subseteq A \ : \ B \subseteq C \implies I(B) \subseteq I(C)I \ .$$

L'insieme delle funzioni d'insieme isotone da A in X si denota con $\lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{\subseteq} X^{\mathfrak{P}} \rceil$.

La funzione-StS I si dice **funzione d'insieme antiisotona** sse

$$\forall\ B, C \subseteq A \ : \ B \subseteq C \implies I(B) \supseteq I(C) \ .$$

La endofunzione-StS $I \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto A^{\mathfrak{P}} \rceil$ si dice **endofunzione d'insieme ampliante** sse

$$\forall\ B \subseteq A \ : \ B \subseteq ((B) \ .$$

Una endofunzione-StS $I \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto A^{\mathfrak{P}} \rceil$ si dice **endofunzione d'insieme strettamente ampliante** sse

$$\forall\ B \subset A \ : \ B \subset I(B) \ .$$

Una endofunzione-StS $I \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto A^{\mathfrak{P}} \rceil$ si dice **endofunzione d'insieme riducente** sse

$$\forall\ B \subseteq A \ : \ B \supseteq I(B) \ .$$

Una endofunzione-StS $I \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto A^{\mathfrak{P}} \rceil$ si dice **endofunzione d'insieme strettamente riducente** sse

$$\forall\ B \subset A \ : \ B \supset I(B) \ .$$

B54d.03 Consideriamo i casi nei quali l'insieme X coincide con A.

La funzione-StS I si dice **endofunzione-StS idempotente** sse

$$\forall B \subseteq A : I(I(B)) \ = \ I(B) \ .$$

Denotiamo con $\mathbf{EndoSIdpt}_A$ l'insieme delle endofunzioni-StS idempotenti entro A.

La funzione-StS I si dice **endofunzione-StS involutoria** o **involuzione-StS** sse

$$\forall B \subseteq A : I(I(B)) \ = \ B \ .$$

Denotiamo con **EndoSInvl**$_A$ l'insieme delle involuzioni-StS entro A.

Consideriamo due funzioni d'insieme $I, J \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto X^{\mathfrak{P}} \rceil$. Si dice che I è una **funzione-StS meno ampliante** della J sse

$$\forall B \subset A \;\colon\; I(B) \subseteq J(B)\ .$$

Questa relazione entro $\mathsf{FunSS}(A, X)$ è una relazione d'ordine parziale nontotale. Per la corrispondente relazione d'ordine parziale stretto si dice che I è **funzione-StS strettamente meno ampliante** della J sse

$$\forall B \subset A \;\colon\; I(B) \subset J(B)\ .$$

B54d.04 Una endofunzione d'insieme $H \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto A^{\mathfrak{P}} \rceil$ si dice **aumentazione** entro A sse è ampliante e isotona, cioè tale che valgono le proprietà presentate in e01 ed etichettate con [cls 1] e [cls 2] .

L'insieme degli aumenti entro A si denota con **Augm**$_A$.

Consideriamo una endofunzione-StS isotona $M \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto A^{\mathfrak{P}} \rceil$; essa in genere non è una aumentazione. È tale invece la endofunzione sua variante

$$\boldsymbol{amm}(M) \;:= M^{\boldsymbol{amm}} \;:=\; \left\lceil B \subseteq A \;\mapsto\; B \cup B^M \right\rceil \;\in \mathsf{Augm}_A\ .$$

Questa endofunzione si dice **aumentazione minima maggiorante** della endofunzione isotona M.

Sia M è la funzione-StS che trasforma una figura del piano cartesiano F nella sua riflessa rispetto a una retta data R; ovviamente essa è isotona e la sua aumentazione minima maggiorante è la funzione che trasforma ogni figura piana F nella più ridotta delle figure invarianti per riflessione rispetto alla R che contengono la F.

Più in generale se Y è una endofunzione-StS involutoria entro un insieme A (ad esempio una riflessione o una simmetria centrale), accade che la sua aumentazione $\boldsymbol{amm}(Y) \;=\; \left\lceil B \subseteq A \;\mapsto\; B \cup Y(B) \right\rceil$ è isotona.

B54d.05 Vediamo alcuni esempi di funzioni-StS e segnaliamo le loro proprietà generali.

All'interno di un universo U per ogni $S \subseteq U$ definiamo le funzioni-StS:

intersettore con un insieme S: $S^{\cap} \;:=\; \left\lceil A \subseteq U \mapsto A \cap S \right\rceil$,

unitore con un insieme S: $S^{\cup} \;:=\; \left\lceil A \subseteq U \mapsto A \cup S \right\rceil$.

Evidentemente gli intersettori sono funzioni-StS riducenti e gli unitori sono funzioni-StS amplianti; inoltre intersettori e unitori sono funzioni-StS idempotenti.

Si constatano facilmente anche le relazioni che seguono.

(1) Prop.: $\forall S, T \subseteq U \;\colon\; S^{\cap} \circ_{lr} T^{\cap} \;=\; (S \cap T)^{\cap}$ e $S^{\cup} \circ_{lr} T^{\cup} \;=\; (S \cup T)^{\cup}$,

$$\forall S, A, B \subseteq U \;\colon\; A \subseteq B \implies A_{\urcorner}S^{\cap} \subseteq B_{\urcorner}S^{\cap} \text{ e } A_{\urcorner}S^{\cup} \subseteq B_{\urcorner}S^{\cup}\ .$$

$$\forall S, A, B \subseteq U \;\colon\; A \subseteq B \implies S_{\urcorner}A^{\cup} \subseteq S_{\urcorner}B^{\cup} \text{ e } S_{\urcorner}A^{\cap} \subseteq S_{\urcorner}B^{\cap} \blacksquare$$

Possiamo quindi affermare che intersettori e unitori sono funzioni-StS isotone.

Anche la complementazione entro un universo U $\lceil S \mapsto U \setminus S \rceil$ si può considerare una funzione-StS. Essa evidentemente non è né ampliante, né riducente, né idempotente; essa invece è una involuzione ed è antitona, in quanto

$$A \subseteq B \implies A^{\complement} \supseteq B^{\complement} \quad \text{e} \quad A \subset B \implies A^{\complement} \supset B^{\complement}\ .$$

B54d.06 Rivolgiamo l'attenzione verso le endofunzioni-StS entro spazi vettoriali e più in generale entro ambienti geometrici.

Entro uno spazio vettoriale le proiezioni sopra un sottospazio sono evidentemente idempotenti e isotone.

Consideriamo le dilatazioni e le contrazioni da applicare a figure dotate di punti di visibilità interna e assumendo come loro centro uno di quasti punti. Esempi evidenti nel piano cartesiano sono le dilatazioni applicate a cerchi, ellissi o poligoni convessi applicate a uno qualsiasi dei loro punti. Esse sono funzioni-StS isotone e non idempotenti (se diverse dalla ininfluente identità); se si tratta di dilatazioni sono strettamente amplianti, se di contrazioni sono strettamente riducenti.

La trasformazioni del piano cartesiano $\ulcorner \langle x,y \rangle \mapsto \langle \lfloor x \rfloor , \lfloor y \rfloor \rangle \urcorner$ agenti su figure qualsiasi sono funzioni-StS riducenti (non strettamente), isotone e idempotenti.

La trasformazioni del piano cartesiano $\ulcorner \langle x,y \rangle \mapsto \langle \lceil x \rceil , \lceil y \rceil \rangle \urcorner$ agenti su figure qualsiasi sono funzioni-StS amplianti (non strettamente), isotone e idempotenti.

Conclusioni analoghe si raggiungono per le trasformazioni simili che si possono definire per i sottoinsiemi di spazi $\mathbb{R}^{\times d}$.

Le traslazioni T in uno spazio vettoriale, per esempio nel piano, agenti su figure qualsiasi sono isotone, ma non amplianti. Sono invece, oltre che isotone, amplianti (e quindi sono aumenti) le corrispondenti $\boldsymbol{amm}(T)$.

Anche le rotazioni e le riflessioni nel piano e in $\mathbb{R}^{\times 3}$ (nonché quelle negli spazi $\mathbb{R}^{\times d}$) sono endofunzioni-StS isotone, non idempotenti, non amplianti e non riducenti.

Consideriamo una P permutazione dell'insieme A e la sua estensione booleana P^{be}; per ogni $B \subseteq A$ si ha $|B \lrcorner P^{be}| = |B|$, cioè P^{be} è una endofunzione-StS isotona, antiisotona, non strettamente ampliante e non strettamente riducente; talora si rivela interessante anche la corrispondente aumentazione $\boldsymbol{amm}(P^{be})$.

B54 e. chiusure

B54e.01 Una endofunzione-StS sull'insieme A, $K \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto A^{\mathfrak{P}} \rceil$ si dice **funzione di chiusura** su A o, concisamente, **chiusura** su A, sse

[cls 1] $\forall\, B \subseteq A \;:\; B \subseteq B^K$ (endofunzione-StS ampliante)

[cls 2] $\forall\, B, C \subseteq A \;:\; B \subseteq C \implies B^K \subseteq C^K$ (endofunzione-StS isotona)

[cls 3] $\forall\, B \subseteq A \;:\; B^{K^K} = B^K$ (endofunzione-StS idempotente).

L'insieme delle funzioni di chiusura su A si denota con Clsf_A.

B54e.02 Prop. $|A| > 2 \implies \mathsf{Clsf}_A \subset \mathsf{Augm}_A$.

Dim.: $\mathsf{Clsf}_A \subseteq \mathsf{Augm}_A$, in quanto per le chiusure, oltre che [cls 1] e [cls 2], si richiede [cls 3] .

Per provare l'inclusione stretta diamo due esempi di aumentazioni che non sono chiusure, il primo riguardante endofunzioni-StS finite, il secondo endofunzioni-StS entro ambienti continui.

Nel discreto consideriamo $A = \{a, b, c\}$ ed

$$H := \left\downarrow \begin{matrix} \emptyset & \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{a,b\} & \{b,c\} & \{c,a\} & A \\ \emptyset & \{a,b\} & \{b,c\} & \{c,a\} & A & A & A & A \end{matrix} \right\downarrow .$$

$H \in \mathsf{Augm}_A \setminus \mathsf{Clsf}_A$, in quanto $x \in \{a, b, c\} \implies \{x\}^{H^H} = A \supset \{x\}^H$.

Nel continuo: la endofunzione sull'insieme dei cerchi chiusi del piano cartesiano con centri nell'origine che raddoppia il raggio di ogni cerchio argomento è una aumentazione non idempotente ▮

B54e.03 Prop. Consideriamo la endofunzione-StS sull'insieme A $K \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto A^{\mathfrak{P}} \rceil$.
$K \in \mathsf{Clsf}_A \iff$ valgono gli enunciati [cls 1] e [cls 4], dove

[cls 4] $\forall\, B, C \subseteq A \;:\; B \subseteq C^K \implies B^K \subseteq C^K$

Dim.: "$\Longrightarrow$" : $K \in \mathsf{Clsf}_A \implies K$ soddisfa [cls 1] e $B \subseteq C^K \implies K$ soddisfa [cls 4] .

"$\Longleftarrow$" : Se la endofunzione-StS K verifica [cls 1] e [cls 4], allora $B \subseteq C \implies\!\lfloor$ [cls 1] $\rfloor \implies B \subseteq C^K \implies \lfloor$ [cls 4] $\rfloor \implies B^K \subseteq C^K$, cioè K soddisfa $\chi 2]$; inoltre [cls 1] implica $B^{K^K} \supseteq B^K$ e [cls 4] ; inoltre $B^K \subseteq B^K \implies B^{K^K} \subseteq B^K$; dunque K verifica [cls 3] ▮

Per ogni $K \in \mathsf{Clsf}_A$ si dicono **insiemi chiusi**-K tutti gli insiemi della forma B^K per $B \subseteq A$, cioè tutti gli elementi del codominio della K, ossia $K^{\dashv}$.

Denotiamo con K^{clsy} la collezione degli insiemi K-chiusi.

Osserviamo anche che per ogni $K \in \mathsf{Clsf}_A$ si ha $A^K = A$, cioè $A \in K^{\mathrm{clsy}}$.

B54e.04 Vediamo alcune semplici chiusure definite servendosi solo di costruzioni insiemistiche riguardanti un arbitrario ambiente U.

$\mathfrak{P}(U)^{\mathsf{Id}} = \lceil B \subseteq U \;\not\vdash\; B \rceil \in \mathsf{Clsf}_U$ e $\lceil B \subseteq U \;\not\vdash\; B \rceil^{\mathrm{clsy}} = A^{\mathfrak{P}}$.
La funzione $\mathfrak{P}(U)^{\mathsf{Id}} = \lceil B \subseteq U \;\not\vdash\; B \rceil$ viene qualificata come **chiusura discreta** nell'ambiente U.

$\lceil B \subseteq U \;\not\vdash\; A \rceil \in \mathsf{Clsf}_U$ e $\lceil B \subseteq U \;\not\vdash\; U \rceil^{\mathrm{clsy}} = \{\emptyset, U\}$.
La funzione $\lceil B \subseteq U \;\not\vdash\; U \rceil$ non è che U^{cnst} e viene qualificata come **chiusura totale** nell'ambiente U.

Per ogni $C \subseteq U$ abbiamo definito la **funzione unitore** di C nell'ambiente U ; essa chiaramente è

$$C^{\cup} \ := \ \lceil B \subseteq U \ \nVdash \ B \cup C \rceil \ \in \ \mathsf{Clsf}_U \ .$$

Per essa inoltre si trova $\lceil B \subseteq U \ \nVdash \ B \cup C \rceil^{\text{clsy}} \ = \ \{D \ \P \ C \subseteq D \subseteq U\} \ = \ C \llbracket \supseteq \rrbracket \cap \mathfrak{P}(U)$.

B54e.05 Consideriamo $\pi \in \mathsf{Part}_U$ e sia $\lceil i \in I \nVdash U_i \rceil$ una sua presentazione; diciamo **chiusura associata a una partizione** π:

$$\pi^{\text{clsf}} \ := \ \lceil B \subseteq U \ \nVdash \ \bigcup\{i \in I :| \ U_i \ \P \ U_i \cap B \neq \emptyset\} \rceil \ ;$$

Evidentemente $\pi^{\text{clsf}} \in \mathsf{Clsf}_U$ e $\pi^{\text{clsf}^{\text{clsy}}} \ = \ \{i \in I \ \P \ U_i \in \pi^{\dashv}\} \llbracket \cup \rrbracket$.

Consideriamo una qualsiasi relazione $\sim \in \mathsf{Eqv}_U$; si definisce **chiusura associata a una equivalenza** $\sim$

$$\sim^{\text{clsf}} \ := \ \lceil B \subseteq U \ \nVdash \ \bigcup\{b \in B :| \ b_{\text{⁊}} \sim\} \rceil \ .$$

Inoltre abbiamo evidentemente $\sim^{\text{clsf}} \in \mathsf{Clsf}_U$ e $(\sim^{\text{clsf}})^{\text{clsy}} \ = \ (\sim^{\text{part}})^{\dashv} \llbracket \cup \rrbracket$.

Abbiamo quindi individuato un criptomorfismo [B13d02] tra le partizioni di un insieme (ambiente) qualsiasi e le funzioni di chiusura dello stesso insieme.

B54e.06 Una famiglia di insiemi $\mathsf{C} = \{i \in I :| \ C_i\} \in \mathsf{FamS}_U$ si dice **famiglia completamente chiusa per intersezione** sse

$$\forall J \subseteq I \ : \ \bigcap_{i \in J} C_i \ \in \ \mathsf{C} \quad \text{ossia} \quad \mathsf{C} \llbracket \cap \rrbracket \ = \ \mathsf{C} \ .$$

Una tale famiglia si dice anche **sistema di chiusura** su U.

Denotiamo con Clsy_U l'insieme dei sistemi di chiusura su U.

Prop. $\mathsf{C} \in \mathsf{Clsy}_U \implies U \in \mathsf{C}$.

Dim.: $\bigcap_{i \in \emptyset} U_i = U$ ▮

%**Prop.** $\forall \ K \in \mathsf{Clsf}_U \ : \ K^{\text{clsy}} \ := \ \{B \subseteq U :| \ B^K\} \in \mathsf{Clsy}_U$.

Dim.: Consideriamo la famiglia di insiemi $\{i \in I \ \P \ C_i\} \ \subseteq \ K^{\text{clsy}}$ e $C := \cap_{i \in I} C_i$.
$\forall \ i \in I \ : \ C \subseteq C_i \implies \lfloor$ [cls 2] $\rfloor \implies \forall \ i \in I \ : \ C^K \subseteq {C_i}^K = C_i \implies C \subseteq \lfloor$ [cls 1] $\rfloor$ $\subseteq C^K \subseteq \bigcap_{i \in I} C_i = C \implies \bigcap_{i \in I} C_i \in K^{\text{clsy}}$ ▮

Sia $\mathsf{C} \in \mathsf{Clsy}_U$; si dice **funzione di chiusura** associata a C la endofunzione-S

$$\mathsf{C}^{\text{clsf}} \ := \ \lceil B \subseteq U \ \nVdash \ \bigcap \left\{ C \in \mathsf{C} \ \cap \ (B \llbracket \subseteq \rrbracket :| \ C \right\} \rceil \ \in \ \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto \mathsf{C} \rceil \ .$$

Prop. $\mathsf{C} \in \mathsf{Clsy}_U \implies \mathsf{C}^{\text{clsf}} \in \mathsf{Clsf}_U$.

Dim.: Che C^{clsf} verifichi [cls 1] e [cls 2] segue direttamente dalla definizione.
Inoltre $C_{\text{⁊}}\mathsf{C}^{\text{clsf}} \ = \ C \iff C \in \mathsf{C}$ e $\forall B \subseteq U \ : \ B_{\text{⁊}}\mathsf{C}^{\text{clsf}} \in \mathsf{C}$.
Di conseguenza $\forall \ B \subseteq A \ : \ \left(B_{\text{⁊}}\mathsf{C}^{\text{clsf}}\right)_{\text{⁊}}\mathcal{C}^{\text{clsf}} \ = \ B_{\text{⁊}}\mathcal{C}^{\text{clsf}}$ cioè $\mathcal{C}^{\text{clsf}}$ verifica [cls 3] ▮

B54e.07 **Prop.** ${}^{\text{clsf}} \ = \ {}^{\text{clsy}^{-1}} \ \in \ \lceil \mathsf{Clsy} \longleftrightarrow \mathsf{Clsf} \rceil$.

Dim.: $\forall \ \mathsf{C} \in \mathsf{Clsy}_U \ : \ \left(\mathsf{C}^{\text{clsf}}\right)^{\text{clsy}} \ = \ \left\{B \subseteq U \ \P \ B_{\text{⁊}}(\mathsf{C}^{\text{clsf}}) \ = \ B\right\} \ =$
$\left\{B \subseteq U \ \P \ B \ = \ \bigcap\left\{C \in \mathsf{C} \ \P \ C \supseteq B\right\}\right\} \ = \ \{B \subseteq U \ \P \ B \in \mathsf{C}\} \ = \ \mathsf{C}$; quindi ${}^{\text{clsf}} \circ_{lr} {}^{\text{clsy}} \ = \ \mathsf{Clsy}^{\mathsf{Id}}$.
Viceversa per ogni $K \in \mathsf{Clsf}_U$ definiamo $\overline{K} := \left(K^{\text{clsy}}\right)^{\text{clsf}} \in \lfloor$ e05 $\rfloor \in \mathsf{Clsf}_U$.
$\overline{K}^{\text{clsy}} \ = \ K^{\text{clsy}^{\text{clsf}^{\text{clsy}}}} \ = \lfloor$ per la prima parte della dimostrazione $\rfloor \ = \ K^{\text{clsy}}$;

quindi $C^K = C$ sse $C \in K^{\text{clsy}} = \overline{K}^{\text{clsy}}$ sse $C^{\overline{K}} = C$ $^{\searrow}(\alpha)$;
per un qualsiasi $B \subseteq A$ si ha $B^{K^K} = \lfloor [\text{cls } 3] \rfloor = B^K = \lfloor (\alpha) \rfloor = B^{K^{\overline{K}}}$.
Inoltre [cls 1] $\implies B \subseteq B^K \implies \lfloor [\text{cls } 2] \rfloor \implies B^{\overline{K}} \subseteq B^{K^{\overline{K}}} = B^K$.
Simmetricamente si ottiene $B^K \subseteq B^{\overline{K}}$ e quindi $K = \overline{K}$. Di conseguenza $^{\text{clsy}} \circ_{lr} {}^{\text{clsf}} = \mathsf{Clsf}^{\mathsf{Id}}$ ▮

B54 f. chiusure e operatori unitivi

B54f.01 In genere una endofunzione-StS $M \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto A^{\mathfrak{P}} \rceil$ isotona e ampliante, cioè una aumentazione o una chiusura, non rispetta l'unione, cioè non fa parte di $\lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{\cup} A^{\mathfrak{P}} \rceil$, ossia non garantisce che

$$\forall \langle i \in I :| B_i \rangle \in \mathsf{FamS}_A \quad : \quad \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)^M = \bigcup_{i\in I} {B_i}^M .$$

Prop. $M \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{\cup} A^{\mathfrak{P}} \rceil \implies M$ è isotona.

Dim.: $\forall B, C \subseteq A \;:\; B \subseteq C \implies C^M = (B \,\dot\cup\, (C \setminus B))^M = B^M \cup (C \setminus B)^M \supseteq B^M$ ∎

In sintesi $\lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{\cup} A^{\mathfrak{P}} \rceil \subseteq \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{\subseteq} A^{\mathfrak{P}} \rceil$.

B54f.02 Si dice **chiusura iterativa di una endofunzione-StS** $M \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto A^{\mathfrak{P}} \rceil$ la endofunzione-StS

$$M^{\otimes} := \left\lceil B \subseteq A \;\not\mapsto\; B \cup B^M \cup B^{M^M} \cup B^{M^{M^M}} \cup \ldots \right\rceil = \left\lceil B \subseteq A \;\not\mapsto\; \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B^{M^{\circ i}} \right\rceil .$$

(1) Prop.: $M \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{\cup} A^{\mathfrak{P}} \rceil \implies M^{\otimes} \in \mathsf{Clsf}_A \cap \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{\cup} A^{\mathfrak{P}} \rceil$.

Dim.: $M^{\otimes}$ verifica [cls 1]; infatti $B^{M^{\otimes}} = B \cup \ldots \supseteq B$.

$M^{\otimes}$ verifica [cls 2]. La isotonia di M, implica
$B \subseteq C \implies B^M \subseteq C^M \implies B^{M^M} \subseteq C^{M^M} \implies \ldots \implies B^{M^{\otimes}} \subseteq C^{M^{\otimes}}$.
$M \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{\cup} A^{\mathfrak{P}} \rceil \implies (\bigcup_{i\in I} B_i))^{M^M} = \left(\bigcup_{i\in I} {B_i}^M\right)^M = \bigcup_{i\in I} {B_i}^{M^M}$;
quindi $M^{\circ 2} \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{\cup} A^{\mathfrak{P}} \rceil$ e Di conseguenza $M^3, M^4, \ldots \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{\cup} A^{\mathfrak{P}} \rceil$.
$\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)^{M^{\otimes}} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)^{M^{\circ k}} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in I} {B_i}^{M^{\circ k}} = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} {B_i}^{M^{\circ k}} = \bigcup_{i\in I} {B_i}^{M^{\otimes}}$.
Dunque $M^{\otimes} \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{\cup} A^{\mathfrak{P}} \rceil$.

$M^{\otimes}$ verifica [cls 3] : $B^{{M^{\otimes}}^{M^{\otimes}}} = B^{M^{\otimes}} \cup B^{{M^{\otimes}}^M} \cup B^{{M^{\otimes}}^{M^{\circ 2}}} \cup \ldots \cup B^{{M^{\otimes}}^{M^{\circ h}}} \cup \ldots =$
$\lfloor_{\mathbb{N}}\, M^{\circ h} \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{\cup} A^{\mathfrak{P}} \rceil ,\; B^{M^{\otimes}} \supseteq B^{{M^{\otimes}}^M} \supseteq \ldots \supseteq B^{{M^{\otimes}}^{M^{\circ h}}} \subseteq \ldots \rfloor_{\mathbb{N}} = B^{M^{\otimes}}$.
Essendo $M^{\otimes}$ isotona, si ha anche $B^{M^{\otimes}} \subseteq B^{{M^{\otimes}}^{M^{\otimes}}}$ e pertanto $B^{{M^{\otimes}}^{M^{\otimes}}} = B^{M^{\otimes}}$ ∎

B54f.03 Consideriamo una relazione binaria entro un insieme A, $R \subseteq A \times A$. Si dice **operatore unitivo** o **operatore-Un** associato alla R

$$R^{\mathbf{OprU}} := \left\lceil B \subseteq A \;\not\mapsto\; B \,{}_{\text{¤}}R \right\rceil \in \lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto A^{\mathfrak{P}} \rceil .$$

In alcuni contesti il segno di unione viene rimpiazzato dal segno di somma e il segno $\bigcup$ con il segno $\sum$ [C33].

In molti contesti R ed $R^{\mathbf{OprU}}$ si possono identificare; in contesti nei quali conviene distinguere la relazione dell'operatore può essere utile semplificare le scritture della forma $R^{\mathbf{OprU}}$ con quelle della forma $\hat{R}$.

(1) Prop.: $R^{\mathbf{OprU}}$ verifica [cls 2], cioè è isotona ∎

(2) Prop.: $R^{\mathbf{OprU}}$ verifica [cls 1], cioè è ampliante, sse $A^{\mathsf{Id}} \subseteq R$, ovvero sse $R = R^0$, ovvero sse R è riflessiva .

Dim.: Evidente che $A^{\mathsf{Id}} \subseteq R \implies R^{\mathbf{OprU}}$ ampliante; per l'implicazione trasposta basta osservare che a ogni $R \in A \times A$ che non contiene qualche $\langle a, a \rangle \in A^{\mathsf{Id}}$ è associato un operatore unitivo tale che $\{a\} \notin a_{\shortmid}R^{\mathbf{OprU}}$, ossia un operatore non ampliante ∎

Vi sono relazioni R con l'operatore unitivo $R^{\mathbf{OprU}}$ ampliante (ovvio) e isotono ma non idempotente: un esempio è $R_Z := \{i \in \mathbb{Z} :| \langle i, i{-}1\rangle, \langle i, i\rangle, \langle i, i{+}1\rangle\}$, relazione per la quale $\{1,2,3\}R_Z = \{0,1,2,3,4\}$, mentre $(\{1,2,3\}R_Z)R_Z \;=\; \{-1,0,1,2,3,4,5\}$.

(3) Prop.: $R^{\mathbf{OprU}}$ verifica [cls 3], cioè è idempotente, sse $R \;=\; R^{\circ 2}$ sse R è transitiva ▮

Tutte le relazioni $R \subset A^{\mathsf{Id}}$ sono relazioni entro A con operatore unitivo idempotente (ed isotono) ma non ampliante.

(4) Prop.: $\forall R \in \mathsf{Rel}_A \;:\; R^{\mathbf{OprU}} \in \mathsf{Clsf}_A \quad\Longleftrightarrow\quad R = R^{\otimes}$.

Dim.: "$\Longrightarrow$" : $R^{\mathbf{OprU}}$ soddisfa [cls 1] e [cls 3] implica $A^{\mathsf{Id}} \subseteq R = R^{\circ 2}$ e quindi $\forall h = 2,3,\ldots \;:\; R^{\circ h} = R$; di conseguenza $R^{\otimes} \;=\; A^{\mathsf{Id}} \cup R \cup R^{\circ 2} \cup \ldots \;=\; R$.
"$\Longleftarrow$" : $R = R^{\otimes} \;\Longrightarrow\; A^{\mathsf{Id}} \subseteq R = R^{\circ 2}$; di conseguenza $R^{\mathbf{OprU}}$ soddisfa [cls 1] e [cls 3]. Per ogni $R \in \mathsf{Rel}_A$ $R^{\mathbf{OprU}}$ verifica [cls 2], cioè è isotona $B \subseteq C \subseteq A \;\Longrightarrow\; B \,;R \subseteq \,;R$, cioè $R^{\mathbf{OprU}}$ verifica [cls 2]; dunque, grazie a (1), $R^{\mathbf{OprU}} \in \mathsf{Clsf}_A$▮

B54f.04 Coroll.: $\forall R \subseteq A{\times}A \;:\; R^{\otimes\,\mathbf{OprU}} \;=\; \left(R^{\mathbf{OprU}}\right)^{\otimes} = \left\lceil B \subseteq A \mapsto B{\cup}BR{\cup}BR^2{\cup}\ldots \right\rceil \in \mathsf{Clsf}_A$.

Dim.:
$$R^{\otimes\,\mathbf{OprU}} \;=\; \left\lceil B \subseteq A \mapsto B \cup B\,;R^{\mathbf{OprU}} \cup \left(B\,;R^{\mathbf{OprU}}\right);R^{\mathbf{OprU}} \cup \;\ldots\; \right\rceil$$
$$= \left\lceil B \subseteq A \;\mapsto\; B \cup B\,;R \cup B\,;R \circ R \cup \;\ldots\; \right\rceil \;=\; \left(R^{\mathbf{OprU}}\right)^{\otimes} .$$
Essendo $R^{\mathbf{OprU}}$ unitivo, cioè $R^{\mathbf{OprU}} \in \left\lceil A^{\mathfrak{P}} \longmapsto_{\cup} A^{\mathfrak{P}} \right\rceil$, grazie a f02(1) si ha $R^{\mathbf{OprU}^{\otimes}} \in \mathsf{Clsf}_A$▮

B54f.05 Da particolari tipi di relazioni riflessive e transitive (in particolare da equivalenze e ordini) si ricavano notevoli funzioni di chiusura che sono anche operatori unitivi.

(1) Prop.: $\sim \in \mathsf{Eqv}_A \;\Longrightarrow\; \sim^{\mathbf{OprU}} = \left\lceil B \subseteq A \;\mapsto\; B\,; \right\rceil \in \mathsf{Clsf}_A$ e $\left(\sim^{\mathbf{OprU}}\right)^{\mathrm{clsy}} \;=\; (A/\sim)\llbracket \cup \rrbracket$.

Si è quindi ritrovata la chiusura associata a una partizione .

Denotiamo con LattBl_A la classe delle collezioni di sottoinsiemi dell'insieme A chiuse rispetto alle operazioni di unione e intersezione, cioè $\mathsf{LattBl}_A \;:=\; \left\{\langle \mathsf{C}, I\rangle \in \mathsf{FamS}_A \,\P\, \mathsf{C}\llbracket \cap \rrbracket \;=\; \mathsf{C}\llbracket \cup \rrbracket = \mathsf{C}\right\}$.

(2) Coroll.: Sia $K \in \mathsf{Clsf}_A$. $K =\sim^{\mathbf{OprU}}$ con $\sim \in \mathsf{Eqv}_A \;\Longleftrightarrow\; K^{\mathrm{clsy}} \in \mathsf{LattBl}_A$.

(3) Coroll.: $R \subseteq A \times A \;\Longrightarrow\; R^{\boxdot\,\mathbf{OprU}} \;=\; (R \cup R^{\top})^{\otimes\,\mathbf{OprU}} \in \mathsf{Clsf}_A$.

In particolare per $R = A^{\mathsf{Id}}$ ed $R = A \times A$ si ritrovano, risp., la chiusura discreta e la chiusura totale.

B54f.06 (1) Coroll.: Consideriamo l'ordine $\langle A, \leq\rangle \in \mathsf{Ord}$.
Sono chiusure su A le corrispondenti relazioni binarie
$$\mathsf{Mjrnt}_A \;:=\; \left\lceil B \subseteq A \;\mapsto\; B\,;\leq \right\rceil \in \mathsf{Clsf}_A \quad\text{e}\quad \mathsf{Mnrnt}_A \;:=\; \left\lceil B \subseteq A \;\mapsto\; B\,;\geq \right\rceil \in \mathsf{Clsf}_A ▮$$

(2) Coroll.: Consideriamo l'endofunzione $f \in \left\lceil A \longmapsto A \right\rceil$.
È una chiusura l'estensione booleana della sua chiusura iterativa:
$$f^{\otimes\,\mathrm{boole}} \;=\; \left\lceil B \subseteq A \;\mapsto\; B \cup B\,;f \cup B\,;f^2 \cup \ldots \right\rceil \;\in\; \mathsf{Clsf}_A ▮$$

(3) Coroll.: Consideriamo l'endofunzione idempotente $J \in \mathsf{Idmp}(A)$.
È una chiusura l'estensione booleana della sua chiusura iterativa:

$$J^{\otimes \text{boole}} = \left\lceil B \subseteq A \ \mapsto\ B \cup B_{\urcorner} J \right\rceil \in \mathsf{Clsf}_A \blacksquare$$

(4) Coroll.: Consideriamo $a \in A$ e la relativa $a^{\text{cnst}} \in \mathsf{Idmp}(A)$.
È una chiusura l'estensione booleana della sua chiusura iterativa:

$$a^{\text{cnst}^{\otimes \text{boole}}} := a^{\cup} = \left\lceil B \subseteq A \ \mapsto\ B \cup a \right\rceil \in \mathsf{Clsf}_A \ ; \text{ inoltre } a^{\cup^{\text{clsy}}} = \{B \mid a \in B \subseteq A\} \blacksquare$$

B54f.07 **(1) Coroll.**: Consideriamo la permutazione $p \in \left\lceil A \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright A \right\rceil$.

$$p^{\otimes \text{boole}} = \left\lceil B \subseteq A \ \mapsto\ B \cup B_{\urcorner} p \cup B_{\urcorner} p^2 \cup \ldots \right\rceil \in \mathsf{Clsf}_A \quad \text{e} \quad p^{\otimes \text{boole}^{\text{clsy}}} = p^{\text{Trnscl}} [\![\cup]\!] \blacksquare$$

(2) Coroll.: Consideriamo l'involuzione $J \in \mathsf{Invl}(A)$.
È una chiusura l'estensione booleana della sua chiusura iterativa:

$$J^{\otimes \text{boole}} = \left\lceil B \subseteq A \ \mapsto\ B \cup B_{\urcorner} J \right\rceil \in \mathsf{Clsf}_A \ ; \text{ inoltre}$$
$$J^{\otimes \text{boole}^{\text{clsy}}} = \Big(\{a \in A \mid a_{\urcorner} J = a\} \,\dot{\cup}\, \{a \in A \mid a \neq a_{\urcorner} J\}\Big) [\![\cup]\!] \ .$$

B54f.08 I risultati precedenti portano a riconoscere in varie situazioni la presenza di chiusure che in genere rendono più chiare le situazioni stesse.

Sono chiusure ricavate da funzioni idempotenti $\left\lceil r \in \mathbb{R} \mapsto \lceil r \rceil \right\rceil^{\text{boole}}$ ed $\left\lceil r \in \mathbb{R} \mapsto \lfloor r \rfloor \right\rceil^{\text{boole}}$.

Da varie permutazioni del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e dello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ si ricavano chiusure ciascuna delle quali è una simmetrizzazione per le figure geometriche.

Sono chiusure: l'aggiunte a una figura piana dei riflessi dei suoi punti rispetto a una retta (che assume il ruolo di asse di simmetria della figura così estesa); l'ampliamento di una figura solida con i riflessi dei suoi punti rispetto ad un piano (piano di simmetria della figura ampliata); l'aggiunta a una figura 2D o 3D dei trasformati dei suoi punti rispetto ad un centro di simmetria.

Sono numerose le simmetrie associate a figure del piano o dello spazio 3D che costituiscono gruppi finiti, numerabili o continui: nel piano svolgono ruoli importanti i gruppi delle simmetrie dei poligoni regolari e delle circonferenze, nello spazio gruppi delle simmetrie dei poliedri regolari o quasi regolari, dei cilindri e delle sfere.

Consideriamo un S sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o di $\mathbb{R}^{\times 3}$, sia H un insieme (finito o numerabile) di permutazioni di S e sia F un insieme di punti di S.
L'operatore $\left\lceil F \mapsto F \cup F_{\urcorner} [\![H \cup H^{-1}]\!] \right\rceil$ è una chiusura in $\mathsf{Clsr}_{\mathsf{S}}$.

In modo analogo si individuano chiusure associate a gruppi continui di simmetrie.

Al gruppo di simmetria di una circonferenza di centro C è associato il sistema di chiusura costituito dalle unioni di circonferenze con centro in C.

Al gruppo di simmetria di una sfera di centro C è associato il sistema di chiusura costituito dalle unioni di sfere con centro in C.

Al gruppo di simmetria di una cilindro di asse A è associato il sistema di chiusura costituito dalle unioni di cilindri con asse A.

B54f.09 **(1) Prop.**: Consideriamo $C \subseteq A$ e la relazione entro A $\ R := (A \times C) \cup A^{\mathsf{Id}}$.
Essendo $R = R^{\otimes}$, in forza di f03(4) abbiamo $R^{\mathbf{OprU}} \in \mathsf{Clsf}_A$.
Inoltre $R^{\mathbf{OprU}^{\text{clsy}}} = \{\emptyset\} \,\dot{\cup}\, \{B \mid C \subseteq B \subseteq A\} \blacksquare$

(2) Coroll.: $(A \times A)^{\mathbf{OprU}} \in \mathsf{Clsf}_A$ e $(A \times A)^{\mathbf{OprU}^{\text{clsy}}} = \{\emptyset, A\} \blacksquare$

Si osserva che $K := ((A\times C)\cup A^{\mathsf{Id}})^{\mathbf{OprU}}$ differisce da $C^{\cup} = \lceil B\subseteq A \nVdash B\cup C \rceil$ solo in quanto
$$\emptyset^K = \emptyset \text{ , mentre } \emptyset C^{\cup} \ = \ C \ .$$
In particolare $(A\times A)^{\mathbf{OprU}}$ e la chiusura $A^{\cup}$ differiscono in quanto
$$\emptyset(A\times A)^{\mathbf{OprU}} = \emptyset \text{ , mentre } \emptyset A^{\cup} = A \ .$$

B54f.10 Relativamente all'azione su $\emptyset$, per le funzioni di chiusura K si distinguono tre sottoinsiemi.

Per chiarire tali sottoinsiemi associamo a ciascuna chiusura K l'insieme
$$\emptyset_K \ := \ \bigcap_{a\in A} a^K \ = \ \bigcap_{B\in\mathfrak{P}_{ne}(A)} B^K \ .$$

(1) Prop.: (a) $\emptyset_K = \emptyset \implies \emptyset^K = \emptyset$. (b) $\emptyset_K \supset \emptyset \implies \emptyset^K \in \{\emptyset, \emptyset_K\}$.

Dim.: Per ogni $K\in\mathsf{Clsr}_A$ si ha $\forall\ a\in A \ : \ \emptyset^K \subseteq a^K$ e quindi $\emptyset\subseteq\emptyset^K\subseteq\emptyset_K$.

Di conseguenza $\emptyset_K=\emptyset \implies \emptyset^K=\emptyset$, mentre $\emptyset\subset\emptyset^K \implies \emptyset^K = \emptyset^{K^K} \supseteq$
$\lfloor \forall\ B\subseteq A \ : \ B^K \supseteq \bigcup_{b\in B} b^K \rfloor \ \supseteq \ \bigcup_{a\in\emptyset^K} a^K \ \supseteq \ \emptyset_K \ \supseteq \ \emptyset^K \implies \emptyset^K = \emptyset_K$▮

Tra le chiusure con $\emptyset_K = \{\emptyset\}$, dette chiusure di primo tipo, vi sono quelle associate a partizioni che presentano almeno due blocchi.

Tra le chiusure con $\emptyset_K\supset\emptyset$, quelle con $\emptyset^K=\emptyset$ si dicono chiusure di secondo tipo e quelle con $\emptyset^K=\emptyset_K$ si chiamano chiusure di terzo tipo.

La $((A\times C)\cup A^{\mathsf{Id}})^{\mathbf{OprU}}$ è chiusura di secondo tipo, la $C^{\cup}$ è di terzo tipo e per entrambe $\emptyset_K = C$.

(2) Prop.: Ad una funzione di chiusura del secondo tipo se ne associa biunivocamente una del terzo modificando semplicemente $\emptyset^K=\{\emptyset\}$ in $\emptyset^K=\emptyset_K$; corrispondentemente si modifica il sistema di chiusura associato con la sola eliminazione di $\emptyset$▮

Due funzioni di chiusura su A con $\emptyset_K\supset\emptyset$ che siano associate come specificato nella (2) si associano in modo naturale a una chiusura di primo tipo riducendo A ad $A\setminus\emptyset_K$; corrispondentemente i sistemi di chiusura associati $\mathcal{C}\cup\{\emptyset\}$ e $\mathcal{C}$ si riducono a $\{B\in\mathcal{C} :| \ B\setminus\emptyset_K\}$.

B54f.11 I sistemi di chiusura dei tre tipi visti come insiemi ordinati dalla relazione $\subseteq$ nelle loro parti inferiori presentano, risp., i tre aspetti seguenti:

//input pB54f11

Un esempio di riduzione di chiusure di II e III tipo al I tipo è dato dal passaggio da $((A\times C)\cup A^{\mathsf{Id}})^{\mathbf{OprU}}$ e $C^{\cup}$ alla chiusura discreta su $A\setminus C$ e corrispondentemente per i sistemi di chiusura passando da $\{B \mid C\subseteq B\subseteq A\}\cup\{\emptyset\}$ e $\{B \mid C\subseteq B\subseteq A\}$ ad $(A\setminus C)^{\mathfrak{P}}$.

B54f.12 **Prop.** Per ogni $A\in\mathbf{Set}$ le collezioni delle relazioni riflessive, simmetriche, riflessivo-simmetriche, transitive, riflessivo-transitive e di equivalenza costituiscono dei sistemi di chiusura su $A\times A$. Le corrispondenti funzioni di chiusura sono, risp.,
$$\lceil R\subseteq A\times A \nVdash R\cup A^{\mathsf{Id}} \rceil, \lceil R\subseteq A\times A \nVdash R\cup R^{\mathsf{T}} \rceil, \lceil R\subseteq A\times A \nVdash R\cup A^{\mathsf{Id}}\cup R^{\mathsf{T}} \rceil,$$
$$\lceil R\subseteq A\times A \nVdash R^{\oplus} \rceil, \lceil R\subseteq A\times A \nVdash R^{\otimes} \rceil, \lceil R\subseteq A\times A \nVdash R^{\blacksquare} \rceil \in \mathsf{Clsf}_{A\times A} \ .$$

Dim.: I sei fatti precedenti si provano facilmente considerando che il carattere, risp., riflessivo, simmetrico, riflessivo-simmetrico, transitivo, riflessivo-transitivo e di equivalenza delle relazioni viene mantenuto dalla intersezione; equivalentemente si riconosce il carattere nondecrescente, isotono e idempotente delle sei rispettive trasformazioni di relazioni.

$\lceil R \subseteq A \times A \mapsto R \cup A^{\mathsf{Id}} \rceil \in \mathsf{Clsf}_{A\times A}$ si può vedere anche come $\left(A^{\mathsf{Id}}\right)^{\cup} \in \mathsf{Clsf}_{A\times A}$;

$\lceil R \subseteq A \times A \mapsto R \cup R^{\top} \rceil \in \mathsf{Clsf}_{A\times A}$ discende anche da f07(2) con $\lceil \langle a, a' \rangle \in A \times A \mapsto \langle a, a' \rangle \rceil$;

$\lceil R \mapsto R \cup A^{\mathsf{Id}} \cup R^{\top} \rceil \in \mathsf{Clsf}_{A\times A}$ si può anche derivare dai due enunciati precedenti;

$\lceil R \mapsto R^{\oplus} \rceil \in \mathsf{Clsf}_{A\times A}$ si può considerare come chiusura nell'ambito del semigruppo $\langle \mathsf{Rel}_A, \circ \rangle$;

$\lceil R \mapsto R^{\otimes} \rceil \in \mathsf{Clsf}_{A\times A}$ si può vedere come chiusura nell'ambito del monoide $\langle \mathsf{Rel}_A, \circ, A^{\mathsf{Id}} \rangle$;

$\lceil R \mapsto R^{\diamond} = (R \cup R^{\top})^{\otimes} \rceil \in \mathsf{Clsf}_{A\times A}$ si può ricavare da $\lceil R \mapsto R \cup R^{\top} \rceil \in \mathsf{Clsf}_{A\times A}$
e da $\lceil R \mapsto R^{\otimes} \rceil \in \mathsf{Clsf}_{A\times A}$ ▮

B54f.13 Si noti che, mentre $\lceil R \mapsto R^{\blacksquare} \rceil \in \mathsf{Clsf}_{A\times A}$, si ha $\lceil R \mapsto R^{\otimes} \cup R^{\otimes\top} \rceil \notin \mathsf{Clsf}_{A\times A}$; in effetti questa aumentazione non è idempotente, in quanto $\lceil R \mapsto R^{\otimes} \rceil \circ \lceil R \mapsto R \cup R^{\top} \rceil \circ \lceil R \mapsto R^{\otimes} \rceil = \lceil R \mapsto R^{\blacksquare} \rceil \neq \lceil R \mapsto R^{\otimes} \rceil \circ \lceil R \mapsto R \cup R^{\top} \rceil = \lceil R \mapsto R^{\otimes} \cup R^{\otimes\top} \rceil$.
Parallelamente $\lceil B \subseteq A \mapsto B \,{}_{\text{я}} R^{\blacksquare} \rceil \in \mathsf{Clsf}_A$, mentre $\lceil B \subseteq A \mapsto B \,{}_{\text{я}} R^{\otimes} \cup B \,{}_{\text{я}} R^{\otimes\top} \rceil \notin \mathsf{Clsf}_A$.

B54f.14 Prop. Per ogni $A \in \mathbf{Set}$ le collezioni delle relazioni antisimmetriche, antisimmetrico-riflessive, antisimmetrico-transitive e d'ordine, collezioni completate dalla relazione ovvia $A \times A$, costituiscono dei sistemi di chiusura su $A \times A$. Le corrispondenti funzioni di chiusura, se con $\mathcal{A}$ si denota $\mathsf{RelAsym}_A$ l'insieme delle relazioni antisimmetriche su A e $\mathcal{B} := (A \times A)^{\mathfrak{P}} \setminus \mathcal{A}$, sono, risp.,

$$\mathcal{A}^{\mathsf{Id}} \dot{\bigcup} \lceil R \in \mathcal{B} \mapsto A \times A \rceil \ , \quad \lceil R \in \mathcal{A}^{\mathsf{Id}} \mapsto R \cup A^{\mathsf{Id}} \rceil \dot{\bigcup} \lceil R \in \mathcal{B} \mapsto A \times A \rceil \ ,$$
$$\lceil R \in \mathcal{A}^{\mathsf{Id}} \mapsto R^{\oplus} \rceil \dot{\bigcup} \lceil R \in \mathcal{B} \mapsto A \times A \rceil \quad \text{e}$$
$$\lceil R \in \mathcal{A}^{\mathsf{Id}} \mapsto R^{\otimes} \rceil \dot{\bigcup} \lceil R \in \mathcal{B} \mapsto A \times A \rceil \ .$$

Dim.: Basta osservare che le proprietà di antisimmetria, riflessività e transitività si mantengono quando si effettuano operazioni di intersezione ▮

B54f.15 (1) Prop.: $H_1, H_2 \in \mathsf{Augm}_A \implies H_1 \circ H_2 \in \mathsf{Augm}_A$.

Dim.: $\forall B \subseteq A \ : \ B \subseteq B^{H_1} \subseteq B^{H_1 H_2}$; $\forall B, C \subseteq A \ : \ B \subseteq C \implies B^{H_1} \subseteq C^{H_1} \implies B^{H_1 H_2} \subseteq B^{H_1 H_2}$
▮

(2) Prop.: Siano $K_1, K_2 \in \mathsf{Clsf}_A$.
(a) $K_2 \circ K_1 = K_1 \circ K_2 \implies K_1 \circ K_2 \in \mathsf{Clsf}_A$.
(b) $K_1 \circ K_2 \circ K_1 = K_1 \circ K_2 \implies K_1 \circ K_2 \in \mathsf{Clsf}_A$.

Dim.: Grazie a (1) basta dimostrare l'idempotenza di $K_1 \circ K_2$.
Per questo basta osservare che entrambe le ipotesi di (a) e (b) permettono di affermare

$$\forall B \subseteq A \ : \ B^{K_1 \circ K_2 \circ K_1 \circ K_2} = B^{K_1 \circ K_1 \circ K_2 \circ K_2} = B^{K_1 \circ K_2}$$ ▮

Consideriamo la famiglia $\mathbf{F} := \{i \in I :| H_i\} \in \mathsf{FamS}_A$.

Definiamo **intersettore-img** della $\mathbf{F}$ la endofunzione-StS $\bigcap_{i \in I}^{img} H_i := \lceil B \subseteq A \mapsto \bigcap_{i \in I} B^{H_i} \rceil$.

Definiamo **unitore-img** della $\mathbf{F}$ la endofunzione-StS $\bigcup_{i \in I}^{img} H_i := \lceil B \subseteq A \mapsto \bigcup_{i \in I} B^{H_i} \rceil$.

(3) Prop.: $\forall\, i \in I \ \because\ H_i \in \mathsf{Augm}_A \implies \bigcap_{i\in I}^{img} H_i \ ,\ \bigcup_{i\in I}^{img} H_i \ \in\ \mathsf{Augm}_A$.

Dim.: Consideriamo arbitrari $B, C \subseteq A$;
$\forall i \in I \ :\ B \subseteq B^{H_i} \implies B \subseteq \bigcap_{i\in I} B^{H_i} \subseteq \bigcup_{i\in I} B^{H_i}$ (funzioni amplianti).
$B, C \subseteq A;\ B \subseteq C \implies \big(\forall\, i \in I \ :\ B^{H_i} \subseteq C^{H_i}\big)$
$\implies \bigcap_{i\in I} B^{H_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} C^{H_i} \ \wedge\ \bigcup_{i\in I} B^{H_i} \subseteq \bigcup_{i\in I} C^{H_i}$ ▮

B54f.16 Relativamente agli intercettori-img e agli unitori-img, si osserva che per ogni $\{i \in I :| B_i\} \in \mathsf{FamS}_A$ accade che

$$\bigcap_{i\in I}^{img} B_i{}^{\cap} = \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)^{\cap} \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{i\in I}^{img} B_i{}^{\cup} = \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)^{\cup} .$$

Le constatazioni precedenti si possono ricondurre al più generale enunciato che segue.

(1) Prop.: $\{i \in I :| K_i\} \in \mathsf{Fam}(\mathsf{Clsf}_A) \ \because\ \bigcap_{i\in I}^{img} K_i \ \in\ \mathsf{Clsf}_A$.

Dim.: Grazie a f15(3) basta dimostrare l'idempotenza di $\bigcap_{i\in I}^{img} K_i$ e in effetti:

In effetti $\forall B \subseteq A \ \because$ $$\left(\bigcap_{i\in I}^{img} K_i\right)(B) \subseteq \left(\bigcap_{i\in I}^{img} K_i\right)\left(\left(\bigcap_{j\in I}^{img} K_j\right)(B)\right) = \bigcap_{j\in I}\left(\bigcap_{i\in I} B^{K_i}\right)^{K_j}$$
$$\subseteq \bigcap_{i\in I} B^{K_i K_i} = \bigcap_{i\in I} B^{K_i} = \left(\bigcap_{i\in I}^{img} K_i\right)(B) \ ▮$$

Si noti che una generica famiglia $\{i \in I :| K_i\} \in \mathsf{Fam}(\mathsf{Clsf}_A)$ non gode della proprietà

$$\bigcup_{i\in I}^{img} K_i \ \in\ \mathsf{Clsf}_A .$$

In molti casi di godimento di questa proprietà si può invocare f15(2); questo in particolare accade nel caso in cui si combinano unitori e chiusure legate a partizioni il cui raffinamento è costituito da blocchi già presenti in almeno una partizione.

B54f.17 **Prop.** Sia $\{i \in I :| A_i\}$ una famiglia di insiemi mutuamente disgiunti e sia $A := \dot{\bigcup}_{i\in I} A_i$; consideriamo inoltre una famiglia

$$\{i \in I :| K_i\} \in \mathsf{Fam}(\mathsf{Clsf}) \ \text{ tale che } \ \forall i \in I \because K_i \in \mathsf{Clsr}_{A_i} .$$

e la endofunzione-StS $K := \left\lceil B \subseteq A \ \mapsto\ \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)^{K_i} \right\rceil$. Allora $F \in \mathsf{Clsf}_A$▮

Questa K si dice **composizione delle chiusure** K_i.

Una chiusura $K \in \mathsf{Clsf}_A$ si dice **chiusura decomponibile** sse $\mathsf{Part}_A \ni \pi$ tale che, ponendo $\pi^{\dashv} =: \{i \in I :| A_i\}$, accade che $\forall i \in I \ :\ K\big|_{A_i} \in \mathsf{Clsf}_{A_i}$.

Consideriamo $K \in \mathsf{Clsf}_A$, il sistema di chiusura a esso associato $\boldsymbol{K} := K^{\text{clsy}} \in \mathsf{Clsy}_A$ e la famiglia $\{i \in I \,]\!\!|\, C_i \subseteq A\} \subseteq \boldsymbol{K}$.

Chiaramente $\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right)^K = \bigcap_{i\in I} C_i{}^K = \bigcap_{i\in I} C_i$, mentre in genere accade che

$$\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)^K \ \supseteq\ \bigcup_{i\in I} {C_i}^K \ =\ \bigcup_{i\in I} C_i \qquad \text{e} \qquad B^K \ \supseteq\ \bigcup_{b\in B} b^K\ ,$$

mentre non vale l'uguaglianza $\displaystyle\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)^K = \bigcup_{i\in I} {C_i}^K$.

B54f.18 Per le chiusure per le quali non si ha la precedente uguaglianza può risultare utile definire l'operazione binaria di **unione appoggiata sulla chiusura** K:

$$\forall\ B_1, B_2 \subseteq A\ :\ B_1 \cup_{[K]} B_2\ :=\ (B_1 \cup B_2)^K\ .$$

Evidentemente questa operazione è commutativa; dimostriamo che essa è anche associativa.

(1) Prop.: $\forall\ B_1,\ B_2,\ B_3 \subseteq A\ :\ (B_1 \cup_{[K]} B_2) \cup_{[K]} B_3\ =\ B_1 \cup_{[K]} (B_2 \cup_{[K]} B_3) = (B_1 \cup B_2 \cup B_3)^K$.

Dim.: $(B_1 \cup B_2 \cup B_3)^K \subseteq ((B_1 \cup B_2)^K \cup B_3)^K$,
$(B_1 \cup (B_2 \cup B_3)^K)^K \subseteq ((B_1 \cup B_2 \cup B_3)^K)^K = (B_1 \cup B_2 \cup B_3)^K$ ▮

L'associatività dell'unione appoggiata su una chiusura rende lecito introdurre l'unione appoggiata su una chiusura per ogni famiglia di insiemi:

$$\forall \{i \in I :|\ B_i\} \in \mathsf{FamS}_B\ :\ \bigcup\nolimits_{[K]} \{i \in I :|\ B_i\}\ :=\ \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)^K\ .$$

Inoltre vale la seguente proprietà di assorbimento.

(2) Prop.: $\forall\ B_1,\ B_2,\ B_3\ \subset\ A\ :\ B_1 \cup_{[K]} (B_1 \cap B_2)\ =\ (B_1 \cup (B_1 \cap B_2))^K\ =\ {B_1}^K$ ▮

B54f.19 Dalle relazioni binarie si ricavano altri esempi di chiusure che conducono alla importante nozione di connessione di Galois.

Consideriamo $A, B \in \mathbf{Set}$ ed $R \subseteq A \times B$.

Si dice **esigenza della relazione** R la funzione-StS:

$$R^{\text{exg}}\ :=\ \lceil\ A' \subseteq A\ \mid\!\triangleright\ \{b \in B\ ⁋\ \forall\ a \in A'\ :\ \langle a, b\rangle \in R\}\ \rceil\ \in\ \lceil\ A^{\mathfrak{P}} \longmapsto B^{\mathfrak{P}}\ \rceil\ .$$

Si dice **coesigenza della relazione** R la funzione-StS:

$$R^{\text{cexg}}\ :=\ (R^{\intercal})^{\text{exg}}\ =\ \lceil\ B' \subseteq B\ \mid\!\triangleright\ \{a \in A\ ⁋\ b \in B' \Longrightarrow \langle a, b\rangle \in R\}\ \rceil\ \in\ \lceil\ B^{\mathfrak{P}} \longmapsto A^{\mathfrak{P}}\ \rceil\ .$$

Si dice **connessione di Galois** associata ad A, B ed $R \subseteq A \times B$ la terna:

$$\langle A, B, R\rangle^{\mathsf{Galc}}\ :=\ \langle A, B, R^{\text{exg}}, R^{\text{cexg}}\rangle\ .$$

(1) Prop.: $A'\ \subseteq\ A''\ \subseteq A\ \Longrightarrow\ A' {}_{\text{Я}} R^{\text{exg}}\ \supseteq\ A'' {}_{\text{Я}} R^{\text{exg}}$ (antisotonia di R^{exg}) ▮

(2) Prop.: $B'\ \subseteq\ B''\ \subseteq B\ \Longrightarrow\ B' {}_{\text{Я}} R^{\text{cexg}}\ \supseteq\ B'' {}_{\text{Я}} R^{\text{cexg}}$ (antisotonia di R^{cexg}) ▮

(3) Prop.: $A'\ \subseteq\ A''\ \subseteq\ A \Longrightarrow (A' {}_{\text{Я}} R^{\text{exg}}) {}_{\text{Я}} R^{\text{cexg}}\ \subseteq\ (A'' {}_{\text{Я}} R^{\text{exg}}) {}_{\text{Я}} R^{\text{cexg}}$ (isotonia di $R^{\text{exg}} \circ_{lr} R^{\text{cexg}}$) ▮

(4) Prop.: $B'\ \subseteq\ B''\ \subseteq\ B \Longrightarrow (B' {}_{\text{Я}} R^{\text{cexg}}) {}_{\text{Я}} R^{\text{exg}}\ \subseteq\ (B'' {}_{\text{Я}} R^{\text{cexg}}) {}_{\text{Я}} R^{\text{exg}}$ (isotonia di $R^{\text{cexg}} \circ_{lr} R^{\text{exg}}$) ▮

B54f.20 **(1) Prop.**: $\forall\ A' \subseteq A\ :\ A' \subseteq (A' {}_{\text{Я}} R^{\text{exg}}) {}_{\text{Я}} R^{\text{cexg}}$.

Dim.: Sia $a \in A'$.
$b \in A' {}_{\text{Я}} R^{\text{exg}}\ \Longrightarrow\ \langle a, b\rangle \in R \iff \langle b, a\rangle \in R^{\intercal}\ \Longrightarrow\ a \in (A' {}_{\text{Я}} R^{\text{exg}}) {}_{\text{Я}} R^{\intercal\,\text{exg}}\ =\ (A' {}_{\text{Я}} R^{\text{exg}}) {}_{\text{Я}} R^{\text{cexg}}$ ▮

(2) Prop.: $\forall\ B' \subseteq B\ :\ B'\ \subseteq\ (B' {}_{\text{Я}} R^{\text{cexg}}) {}_{\text{Я}} R^{\text{exg}}$.

Dim.: Simile alla dimostrazione di (1) ▮

B54f.21 **(1) Prop.**: $\forall\ A' \subseteq A\ :\ A' {}_{\text{Я}} R^{\text{exg}}\ =\ ((A' {}_{\text{Я}} R^{\text{exg}}) {}_{\text{Я}} R^{\text{cexg}}) {}_{\text{Я}} R^{\text{exg}}$.

Dim.: $\lfloor_{N}$ f20(1) $\rfloor_{N} \implies A' \subseteq (A' {}_{\mathsf{R}} R^{\text{exg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{cexg}} \implies \lfloor_{N}$ f20(4) $\rfloor_{N}$
$\implies A' {}_{\mathsf{R}} R^{\text{exg}} \supseteq ((A' {}_{\mathsf{R}} R^{\text{exg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{cexg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{exg}}$;
$\lfloor_{N}$ f20(2) $\rfloor_{N} \implies (A' R^{\text{exg}}) \subseteq ((A' R^{\text{exg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{cexg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{exg}}$ e quindi l'asserto ▮

(2) Prop.: $\forall\, B' \subseteq B \;:\; B' {}_{\mathsf{R}} R^{\text{cexg}} = ((B' {}_{\mathsf{R}} R^{\text{cexg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{exg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{cexg}}$.

Dim.: Si ottiene similmente alla dimostrazione di (1) ▮

(3) Coroll.: $\forall\, A' \subseteq A \;:\; (A' {}_{\mathsf{R}} R^{\text{exg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{cexg}} = (((A' {}_{\mathsf{R}} R^{\text{exg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{cexg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{exg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{cexg}}$ ▮

(4) Coroll.: $\forall\, B' \subseteq B \;:\; (B' {}_{\mathsf{R}} R^{\text{cexg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{exg}} = (((B' {}_{\mathsf{R}} R^{\text{cexg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{exg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{cexg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{exg}}$ ▮

(5) Prop.: $\lceil B \subseteq A \;\lceil\; (B {}_{\mathsf{R}} R^{\text{exg}}) {}_{\mathsf{R}} R^{\text{cexg}}) \rceil \in \mathsf{Clsf}_A$.

Dim.: Segue da f19(3), f20(1) e (3) ▮

(6) Prop.: $R^{\text{cexg}} \circ_{lr} R^{\text{exg}} \in \mathsf{Clsf}_B$.

Dim.: Segue da f19(3), f20(1) e (3) ▮

Ad ogni relazione risultano quindi associate le due suddette chiusure che chiamiamo:
chiusura di esigenza sul dominio che denotiamo con

$$R^{cedom} := R^{\text{exg}} \circ_{lr} R^{\text{cexg}}$$

e **chiusura di esigenza sul codominio** e che denotiamo con

$$R^{cecod} := R^{\text{cexg}} \circ_{lr} R^{\text{exg}} .$$

B54 g. chiusure algebriche e chiusure entro ordini

B54g.01 Una importante genere di chiusure si ricava dalle strutture algebriche e più estesamente dalle strutture algebrico-relazionali.

Estendendo quanto sarà presentato con più implicazioni in T15, chiamiamo **struttura algebrico-relazionale monoterreno** ogni sistema della forma $\mathbf{S} = \langle A, \mathcal{C} \rangle = \langle A, I, \alpha, \mathcal{O}, J, \mathcal{R} \rangle$ ove:

$A \in \mathbf{Set}$ si dice **insieme terreno della struttura**;

$I \in \mathsf{SetF}$ si dice **insieme degli indici delle operazioni della struttura** di $\mathbf{S}$;

$\alpha \in \lceil I \longmapsto \mathbb{N} \rceil$ si dice **arietà delle operazioni della struttura**;

$\mathcal{O}$:=: $\{i \in I :| o_i\}$, dove per ogni $i \in I$ $o_i \in \lceil A^{\alpha(i)} \longmapsto A \rceil$, si dice **famiglia delle operazioni della struttura** della $\mathbf{S}$,

mentre ogni o_i si dice **operazione** $\alpha(i)-$**aria della struttura**;

$J \in \mathsf{SetF}$ si dice **insieme degli indici delle relazioni della struttura**;

$\mathcal{R}$:=: $\{j \in J :| \boldsymbol{R}_j\}$, dove per ogni $j \in J$ $\boldsymbol{R}_j \subseteq A \times A$, si dice **famiglia delle relazioni della struttura** $\mathbf{S}$.

Inoltre la terna $\mathcal{T} = \langle I, \alpha, J \rangle$ viene chiamata **tipo della struttura** $\mathbf{S}$, mentre $\mathcal{C} := \langle I, \alpha, \mathcal{O}, J, \mathcal{R} \rangle$ viene detto **complesso delle composizioni della struttura** $\mathbf{S}$.

B54g.02 Nella quaterna $\langle A, I, \alpha, \mathcal{O} \rangle$ si riconosce una struttura algebrica monoterreno. In altre parole la $\mathbf{S}$ si riduce a una struttura algebrica monoterreno quando $J = \mathcal{R} = \emptyset$.

Introduciamo l'insieme $E := \mathsf{cod}(\alpha)$ che chiamiamo **insieme delle arietà delle operazioni della struttura** $\mathbf{S}$; per ogni arietà $n \in E$ introduciamo $I_n := \alpha^{-\mathbf{1}}(n)$ che chiamiamo **insieme degli indici delle operazioni** n**-arie della struttura** e introduciamo $\mathcal{O}_n := \{i \in I_n :| \omega_i\}$ che chiamiamo **famiglia delle operazioni** n**-arie della struttura** $\mathbf{S}$.

Si può allora dare al sistema $\mathcal{S} = \langle A, \mathcal{C} \rangle$, con una piccola forzatura, la forma $\langle A, \{n \in E :| \mathcal{O}_n\}, J, \mathcal{R} \rangle$.

Osserviamo che sono insiemi finiti, oltre che I e J, anche gli insiemi E, I_n ed $\mathcal{O}_n$.

Tra le strutture algebrico-relazionali monoterreno interessano in particolare le strutture algebriche monoterreno munite soltanto di operazioni nullarie, cioè di elementi con proprietà specifiche, di operazioni unarie, cioè di endofunzioni, e di operazioni binarie. In altri termini interessano principalmente le strutture della forma f22(1) con $E = \{0, 1, 2\}$ e con $J = \mathcal{R} = \emptyset$.

Queste strutture conviene siano presentate nella forma

$$\langle A, n_1, ..., n_\nu, u_1, ..., u_y, b_1, ..., b_\beta, r_1, ..., r_\rho \rangle ,$$

forma che evidenzia le sequenze delle operazioni nullarie, delle unarie e delle binarie.

Forma analoga conviene dare alle strutture algebrico-relazionali che, insieme a relazioni, presentano solo operazioni nullarie, unarie e binarie conviene dare la forma che generalizza la precedente

$$\langle A, n_1, ..., n_\nu, u_1, ..., u_y, b_1, ..., b_\beta, r_1, ..., r_\rho, J, \mathcal{R} \rangle .$$

B54g.03 Definiamo l'**ampliamento secondo le composizioni** raggruppate nell'insieme di composizioni $\mathcal{C}$ concernenti il terreno A la endofunzione-StS entro A

$$[\mathcal{C}] := \lceil B \subseteq A \ \Vdash\ B \cup \mathcal{O}_0 \cup \left(\bigcup_{n \in E} \bigcup_{\omega_i \in \mathcal{O}_n} B^n \omega_i \right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B r_j \right) \rceil .$$

Evidentemente $\lfloor\mathcal{C}\rceil$ è funzione di insieme ampliante e isotona, cioè appartiene ad $\mathbf{Augm}_A$.

Si dice **chiusura secondo una aumentazione** $\lfloor\mathcal{C}\rceil$ la endofunzione-StS entro A $\searrow \lbrack\ \mathcal{C}\ \rbrack := \lfloor\mathcal{C}\rceil^{\otimes}$, cioè

$$\lbrack\mathcal{C}\rbrack := \lceil B \subseteq A \ \not\vdash \ B \cup B\lfloor\mathcal{C}\rceil \cup B\lfloor\mathcal{C}\rceil^{\circ 2} \cup \ldots \rceil .$$

B54g.04 **Prop.** $\lbrack\mathcal{C}\rbrack \in \mathbf{Clsf}_A$.

Dim.: $B\lbrack\mathcal{C}\rbrack$ è costituito, oltre che da $B \cup \mathcal{O}_0$, dalla totalità degli elementi di A ottenibili applicando quante volte si vuole e secondo tutte le possibili combinazioni gli operatori di $\mathcal{O}$ e le relazioni $\mathcal{R}$ agli elementi di $B \cup \mathcal{O}_0$.
Chiaramente una volta applicata questa estensione non è più possibile ampliare l'insieme ottenuto servendosi di operazioni in $\mathcal{O}$ e di relazioni in $\mathcal{R}$. ∎

In luogo di $\lbrack\mathcal{C}\rbrack$ più compiutamente si dovrebbe scrivere $\lbrack A, \mathcal{C}\rbrack$; in genere però la semplificazione $\lbrack\mathcal{C}\rbrack$ non genera serie ambiguità.

Se $\mathcal{O}$ e $\mathcal{R}$ sono insiemi finiti in genere conviene fornire le chiusure mediante notazioni della forma $\lbrack o_1, ..., o_h, r_1, ..., r_\rho \rbrack$.

Il sistema di chiusura $\lbrack A, \mathcal{C}\rbrack^{\text{clsy}}$ si dice **insieme delle sottostrutture** $\mathcal{C}$ di A.

In gran parte dei contesti utili in luogo di una scrittura della forma $H \in \lbrack A, \mathcal{C}\rbrack^{\text{clsy}}$ risulta più leggibile una notazione della forma $H \leq_{\mathcal{C}} A$.

Inoltre per richiamare le specie di strutture più importanti sono utilizzate ampiamente e significativamente stringhe specifiche che chiamiamo **stringhe caratterizzanti le specie di strutture algebriche**.
Secondo questo stile notazionale, in luogo di una scrittura come $H \leq_{\mathcal{C}} A$ si usa la scrittura della forma $H \leq_\sigma A$, dove σ rappresenta la stringa caratterizzante la specie di strutture cui appartengono H ed A.

In particolare esempio sono usate scritture come le seguenti: $A \leq_{Mnd} B$ per le specie dei monoidi, $A \leq_{Grp} B$ per le specie dei gruppi, $A \leq_{Rng} B$ per le specie degli anelli, $A \leq_{Vsp} B$ per le specie degli spazi vettoriali.

B54g.05 La nozione di chiusura è stata definita in associazione alla relazione d'ordine $\subseteq$; più in generale si possono definire chiusure riguardanti arbitrari insiemi parzialmente ordinati.

Consideriamo quindi $\boldsymbol{P} = \langle P, \preceq \rangle \in \mathbf{Ord}$ dotato di un massimo che scriviamo $\max_P$.
Si dice **funzione di chiusura per il poset** $\boldsymbol{P}$ ogni $K \in \lceil P \longmapsto P \rceil$ tale che:

[clord 1] $\forall\, q \in P \ :\ q \preceq q^K$,

[clord 2] $\forall\, q_1, q_2 \in P \ :\ q_1 \preceq q_2 \implies {q_1}^K \preceq {q_2}^K$,

[clord 3] $\forall\, q \in P \ :\ {q^K}^K = q^K$.

L'insieme delle funzioni di chiusura per il poset $\boldsymbol{P}$ si denota con $\mathbf{Clsf}_{\boldsymbol{P}}$.

B54g.06 **Prop.** Consideriamo $K \in \lceil P \longmapsto P \rceil$. $K \in \mathbf{Clsf}_{\boldsymbol{P}} \iff$ sono verificate [clord 1] e [clord 4] $\forall\, q_1, q_2 \in P \ :\ q_1 \preceq {q_2}^K \implies {q_1}^K \preceq {q_2}^K$.

Dim.: "$\Longrightarrow$": $K \in \mathbf{Clsf}_{\boldsymbol{P}} \Longrightarrow K$ verifica [clord 1] e $q_1 \preceq {q_2}^K \Longrightarrow \lfloor$ [clord 1] $\rfloor \Longrightarrow {q_1}^K \preceq {{q_2}^K}^K = \lfloor$ [clord 3] $\rfloor = {q_2}^K$, ovvero K verifica [clord 4].

"$\Longleftarrow$" : K verifica [clord 1] e [clord 4]; $q_1 \preceq q_2 \Longrightarrow \lfloor$ [clord 1] $\rfloor \Longrightarrow q_1 \preceq {q_2}^K \Longrightarrow \lfloor$ [clord 4] $\rfloor \Longrightarrow {q_1}^K \preceq {q_2}^K$, cioè K verifica [clord 2]; ${q^K}^K = (q^K)^K \succeq \lfloor$ [clord 1] $\rfloor \succeq q^K$ ma $q^K \preceq q^K \Longrightarrow \lfloor$ [clord 4] $\rfloor \Longrightarrow {q^K}^K \preceq q^K$ e quindi K verifica [cls o3] ∎

Se $K \in \mathsf{Clsf}_{\boldsymbol{P}}$ si dicono **insiemi chiusi per una chiusura** K, o in breve insiemi chiusi-K, tutti i q^K per $q \in P$, cioè gli elementi di $K^{\dashv}$.

B54g.07 Se q_1 e q_2 sono elementi di P, denotiamo con $[q_1, q_2]_{\boldsymbol{P}}$ l'intervallo del poset $\boldsymbol{P}$

$$\{q \in P \;\rrbracket\; q_1 \preceq q \preceq q_2\} .$$

Introduciamo $P' := \{q \in P :| q^K\}$, $\preceq' := \preceq_{P' \times P'}$ e il poset $\boldsymbol{P'} := \langle P', \preceq' \rangle$.

(1) Prop.: $\boldsymbol{P'} \in \mathsf{Ord}$, $K \in \lceil \boldsymbol{P} \longmapsto\!\triangleright_{\preceq\preceq'} \boldsymbol{P'} \rceil$, $[q_1, q_2]_P{}^K = [q_1{}^K, q_2{}^K]_{P'}$ e $\max_P(\mathcal{Q}') = \max_P$ ∎

(2) Prop.: Il poset $\boldsymbol{P}$ sia dotato di minimo che scriviamo $\min_{\boldsymbol{P}}$.

Allora $\forall\, q^K \in P' \subseteq P \;:\; \left([\min_{\boldsymbol{P}}{}^K, q^K]_{\boldsymbol{P'}}\right)^{K^{-1}} = [\min_{\boldsymbol{P}}, q^K]_{\boldsymbol{P}}$.

Dim.: Sia $p' :\in [\min_{\boldsymbol{P}}{}^K, q^K]_{\boldsymbol{P'}}$ e $p :\in p'^{K^{-1}}$; $p \preceq p^K = p' \preceq' q^K$, cioè $p \in [\min_{\boldsymbol{P}}, q^K]_{\boldsymbol{P}}$, cioè $[\min_{\boldsymbol{P}}{}^K, q^K]_{\boldsymbol{P'}}{}^{K^{-1}} \subseteq [\min_{\boldsymbol{P}}, q^K]_{\boldsymbol{P}}$; inoltre l'inclusione inversa è evidente ∎

Si constata inoltre che se $\boldsymbol{P}$ è dotato di minimo $\min_{\boldsymbol{P}}, allora \boldsymbol{P'}$ è dotato di minimo uguale a $\left(\min_{\boldsymbol{P}}\right)^K$.

B54g.08 Si dice **sistema di chiusura sul poset** $\boldsymbol{P}$ ogni collezione $\mathcal{C} \subseteq P^{\mathfrak{P}}$ tale che per ogni $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ $\exists\, \inf(\mathcal{C}')$ e $\inf(\mathcal{C}') \in \mathcal{C}$.

L'insieme dei sistemi di chiusura sul poset $\boldsymbol{P}$ si denota con $\mathsf{Clsy}_{\boldsymbol{P}}$.

Prop. $\mathcal{C} \in \mathsf{Clsy}_{\boldsymbol{P}} \implies \langle \mathcal{C}, \preceq \rangle \in \mathsf{OrdLCmp}$.

Dim.: Esiste $\max(\boldsymbol{P})$ ed è uguale a $\max(\mathcal{C})$ che appartiene a $\mathcal{C}$∎

Si dice **sistema di chiusura associato a una chiusura** $K \in \mathsf{Clsf}_P$ l'insieme $K^{\text{clsy}} := \{q \in P :| q^K\} \subseteq P$.

Si dice **funzione di chiusura associata a un sistema di chiusura** $\mathcal{C} \in \mathsf{Clsy}_{\boldsymbol{P}}$ la endofunzione-StS

$$\mathcal{C}^{\text{clsf}} := \left\lceil q \in P \;\; \nparallel\!\!\!\rangle \;\; \inf(\mathcal{C} \cap \mathsf{Mjrnt}(q)) \right\rceil .$$

Si tratta di una funzione appartenente a $\lceil P \longmapsto P \rceil$.

B54g.09 **Prop.** $K \in \mathsf{Clsf}_{\boldsymbol{P}} \implies K^{\text{clsy}} \in \mathsf{Clsy}_{\boldsymbol{P}}$.

Dim.: Consideriamo $\{i \in I :| c_i\} \subseteq K^{\text{clsy}}$ e introduciamo $c := \inf\{i \in I :| c_i\}$.
$\forall\, i \in I : c \preceq c_i \implies \lfloor$ [clord 2], [clsf 3]$\rfloor \implies \forall\, i \in I \;:\; c^K \preceq c_i \implies c^K \preceq \inf\{i \in I :| c_i\} = c \implies \lfloor$ [clsf 3]$\rfloor \implies c^K = c \in K^{\text{clsy}}$∎

B54g.10 **Prop.** $\mathcal{C} \in \mathsf{Clsy}_{\boldsymbol{P}} \implies \mathcal{C}^{\text{clsf}} \in \mathsf{Clsf}_{\boldsymbol{P}}$.

Dim.: $q' \in \mathcal{C} \cap \mathsf{Mjrnt}(q) \implies q' \succeq q$: quindi $\mathcal{C}^{\text{clsf}}$ soddisfa [clsf 1].

$q_1 \preceq q_2 \implies \mathcal{C} \cap \mathsf{Mjrnt}(q_1) \supseteq \mathcal{C} \cap \mathsf{Mjrnt}(q_2) \implies \inf(\mathcal{C} \cap \mathsf{Mjrnt}(q_1)) \preceq \inf(\mathcal{C} \cap \mathsf{Mjrnt}(q_2))$; quindi $\mathcal{C}^{\text{clsf}}$ soddisfa [clsf 2].

$\forall\, q \in \mathcal{Q} \;:\; q_{\rceil}\mathcal{C}^{\text{clsf}} = q$ sse $q \in \mathcal{C} \implies \forall\, q \in \mathcal{Q} \;:$
$q_{\rceil}\mathcal{C}^{\text{clsf}} \in \mathcal{C} \implies \forall\, q \in \mathcal{Q} \;:\; (q_{\rceil}\mathcal{C}^{\text{clsf}})_{\rceil}\mathcal{C}^{\text{clsf}} = q_{\rceil}\mathcal{C}^{\text{clsf}}$; quindi $\mathcal{C}^{\text{clsf}}$ soddisfa [clsf 3] ∎

B54g.11 **Prop.** ${}^{\text{clsf}} = {}^{\text{clsy}^{-1}} \in \lceil \mathsf{Clsy} \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright \mathsf{Clsf} \rceil$.

Dim.: $\forall\, \mathcal{C} \in \mathsf{Clsy}_{\boldsymbol{P}} \;:\; \mathcal{C}^{\text{clsf}^{\text{clsy}}} = \{q \in \mathcal{Q} :| \inf(\mathcal{C} \cap \mathsf{Mjrnt}(q))\} = \mathcal{C}$.

$\forall K \in \mathsf{Clsf}_P \;:\; K^{\text{clsy}^{\text{clsf}}} = \left\lceil q \in P \;\; \nparallel\!\!\!\rangle \;\; \inf(K^{\dashv} \cap \mathsf{Mjrnt}(q)) \right\rceil = K$∎

Nel caso particolare in cui $\boldsymbol{P} = \langle A^{\mathfrak{P}}, \subseteq \rangle \in \mathsf{OrdLBl}$ si ritrovano le nozioni di funzione e di sistema di chiusura su un insieme.
Le strutture Clsf_A e Clsy_A si possono considerare, risp., abbreviazioni di $\mathsf{Clsf}_{\langle A^{\mathfrak{P}}, \subseteq \rangle}$ e di $\mathsf{Clsy}_{\langle A^{\mathfrak{P}}, \subseteq \rangle}$.

Un esempio di chiusura su un insieme in $\mathsf{Ord} \setminus \mathsf{OrdLBl}$ è

$$\left\lceil R \in \mathsf{RelAsym}_A \;\; \not\mapsto \;\; R^{\otimes} \right\rceil \in \mathsf{Clsf}_{\langle \mathsf{RelAsym}_A, \subseteq \rangle} .$$